arXiv:2602.02937v1 [physics.atom-ph] 3 Feb 2026

彭宁阱中 $^{40}Ca^{+}$ 的高效三维亚多普勒冷却

BrianJ.McMahon* 和 Brian C. Sawyer佐治亚理工
研究院，亚特兰大，*GA 30332*，美国（2026年2月4日）

我们展示了对囚禁在紧凑型彭宁阱中的 $^{40}Ca^{+}$ 离子的三个本征模进行高效亚多普勒激光冷却；该阱工作于 0.91 T 的磁场下。我们使用初始多普勒激光冷却所需的同一组激光束，通过调节激光频率产生窄带双光子暗共振。该过程实现了 $1/e$ 108(8) μs 的冷却时间常数，最终将轴向热模占据数的平均值从 72(23) 降至 1.5(3)，耗时800 μs；这一结果通过在 729 nm 附近对电四极跃迁进行共振探测测得。我们在阱电极上施加参数驱动，使轴向模占据数与各径向模占据数之间发生相干交换，因此仅使用轴向传播激光束即可实现三维亚多普勒冷却。该亚多普勒冷却是在轴向振荡频率为 $\omega_z = 2\pi \times 221$ kHz 时实现的；在多普勒激光冷却极限下，此时的运动远处于兰姆-迪克囚禁区之外。我们测得的冷却速率和最终模占据数与半经典模型符合良好；该模型将离子-光子相互作用的林德布拉德主方程解与囚禁离子的经典谐振子运动相结合。

I. 引言

囚禁于表面电极彭宁阱中的原子离子阵列，被认为是量子信息处理的一种潜在架构 [1]。囚禁离子的运动模具有有限的声子占据数，可能降低纠缠门操作的保真度；目前保真度最高的基于激光的纠缠演示均采用了基态冷却 [2–5]。虽然在射频（rf）离子阱中对单个离子和库仑晶体进行亚多普勒激光冷却已十分普遍（例如 [6–13]），但迄今在彭宁阱中对离子进行冷却的演示仍较少 [1, 14–17]。已将分辨边带冷却应用于小型 $^{40}Ca^{+}$ 离子阵列和单个 $^{9}Be^{+}$ 离子 [1, 17], ；此外，已利用$^{9}Be^{+}$ [14]二维晶体演示了彭宁阱中的电磁感应透明（EIT）冷却。

单电离钙是彭宁阱中量子操作颇具吸引力的离子种类，因为其质量相对较低，且用于电子态操控的激光波长适宜，能够兼容集成光子学 [18, 19]。尽管边带冷却是将原子运动冷却至基态的有效方法，但在强囚禁区（兰姆-狄克参数， $\eta \lesssim 0.1$）中，冷却速度受限于边带相互作用强度的降低，而该强度与 η成正比。相反，在弱囚禁区（$\eta \gtrsim 0.1$）中，要实现基态冷却，必须驱动一阶以上边带，这会显著延长总冷却时间 [15, 16, 20]。

本文中，我们展示了对单个 $^{40}Ca^{+}$轴向模的高效暗共振（DR）冷却，在 800 μs内将初始经多普勒冷却的热占据数从$>$ 70 降至 $<$ 2 个量子。从这一预冷却温度出发，几轮脉冲边带冷却将剩余运动占据数降至 < 1。与可比的$^{40}Ca^{+}$ 彭宁阱系统中的分辨边带冷却相比，我们将暗共振与边带冷却相结合，把轴向基态冷却时间从 20 ms [16] 缩短至3.8 ms。为高效冷却径向自由度，将基态冷却后的轴向模布居数与多普勒冷却后的径向模布居数进行相干交换。这通过向阱电极施加与两个耦合模频率之和或之差共振的振荡四极势 [21, 22]来实现。仅沿轴向阱方向施加亚多普勒冷却并采用这种运动模交换，我们高效地对所有自由度进行了亚多普勒冷却。

彭宁阱离子囚禁通过强而均匀的静磁场与静电四极场共同实现。平行于磁场的离子运动呈简谐运动，其振荡频率（ω_z）仅由电四极势决定。垂直于磁场、大小为 B 的运动，则由洛伦兹力与四极势产生的静电力共同决定。这会形成两种径向本征模：修正回旋模（ω_+）和磁控管模（ω_-），其频率为 [23]

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_c}{2} \pm \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2}, \tag{1}$$

其中， $\omega_c = qB/m$ 是质量为 m、电荷为 q 的离子的裸回旋频率。对于本文所述装置的 0.91 T 囚禁磁场，我们实现了 $\omega_c = 2\pi \times 351$ kHz，这要求 $\omega_z < \omega_c/\sqrt{2} = 2\pi \times 248$ kHz 才能实现稳定径向囚禁。本研究采用的阱频率为（ω_z, ω_+, ω_-） $= 2\pi \times$（221 kHz，256 kHz，96 kHz）。

在彭宁阱中对单个离子和库仑晶体进行多普勒激光冷却，已在理论和实验上得到充分表征 [23–25]。轴向离子

* brian.mcmahon@gtri.gatech.edu

运动在理想彭宁阱中不受洛伦兹力作用，因此轴向多普勒冷却动力学与射频阱中的情况相同。改进回旋模的多普勒冷却同样简单直接，而负能磁控模式的运动占据数只能通过加热来降低。这种径向模冷却需求的不匹配，使彭宁阱中的三维多普勒冷却变得复杂；通常通过使用径向偏移的多普勒冷却激光束 [26]和/或施加耦合两个径向模的振荡四极势（即轴向化） [27]来解决。本文中，我们同时采用这两种径向冷却技术。 ~ 0.5 mK 的多普勒冷却极限意味着，对于我们的阱频率，平均运动占据数为 $\sim 40-100$ 。据我们所知，囚禁离子的磁控管运动亚多普勒激光冷却迄今仅通过分辨边带冷却得到演示 [1, 15]。

本文其余部分安排如下：第 II 节介绍实验装置，并展示结合共振模式交换的 DR 冷却和边带冷却；第 III 节则详细介绍适用于弱离子约束区域的半经典 DR 冷却模型。

II. 实验装置

本文所有实验均使用单个 $^{40}Ca^{+}$ 离子，在紧凑型永磁彭宁阱中进行囚禁。该阱与参考文献 [28] 中描述的相同。简言之，一对径向磁化的钐钴磁体组件产生均匀的囚禁磁场，场强为 ~ 0.91 T。两块相互平行、具有镜像电极图案的印刷电路板（PCBs）提供静电场，使离子沿磁场方向受到谐振约束。印刷电路板上的方位分段电极用于产生交流四极势，以混合两个径向模的能量，从而在多普勒冷却期间实现轴向化 [27, 29–33]） 。这些电极还用于在每个径向模与轴向模之间实现相干运动布居交换 [21]。

被囚禁的 $^{40}Ca^{+}$ 运动通过两组不同的激光束进行冷却。如图 1 所示，多普勒冷却光束沿轴向和径向经由两根光子晶体光纤进入真空腔室。径向光路由两束 397 纳米激光束（397A 和 397B）组成，它们与一束 866 nm 光束和一束 854 nm光束同向传播。轴向冷却激光束路径则

由两束同向传播的 397 nm 激光束（397A 和 397B）以及一束反向传播的 866 nm光束组成。由于彭宁阱中磁子能级的塞曼频移较大，因此采用光纤电光相位调制器（EOM）分别调制 866 nm 和 854 nm 光束，以有效清空所有亚稳态 $D_{3/2}$ 和 $D_{5/2}$ 态的布居数 [25]。相关的光学跃迁和 $^{40}Ca^{+}$ 能级结构如图所示

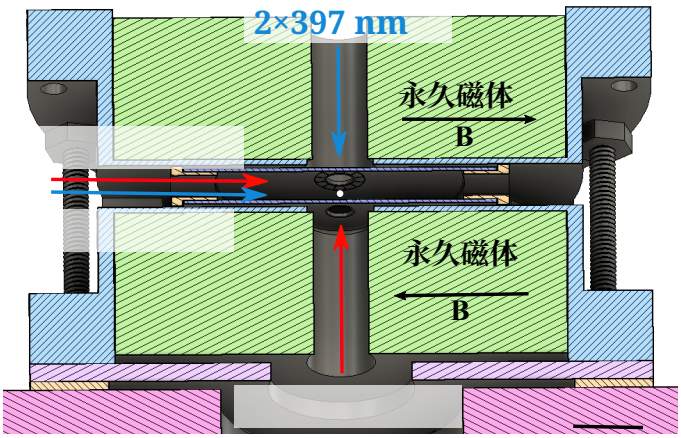

图 1. 带有印刷电路板的真空内永久磁体彭宁阱组件剖面图。一对径向磁化的钐钴环在离子所在位置产生均匀、垂直取向的 0.91 T 磁场。图中以白色圆圈表示离子，其垂直方向上位于两块印刷电路板之间的中心位置。激光传播方向以蓝色和红色箭头表示。比例尺（右下角）表示图中尺寸为 12.7 mm。

图 2 展示了相关内容。我们使用一束与轴向 866 nm 激光束同向传播的 729 nm 激光束来测量轴向离子温度，并激发窄线宽的$S_{1/2},\ m_J=-1/2 \rightarrow D_{5/2},\ m_J=-3/2$ 跃迁，其中m_J 是总角动量为 J的态的一个磁子能级。每次实验都从多普勒冷却开始，将运动模温度降至各自多普勒极限附近。

A. 轴向暗共振冷却

要将离子温度降至多普勒极限以下，需要采用一种特殊的冷却方案。暗共振冷却利用一对激光频率进行非共振激发，从而产生窄带双光子（即暗）共振。由于其带宽可调，且可调至小于 $S \rightarrow P$ 共振特征的带宽，因此这种暗共振适用于亚多普勒冷却。在低磁场下，只需一个激光源和不同的声光调制器（AOM），即可方便地产生两个用于DR冷却的激光频率 [6]。然而，在特斯拉量级的磁场下，相对较大的塞曼分裂要求采用不同的方法（即如参考文献 [14]所述，使用不同的锁相激光器）。

在我们的系统中，我们选择采用与多普勒冷却相同的激光束，但在DR冷却步骤中使用不同的功率和失谐量。产生暗共振的两台激光器必须具有足够的相对频率稳定性，以便在整个DR冷却过程中保持固定的双光子失谐量。为此，我们将其中一台397 nm 激光器（397B）和866 nm 激光器（二者均为外腔二极管激光器）稳定到一个

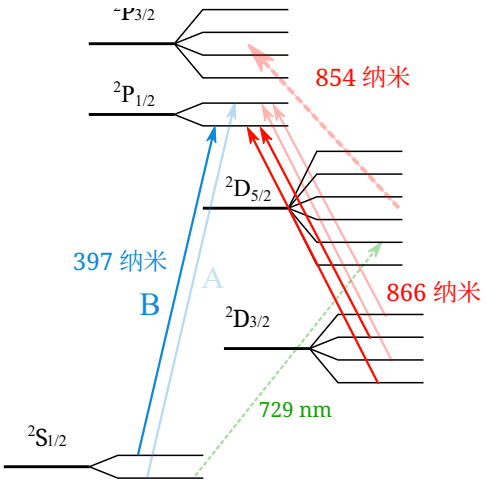

图 2. 本研究所用的 $^{40}Ca^+$ 能级图及相关激光波长。实线箭头和半透明箭头分别表示用于多普勒冷却和暗共振冷却的激光频率，不同的箭头组标示了通往各个 $P_{1/2}$ 磁子能级的激发路径。729 nm激发（绿色虚线箭头）用于测量轴向模占据数；一组854 nm频调（红色虚线箭头）则在 729 nm激发后将布居数送回 $S_{1/2}$ 态。

共用的温度稳定、高精细度（两个波长均为$\mathcal{F} \sim 3000$）光学腔，其规定漂移为 < 2 kHz/小时。另一台397 nm 激光器（397A）和854 nm激光器以 < 2 MHz的不稳定性锁定到商用波长计。该波长计每小时根据参考852 nm激光器重新校准，该参考激光器通过饱和吸收光谱锁定到室温蒸气池中的铯D2跃迁。

轴向定向的397 nm激光束通过采用双通结构排列的声光调制器进行独立控制，而轴向定向的866 nm 激光束则通过光纤声光调制器进行独立控制。对于DR冷却，397B 激光和866 nm 激光的调制器分别相对于多普勒冷却共振向蓝侧偏移 ~ 26 MHz，以产生双光子暗共振。通过扫描稳定397B 激光的频率来测量暗共振，如图3所示。该共振形成于连接 $S_{1/2}$, $m_J = 1/2$到 $P_{1/2}$, $m_J = -1/2$ 的397B 激光与866 nm 激光的一种电光调制频调之间，后者将一个 $D_{3/2}$ 态（ $m_J = -3/2$ 或$m_J = 1/2$）连接到相同的 $P_{1/2}$, $m_J = -1/2$ 态。这些特定跃迁在图2中以粗箭头标出。对每束光的功率和失谐量进行优化，使双光子共振能量移除侧的斜率最陡，同时使能量增加侧的激发最小。图3数据所对应的典型实验参数包括：397B 和397A 激光束的功率分别为1 μW和 6 μW，以及总866 nm 激光束功率 500 μW。离子位置处，397 nm激光束和866 nm光束的光束腰半径分别为$\sim$ 140 μm和 $\sim$ 200 μm。相应的拉比频率为 $\Omega_{397A} \sim 2\pi \times 2.9$ MHz、$\Omega_{397B} \sim 2\pi \times 1.2$ MHz和$\Omega_{866} \sim 2\pi \times (1.3 - 2.2)$ MHz，分别对应397A、397B和866 nm激发。这些参数产生了一个半峰全宽为 ~ 2 MHz的双光子共振特征（见图3插图）。我们注意到，这种亚多普勒冷却状态与参考文献 [14] 中的状态相似，拉比频率几乎相等；而它不同于经典的EIT冷却方案，后者在指定的“泵浦”和“探测”激发之间采用高度不对称的拉比频率 [34]。

我们的轴向频率为 $\omega_z = 2\pi \times 221$ kHz，配合反向传播的 397 nm 和 866 nm 激光束几何构型，得到用于暗共振冷却的有效兰姆-狄克参数 $\eta_z \sim 0.55$ 。通常，我们在 5–10 ms 内达到 $^{40}Ca^+$ 多普勒冷却极限 ~ 0.5 mK，从而得到 $\eta_z\sqrt{2\bar{n}_z + 1} > 5$，使离子运动在暗共振冷却开始时远处于兰姆-狄克区之外。离子沿暗共振冷却激光束传播方向振荡所产生的边带，其拉比频率不可忽略，且超过 ± 2 MHz（见图 3 插图）。暗共振冷却的初始 397B 激光失谐经过调节，以获得红边带和蓝边带之间最大的差分激发（通过光子散射测量）。通过测量轴向温度随暗共振冷却持续时间的变化，完成对 397B 激光失谐的最终优化。如图 4 所示，我们通过拟合 729 nm 载波振荡来表征暗共振冷却速率和最终轴向模占据数。

从图 2 可以看出，两种不同的 397 nm 激光激发对应两组暗共振条件，且可彼此独立调节。当将 397埃激光调至各自的双光子共振附近时，测得的离子温度最低（如图 3 中透明箭头所示）。图 4 展示了这一结果：初始多普勒冷却后的轴向模占据数为$\bar{n}_z = 72(23)$，经过 800 μs后，最终轴向模占据数为 $\bar{n}_z = 1.5(3)$。对图 4 的数据点进行单指数拟合（未显示），得到 DR冷却时间常数为 108(8) μs。

B. 参数模耦合

参数模耦合可用于在不同运动模之间相干地交换布居数。在我们的系统中，通过向印刷电路板上的方位分段环形电极施加适当的和频或差频来实现这一点。这会产生相对于磁场倾斜的振荡四极势，从而耦合轴向运动和径向运动 [35]。施加两个模的和频 $\omega_z + \omega_-$，可耦合轴向模和磁控管模；而施加差频 $\omega_+ - \omega_z$ [21]，则可将修正回旋运动与轴向模耦合。在校准模耦合之前，首先通过扫描施加到同一组电极上的射频脉冲的射频频率来测量运动模频率。当射频脉冲与某一特定模的频率共振时，该模的能量会随着脉冲持续时间的增加而增长，直至温度升高表现为离子荧光减弱。

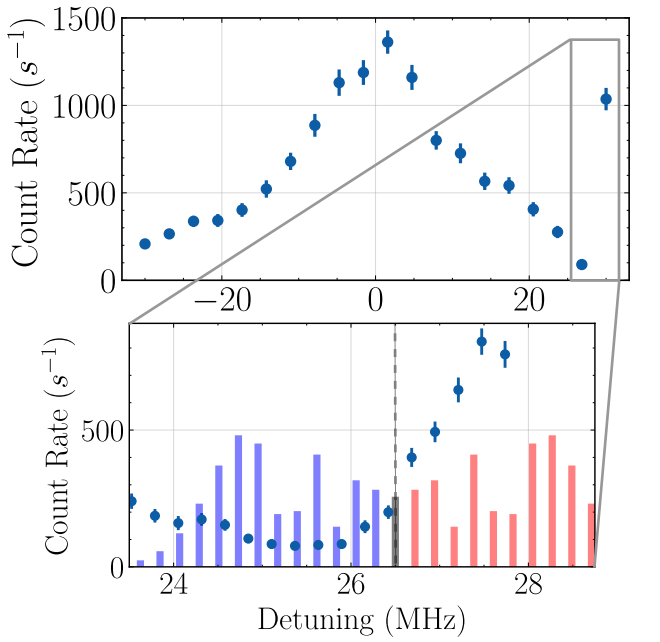

图 3. （上）测得的离子荧光计数率，显示 397B 激光相对于原子共振具有不同失谐量时的结果。（下）上方频率扫描中双光子共振的放大图。半透明灰色虚线表示 DR 冷却期间 397B 激光频率（即光学载波）的失谐量。对于初始相干轴向占据数为 $\bar{n} = 72$ 的情况，红、蓝轴向边带的频率偏移和相对拉比频率以任意纵轴尺度绘出。当移除能量的边带的光子散射率超过增加能量的边带的光子散射率时，将产生净轴向冷却。

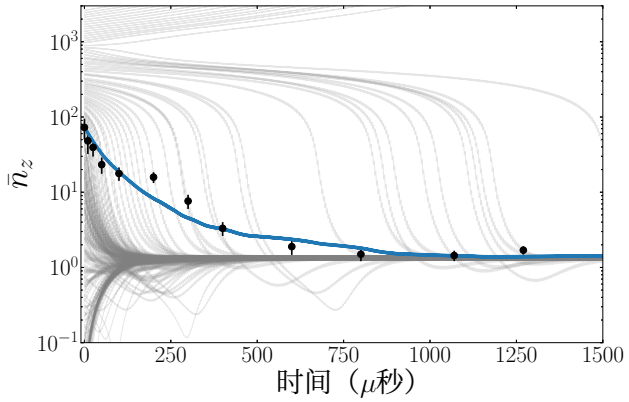

图 4. 对 $^{40}Ca^+$ 施加 DR 冷却不同持续时间后测得的轴向模占据数（带误差条的数据点）。蓝色实线是半经典亚多普勒冷却模拟的结果，该模拟以实验参数为输入。灰色实线表示每种模拟初始相干激发对应的单独冷却（或加热）轨迹，蓝线则是对所有轨迹进行热加权平均得到的结果。在近两个数量级的轴向模占据数范围内，我们发现实验结果与模拟结果吻合良好。对于这些参数，模拟得到的 DR 冷却捕获范围为 $\bar{n}_z < 900$，其中拉比频率 $\Omega_{397A} \sim 2\pi \times 2.9$ MHz、$\Omega_{397B} \sim 2\pi \times 1.2$ MHz 和 $\Omega_{866} \sim 2\pi \times (1.3 - 2.2)$ MHz。

脉冲持续时间增加，直至温度升高表现为离子荧光减弱。通常每天校准一次模频率，不确定度为< 10 Hz。

为校准模耦合，首先使用暗共振冷却冷却轴向模，同时径向模保持在各自接近多普勒极限的状态。随后，以预先校准的模和频或差频施加模耦合交换脉冲，并改变脉冲持续时间。该脉冲使模占据数随时间呈正弦变化，实现相干交换。我们施加一个共振的 729 nm 激光脉冲，探测轴向边带跃迁和载波跃迁，以估算离子的轴向温度。在适当的脉冲持续时间下，施加的驱动会使所选模之间的占据数完全交换，如图 5 所示，这表现为最终轴向模占据数的峰值。图 5 中，以 3.9(6) 个量子为中心的蓝色阴影区域表示在本实验特定参数下的暗共振冷却极限，阴影区域的总高度等于两倍标准误差。蓝色数据点的正弦拟合以绿色显示。为尽量减少对旁观模的非共振激发，射频脉冲以 150 μs 的持续时间逐渐开启和关闭。完全交换任一模的脉冲时间为 s，其中包括总计 s 的脉冲爬升时间，施加于分段电极上的振幅为 150 μV。

任一模的完全交换脉冲时间为 $\sim 350-400$ μs，其中包括总计 300 μs 的脉冲爬升时间，施加于分段电极上的振幅为 ~ 1 V。通过反复施加经过校准的交换脉冲，并测量脉冲后该模的占据数，确定交换过程中轴向模所受的加热。扣除交换过程中的环境轴向加热 0.010(4) [36] 后，得到每次交换的加热率为 0.031(7) 个量子。

运动模交换可与沿单一模方向（本研究中为轴向）的 DR 冷却相结合，从而对所有自由度进行亚多普勒冷却。首先，将轴向模冷却至基态，然后与磁控管模交换能量。接着再次冷却轴向模，以移除原先处于磁控管模中的能量。随后交换轴向模和修正回旋模的模占据数，使径向模中的运动布居数降至最低。最后，再次将轴向模冷却至基态。值得注意的是，轴向 DR 冷却和边带冷却会导致反冲散射至两个未主动冷却的径向方向。目前，这种反冲加热不可忽略，并将最终径向模占据数限制在 $\bar{n}_{\pm} \gtrsim 10$。

结合上述讨论的技术，仅沿单一轴向传播的DR激光冷却光束即可将离子在三维空间中冷却至亚多普勒温度。经过 800 μ秒DR冷却后，再对每个模进行3毫秒边带冷却，随后通过729 nm边带和载波光谱测量最终热占据数。最终模占据数为 $\bar{n}_{-} = 21(4)$,

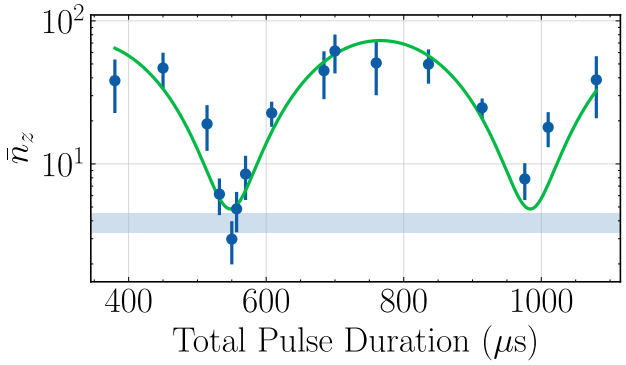

图 5. 对于不同的参数交换脉冲持续时间（该脉冲耦合轴向模和磁控管模），测得的轴向模占据数（$\bar{n}_z$）。每次实验均先对轴向自由度进行多普勒冷却和 DR 冷却，随后施加轴向—磁控管模耦合激励，持续时间可变。然后通过 729 nm共振载波翻转提取轴向模占据数。测得的峰值模占据数对应于参数交换前的初始磁控管占据数（$\bar{n}_-$）。蓝色透明阴影区域的垂直中心表示在进行任何交换之前，经过多普勒冷却和 DR 冷却后的轴向模平均占据数；其高度表示两倍标准误差。

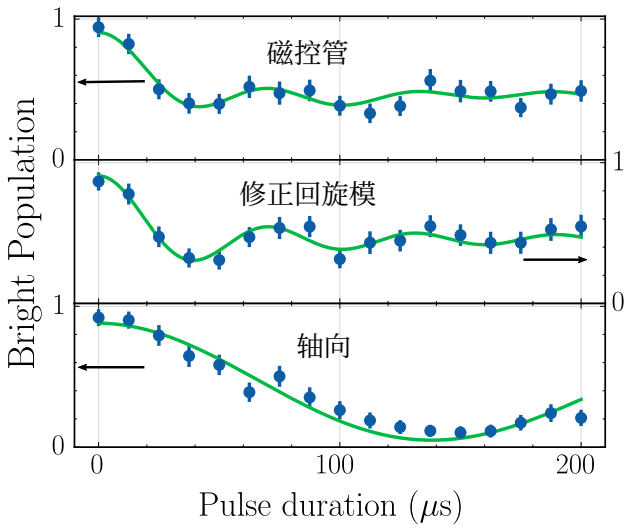

图6. 使用轴向传播的729 nm激光束共振激发 $S_{1/2}$, $m_J = -1/2 \rightarrow D_{5/2}$, $m_J = -3/2$ 载波（磁控管、修正回旋）或第一蓝边带（轴向）时亮态布居数的曲线。每次实验均包括 800 μs的暗共振冷却，随后进行3 ms的脉冲边带冷却。仅使用轴向传播激光束，按照以下顺序完成所有模的亚多普勒冷却。首先，将轴向运动冷却至基态。然后，将一个径向模的占据数与轴向模的占据数交换，并重复轴向冷却。随后对剩余的径向模重复这一过程。最后，通过共振729 nm拉比振荡测量轴向占据数（对径向模先进行模交换脉冲）。绿色实线是对布居数的拟合结果，由此提取出磁控管、修正回旋和轴向模的最终模占据数，分别为21(4)、15(2)和0.12(6)。

$\bar{n}_+ = 15(2)$和 $\bar{n}_z = 0.12(6)$，这些数值由图6中的拟合结果得出。根据第III节式（5）进行的半经典反冲加热估算表明，径向模的平均加热率为 ~ 14 ms^{-1}，这意味着由DR冷却激光束散射造成的最终径向模占据数分别为 $\bar{n}_+ = 11$ 和 $\bar{n}_- = 22$ 。磁控管模最先与轴向模交换，因此会经历两个反冲加热周期，而修正后的回旋模则经历一个周期。这里，我们忽略分辨边带冷却步骤中相对较少的反冲散射事件。

III. 半经典模型

我们采用半经典处理对 $^{40}Ca^+$ 的 DR 冷却动力学进行建模：针对一系列轴向离子速度，通过林德布拉德主方程形式预先计算内态动力学（即光子散射率）。随后，利用预先计算并插值得到的光子散射率随离子速度变化的数据，对离子外部动力学进行经典演化。

将具有有效光学波矢（k_{eff}）的轴向亚多普勒激光冷却视为一维情况，则施加在离子上的力为

$$F_z = m\frac{dv_z}{dt} = -\hbar k_{\text{eff}} \sum_i \Gamma_i \rho_{ii}(v_z), \tag{2}$$

其中，$\hbar$ 为普朗克常数，v_z 为离子轴向速度，m 为离子质量，Γ_i 为原子激发态 i的寿命倒数，ρ_{ii} 为激发态 i的速度相关对角密度矩阵元（即布居数）。对光子发射的所有可能波矢进行积分后，再散射光子将导致离子总动能 E发生扩散，如下所示： [23]

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{\hbar^2 k_r^2}{m} \Gamma_i \rho_{ii}, \tag{3}$$

其中 k_r 是光子反冲的波矢。综合考虑光子吸收和再发射的影响，离子轴向速度的运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{\hbar k_{\text{eff}}}{m} \sum_i \Gamma_i \frac{\partial \rho_{ii}}{\partial v_z} v_z + \sum_i \frac{\hbar^2 k_r^2}{3m^2} \Gamma_i \rho_{ii} \frac{1}{v_z} \\ &\equiv W(t) v_z + \frac{D(t)}{v_z}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中，方程 4 的第一项描述离子冷却（或加热），第二项则描述由自发辐射导致的沿 z 方向的能量扩散。请注意，方程 4 中 $W(t)$ 的形式包含 z(W) 的线性展开。

我们在方程 4 中忽略彭宁阱的轴向恢复力，因为在我们的系统中，$\sim 5\ \mu$s 的轴向振荡周期大于离子内部态动力学的特征时间尺度（$\lesssim 1\ \mu$s）。这与参考文献 [23, 26] 中讨论的弱束缚极限一致。

当跃迁多普勒频移相对于双光子暗共振特征的频宽较大时，离子在轴向限制势阱中振荡，ρ_{ii} 值会随时间发生不可忽略的变化。这种效应体现在$W(t)$和 $D(t)$项显式的时间依赖性中。双光子暗共振附近亚多普勒冷却的波矢定义为 $k_{\text{eff}} \equiv \left|\vec{k}_{397} - \vec{k}_{866}\right|$，其中 $\vec{k}_{397}$ ($\vec{k}_{866}$)是397 nm（866 nm）激光束的波矢。我们采用近似 $k_r = \left|\vec{k}_{397}\right|$ 来描述反冲加热，该近似忽略了自发衰变到亚稳态 $D_{3/2}$ 流形的那一小部分（$\sim 8\%$）。

对于我们仅使用沿轴向传播激光束的亚多普勒冷却，径向自由度（x，y）仅经历反冲加热。应用式4中的扩散项，我们估计经过持续时间为 t的轴向直接抵消冷却后的最终径向速度$\left(v_{r,f} = \sqrt{v_{x,f}^2 + v_{y,f}^2}\right)$ 为

$$v_{r,f} = 2\sqrt{\int_0^t D(t')dt'}, \tag{5}$$

并且我们假设径向动能在修正回旋模与磁控管模之间满足能量均分。

由式4和式5可见，冷却动力学的计算需要了解随时间变化的原子激发态布居。我们按照与参考文献 [8, 37] 中所讨论的类似的林德布拉德主方程处理方法，数值计算激发态布居。

我们在彭宁阱磁场中针对 $^{40}Ca^+$ 的密度矩阵（ρ）包含 $S_{1/2}$、$D_{3/2}$、$D_{5/2}$、$P_{1/2}$和 $P_{3/2}$ 电子态内的全部18个磁子能级。因此矩阵 ρ 的维数为 18×18，我们利用李乌维尔超算符求解这18个态的布居和相干项，如下所示

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \mathbf{L}\vec{\rho}, \tag{6}$$

其中，$\vec{\rho}$ 是长度为 $18^2 = 324$的 ρ 的向量形式，而$\mathbf{L}$是定义如下的刘维尔超算符:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= -i(\hat{H} \otimes \hat{I}) + i(\hat{I} \otimes \hat{H}^T) \\ &+ \sum_j \Gamma_j \left[2\hat{\mathcal{J}}_j \otimes \hat{\mathcal{J}}_j^* - \hat{\mathcal{J}}_j^\dagger \hat{\mathcal{J}}_j \otimes \hat{I} - \hat{I} \otimes \hat{\mathcal{J}}_j^T \hat{\mathcal{J}}_j^*\right].\end{aligned} \tag{7}$$

公式 7 第一行包括 18×18 系统ˆ ˆ哈密顿量（H）和单位算符（I）。该哈密顿量描述了旋波近似下的离子-激光电偶极相互作用，并加入了给定离子速度 $\vec{v}$ 对应的多普勒频移（$\propto -\vec{k} \cdot \vec{v}$）。公式 7 的第二行描述了每个耗散ˆ过程 j及其跳跃算符 $\mathcal{J}_j$。我们的耗散过程包括自发态衰变和激光频率涨落，并假设白激光频率噪声的功率谱密度（即洛伦兹型激光线宽）。从上态 e 到下态 g 的自发衰变所对应的跳跃算符 ˆ 形式为 $\mathcal{J} \propto |g\rangle\langle e|$。虽然我们纳入了亚稳态 $D_{3/2}$（~ 0.833 s^{-1}）和 $D_{5/2}$（~ 0.856 s^{-1}）能级相对较小的自发衰变率，但它们对本文讨论的冷却动力学影响可以忽略。与我们装置中的 DR冷却相关的主要衰变机制来自两个 $P_{1/2}$ 子能级（$\sim 1.4 \times 10^8$ s^{-1}）。

我们求解弱阱束缚条件下囚禁离子的随时间变化的轴向速度。因此，我们对速度施加谐振子条件，采用如下假设:

$$\begin{aligned}v_z(t) &= \Re\left[A_v(t)e^{i(\omega_z t)}\right] \\ &= \Re\left[A_v(t)\right]\cos(\omega_z t) - \Im\left[A_v(t)\right]\sin(\omega_z t),\end{aligned} \tag{8}$$

其速度振幅随时间变化，为 $A_v(t)$。在每一时刻，我们都将离子视为自由粒子，其瞬时速度由公式 8 定义。将公式 8 与公式 4 结合，可得复速度振幅的微分方程:

$$\frac{dA_v}{dt} = \left[W(t) - i\omega_z\right]A_v + \frac{D(t)}{A_v}e^{-2i\omega_z t}. \tag{9}$$

公式 9 的复数形式避免了数值积分过程中，在离子振荡的零速度转向点处扩散项出现极点。以往对 Ca^+ 冷却的数值求解依赖于修改扩散项来缓解这种数值不稳定性 [37]。

为模拟图 4 中的 DR冷却结果，我们对一系列初始相干态振幅 $|\alpha(0)| = \sqrt{m\nu_z^2(0)/(2\hbar\omega_z)}$对应的公式 9 进行数值积分，并将初始相位均匀随机化。图 4 中以浅灰线绘出了所有初始激发振幅（$0 < |\alpha(0)|^2 < 3000$）对应的热轨迹。为计算平均热激发 $\bar{n}_z$随 DR冷却持续时间的变化（图 4 中的蓝色实线），我们对所有模拟得到的热轨迹进行热加权平均，权重与实验测得的初始热分布一致，其 $\bar{n}_z = 72$。

我们预测，对于这些参数，DR冷却存在有限的“捕获范围”$|\alpha(0)|^2 < 900$，图4中初始温度高于该值时的加热轨迹证明了这一点。对于初始热占据数为$\bar{n}_z = 72$的情形，这意味着大约1 : 230,000次DR冷却尝试会导致轴向加热。这一效应在最近一篇报道射频阱中 $^{138}Ba^+$ 于兰姆-狄克区之外进行EIT 冷却的论文中被描述为失控加热 [12]。对于延长的DR冷-

却持续时间，我们的模拟预测，这些低概率加热轨迹最终会使$\bar{n}_z$升高到高于在 $\sim$ 1 ms时间尺度上观测到的最小值。因此，在弱束缚区间实现最优DR冷却，需要在不牺牲冷却速率和最低模式占据数的前提下最大化该捕获范围，同时应理解，这一最低占据数在本质上可能是瞬态的 [38]。

IV. 结论

总之，我们利用DR冷却初始多普勒冷却步骤所需的同一组激光束，并结合采用窄带729 nm激发的脉冲边带冷却最终序列，在彭宁阱中实现了高效的轴向基态冷却。我们的总基态冷却时间为3.8 ms，与此前在弱束缚区间内对 $^{40}Ca^{+}$ 进行的边带冷却演示 [15]相比，缩短了五倍以上。测得的DR冷却动力学——包括冷却速率和最终模占据数——均可由半经典模型很好地描述。我们还通过阱势调制实现相干模交换，将这一冷却方案扩展到径向修正回旋模和磁控管模，最终使三个本征模的模占据数均达到亚多普勒水平。

三个模式中有两个模式的最终温度受到暗共振冷却过程中的反冲加热限制。反冲加热的大小会随离子初始温度、冷却时长以及具体的激光激发参数而变化。我们估计，通过改善激光束强度稳定性并进一步稳定397埃激光的频率，可将未冷却模式的最终反冲加热激发控制在每个模式五个量子以下。在暗共振冷却过程中，也可能通过参数模交换激发持续耦合轴向和径向自由度期间。我们最初尝试了这一方法，但未能奏效；这可能是因为未补偿的微运动受势能调制诱发，进而改变了暗共振冷却动力学。

本文所述技术扩展了利用彭宁阱中原子离子开展量子信息实验的激光冷却方法体系。要继续推动彭宁阱量子计算架构的实现，必须开发能够适用于各种离子约束条件的高效激光冷却方案。

致谢

作者感谢 Kenton R. Brown、Jonathan P. Home 和 Daniel Kienzler 提供有益的讨论，并感谢 Creston D.Herold 仔细审阅稿件。本研究由美国陆军研究办公室资助，依据资助编号 W911NF- 24-1-0355 开展。本文所载观点和结论仅代表作者本人，不应被视为代表美国陆军研究办公室或美国政府的官方政策，无论这些政策是明示还是暗示。美国政府有权为政府用途复制和分发转载件，尽管其中可能包含版权声明。

[1] S. Jain、T. Sägesser、P. Hrmo、C. Torkzaban、M. Stadler、R. Oswald、C. Axline、A. Bautista-Salvador、C. Os- pelkaus、D. Kienzler 和 J. Home，Nature **627**，510（2024）。[2] J. P. Gaebler、T. R. Tan、Y. Lin、Y. Wan、R. Bowler、A. C. Keith、S. Glancy、K. Coakley、E. Knill、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，《物理评论快报》**117**，060505（2016）。[3] C. J. Ballance、T. P. Harty、N. M. Linke、M. A. Sepiol 和 D. M. Lucas，《物理评论快报》**117**，060504（2016）。[4] C. R. Clark、H. N. Tinkey、B. C. Sawyer、A. M. Meier、K. A. Burkhardt、C. M. Seck、C. M. Shappert、N. D. Guise、C. E. Volin、S. D. Fallek、H. T. Hayden、W. G. Rellergert 和 K. R. Brown，《物理评论快报》**127**，130505（2021）。[5] C. H. Baldwin、B. J. Bjork、M. Foss-Feig、J. P. Gae- bler、D. Hayes、M. G. Kokish、C. Langer、J. A. Sedlacek、D. Stack 和 G. Vittorini，《物理评论A：原子、分子与光学物理》**103**，012603（2021）。[6] C. F. Roos、D. Leibfried、A. Mundt、F. Schmidt-Kaler、J. Eschner 和 R. Blatt，《物理评论快报》**85**，5547 2000（）。[7] R. Lechner、C. Maier、C. Hempel、P. Jurcevic、B. P. Lanyon、T. Monz、M. Brownnutt、R. Blatt和C. F. Roos，《物理评论A：原子、分子与光学物理》**93**，053401（2016）。[8] D. T. C. Allcock、T. P. Harty、M. A. Sepiol、H. A. Janacek、C. J. Ballance、A. M. Steane、D. M. Lucas和D. N. Stacey，《新物理学杂志》**18**，023043（2016）。[9] N. Scharnhorst、J. Cerrillo、J. Kramer、I. D. Leroux、J. B. Wübbena、A. Retzker和P. O. Schmidt，《物理评论A》**98**，023424（2018）。[10] L. Feng、W. Tan、A. De、A. Menon、A. Chu、G. Pagano和C. Monroe，《物理评论快报》**125**，053001（2020）。[11] J. J. Wu、P.-Y. Hou、S. D. Erickson、A. D. Brandt、Y. Wan、G. Zarantonello、D. C. Cole、A. C. Wilson、D. H. Slichter和D. Leibfried，《物理评论A：原子、分子与光学物理》**111**，043109（2025）。[12] J. P. Bartolotta、B. Estey、M. Foss-Feig、D. Hayes和C. N. Gilbreth，超出兰姆-迪克区的囚禁离子晶体振动模激光冷却（2024）。[13] C. Huang、C. Wang、H. Zhang、H. Hu、Z. Wang、Z. Mao、S. Li、P. Hou、Y. Wu、Z. Zhou和L. Duan，《物理评论快报》**133**，113204（2024）。[14] E. Jordan、K. A. Gilmore、A. Shankar、A. Safavi-Naini、

J. G. Bohnet、M. J. Holland和J. J. Bollinger，《物理评论快报》**122**，053603（2019）。[15] P. Hrmo、M. K. Joshi、V. Jarlaud、O. Corfield和R. C. Thompson，arXiv:1907.02406 [physics, physics:quant-ph]（2019）。[16] J. Goodwin、G. Stutter、R. Thompson和D. Segal，《物理评论快报》**116**，143002（2016）。[17] J. M. Cornejo、J. Brombacher、J. A. Coenders、M. Von Boehn、T. Meiners、M. Niemann、S. Ulmer和C. Ospelkaus，《物理评论研究》**6**，033233（2024）。[18] C. Mordini、A. Ricci Vasquez、Y. Motohashi、M. Müller、M. Malinowski、C. Zhang、K. K. Mehta、D. Kienzler和J. P. Home，《物理评论X》**15**，011040（2025）。[19] Z. Xing、H. M. Rivy、V. Natarajan、A. M. Kolhatkar、G. Beck和K. K. Mehta，相位稳定驻波中的快速多模囚禁离子激光冷却（2025），arXiv:2512.10900 [physics]。[20] M. Roghani和H. Helm，《物理评论A：原子、分子与光学物理》**77**，043418（2008）。[21] E. A. Cornell、R. M. Weisskoff、K. R. Boyce和D. E. Pritchard，Physical Review A **41**，312（1990）。[22] D. J. Gorman、P. Schindler、S. Selvarajan、N. Daniilidis和H. Häffner，Physical Review A **89**，062332（2014）。[23] W. M. Itano和D. J. Wineland，Physical Review A **25**，35 1982( )。[24] M. J. Jensen、T. Hasegawa和J. J. Bollinger，Physical Review A **70**，033401（2004）。[25] K. Koo、J. Sudbery、D. M. Segal和R. C. Thompson，Physical Review A **69**，043402（2004）。[26] D. J. Wineland和W. M. Itano，《物理评论A：原子、分子与光学物理》**20**，1521（1979）。[27] H. F. Powell、S. R. d. Echaniz、E. S. Phillips、D. M. Segal和R. C. Thompson，《物理学杂志B：原子》，分子与光学物理 **36**, 961 (2003). [28] B. J. McMahon, K. R. Brown, C. D. Herold, and B. C. Sawyer,《物理评论快报》**133**, 173201 (2024). [29] R. J. Hendricks, E. S. Phillips, D. M. Segal, and R. C. Thompson,《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》 **41**, 35301 (2008). [30] G. Savard, S. Becker, G. Bollen, H.-J. Kluge, R. Moore, T. Otto, L. Schweikhard, H. Stolzenberg, and U. Wiess,《物理快报A》 **158**, 247 (1991). [31] H. F. Powell, D. M. Segal, and R. C. Thompson,《物理评论快报》 **89**, 093003 (2002). [32] S. Guan, M. C. Wahl, and A. G. Marshall,《化学物理学杂志》 **100**, 6137 (1994). [33] E. S. Phillips, R. J. Hendricks, A. M. Abdulla, H. Ohadi, D. R. Crick, K. Koo, D. M. Segal, and R. C. Thompson, Physical Review A **78**, 032307 (2008). [34] G. Morigi, Physical Review A **67**, 033402 (2003).[35]我们的阱印刷电路板电极产生的静电四极场相对于阱磁场略有倾斜。我们通过施加一种波形，对方位分段电极进行差分充电，从而消除这一倾斜。这意味着，对所有分段电极施加均匀的振荡电压，会引入一个相对于磁场倾斜的振荡四极势。 [36] 图 5 的数据反映出，技术噪声导致轴向模式的加热率背景偏高。我们最近通过在不进行多普勒冷却时，以电子方式断开轴向化输入端与阱的连接，消除了这一技术噪声源。 [37] H. A. Janacek, 用于模拟囚禁离子量子比特的光学布洛赫方程, 博士论文, 牛津大学 (2015). [38] H.-K. Lau and M. B. Plenio,《物理评论B》 **94**, 054305 2016( ).