arXiv:2602.02935v1 [math.AG] 3 Feb 2026

坏特征下的交换簇

Vlad Roman

2026年2月4日

摘要

设 k 是特征为 2 的代数闭域。我们考察李代数 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 的交换簇和交换幂零簇，即集合 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n}) = \{(x,\ y) \in \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n} \mid [x,y]=0\}$以及 $\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{sp}_{2n}) = \{(x,\ y) \in \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n} \mid x,\ y$幂零，并证明它们都是不可约的，维数分别为 $\dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + 2n$ 和 $\dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + n - 1$。

1 引言

对于 k代数闭域以及其上的李代数 $\mathfrak{g}$，我们定义 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{g}) = \{(x,y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x,y]=0\}$，即 $\mathfrak{g}$的交换簇。对这些簇的研究始于 Motzkin 和 Taussky 的一篇论文 [MT55], ，他们在文中证明 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{gl}_n)$是一个维数为 n^2+n 的不可约簇（对于任意特征的 k）。后来，Richardson [Ric79] 证明，若 $char(k)=0$ 且 $\mathfrak{g}$ 是约化的，则 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{g})$是不可约的，其维数为 $\dim(\mathfrak{g}) + \mathrm{rank}(\mathfrak{g})$，其中 $\mathrm{rank}(\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$的极大环面子代数的维数。此后，Levy [Lev02] 将该结果推广到好特征的域 k，也就是说，对于类型为 B、C、D、$char(k) \neq 2$的李群，有 $char(k) \neq 2$；对于 G_2、F_4、E_6、E_7，有 3；对于 E_8，有 $char(k) \neq 2$、3、5。关于坏特征的情形，研究并不多。在类型 A中，作者 [Rom25] 证明，在非很好特征下（即$char(k) = p$，其中 $\mathfrak{gl}_n$的 $p \mid n$），存在两个不可约分支，并给出了每个分支的维数。

设 k 是特征为 2 的代数闭域，V是其上的一个维数为 $2n$ 的有限维向量空间。设 $G = Sp(V)$ 为保持 V上某个非退化（斜）对称双线性型的变换群，$\mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{sp}(V)$ 为 G的李代数。我们研究 $\mathfrak{sp}_{2n}$的交换簇。与好特征情形（即 $char(k) \neq 2$，类型为 C）不同，在特征 2 下，群中幂零元素 $e \in \mathfrak{sp}(V)$ 的中心化子结构更为微妙。Liebeck 和 Seitz 的专著 [LS12] 给出了中心化子 $C_G(e)$ 的精确结构，并描述了 e的不可分解直和项，同时利用这些不可分解对象给出了中心化子的维数公式。然而，他们并未给出可能出现的不可分解对象在李代数中的中心化子的维数，而这正是证明 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$不可约性的关键要素。第 2 节计算了这些维数（或它们的上界）。利用这些结果，我们得到如下结论：

定理 A. 在特征为 2 的代数闭域 k 上，$\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$ 是一个维数为$\dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + 2n$的不可约簇。

定理 B. 在特征为 2 的代数闭域 k 上，$\mathcal{C}_2^{nil}(\mathfrak{sp}_{2n})$ 是一个维数为$\dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + n - 1$的不可约簇。

2 群中的中心化子与李代数中的中心化子

设 k 为特征2的代数闭域。设 V为自然模，$\mathfrak{sp}_{2n}$中的元素作用于其上。根据 [LS12]，对于 $x \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 幂零的情形，V可分解为不可分解模的正交直和，这些模已在 [LS12]的表4.1中分类。此外，在第4章中给出了相应代数群中元素的中心化子的维数公式，即若 $x \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 的若尔当块大小为 $t_1 \geq \cdots \geq t_r$，则

$$\dim C_G(x) = \sum_{i=1}^{r} (it_i - \chi(t_i)),$$

其中函数 χ已在本章前文定义。

现在将 $V = U \perp W$ 分解，其中 W 是不可分解对象，且其若尔当块的大小最小，因此 W 要么是一个大小为 t_r 的若尔当块（按照书中的记号，即 $V(t_r)$），要么是 $W = W(t_r)$ 或 $W_\ell(t_r)$，并且有两个大小为 t_r 的若尔当块。我们证明以下引理:

引理 1. 设 $x \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 是幂零的。若 $W = V(t_r) = J_{t_r}$ 是一个若尔当块，则 n

$$\dim C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x) = \dim C_{\mathfrak{sp}(U)}(x_U) + \dim C_{\mathfrak{sp}(W)}(x_W) + (r-1)t_r$$

若 $W = W(t_r)$ 或 $W_\ell(t_r)$ （两个大小为 t_r 的若尔当块），则

$$\dim C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x) = \dim C_{\mathfrak{sp}(U)}(x_U) + \dim C_{\mathfrak{sp}(W)}(x_W) + 2(r-2)t_r.$$

证明。 作为 x 的模，李代数分解为

$$\mathfrak{sp}(V) \cong \mathfrak{sp}(U) \oplus \mathfrak{sp}(W) \oplus (U \otimes W).$$

事实上，设 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to k$ 是辛形式，则有

$$\mathfrak{sp}(V) = \{T \in \mathrm{End}(V) \mid \langle Tv, w\rangle + \langle v, Tw\rangle = 0 \ \forall v, w \in V\}$$

and $\mathfrak{sp}(U)$ $\mathfrak{sp}(W)$ 的情形类似。相对于 $V = U \perp W$，每个 $T \in \mathrm{End}(V)$ 都具有如下形式

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad A : U \to U,\ B : W \to U,\ C : U \to W,\ D : W \to W.$$

由于双线性形式是分块对角的 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle = \langle \cdot,\ \cdot \rangle_U \oplus \langle \cdot,\ \cdot \rangle_W$，辛条件可转化为以下形式：对于 $u,\ u' \in U$,

$$\langle Au, u' \rangle_U + \langle u, Au' \rangle_U = 0, \text{ meaning } A \in \mathfrak{sp}(U).$$

对于 $w,\ w' \in W$,

$$\langle Dw, w' \rangle_W + \langle w, Dw' \rangle_W = 0, \text{ meaning } D \in \mathfrak{sp}(W).$$

对于 $u \in U,\ w \in W$,

$$\langle Bw, u \rangle_U + \langle w, Cu \rangle_W = 0.$$

将伴随 $B^* : U \to W$ 定义为

$$\langle Bw, u \rangle_U = \langle w, B^* u \rangle_W,$$

此条件给出 $C = B^*$。因此， T 具有如下形式

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{sp}(U),\ D \in \mathfrak{sp}(W),\ B \in \mathrm{Hom}(W, U).$$

因此，分解（作为向量空间）为

$$\mathfrak{sp}(V) \cong \mathfrak{sp}(U) \oplus \mathfrak{sp}(W) \oplus \Gamma,$$

其中 $\Gamma \subseteq \mathrm{Hom}(W, U) \oplus \mathrm{Hom}(U^*, W^*)$，因此 $\Gamma \cong \mathrm{Hom}(W, U)$。由于这些模是自对偶的，我们有 $U \cong U^*$和$W \cong W^*$，因此我们得到

$$\mathrm{Hom}(W, U) \cong U \otimes W^* \cong U \otimes W.$$

现在记 $x = x_U \oplus x_W$并假设 y 中心化 x。关于分解 $V = U \perp W$，任意$y \in \mathfrak{sp}(V)$具有形式

$$y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad A \in \mathrm{End}(U),\ D \in \mathrm{End}(W),\ B \in \mathrm{Hom}(W, U),\ C \in \mathrm{Hom}(U, W).$$

因此，关系 $[y, x] = 0$ 等价于以下关系

$$[A, x_U] = 0, \quad [D, x_W] = 0, \quad Bx_W = x_U B, \quad Cx_U = x_W C,$$

因此 $A \in C_{\mathrm{End}(U)}(x_U)$、 $D \in C_{\mathrm{End}(W)}(x_W)$ 和 $B \in \mathrm{Hom}_x(W,\ U)$ $C \in \mathrm{Hom}_x(U,\ W)$。和之前一样，我们有 $C = B^*$，所以非对角项由 B 决定。因此，

$$\dim C_{\mathfrak{sp}(V)}(x) = \dim C_{\mathfrak{sp}(U)}(x_U) + \dim C_{\mathfrak{sp}(W)}(x_W) + \dim \mathrm{Hom}_x(W,U).$$

回顾一个标准事实：对于两个若尔当块 J_a, J_b，我们有

$$\dim \mathrm{Hom}_x(J_a, J_b) = \min(a,b).$$

若 $W = V(t_r) = J_{t_r}$ 是一个若尔当块，则有

$$\dim \mathrm{Hom}_x(W,U) = \dim \mathrm{Hom}_x(J_{t_r}, \bigoplus_{i=1}^{r-1} J_{t_i}) = \sum_{i=1}^{r-1} \dim \mathrm{Hom}_x(J_{t_r}, J_{t_i}) = \sum_{i=1}^{r-1} \min(t_r, t_i) = \sum_{i=1}^{r-1} t_r = (r-1)t_r.$$

若 W 是由两个大小为 t_r 的块组成的不可分解对象（即 $W(t_r)$ 或 $W_\ell(t_r)$），则有

$$\dim \mathrm{Hom}_x(W,U) = \dim \mathrm{Hom}_x(J_{t_r} \oplus J_{t_r}, \bigoplus_{i=1}^{r-2} J_{t_i}) = \sum_{i=1}^{r-2} \dim \mathrm{Hom}_x(J_{t_r} \oplus J_{t_r}, J_{t_i}) = \sum_{i=1}^{r-2} 2 \dim \mathrm{Hom}_x(J_{t_r}, J_{t_i})$$

$$= 2\sum_{i=1}^{r-2} \min(t_r, t_i) = 2\sum_{i=1}^{r-2} t_r = 2(r-2)t_r$$

结论由此得出。 □

引理 2. 设 $x \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 为幂零的。若 $W = V(t_r) = J_{t_r}$ 是一个若尔当块，则 n

$$\dim C_{Sp_{2n}}(x) = \dim C_{Sp_{(U)}}(x_U) + \dim C_{Sp_{(W)}}(x_W) + (r-1)t_r$$

若 $W = W(t_r)$ 或 $W_\ell(t_r)$ （两个大小为 t_r 的若尔当块），则

$$\dim C_{Sp_{2n}}(x) = \dim C_{Sp_{(U)}}(x_U) + \dim C_{Sp_{(W)}}(x_W) + 2(r-2)t_r.$$

证明。 如果 $W = V(t_r)$ 是一个大小为 t_r 的单个若尔当块，我们有

$$\begin{aligned}
\dim C_G(x) &= \sum_{i=1}^{r} (it_i - \chi(t_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} it_i - \sum_{i=1}^{r} \chi(t_i) + rt_r \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} it_i - \sum_{i=1}^{r} \chi(t_i) + (r-1)t_r + t_r \\
&= \dim C_{Sp(U)}(x_U) + \dim C_{Sp(W)}(x_W) + (r-1)t_r.
\end{aligned}$$

如果 $W = W(t_r)$ 或 $W_\ell(t_r)$（两个大小为 t_r 的若尔当块），我们有

$$\begin{aligned}
\dim C_G(x) &= \sum_{i=1}^{r} (it_i - \chi(t_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{r-2} it_i - \sum_{i=1}^{r} \chi(t_i) + (r-1)t_{r-1} + rt_t \\
&= \sum_{i=1}^{r-2} it_i - \sum_{i=1}^{r} \chi(t_i) + (2r-1)t_r \\
&= \sum_{i=1}^{r-2} it_i - \sum_{i=1}^{r} \chi(t_i) + 3t_r + (2r-4)t_r \\
&= \dim C_{Sp(U)}(x_U) + \dim C_{Sp(W)}(x_W) + 2(r-2)t_r.
\end{aligned}$$

在上述计算中，我们用到了 G 中不可分解对象的中心化子的维数（已在[LS12]中证明）。这些内容也将在引理 3 的证明中展示。 □

下一个引理对于证明这些簇的不可约性至关重要。

引理 3. 设 $x \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 为一个幂零元。定义 x 的偏差 为

$$\Delta(x) = \dim C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x) - \dim C_{Sp_{2n}}(x).$$

那么有 $\Delta(x) \leq n,$ 等号成立当且仅当所有不可分解对象都是单个若尔当块（ $V(t_i)$） .
证明。 根据 [LS12], V分解为直和 $V \cong \bigoplus_j M_j$，其中每个 M_j都是三种可能的不可分解对象之一，即 $V(t_j)$ $W(t_j)$ 或 $W_\ell(t_j)$。由此以及引理 1 和 2 可知，偏差等于每个不可分解对象上的偏差之和，即

$$\Delta(x) = \sum_j \left(\dim C_{\mathfrak{sp}(M_j)}(x_{M_j}) - \dim C_{Sp(M_j)}(x_{M_j}) \right),$$

其中 $x = \bigoplus_j x_{M_j}$。 因此，问题归结为计算这三种不可分解对象各自的偏差。

第一次计算：群中的中心化子

我们首先使用 [LS12] 中的公式来计算群中中心化子的维数。C

ase1: $V \downarrow x = V(2n)$与 $x = J_{2n}$，一个维数为 $2n$ 以及 $l = 2n/2 = n$的若尔当块。我们有

$$\begin{aligned} \dim C_G(x) &= 2n - \chi(2n) \\ &= 2n - max\{0, min\{2n - 2n + l, l\}\} \\ &= 2n - max\{0, n\} \\ &= n. \end{aligned}$$

注意，这是意料之中的，因为单个若尔当块是正则幂零元，所以其中心化子的维数等于李代数的秩。

情形2： $V \downarrow x = W(n)$与 $x = J_n \oplus J_n$，两个维数分别为 n 与 $l = 0$的若尔当块。此处 $t_1 = t_2 = n$。我们有

$$\begin{aligned} \dim C_G(x) &= \sum_{i=1}^{2} (it_i - \chi(t_i)) \\ &= n - \chi(n) + 2n - \chi(n) \\ &= 3n - 2\chi(n) \\ &= 3n - max\{0, min\{n - n + 0, 0\}\} \\ &= 3n. \end{aligned}$$

情形 3： $V \downarrow x = W_\ell(n)$ 和 x 具有 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$ 的形式，其中 $B = B^T$ 和 $A = J_n$。这里 $0 < l < n/2$ 和 $t_1 = t_2 = n$。我们有

$$\begin{aligned} \dim C_G(x) &= \sum_{i=1}^{2} (it_i - \chi(t_i)) \\ &= n - \chi(n) + 2n - \chi(n) \\ &= 3n - 2\chi(n) \\ &= 3n - 2max\{0, min\{n - n + l, l\}\} \\ &= 3n - 2max\{0, l\} \\ &= 3n - 2l. \end{aligned}$$

第二次计算：李代数中的中心化子

这里我们计算两个不可分解对象在李代数中的中心化子的维数，并为第三个不可分解对象得出一个上界。

情形 1： $V\downarrow x=V(2n)$ 和 $x=J_{2n}$ 是一个维数为 $2n$ 的若尔当块。我们可以为 V 选取 $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ 一个循环基，使得 $xe_i=e_{i+1}$ 对于 $i<2n$ 和 $xe_{2n}=0$。此外，我们可以将辛形式安排为反对角形式，因此有 $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{i+j,\,2n+1}$。一方面，由于 x 是正则幂零元，其全中心化子由 x 的多项式构成，因此 $C_{\mathrm{End}(V)}(x)=\{p(x)\mid p\in k[X],\ \deg p\le 2n-1\}$ 且 $\dim C_{\mathrm{End}(V)}(x)=2n$。另一方面，我们断言，$x$ 的任意多项式都属于 $\mathfrak{sp}(V)$。随后通过线性扩张，只需检验单项式 x^k 是否满足辛条件。我们有

$$\langle x^ke_i,e_j\rangle+\langle e_i,x^ke_j\rangle=\langle e_{i+k},e_j\rangle+\langle e_i,e_{j+k}\rangle=\delta_{i+k+j,2n+1}+\delta_{i+j+k,2n+1}=2\delta_{i+k+j,2n+1}=0.$$

因此，对于所有 $v,w\in V$，$\langle x^kv,w\rangle+\langle v,x^kw\rangle=0$。所以，$C_{\mathrm{End}(V)}(x)\subseteq\mathfrak{sp}(V)$，且由于 $C_{\mathfrak{sp}(V)}(x)=C_{\mathrm{End}(V)}(x)\cap\mathfrak{sp}(V)$，我们得出 $\dim C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x)=\dim C_{\mathrm{End}(V)}(x)=2n$。

情形 2： $V\downarrow x=W(n)$，且 $x=J_n\oplus J_n$ 两个维数为 n 的若尔当块。记 $V=V_1\oplus V_2$，其中 $\dim(V_1)=\dim(V_2)=n$，并令 $x=x_1\oplus x_2$，其中每个 x_i 都是一个作用于 V_i、大小为 n 的若尔当块。设 $y\in\mathrm{End}(V)$ 与 x 交换，并记

$$y=\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}\\y_{21}&y_{22}\end{pmatrix},\qquad y_{ij}:V_j\to V_i.$$

条件 $[y,x]=0$ 推出 $y_{ij}x_j=x_iy_{ij},\ i=1,2$。由于每个 x_i 都是一个若尔当块，其交换子由关于它的多项式构成，因此 $y_{11}\in k[x_1],\ y_{22}\in k[x_2],\ y_{12}\in\mathrm{Hom}^{k[x]}(V_2,V_1),\ \ y_{21}\in\mathrm{Hom}^{k[x]}(V_1,V_2)$。现在，$\dim\mathrm{Hom}^{k[x]}(V_2,V_1)=\dim\mathrm{Hom}^{k[x]}(J_n,J_n)=n=\dim\mathrm{Hom}^{k[x]}(V_1,V_2)$。因此，作为一个向量空间，我们有 $\dim\{y\in\mathrm{End}(V)\mid[y,x]=0\}=n+n+n+n=4n$。现在施加辛条件 $\langle yv,w\rangle+\langle v,yw\rangle=0$，对所有 $v,w\in V$ 均成立。我们按块分析这一条件。将该形式记为

$$\Omega=\begin{pmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{pmatrix}.$$

那么，当且仅当 $y^t\Omega+\Omega Y=0$ 时，$y\in\mathfrak{sp}(V)$。由此得到 $y_{21}^t=y_{21},\ y_{11}^t=y_{22},\ y_{22}^t=y_{11},\ y_{12}^t=y_{12}$。因此，$y_{22}$ 由 y_{11} 确定，且 y_{12} 和 y_{21} 都是（斜）对称的 $n\times n$ 矩阵。计算维数可得 $\dim C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x)=3n$（一个 n 来自 y_{11} 部分（而 y_{22} 部分由 y_{11}确定，因此不会增加额外维数），n 的一个因子分别来自 y_{12} 和 y_{21}（它们与相应的若尔当块对易，因此是块的多项式，而且它们是对称的；但请注意，这一条件不会降低空间的维数，因此得到 n）。

情形 3： $V\downarrow x=W_\ell(n)$，且 x 具有 $\begin{pmatrix}A&B\\0&A^T\end{pmatrix}$ 的形式，其中 $B=B^T$ 和 $A=J_n$。设 $V=L\oplus L^*$，其维数为 $\dim L=n$，并使用与前一种情形相同的、格拉姆矩阵如前所述的辛形式。则

$$\mathfrak{sp}(V)=\left\{X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}\mid X_{12},X_{21}\text{ symmetric},\ X_{22}=X_{11}^T\right\}.$$

相对于抛物子群 $P=\mathrm{Stab}(L)$，我们有如下分解（作为向量空间）

$$\mathfrak{sp}(V)=\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}0&0\\T&0\end{pmatrix}\right\}}_{\mathfrak{u}^-\cong\mathrm{Sym}^2(L)}\oplus\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}Y&0\\0&Y^T\end{pmatrix}\right\}}_{\mathfrak{m}\cong\mathfrak{gl}(L)}\oplus\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}0&S\\0&0\end{pmatrix}\right\}}_{\mathfrak{u}\cong\mathrm{Sym}^2(L^*)},$$

其中 S，T 对称，而 Y 任意。对于类型为 $W_\ell(n)$ 的不可分解对象（记作 x），可以选择 L，使得 L 是 x-稳定的，并且

$$x=\begin{pmatrix}A&B\\0&A^T\end{pmatrix},\qquad A=J_n,\quad B=B^T.$$

这里 A 是 L 上的单个若尔当块。

通过分析每个块，我们给出了 $\dim\ \mathfrak{g}^x=\dim\ker(\mathrm{ad}\,x)$ 的上界。

Levi 部分 $\mathfrak{m}$
设 $X \in \mathfrak{m}$, $X = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^T \end{pmatrix}$。则

$$[x, X] = \begin{pmatrix} [A, Y] & BY^T - YB \\ 0 & [A^T, Y^T] \end{pmatrix}.$$

因此，当且仅当 $X \in \mathfrak{g}^x$

$$[A, Y] = 0, \qquad BY^T = YB.$$

$A = J_n$ 在 $\mathfrak{gl}_n$ 中的中心化子为 $\{f(A) : f \in k[t], \deg f < n\}$，因此其维数为 n。第二个条件只会降低维数。因此

$$\dim \ker(\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{m}}) \leq n.$$

上部 $\mathfrak{u}$
取满足 $S = S^T$ 的 $X = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。那么

$$[x, X] = \begin{pmatrix} 0 & AS + SA^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以条件是

$$AS + SA^T = 0.$$

将 $S = (s_{ij})$ 写成 $s_{ij} = s_{ji}$，对于 $A = J_n$，这给出

$$s_{i+1,j} = s_{i,j+1} \quad (1 \leq i, j \leq n-1).$$

根据这个递推关系，所有元素都由第一行（s_{11}，…，s_{1n}）确定，因此

$$\dim \ker(\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{u}}) \leq n.$$

下部 $\mathfrak{u}^-$
取 $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$，其中 $T = T^T$。那么

$$[x, X] = \begin{pmatrix} BT & 0 \\ A^T T + TA & TB \end{pmatrix}.$$

条件为

$$A^T T + TA = 0, \qquad BT = 0, \qquad TB = 0.$$

方程 $A^T T + TA = 0$ 与 S 的递推关系相同，因此中心化子的维数至多为 n。条件 $BT = TB = 0$ 是进一步的线性限制，因此

$$\dim \ker(\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{u}^-}) \leq n.$$

综上所述，我们有

$$\overset{C_s\text{的维数}}{\mathfrak{p}_{2n}}(x) = \text{维数 } \mathfrak{g}^x = \text{维数 } \ker(\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{u}^-}) + \text{维数 } \ker(\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{m}}) + \text{维数 } \ker(\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{u}}) \leq n + n + n = 3n.$$

结论

x	$\overset{C_s\text{的维数}}{\mathfrak{p}_{2n}}(x)$	$C_{Sp_{2n}}(x)$ 的维数	$\Delta(x)$
$V(2n)$	$2n$	n	n
$W(n)$	$3n$	$3n$	0
$W_l(n)$	$\leq 3n$	$3n - 2l$	$\leq 2l < n$

为完成证明，我们写出

$$V = \bigoplus_i V(2a_i) \oplus \bigoplus_j W(m_j) \oplus \bigoplus_k W_{\ell_k}(n_k),$$

其中 $a_i \geq 1$, $m_j \geq 1$, $1 \leq \ell_k <\frac{n_k}{2}$。因此，根据上表， x 的偏差为 b y

$$\Delta(x) = \sum_i a_i + \sum_j 0 + \sum_k \Delta(W_{\ell_k}(n_k)) \leq \sum_i a_i + \sum_k 2\ell_k.$$

另一方面，空间 V 的总维数为

$$\sum_i 2a_i + \sum_j 2m_j + \sum_k 2n_k = 2n$$

每个 $0 < \ell_k < \frac{n_k}{2}$均如此，因此 $2\ell_k < n_k$。于是，

$$\Delta(x) = \sum_i a_i + \sum_k n_k = \frac{1}{2}\Big(\sum_i 2a_i + \sum_k 2n_k\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(\sum_i 2a_i + \sum_j 2m_i + \sum_k 2n_k\Big) = \frac{1}{2}2n = n.$$

此外，等式 $\Delta(x) = n$ 意味着上述每一步都必须取等号。由于每个严格不等式 $2\ell_k < n_k$ 都会使总和严格变小，因此不能有 $W_{\ell_k}(n_k)$ 直和项。去掉非负项 $\sum_j 2m_j$ 也会使上界变宽，因此取等还要求不存在 $W(m_j)$ 直和项。因此，V是若尔当块$V(2a_i)$的直和，每个若尔当块均为单块。证明完毕。

□

3 交换簇

本节我们考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ 的交换簇，即如下集合

$$\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n}) = \{(x, y) \in \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n} \mid [x, y] = 0\}.$$

我们立即得到交换簇的一个下界：

引理4。 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$ 的每个分支的维数都至少为$\dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + 2n$。

证明。 我们将 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 视为相对于定义相应代数群 Sp_{2n} 的交错形式而言的自伴算子集合。注意，在特征2下， $\mathfrak{sp}_{2n}$ 的导出李代数包含于 $\mathfrak{so}_{2n}$ 中。事实上，令 $A, B \in \mathfrak{sp}_{2n}$，它们是自伴的，因此 $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ 对所有 v, $w \in V$ 均成立， B 也同样如此。于是

$$\langle [A, B]v, v\rangle = \langle ABv, v\rangle + \langle BAv, v\rangle = \langle Bv, Av\rangle + \langle Av, Bv\rangle = 2\langle Av, Bv\rangle = 0$$

由于 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是交错形式，且在特征2下有 $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$。因此，任意交换子都是斜自伴的，这说明 $[\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n}] \subseteq \mathfrak{so}_{2n}$。因此，考虑态射 $\phi\colon \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n} \to \mathfrak{so}_{2n}, (x, y) \mapsto [x, y]$，由纤维维数定理， ϕ 的每个纤维的每个不可约分支（尤其是 $\phi^{-1}(0) = \mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$）的维数至少为

$$\dim(\mathfrak{sp}_{2\,n} \times \mathfrak{sp}_{2n}) - \dim(\mathfrak{so}_{2n}) = 2(n(2n+1)) - n(2n-1) = (2n^2 + n) + 2n = \dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + 2n.$$

□

接下来，在 $\mathfrak{sp}_2$ 内选取一个二维阿贝尔子代数 $\mathfrak{a}_0$。嵌入 n 个 $\mathfrak{a}_0$ 以得到$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0^{\oplus n} \subseteq \mathfrak{sp}_{2n}$，因此我们有 $\dim \mathfrak{a} = 2n$。令 $G = Sp_{2n}$，并考虑 $G \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$，即来自 $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ 的所有成对元素的 G-共轭组成的集合。

定理 1. $\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n}) = \overline{G \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})}$（$G \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$ 的闭包）。

写作 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$，其中每个 V_i 都是辛空间，且 $\dim(V_i) = 2$。现在，在每个因子 $\mathfrak{sp}(V_i)$ 内，一般对 $(u_i,\ v_i)$ 的中心化子 $\in \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0$ 恰好是 $\mathfrak{a}_0$。事实上， $\mathfrak{a}_0$ 是阿贝尔的，而任何与 $\mathfrak{a}_0$ 中两个线性无关元素对易的 $x \in \mathfrak{sp}(V_i)$，都必须与 $\mathfrak{a}_0$ 中的所有元素对易。因此， $x \in \mathfrak{a}_0$，因为 $\dim \mathfrak{sp}(V_i) = 3$，且 $\mathfrak{a}_0$ 已经是这个 3 维李代数中的极大交换李子代数。对于整体的一般

中心化子，考虑一对 $(u,\ v)\in\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$，其分量为 $(u_i,\ v_i)\in\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{a}_0$，且均为一般选取。由于 $\mathfrak{a}$ 是分块对角的，因此我们有

$$C_{\mathfrak{g}}(u,v)=\bigoplus_{i=1}^{n}C_{\mathfrak{sp}(V_i)}(u_i,v_i)=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}.$$

令 $\mathfrak{a}_{reg}\subseteq\mathfrak{a}$ 为上述结论成立的非空扎里斯基开子集。定义 $U=G\cdot(\mathfrak{a}_{reg}\times\mathfrak{a}_{reg})\subseteq\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$。现在考虑作用映射 $\phi\colon G\times(\mathfrak{a}_{reg}\times\mathfrak{a}_{reg})\twoheadrightarrow U\subseteq\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$。利用纤维维数定理，我们得到

$$\text{维数 } U=\text{维数 } G+\text{维数}(\mathfrak{a}_{reg}\times\mathfrak{a}_{reg})-\text{维数}(\text{一般中心化子})=\text{维数}\,\mathfrak{g}+4n-2n=\text{维数}(\mathfrak{sp}_{2n})+2n.$$

因此，$\overline{U}=\overline{G\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})}$是$\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$的一个不可约子簇（因为它是一个不可约集合的像），其维数为维数$(\mathfrak{sp}_{2n})+2n$。由于这与引理4中证明的下界一致，U 是$\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$的候选稠密分支。事实上，下面我们将证明，不可能存在维数更小的分支。

考虑一对 $(x,y)\in\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$。利用 Jordan-Chevalley分解，写成 $x=x_s+x_n$ 和 $y=y_s+y_n$，其中 x_s,y_s 为半单，x_n,y_n 为幂零，且 $[x_s,x_n]=[y_s,y_n]=0$。现在假设 x_s 是非中心的（因此 x_s 不是恒等算子的倍数，因为在特征2下 $Z(\mathfrak{sp}_{2n})=kI$）。那么（再次利用 Jordan-Chevalley分解）存在一个多项式 $f\in k[T]$，使得 $x_s=f(x)$。因此，对任意满足 $[x,z]=0$的 z，可知 z与 x的任意次幂都可交换，故由线性性，它与 x中的任意多项式都可交换。因此，$[x_s,z]=[f(x)\ z]=0$。这表明$C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x)\subseteq C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x_s)$，所以这一对 $(x,C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x))\subseteq(x,C_{\mathfrak{sp}_{2n}}(x_s))$。

断言： x_s 至少有2个不同的特征值。

事实上，反设 x_s 只有一个特征值。由于 x_s 是半单的（因而可对角化），且它只有一个特征值，它必定是一个标量，因此对某个 $\lambda\in k$有 $x_s=\lambda I$。在特征2中，恒等算子的每一个倍数都位于 $\mathfrak{sp}(V)$中，并且是中心的。事实上，若 $X=\lambda I$，则对所有 $v,w\in V$，我们有

$$\langle Xv,w\rangle+\langle v,Xw\rangle=\lambda\langle v,w\rangle+\lambda\langle v,w\rangle=2\lambda\langle v,w\rangle=0,$$

so $X\in\mathfrak{sp}(V)$，并且对所有 $y\in\mathfrak{sp}(V)$有 $[\lambda I,y]=0$。因此 x_s 将是中心的，矛盾.

将 x_s 的特征空间分解写为 $V\cong\bigoplus_\lambda V_\lambda$，其中$x_s\big|_{V_\lambda}=\lambda\cdot id$。我们注意到不同的特征空间是正交的。事实上，设 $v\in V_\lambda,w\in V_\mu$，我们有

$$0=\langle x_sv,w\rangle+\langle v,x_sw\rangle=\lambda\langle v,w\rangle+\mu\langle v,w\rangle=(\lambda+\mu)\langle v,w\rangle,$$

因此若 $\lambda\neq\mu$（注意 $-\mu=\mu$），则 $\lambda+\mu\neq0$，从而 $\langle v,w\rangle=0$。故对 $\lambda\neq\mu$有 $\langle V_\lambda,V_\mu\rangle=0$。

还要注意，每个特征空间上都具有非退化性。设 λ 是 x_s 的一个特征值，并令 $U=V_\lambda$ 和 $W=\bigoplus_{\mu\neq\lambda}V_\mu$。由前面的论证可知 $V=U\perp W$。若 $u\in U$ 且 $\langle u,\ U\rangle=0$那么我们也有$\langle u,\ W\rangle=0$，因此 $\langle u,\ V\rangle=0$。由 V 上的非退化性可得 $u=0$。因此，该形式在 U 和 W 上的限制均非退化，并且我们得到辛空间 $V=U\perp W$ 的正交分解。

情形 1：假设 $y=y_s+y_n$ 满足 y_s 非中心。

为 y_s 选取一个特征空间分解，使得每个 V_λ 都是非退化的。由于 $C_{\mathfrak{g}}(y)\subseteq C_{\mathfrak{g}}(y_s)=\bigoplus_\lambda\mathfrak{sp}(V_\lambda)$，任何与 y 对易的元素都会保持每个 V_λ 不变。由于 y_s 非中心，它至少有两个不同的特征值，因此我们可以将 V_λ 排列为两个真非退化直和，使得 $V=W_1\oplus W_2$，且 W_i 正交、真且非退化。于是

$$C_{\mathfrak{g}}(y)\subseteq\mathfrak{sp}(W_1)\oplus\mathfrak{sp}(W_2),C_G(y)\subseteq Sp(W_1)\times Sp(W_2).$$

令 $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{sp}(W_i)$。根据此前对二维情形的分析和一般中心化子的计算，存在开子集 $\mathfrak{a}_i^{reg}\subset\mathfrak{a}_i$，使得对于 $(u_i,\ v_i)\in\mathfrak{a}_i^{reg}\times\mathfrak{a}_i^{reg}$，有 $C_{\mathfrak{sp}(W_i)}=\mathfrak{a}_i$。现在，对 $\dim(V)$ 归纳（基例为 $\dim(V)=2$），限制在 W_i 上的配对 $(x,\ y)$ 属于 $(\mathfrak{a}_i\times\mathfrak{a}_i)^{Sp(W_i)}$。因此，我们有 $(x,\ y)\in G\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})$。

情形 2：假设 x 与一个非中心的半单元素 z 可交换。

不失一般性，我们可以假设 x_s 和 y_s 都是标量（事实上，必要时减去标量，仍能保持可交换性）。于是 $(x,\ y)\in C_{\mathfrak{g}}(y)\times\{y\}$。考虑集合 $y_{\mu,\ \lambda}=\mu y+\lambda z$，其中 $\mu,\ \lambda\in k$。由于 z 是半单且非中心的，除有限多个 $(\mu,\ \lambda)$ 外，其半单部分都是非中心的（事实上，一般而言，它在某个二维直和项上至少有两个特征值）。此外，

$$[x,y_{\mu,\lambda}]=\mu[x,y]+\lambda[x,z]=0.$$

因此，每个一般对（$x,\ y_{\mu,\ \lambda}$）仍属于交换簇，所以根据情形 1，对于一般的（$\mu,\ \lambda$），有 $\overline{(x,\ y_{\mu,\ \lambda})}\in G\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})$。令（$\mu,\ \lambda$）$\to$（1，0），则有 $\overline{(x,\ y)\in G\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})}$。

情形 3：假设 x 和 y 都不与任何非中心的半单元素交换。那么它们的半单部分是标量，因此可写为

$$x = \lambda I + x_n, y = \mu I + y_n$$

其中 x_n, y_n 幂零且 $[x_n, y_n] = 0$。令 Y 为包含 (x, y) 的交换簇的一个分支。考虑投影 $\pi_1 : \mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n}) \twoheadrightarrow \mathfrak{sp}_{2n}$。于是 $\pi_1(Y) \subseteq (nilpotents + scalars)$。假设 x_n 属于给定的共轭类 C。考虑态射

$$\phi_C : k \times C \to \mathfrak{sp}_{2n}$$

定义为

$$(\lambda, u) \mapsto \lambda I + u.$$

令 $S_C = \{\lambda I + u \mid \lambda \in k, u \in C\} = \phi_C(k \times C)$ 为其像。我们有 $\dim(k \times C) = 1 + \dim(C)$，因此 $\dim(S_C) \leq 1 + \dim(C)$。由于幂零轨道只有有限多个，

$$\pi_1(Y) \subseteq \bigcup_C S_C$$

因此

$$\dim \pi_1(Y) \leq \max_C \dim(S_C) \leq \max_C (1 + \dim(C)).$$

特别地，对于包含 x_n 的轨道，我们有 $\dim \pi_1(Y) \leq 1 + \dim(C)$。

接下来，将投影 π_1 限制到 Y。对于任意 $x' \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\pi_1^{-1}(x') = \{(x', y') \mid [x', y'] = 0\} = C_{\mathfrak{g}}(x').$$

因此，对于 $x' = \lambda I + x_n \in S_C$，$x'$ 上完整纤维的维数为 $= \dim C_{\mathfrak{g}}(x') = \dim C_{\mathfrak{g}}(x_n)$。$\pi_{1Y}$ 在 x' 上的纤维是 $Y \cap (\{x'\} \times \mathfrak{g})$，所以它是完整纤维的一个闭子簇，因此

$$\dim(\text{fibre of } \pi_{1Y}) \leq \dim C_{\mathfrak{g}}(x_n).$$

根据纤维维数定理，对于支配映射 $Y \to \pi_1(Y)$，存在 $\pi_1(Y)$ 的一个开子集，使得其上的纤维具有最小维数，特别地，我们得到

$$\dim(Y) \leq \dim \pi_1(Y) + \dim(\text{generic fibre of } \pi_{1Y}) \leq \dim \pi_1(Y) + \dim C_{\mathfrak{g}}(x_n).$$

结合前一个不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \dim(Y) &\leq 1 + \dim(C) + \dim C_{\mathfrak{g}}(x_n) \\ &= 1 + \dim(C) + \dim C_G(x_n) + \Delta(x_n) \\ &= 1 + \Delta(x_n) + \dim(\mathfrak{sp}_{2n}) \\ &\leq 1 + n + \dim(\mathfrak{sp}_{2n}). \end{aligned}$$

最后，结合引理4，我们得出 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_{2n})$ 是不可约的，其唯一的分支为 $G \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$。

注。在 t he 情形下，$n = 1$，我们有 $\mathfrak{sp}_2 \cong \mathfrak{sl}_2$，因此 $\mathcal{C}_2(\mathfrak{sp}_2)$ 的不可约性可由 [Rom25] 得出 .

4 交换幂零簇

本节我们考虑 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 的交换幂零簇，即集合

$$\mathcal{C}_2^{\text{nil}}(\mathfrak{sp}_{2n}) = \{(x, y) \in \mathfrak{sp}_{2n} \times \mathfrak{sp}_{2n} \mid x, y \text{ nilpotent}, [x, y] = 0\}.$$

首先，考虑抛物李代数

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_n, B \in \text{Sym}_n \right\} \subseteq \mathfrak{sp}_{2n}$$

及其交换幂零簇，$\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) = \{(x,\ y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \mid x,\ y$幂零，$[x,y] = 0\}$。首先注意，元素 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$ 是幂零的，当且仅当 A 是幂零的。考虑 $\mathfrak{p}$ 中一对彼此交换的元素，

$$x = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_1^t \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & A_2^t \end{pmatrix},$$

因此我们有

$$[x,y] = \begin{pmatrix} A_1A_2 - A_2A_1 & A_1B_2 + B_1A_2^t - A_2B_1 - B_2A_1^t \\ 0 & A_1^1A_2^t - A_2^tA_1^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_1,A_2] & A_1B_2 + B_1A_2^t + A_2B_1 + B_2A_1^t \\ 0 & [A_1^t, A_2^t] \end{pmatrix}.$$

定义映射 $F_{A_1,\ A_2}$: $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n \to \mathrm{Sym}_n$，如下:

$$F_{A_1,A_2}(B_1,B_2) = A_1B_2 + B_1A_2^t + A_2B_1 + B_2A_1^t.$$

注意，像确实包含于 Sym_n 中，因为 $A_1B_2 + B_1A_2^t + A_2B_1 + B_2A_1^t$ 是对称的。此外，我们断言像实际上包含于对角线为零的对称矩阵空间中。事实上，

$$F_{A_1,A_2}(B_1,B_2) = A_1B_2 + B_1A_2^t + A_2B_1 + B_2A_1^t = A_1B_2 + (A_1B_2)^t + B_1A_2^t + (B_1A_2^t)^t$$

并且在特征2下，我们有　对于任意 M，都有 $diag(M+M^t) = 0$，因此可得 $diag(F_{A_1,\ A_2}(B_1,\ B_2)) = 0$。因此，

$$F_{A_1,A_2}(B_1,B_2) \in S = \{M \in \mathrm{Sym}_n \mid diag(M) = 0\},$$

其维数为 $\dim(S) = {}^{n}{}_{(n-1)\ 2}$。

接下来，考虑态射 ϕ: $\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) \twoheadrightarrow \mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{gl}_n)$，其定义如下:

$$\left(x = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_1^t \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & A_2^t \end{pmatrix} \right) \mapsto (A_1, A_2).$$

根据 Baranovsky [Bar01] 和 Premet [Pre03] 的经典结果，$\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{gl}_n)$ 是不可约的，维数为 n^2-1。现在固定陪域中的一点（A_1，A_2）$\in \mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{gl}_n)$。其纤维 $\phi^{-1}(A_1,\ A_2)$ 恰由方程 $F_{A_1,\ A_2}(B_1,\ B_2) = 0$ 的解（B_1，B_2）$\in \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n$ 组成，即线性映射 $F_{A_1,\ A_2}$: $\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n \to S$ 的核。因此，$\phi^{-1}(A_1,\ A_2)$ 是一个仿射子空间，其维数为

$$\dim(\phi^{-1}(A_1,A_2)) = \dim\ker(F_{A_1,A_2}) = \dim(\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n) - \mathrm{rank}(F_{A_1,A_2}).$$

现在，$\dim(\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n) = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$，且 $F_{A_1,\ A_2}$ 的取值范围在 S 中，因此 $\dim(\mathrm{rank}(F_{A_1,\ A_2})) \leq \dim(S) = {}_{n(n-1)\ 2}$。因此，对于任意（$A_1$，$A_2$），

$$\dim(\phi^{-1}(A_1,A_2)) \geq n(n+1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}.$$

接下来，应用纤　维数定理于 ϕ，可得，对于 $\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}$ 的任意不可约分支 Y ），

$$\dim(Y) \geq \dim(\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{gl}_n)) + \frac{n(n+3)}{2} = (n^2-1) + \frac{n(n+3)}{2}.$$

现在设 X b e 是 $\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{sp}_{2n})$的一个不可约分支，$Y$ 是 $\mathcal{C}_2^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p})$的一个不可约分支，并令 t

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ \alpha & I \end{pmatrix} \middle| \alpha \text{ invertible} \right\} \subseteq Sp_{2n}$$

并考虑由共轭作用给出的态射 ψ: $Q \times Y \to X$

$$(g,(y_1,y_2)) \mapsto (gy_1g^{-1}, gy_2g^{-1}).$$

引理 *5. </style}*映射 ψ 是一般有限的。

Proof. Let $\left(y_1 = \begin{pmatrix} A & A' \\ 0 & A^t \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} B & B' \\ 0 & B^t \end{pmatrix}\right) \in Y$ and $q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \alpha & I \end{pmatrix} \in Q$. A computation shows that

$$\psi(g,(y_1,y_2)) = \left(\begin{pmatrix} A + A'\alpha & A' \\ \alpha A + \alpha A'\alpha + A^t\alpha & (A + A'\alpha)^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B + B'\alpha & B' \\ \alpha B + \alpha B'\alpha + B^t\alpha & (B + B'\alpha)^t \end{pmatrix} \right).$$

因此，当且仅当以下关系成立时， g 中心化这一对 (y_1, y_2):

$$A'\alpha = 0$$

$$\alpha A + \alpha A'\alpha + A^t\alpha = 0 \implies \alpha A + A^t\alpha = 0 \implies \alpha A \text{ symmetric}$$

$$B'\alpha = 0$$

$$\alpha B + \alpha B'\alpha + B^t\alpha = 0 \implies \alpha B + B^t\alpha = 0 \implies \alpha B \text{ symmetric}$$

现在考虑一个一般点（y_1, y_2） $\in Y$。可以取 A', B' 可逆，这是一个开条件。我们还要说明这类元素的集合非空。我们有元素 $y_1 = \begin{pmatrix} A & A' \\ 0 & A^t \end{pmatrix}$。首先，存在$S \in GL_n$（$k$）使得 $S^{-1}AS = A^t$。此外，可以选取 S 使其对称（或者将 A 共轭为对称矩阵，然后取 $S = I$）。这是陶斯基-扎森豪斯 [TZ59] 的一个结果，我们将给出另一种证明.....接着，元素 $N = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 与 y_1 对易，因为 $AS = SA^t$。因此，只需改变右上块， N 也与 y_1对易；也就是说，它与任何形如 $y_1 + \lambda N = \begin{pmatrix} A & A' + \lambda S \\ 0 & A^t \end{pmatrix}$的元素都对易。接下来，考虑多项式 f（λ） $=$det（$A' + \lambda S$）。它的次数为 n，首项为det（λS） $= \lambda^n$ det（S），由于 S 可逆，该首项并非恒等于0。因此，对于除有限多个 λ值之外的所有取值， f（λ） $\neq 0$，所以对一般的λ， $A' + \lambda S$ 可逆。注意，完全相同的论证也适用于 B'。

由上文可知，存在一个开稠密子集 $Y' \subset Y$，其中 A', B' 是可逆的。利用上述方程，我们看到必有 $\alpha = 0$, 因此任意一对 $(y_1,\ y_2)$ 的中心化子 $\in Y'$ 必然是平凡的。因此，在开子集 $\psi(Q \times Y') \subset X$上，每个纤维都只有一个点，所以 ψ 一般有限。 □

定理 2 (Taussky-Zassenhaus)。 设 k 是特征2 的二次闭域，且令 $A \in M_n$（k）。则存在 $S \in GL_n$（k），其 S 为对称矩阵，使得 $S^{-1}AS = A^t$。

证明。 首先，存在对称矩阵 S, $T \in M_n(k)$, 其中 S是可逆的，并且 $A = ST$。其次，由于 k 是二次闭域，k 上的每个可逆对称矩阵都是一个格拉姆矩阵（等价地，在特征 2 的二次闭域上，每个非退化对称双线性型都同余于标准型）。因此，我们可以将 $S = XX^t$ 写成某个 $X \in GL_n(k)$。于是有 $A = ST = XX^tT$。将其与 X 共轭后，我们得到

$$X^{-1}AX = X^{-1}(XX^tT)X = X^tTX.$$

令 $B = X^tTX$，并注意到

$$B^t = (X^tTX)^t = X^tT^tX = X^tTX = B,$$

因此 B 是对称的。现在，由于 $A = ST$，我们注意到

$$A^t = (ST)^t = T^tS^t = TS$$

然后用 S 共轭 A,

$$S^{-1}AS = S^{-1}(ST)S = TS = A^t,$$

因此 S 将 A 共轭为 A^t，并且按构造， S 是对称且可逆的。 □

引理 6. 设 k 是特征为 2 的二次闭域，且 $A \in M_n(k)$。则存在 $S \in GL_n(K)$，使得 $S^{-1}AS$ 是对称的。

证明。 首先，存在对称矩阵 $S, T \in M_n(k)$, 其中 S 可逆，且 $A = ST$。接下来，我们可以将 $S = XX^t$ 写成某个 $X \in GL_n(k)$。因此有 $A = ST = XX^tT$。用 X 对此进行共轭，我们得到

$$X^{-1}AX = X^{-1}(XX^tT)X = X^tTX.$$

设定 $B = X^tTX$，并注意到

$$B^t = (X^tTX)^t = X^tT^tX = X^tTX = B,$$

因此 B 是对称的。 □

由上述结论可得，$\dim(X) = \dim(Q \times Y)$，且 X 是 $\psi(Q \times Y)$ 的闭包。现在，根据差异论证，我们有 $\dim(X) \leq \dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + n - 1$ (此处或许可以多说一点)。另一方面，我们有一个下界：

$$\begin{aligned}\dim(X) &= \dim(Q) + \dim(Y) \\ &\geq \frac{n(n+1)}{2} + \left((n^2-1) + \frac{n(n+3)}{2}\right) \\ &= 2n^2 + 2n - 1 \\ &= \dim(\mathfrak{sp}_{2n}) + n - 1.\end{aligned}$$

参考文献

[Bar01] V. Baranovsky. “交换幂零矩阵对的簇是不可约的”. 载于：*TransformationGroups* 6 (2001). DOI: https://doi.org/10.1007/BF01236059.[Lev02] Paul Levy. “素特征域上李代数的交换簇”. 载于：*Journal ofAlgebra* 250.2 (2002), 第473–484页. ISSN: 0021-8693. DOI: https://doi.org/10.1006/jabr.2001.9083.URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869301990830.[LS12] M.W. Liebeck与G.M. Seitz.单代数群与李代数中的幂单类和幂零类. 数学综述与专著. 美国数学会，2012. ISBN: 9780821869208.URL: https://books.google.ro/books?id=Th-CAwAAQBAJ.[MT55] T. Motzkin与O. Taussky. “具有L性质的矩阵对. II”. 载于：美国数学会汇刊 *80, 387-401* (1955).[Pre03] Alexander Premet. “约化李代数的幂零交换簇”. 载于：*Inventiones Mathematicae* 154 (2003年3月). DOI: 10.1007/s00222-003-0315-6.[Ric79] R. W. Richardson. “半单李代数与代数群的交换簇”. 英文. 载于：*Compositio Mathematica* 38.3 (1979), 第311–327页. URL: http://eudml.org/doc/89407.[Rom25] Vlad Roman. “pgln的交换簇”. 载于：*Journal of Algebra* 665 (2025), 第229–242页. ISSN: 0021-8693. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869324005945.[TZ59] Olga Taussky与Hans Zassenhaus. “关于矩阵与其转置之间的相似变换”. 载于：*Pacific Journal of Mathematics* 9 (1959), 第893–896页. URL: https://api.semanticscholar. org/CorpusID:119722390.