纳维–斯托克斯方程的贝叶斯方法

NicholasG. Polson
芝加哥大学布斯商学院

Vadim Sokolov乔治·梅森大学系统工程与运筹研究系

arXiv:2602.02945v1 [stat.CO] 3 Feb 2026

初稿：2025年12月23日 本稿：2026年2月4日

摘要

我们提出一种贝叶斯方法，用于对不可压缩纳维–斯托克斯方程进行数值求解，并量化其中的不确定性。核心思想是将离散化纳维–斯托克斯动力学视为状态空间模型，并将数值求解看作后验计算：先验分布编码物理结构和建模误差，求解器输出状态及关注量的分布，而非单一轨迹。在二维情形下，随机表示（费曼–卡茨表示，以及给定漂移下线性对流–扩散的随机特征线）为蒙特卡罗求解器提供理论依据，并有助于理解不确定性传播。在三维情形下，我们构建随机纳维–斯托克斯模型，并介绍用于谱离散化中不确定性传播的基于粒子和基于集成的贝叶斯工作流程。一项重要的计算优势是，可以通过粒子学习稳定地进行参数学习：边缘化和重采样–传播（单步平滑）构造可避免静态参数上的朴素序贯重要性采样所遭遇的权重退化。存在部分观测时，同样的机制还支持序贯观测更新，作为一项附加功能。我们还讨论基于正态方差-均值混合的非高斯（重尾）误差模型；通过潜在尺度增广，这类模型可实现条件高斯更新。

1 引言

不可压缩纳维–斯托克斯方程，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \quad \nabla \cdot u = 0, \tag{1}$$

支配黏性不可压缩流体运动，其中u 表示速度，p 表示压力，$\nu > 0$表示黏度，f 表示外力。

本文提出一种贝叶斯视角，将数值求解与不确定性量化统一组织为后验推断。费曼–卡茨定理将线性抛物型偏微分方程与随机过程上的期望联系起来，并为二维原型场景中的蒙特卡洛求解器提供了理论依据；Yudovich [Yudovich, 1963] 为无黏二维涡量提供了经典的适定性基准。在三维情况下，非线性和涡旋拉伸使直接的闭式费曼–卡茨约化无法实现，因此我们转而关注基于粒子方法和集合方法、可扩展的贝叶斯求解器。当存在部分观测时，这些求解器也可自然扩展到滤波（数据同化）。在湍流状态下，重尾误差模型（例如正态方差-均值混合）能够提供稳健的观测更新，并可通过潜变量增广保持计算上的可处理性。

我们的目标是展示如何利用贝叶斯建模与推断，为纳维–斯托克斯方程构建数值求解器，并量化离散化、外力和建模误差带来的不确定性。当存在部分观测时，序贯观测更新自然成为同一概率求解器的副产品，而非其组织原则。本文仅在有助于阐明这一数值贝叶斯观点的范围内介绍数学内容。

具体而言，我们将：

- 将离散化的纳维–斯托克斯方程表述为**状态空间模型**（动力学 + 观测模型），并将数值求解解释为**后验计算**；
- 介绍适用于高维谱方法离散化的**粒子**与**集成**工作流程，重点说明自助式／全状态粒子滤波会在哪些情况下退化，以及实践中如何缓解这一问题（边缘化／Rao–Blackwell 化、重采样–传播设计、低维潜变量增广）；
- 强调**粒子学习**是实现**避免权重退化的在线参数学习**的一种实用途径，采用充分统计量以及重采样–传播（单步平滑）构造；
- 将二维随机表示作为蒙特卡洛求解器和不确定性传播的**启发性原型**，强调显式部分（具有预设漂移项的线性偏微分方程）与隐式部分（全耦合纳维–斯托克斯方程）之间的区别；
- 讨论**非高斯误差模型**（通过正态方差-均值混合实现重尾），这类模型借助潜在尺度增广支持稳健的贝叶斯更新。

第2节介绍贝叶斯数值方法视角所需的最基础数学背景。第3节以二维涡量问题为例，阐释随机表示和蒙特卡洛近似。第4节介绍适用于三维离散化的粒子/系综贝叶斯求解器工作流程（并说明有数据时如何纳入观测更新）。第5节讨论适用于湍流状态的非高斯（稳健）误差模型。第6节概述地球物理学和流动控制中的应用场景。第7节作总结。

2 数学基础

本节统一符号，并回顾全文将用到的随机过程和推断对象（包括存在观测更新时的滤波）。本节有意有所取舍：我们的目标是为贝叶斯数值方法提供支持，而非全面介绍偏微分方程。

2.1 纳维–斯托克斯方程

令D 表示 $\mathbb{R}^d$、周期环面 $\mathbb{T}^d$，或具有光滑边界的有界区域$D \subset \mathbb{R}^d$（通常为$d = 2$ 或$d = 3$）。不可压缩纳维–斯托克斯方程 (1) 表示动量和质量守恒。项 $\partial u/\partial t$ 是局部加速度；$(u \cdot \nabla)u$是对流加速度； $-\nabla p$ 是确保不可压缩性的压力梯度力；$\nu \Delta u$ 是粘性扩散。

对 (1) 取旋度可消去压力梯度，从而得到关于 $\omega = \nabla \times u$ 的涡量方程：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)u + \nu \Delta \omega + \nabla \times f. \tag{2}$$

在二维情况下， ω 是一个标量（旋度的第三个分量），拉伸项$(\omega \cdot \nabla)u$ 恒等于零。在三维情况下，该项表示涡旋拉伸——涡旋线受速度梯度拉伸而增强的机制。

对于 $\mathbb{R}^2$ 上的二维流动（或环面上具有相应周期核的流动），速度可由涡量通过毕奥-萨伐尔定律恢复：

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y,t)\, dy, \tag{3}$$

其中 $(x_1,x_2)^\perp = (-x_2, x_1)$。等价地，引入流函数 ψ，且 $u = \nabla^\perp \psi = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$，泊松方程 $-\Delta \psi = \omega$ 将流函数与涡量联系起来。

2.2 三维纳维–斯托克斯方程的函数空间框架

三维情形下对(1)的数学分析采用 Leray–Hopf 理论。对于具有光滑边界的有界区域 $D \subset \mathbb{R}^3$，定义

$$H = \text{the closure in } L^2(D)^3 \text{ of } \{u \in C_0^\infty(D)^3 : \nabla \cdot u = 0\}, \tag{4}$$

$$V = \{u \in H_0^1(D)^3 : \nabla \cdot u = 0\}, \tag{5}$$

其中 $V \subset H \subset V'$ 构成一个 Gelfand 三元组。Leray–Helmholtz 投影算子 $P : L^2(D)^3 \to H$ 投影到无散场上，从而消去压力。

定义 2.1 (Leray–Hopf 弱解)。 设$f \in L^2(0,T;V')$ 且 $u_0 \in H$。若可测函数 $u : [0,T] \to H$ 满足以下条件，则称其为方程 (1) 的 Leray–Hopf 弱解：

(i) $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$;

(ii) 对所有 $\phi \in C_0^\infty(D \times [0,T))^3$ 且满足 $\nabla \cdot \phi = 0$:

$$\int_0^T \int_D [-u \cdot \partial_t \phi - (u \otimes u) : \nabla \phi + \nu \nabla u : \nabla \phi] \, dx \, dt = \int_D u_0 \cdot \phi(0) \, dx \tag{6}$$

$$+ \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle_{V',V} \, dt; \tag{7}$$

(iii) 满足能量不等式:

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle_{V',V} \, ds. \tag{8}$$

Leray [Leray, 1934]证明了三维弱解的存在性。唯一性仍未解决。

2.3 随机微积分

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ 是满足通常条件的滤过概率空间。标准布朗运动$W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ 具有连续路径、$W_0 = 0$、独立增量，以及$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$。

Itô 随机微分方程

$$dX_t = b(X_t, t) \, dt + \sigma(X_t, t) \, dW_t, \quad X_0 = x_0, \tag{9}$$

在 b 和 σ 满足 Lipschitz 条件及线性增长条件时，该方程存在唯一强解。X_t 的密度$p(x,t)$（若存在）满足福克-普朗克方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot (bp) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} p), \tag{10}$$

其中$a = \sigma\sigma^\top$ 是扩散矩阵。$u(x,t) = \mathbb{E}$[的后向柯尔莫哥洛夫方程$g(X_T)|X_t = x$]为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad u(x,T) = g(x). \tag{11}$$

定义 2.2（正态尺度混合）。如果$X = \mu + \sigma Z$，其中$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$，且 $\sigma > 0$是一个独立于Z的随机变量，则随机变量X 服从正态尺度混合分布。等价地，$X|\sigma \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$。

注 2.3。 尺度混合分布包括 Student-t 分布（逆伽马混合）、拉普拉斯分布（指数混合）和正态逆高斯分布（逆高斯混合）。

2.4 贝叶斯状态空间推断（有数据时的滤波）

考虑一个扩散驱动的状态空间模型；存在观测过程时，后验推断可表述为滤波：

$$dX_t = f(X_t, t)\,dt + G(X_t, t)\,dW_t, \quad X_0 \sim \pi_0, \tag{12}$$

$$dY_t = h(X_t, t)\,dt + R^{1/2}(t)\,dV_t, \tag{13}$$

其中W_t 和V_t 是相互独立的布朗运动，$X_t \in \mathbb{R}^n$ 是隐状态，而$Y_t \in \mathbb{R}^m$ 是观测过程。

滤波问题旨在求条件分布

$$\pi_t(dx) = \mathbb{P}(X_t \in dx \mid \mathcal{F}_t^Y), \quad \mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y_s : 0 \le s \le t). \tag{14}$$

在正则性条件下， π_t 满足 Kushner-Stratonovich 方程，这是一种测度值随机偏微分方程。对于非线性系统，该方程没有闭式解。

定义 2.4 （粒子滤波器）。 粒子滤波器通过加权经验测度近似 π_t ：

$$\pi_t^N(dx) = \sum_{i=1}^{N} w_t^i\, \delta_{X_t^i}(dx), \quad \sum_{i=1}^{N} w_t^i = 1, \tag{15}$$

w其中 $\{X_t^i\}_{i=1}^N$ 是粒子轨迹， $\{w_t^i\}_{i=1}^N$ 是重要性权重 .

当 $N \to \infty$ 时，在适当条件下， $\pi_t^N \to \pi_t$ 弱收敛。贝叶斯的基本洞见是，条件期望 $\mathbb{E}[g(X_t)|\mathcal{F}_t^Y]$ 是$g(X_t)$的最优（方差最小）估计器。

3 二维原型：随机表示与蒙特卡洛求解器

我们以二维涡量公式为原型，将偏微分方程演化与随机模拟联系起来。数值方法的关键要点是：具有给定漂移的线性平流–扩散方程存在期望表示，可通过蒙特卡洛方法近似；而全耦合纳维–斯托克斯方程则可视为同一思想的隐式不动点版本。

3.1 涡量公式

在二维情形下，涡量方程 (2) 化简为标量平流-扩散方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega = \nu \Delta \omega + (\nabla \times f)_3. \tag{16}$$

速度 u 通过 (3) 从 ω 中恢复。对于黏性情形 $\nu > 0$，根据能量估计可得经典解的整体存在性和唯一性。

对于无黏欧拉方程（$\nu = 0$），情况更为微妙。涡量仅仅被输运：$\frac{D\omega}{Dt} = 0$ 沿粒子轨迹传播。Kelvin 环量定理指出，物质环路上的环量守恒。

3.2 尤多维奇唯一性定理

二维欧拉方程粗糙数据情形下的基本唯一性结果归功于 Yudovich[Yudovich, 1963]。

定理 3.1 (Yudovich，1963年)。 设 $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$。则二维不可压欧拉方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega = 0, \quad u = \nabla^\perp(-\Delta)^{-1}\omega, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0, \tag{17}$$

对所有 $T > 0$，均存在唯一弱解 $\omega \in L^\infty([0,T]; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ 。

注 3.2。 有界涡量条件本质上是尖锐的。对于无界涡量，可能出现非唯一性。Yudovich [Yudovich, 1995] 后来将结果推广到允许 $\|\omega_0\|_{L^p}$ 至多按 $\sqrt{\log p}$ 增长，其中 $p \to \infty$。

3.3 费曼-卡茨定理

Feynman-Kac公式为抛物型偏微分方程解提供了一种概率表示。

定理 3.3 (费曼-卡茨)。 考虑终值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t) \cdot \nabla u + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\Delta u - V(x,t)u = 0, \quad u(x,T) = g(x), \tag{18}$$

对于$(x,\ t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$。令 $\{X_s\}_{s\in[t,T]}$ 满足随机微分方程

$$dX_s = b(X_s,s)\,ds + \sigma(X_s,s)\,dW_s, \quad X_t = x. \tag{19}$$

在 b、 σ、V 和 g 满足适当正则性条件的情况下，

$$u(x,t) = \mathbb{E}\left[g(X_T) \exp\left(-\int_t^T V(X_s,s)\,ds \right) \middle| X_t = x \right]. \tag{20}$$

对于热方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu\Delta\omega, \quad \omega(x,0) = \omega_0(x), \tag{21}$$

对应于具有给定$u = 0$的式 **(16)**，我们有$b = 0, \sigma = \sqrt{2\nu}$，$V = 0$。Feynman-Kac公式（适用于初值问题）给出：

$$\omega(x,t) = \mathbb{E}[\omega_0(x + \sqrt{2\nu}W_t)] = \int_{\mathbb{R}^2} G_\nu(x-y,t)\omega_0(y)\,dy, \tag{22}$$

其中$G_\nu(x,t) = (4\pi\nu t)^{-1}\exp(-|x|^2/(4\nu t))$ 是热核。

贝叶斯解释： ω（x，t）是对具有扩散系数 2ν 的布朗路径的期望。对于给定的无散漂移场 u，线性平流-扩散

方程 $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega$ 具有随机特征表示：如果 X_s满足倒向随机微分方程

$$dX_s = -u(X_s, s)\, ds + \sqrt{2\nu}\, dW_s, \quad X_t = x, \tag{23}$$

于是 $\omega(x,t) = \mathbb{E}[\omega_0(X_0)]$（如果有外力，还会出现一个额外的时间积分）。对于完整的二维纳维-斯托克斯系统，漂移项 u 通过毕奥-萨伐尔定律与 ω 耦合，因此该表示是隐式的，而不是闭式的费曼–卡茨公式。

注 3.4（与布莱克-斯科尔斯的联系（计算视角））。“解即条件期望”这一模式也是经典期权定价的基础。在布莱克-斯科尔斯模型中，[布莱克和斯科尔斯指出，1973], 衍生品价格可以表示为扩散过程下的贴现条件期望。就我们的目的而言，关键在于方法论：费曼–卡茨定理将偏微分方程的求解转化为一个期望，并可通过数值方法（蒙特卡洛 / 粒子方法）进行近似；这正是我们用于贝叶斯数值纳维-斯托克斯求解器的计算范式（在有数据时，也用于相关的观测更新）。

3.4 解析解

费曼-卡茨表示为某些初始数据给出显式解。这些解为验证随机模拟和贝叶斯数值逼近提供了有用的基准。

对于原点处环量为 Γ 的点涡（兰姆-奥辛涡），$\omega_0(x) = \Gamma \delta(x)$：

$$\omega(r,t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad r = |x|. \tag{24}$$

速度场为

$$u_\theta(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right), \tag{25}$$

在涡核处的刚体旋转（$u_\theta \sim \Gamma r/(8\pi\nu t)$ 当$r \to 0$时）与无旋流动（$u_\theta \sim \Gamma/(2\pi r)$ 当$r \to \infty$时）之间插值。涡量分布为高斯分布，方差为$2\nu t$，与布朗运动的方差一致。

对于相距d的两个符号相反的高斯涡，费曼-卡茨表示表明，粘性扩散最终会导致湮灭，间距因相互平流而减小，同时每个涡核不断扩散。

4 三维贝叶斯数值求解器

在三维情况下，主要的数值贝叶斯任务是对高维动力系统进行不确定性感知求解：给定一个离散纳维-斯托克斯模型，近似计算随时间演化的速度场及关注量的分布，并反映离散化、外力和建模误差。若有部分观测可用，同一概率求解器会通过似然将其纳入，并实现

滤波这一额外功能。因此，我们着重讨论随机模型的构建、离散化，以及可扩展的粒子/集合算法。

4.1 动机：涡量拉伸与模型不确定性

在三维中，涡量方程 (2) 包含拉伸项 $(\omega \cdot \nabla)u$，它会放大涡量。考虑以下分解：

$$(\omega \cdot \nabla)u = S\omega + \frac{1}{2}\omega \times (\nabla \times u) = S\omega, \tag{26}$$

其中，$S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u^j)$ 是应变率张量。涡量方程变为

$$\frac{D\omega}{Dt} = S\omega + \nu\Delta\omega. \tag{27}$$

当涡旋线与S的伸展特征向量对齐时，涡量会增强。这一机制驱动湍流中的能量级联，并使三维动力学区别于二维动力学。

4.2 为什么三维中的闭式随机表示受到限制

经典的 Feynman-Kac公式要求偏微分方程是线性的 。三维纳维–斯托克斯方程由于对流项$(u \cdot \nabla)u$而具有非线性。以下三个结构特征阻碍了直接应用 Feynman-Kac随机表示：

首先，非线性意味着解u 会出现在输运算子中，从而使偏微分方程与定义该表示的随机过程耦合起来。

其次，非局部性通过毕奥-萨伐尔定律体现

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(y,t) \times (x-y)}{|x-y|^3}\, dy \tag{28}$$

这意味着u 在点x 处的值取决于空间中各处的 ω 。

第三，涡旋拉伸会形成反馈回路：拉伸项$(\omega \cdot \nabla)u$ 会形成反馈回路，其中 ω 按照一个涉及 ∇u的方程演化，而后者又非局部地依赖于 ω 自身。

4.3 Constantin-Iyer表示

Constantin和Iyer [Constantin和Iyer， 2008]提出了一种随机拉格朗日表述，将纳维–斯托克斯方程的概率表示写为对随机流的期望，尽管这并非显式的费曼-卡茨公式。考虑随机流映射$X(\alpha,t)$ 满足

$$dX = u(X,t)\, dt + \sqrt{2\nu}\, dW_t, \quad X(\alpha,0) = \alpha, \tag{29}$$

其中 α 是拉格朗日标签。速度具有如下表示

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[P\big((\nabla A_t(x))^\top u_0(A_t(x))\big)\right], \tag{30}$$

其中 $A_t = X_t^{-1}$是（随机）逆流映射，P 是勒雷-亥姆霍兹投影算子。X_t 对u 的依赖使其成为一种隐式不动点表述，而非闭式表达式。

注 4.1. T　　与费曼-卡茨方法的根本区别概括如下　　s:

经典费曼-卡茨方法	**Constantin-Iyer**
线性偏微分方程	非线性偏微分方程
显式公式	隐式不动点
与解无关的过程	依赖于解的过程
局部/半局部	非局部（毕奥-萨伐尔）

4.4 随机纳维-斯托克斯方程

随机纳维-斯托克斯方程用于刻画湍流涨落或外力不确定性：

$$du + [\nu Au + B(u,u)]\,dt = Pf\,dt + G\,dW(t), \tag{31}$$

其中 $A = -P\Delta$ 是斯托克斯算子，其定义域为 $D(A) = V \cap H^2(D)^3$, $B(u,v) = P[(u\cdot\nabla)v]$ 是投影非线性项，P 是 Leray–Helmholtz 投影算子，且 $W(t)$是取值于 H 的维纳过程：

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(t)\,e_k, \tag{32}$$

其中 $\{\beta_k(t)\}$ 为相互独立的标准布朗运动，且 $\{e_k\}$ 为H的一个标准正交基。

温和解表述采用斯托克斯半群 $S(t) = e^{-\nu tA}$：

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)B(u(s),u(s))\,ds + \int_0^t S(t-s)Pf\,ds + \int_0^t S(t-s)G\,dW(s). \tag{33}$$

定理 4.2 (Flandoli 和 Gatarek [1995])。 设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为具有光滑边界的有界区域，$u_0 \in H$，并假设噪声为迹类噪声：迹$(GG^*) = \sum_k \lambda_k < \infty$。则：

(i) 存在方程(31)的鞅解。

(ii) 在二维情形下，解是唯一的。

（*iii*）在三维情况下，唯一性仍是一个悬而未决的问题。

4.5 相互作用粒子与麦基恩–弗拉索夫方程

纳维–斯托克斯方程（尤其是涡量形式）推动了相互作用粒子和平均场近似的发展 [麦基恩, 1966年，库尔茨和熊， 1999]。一个典型的麦基恩–弗拉索夫粒子系统包含 N 个粒子 $X_i(t) \in \mathbb{R}^d$:

$$dX_i = (K * \mu_t^N)(X_i)\,dt + \sqrt{2\nu}\,dW_i, \tag{34}$$

其中 $\mu_t^N = {}^1_{N-}\sum_{j=1}^N \delta_{X_j(t)}$，$K$ 是相互作用核，而 $\{W_i\}$ 是相互独立的布朗运动。经验测度

$$\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_i(t)} \tag{35}$$

满足一个随机偏微分方程。当$N \to \infty$趋于无穷时，混沌传播意味着粒子渐近独立，每个粒子都服从满足麦基恩–弗拉索夫方程的分布 μ_t：

$$dX_t = b(X_t, \mu_t)\,dt + \sigma(X_t, \mu_t)\,dW_t, \quad \mu_t = \mathcal{L}(X_t). \tag{36}$$

对于二维涡旋方法，核是比奥–萨伐尔核 $K(x) = x^\perp/(2\pi|x|^2)$，其极限恢复涡量方程（16） [科泰和库穆察科斯， 2000]。在三维情形中，由于涡旋拉伸，情况更为复杂，但利用涡丝或涡团方法也存在类似的构造。

4.6 平均场极限与福克–普朗克联系

平均场极限$N \to \infty$ 将相互作用粒子系统与针对 μ_t 的非线性福克–普朗克方程联系起来；在基于涡量的情形中，它为纳维–斯托克斯方程及相关滤波问题的粒子近似提供了一条自然途径。

4.7 谱离散化

为便于计算，我们采用傅里叶基进行离散化。在周期区域$D = [0, 2\pi]^3$上：

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \hat{u}_k(t) e^{ik\cdot x}, \quad k\cdot\hat{u}_k = 0 \text{ (incompressibility)}. \tag{37}$$

谱方法纳维–斯托克斯方程为

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} = -\nu|k|^2\hat{u}_k - \sum_{j+m=k} P_k\big[i(m\cdot\hat{u}_j)\hat{u}_m\big] + \hat{f}_k + \hat{G}_k\dot{W}_k, \tag{38}$$

其中，$P_k = I - kk^T/|k|^2$ 是傅里叶空间中的勒雷投影算子。

截断至 $|k| \le K_{\max}$ 可得到一个具有$M = O(K_{\max}^3)$ 自由度的有限维系统，适用于粒子与集合贝叶斯求解器。当此类求解器与观测耦合时，它便成为一种滤波方法。

4.8 基于粒子的贝叶斯求解器（带可选观测）

粒子滤波形式可用作概率数值求解器：它针对离散化动力学传播一组加权轨迹，从而表示演化状态中的不确定性。当可获得部分观测y_k时，同一机制通过似然将其纳入，并产生速度场的更新后验分布。对于具有状态$u \in \mathbb{R}^{2M}$以及（可选）观测y_k（位于时刻t_k）的离散化系统，我们使用状态方程

$u_{k+1} = u_k + \Delta t\, F(u_k) + \sqrt{\Delta t}\, G\xi_k$，其中 $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, I)$，观测方程为$y_k = Hu_k + \eta_k$，其中 $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, R)$。

T自举粒子滤波器维护粒子 $\{u_k^i\}_{i=1}^N$ 和权重 $\{w_k^i\}$ ：

1. **预测：** $u_{k+1}^i = u_k^i + \Delta t\, F(u_k^i) + \sqrt{\Delta t}\, G\xi_k^i$.
2. **更新：** $\tilde{w}_{k+1}^i = w_k^i \cdot p(y_{k+1} | u_{k+1}^i)$，然后归一化。
3. **重采样：** 如果$N_{\text{eff}} = 1/\sum_i (w^i)^2 < N_{\text{thresh}}$，则进行重采样。

后验均值为 $\bar{u}_k = \sum_i w_k^i u_k^i$。粒子学习方法 [Carvalho 等人， 2010]通过传播未知参数的充分统计量，并采用边缘化/重采样–传播 结构（辅助粒子滤波器），利用一步前瞻信息选择祖先粒子，从而扩展了这一框架。这在很大程度上避免了通过序贯重要性采样进行朴素参数学习时出现的权重退化问题，同时保持更新在时间上的局部性。

对于非常高维的状态（$M \gtrsim 10^4$），全状态自举粒子滤波会遭遇权重退化，除非利用额外的结构。集合卡尔曼滤波器（EnKF）则提供了一种替代方案：采用高斯近似并结合局地化来抑制虚假长程相关 [Evensen，2009，Reich 和 Cotter， 2015]。

5 非高 斯误差模型与稳健贝叶斯求解器

5.1 动机：重尾与稳健性

在湍流状态下，新息和观测误差通常呈重尾分布，而高斯似然可能导致滤波器表现脆弱（粒子滤波器中的权重退化；高斯更新对离群值敏感）。一种实用的贝叶斯补救方法是采用重尾似然，并通过条件高斯增广保持计算可处理性。

5.2 正态方差-均值混合

正态方差-均值混合提供了一大类重尾模型，同时保留条件高斯结构。在标量情形下，若

$$X \mid \tau \sim \mathcal{N}(\mu + \beta\tau,\ \tau), \qquad \tau > 0, \tag{39}$$

那么只要 τ 在 0 附近有足够的概率质量和/或具有重尾，X 的边际分布就是重尾的。在多元情形下，通常使用

$$X \mid \tau \sim \mathcal{N}(\mu + \beta\tau,\ \tau\Sigma), \tag{40}$$

其中，Σ 是基准协方差，τ 是一个正标量（或者，对于逐分量稳健性而言，是一个独立尺度向量）。

主要的计算优势在于，可以通过增广 τ来进行推断。在给定 τ的条件下，可以恢复高斯似然/动力学，因此仍可使用卡尔曼更新和高斯权重计算。这在高维纳维–斯托克斯场景中特别有用，因为在这些场景中，人们希望进行稳健的观测更新，同时不放弃可扩展的高斯计算。

5.3 I 逆伽马与逆高斯混合（术语）

文献中有两种密切相关但彼此不同的“正态–逆·”构造，很容易将它们混淆：

- **逆伽马混合（Student-t）**。如果 $\tau \sim$ Inv-Gamma$(\cdot)$，且$X \mid \tau$ 服从方差与 τ成比例的高斯分布，那么X 服从 Student-t分布。这会产生极重的（多项式）尾部，是高斯似然的一种常见稳健替代方案。
- **逆高斯混合（正态逆高斯）**。若 τ 为逆高斯分布，且$X \mid \tau$ 为均值/方差关于 τ 仿射的高斯分布，则 X 为正态逆高斯（NIG）。这会产生半重（指数）尾，并且对序贯计算至关重要的是，可得到 τ 的便利条件分布。

下文中，“NIG”始终表示正态逆高斯（逆高斯 混合）。

5.4 正态逆高斯分布

正态逆高斯（NIG）分布 [Barndorff-Nielsen， 1997] 是一种典型的正态方差-均值混合 [Barndorff-Nielsen 等人， 1982]。它是稳健似然的一个便利选择，因为它允许潜在逆高斯尺度表示。

我们采用常见的参数化 NIG$(\alpha, \beta, \mu, \delta)$，约束为 $\delta > 0$ 和 $\alpha > |\beta|$。令 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$。

定义 5.1. $X \sim$NIG$(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ 若

$$X = \mu + \beta\tau + \sqrt{\tau}Z, \tag{41}$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$，$Z \perp \tau$、$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ 和 τ服从均值为 δ/γ 的逆高斯分布（等价地，在常用的均值/形状参数化下为 $\tau \sim \text{IG}(\delta/\gamma, \delta^2)$ ）。

NIG 密度为

$$f(x;\alpha,\beta,\mu,\delta) = \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\gamma+\beta(x-\mu)} \frac{K_1(\alpha q(x))}{q(x)}, \tag{42}$$

其中 $\gamma = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, $q(x) = \sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}$, 且 K_1 是修正贝塞尔函数 n.

特征函数为

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left(i\mu t + \delta\left(\gamma - \sqrt{\alpha^2-(\beta+it)^2}\right)\right). \tag{43}$$

对（43）求导可得

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \delta\frac{\beta}{\gamma}, \tag{44}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \delta\frac{\alpha^2}{\gamma^3}. \tag{45}$$

这一对 (α,β) 控制尾部厚度和偏度； δ 是尺度参数； μ 是位置参数。

与稳健贝叶斯更新相关的性质：

(i) 逆高斯分布混合的正态尺度混合。

(ii) 半重尾：$f(x) \sim |x|^{-3/2}e^{-\alpha|x|}$ 当 $|x| \to \infty$。

(iii) 对卷积封闭：若 $X_i \sim \mathrm{NIG}(\alpha,\beta,\mu_i,\delta_i)$ 相互独立，则 $\sum X_i \sim \mathrm{NIG}(\alpha,\beta,\sum\mu_i,\sum\delta_i)$。

(iv) 重尾和偏度可以在保留条件高斯结构的同时得到表示。

5.5 潜在尺度增广与条件后验分布

对于贝叶斯计算，关键对象是混合表示下给定 $X = x$时 τ 的条件分布。由

$$x-\mu = \beta\tau + \sqrt{\tau}z, \qquad z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

我们有

$$p(x \mid \tau) \propto \tau^{-1/2}\exp\left(-\frac{(x-\mu-\beta\tau)^2}{2\tau}\right). \tag{46}$$

由 NIG参数化所隐含的 τ 逆高斯先验可以指数形式写为

$$p(\tau) \propto \tau^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\tau}+\gamma^2\tau\right)\right), \tag{47}$$

相差一个归一化常数。相乘可得条件后验

$$p(\tau \mid x) \;\propto\; \tau^{-3/2}\exp\!\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2+(x-\mu)^2}{\tau}+\alpha^2\tau\right)\right), \tag{48}$$

这是一个 广义逆高斯分布 (GIG)，其指数为 $\lambda=-\frac{1}{2}$，“逆尺度”参数为 $\chi=\delta^2+(x-\mu)^2$，，“尺度”参数为 $\psi=\alpha^2$：

$$\tau \mid x \sim \mathrm{GIG}\Big(\lambda=-\tfrac{1}{2},\,\chi=\delta^2+(x-\mu)^2,\,\psi=\alpha^2\Big).$$

方程 (48) 是贝叶斯算法的核心：可以对 τ 进行采样（例如使用标准 GIG采样器），也可以使用条件期望，例如 $\mathbb{E}[\tau \mid x]$ 和$\mathbb{E}[\tau^{-1} \mid x]$，用于期望最大化/变分近似。由此得到的计算可直接用于滤波更新，因为给定 τ 后，模型服从高斯分布。

5.6 用于稳健观测耦合的 NIG 似然

为增强观测模型$y_k = Hu_k + \eta_k$的稳健性，可将高斯观测噪声替换为分量式 NIG模型。一种方便的设定是

$$\begin{aligned} y_k \mid u_k,\tau_k &\sim \mathcal{N}(Hu_k+\beta\tau_k,\;\tau_k R),\\ \tau_k &\sim \mathrm{IG}(\delta/\gamma,\delta^2), \end{aligned} \tag{49}$$

其中 τ_k 可以取标量（时刻k的全局尺度），也可以取向量（每个传感器/傅里叶模态对应独立尺度），以处理局部离群值。边缘分布下，每个分量均服从 NIG 分布。

潜变量 τ_k 充当观测协方差的随机膨胀：离群值由较大的 τ_k 解释，而不是迫使滤波器反应过度，从而实现稳健性。

给定当前预测均值 $\hat{}u^{k|k-1}$，（标量）新息为 $e_k = y_k - H\hat{}u^{k|k-1}$。在最简单的标量噪声情形下，条件分布 $\tau_k \mid e_k$ 仍为 GIG，形式如式（48），其中$x \leftarrow e_k$（若 $R \neq 1$，则需进行适当缩放）。给定 τ_k时，更新服从高斯分布，其协方差为 $\tau_k R$，均值偏移为 $\beta\tau_k$。

5.7 算法：稳健滤波器详解

现在，我们详细说明这些算法模式。据我们所知，尽管在明确引入增广后这些模式显而易见，但纳维–斯托克斯方程的数值文献中很少明确写出这些内容。

对于采用 NIG 观测的粒子滤波，假设动力学由（可能是非线性的）预测步骤$u^{k+1} = F(u_k) + \varepsilon_k$近似。为简单起见，取式（49）中的观测模型，其中 τ_k 为标量，并将粒子i 的新息定义为

$$e_k^{(i)} = y_k - Hu_{k|k-1}^{(i)}.$$

粒子滤波器在扩展状态（u_k, τ_k）上运行。

（A）先验提议 τ_k （无贝塞尔函数）。从其先验中传播 τ_k，并使用条件高斯似然计算权重：

1. **预测：**使用数值时间步进器（以及任何随机模型误差）传播粒子 $u^{(i)}{}_{k|k-1} \sim p(u_k \mid u^{(i)}{}_{k-1})$。

2. **尺度 p 传播：** 从 (4 中的逆高斯先验采样 $\tau^{(i)}{}_k \sim p(\tau_k)$ 9).

3. **权重更新：** 计算高斯似然

$$p(y_k \mid u^{(i)}_{k|k-1}, \tau^{(i)}_k) = \mathcal{N}\Big(y_k;\, Hu^{(i)}_{k|k-1} + \beta\tau^{(i)}_k,\, \tau^{(i)}_k R\Big)\,,$$

并更新权重

$$w^{(i)}_k \propto w^{(i)}_{k-1}\, p(y_k \mid u^{(i)}_{k|k-1}, \tau^{(i)}_k).$$

4. **重采样（如有需要）：** 当N_{eff} 低于阈值时，对粒子进行重采样。

这个变体无需计算修正贝塞尔函数，通常是最实用的起点。

（B）完全适配提议分布，针对 τ_k （方差更低，需要边际）。或者，提出$\tau^{(i)}{}_k \sim p(\tau_k \mid e^{(i)}{}_k)$，使用广义逆高斯分布形式（48）（必要时按 R 缩放）。此时，增量重要性权重变为边际 似然

$$w^{(i)}_k \propto w^{(i)}_{k-1}\, p(y_k \mid u^{(i)}_{k|k-1}),$$

其中 $p(y_k \mid u)$ 为 NIG 密度（或在独立性假设下的多元对应形式）。该提议分布通常会降低权重方差，但需要计算 NIG 边际（涉及 K_1）或对其进行近似。

在集合卡尔曼滤波中，仅在均值/协方差更新层面假设高斯性；一种实用的稳健变体是尺度混合集合卡尔曼滤波（SM-EnKF）：

1. 通过推进数值求解器抽取集合预报 $\{u^{(j)}{}_{k|k-1}\}_{j=1}^{N}$；

2. 对每个观测（或针对一个全局尺度），从其条件分布或基于新息的先验预测稳健规则中抽取尺度 τ_k；

3. 使用膨胀后的观测协方差 $\tau_k R$ （以及均值偏移 $\beta\tau_k$，如果包含）执行集合卡尔曼滤波分析步骤。

这保留了集合卡尔曼滤波的可扩展性，同时通过随机协方差膨胀提供重尾稳健性。

5.8 使用 NIG 增广的粒子学习（重采样–传播 / 单步平滑）

粒子学习 [Carvalho 等人, 2010] 通过传播低维充分统计量，并采用一种接近辅助粒子滤波器的重采样–传播构造，将参数学习融入粒子方法。概念上，首先利用一步前瞻信息选择 粒子（即执行单步平滑/祖先选择步骤），

然后才向前传播 。这正是粒子学习不会像针对静态参数的朴素序贯重要性采样那样出现“退化权重”现象的关键原因。

实际应用中，粒子学习通常通过对解析上易于处理的部分进行边缘化（积分），并仅用粒子传播剩余的低维不确定性来实现。在我们的设定中，NIG模型尤其适合这一策略，因为对潜在尺度进行条件化后，高斯结构便会恢复。

考虑一个具有 NIG 新息的状态空间模型：

$$u_t|u_{t-1},\tau_t \sim \mathcal{N}(f(u_{t-1}),\tau_t Q), \tag{50}$$

$$y_t|u_t,\tau_t \sim \mathcal{N}(Hu_t,\tau_t R), \tag{51}$$

$$\tau_t \sim \mathrm{IG}(\delta/\gamma,\delta^2), \tag{52}$$

其中， τ_t 是潜在逆高斯尺度变量。对 τ_t进行边缘化后，新息服从NIG分布，能够捕捉湍流速度增量中观察到的重尾特征。

在高维纳维–斯托克斯设定中，通常将速度状态u_t 视为高维变量，而将尺度 τ_t （以及参数）视为低维变量。因此，一种常见且有效的设计是：

- 使用序贯蒙特卡洛对τ_t 进行采样；
- 对τ_t 进行条件化，以便对u_t 执行高斯计算（卡尔曼型更新，或用于计算权重的高斯似然评估）。

这正是边缘化/Rao–Blackwell化原则：对低维非高斯部分保留粒子，并在可能时对其余部分进行解析积分。将这一原则与重采样–传播（辅助）设计结合，可以稳定地对参数和潜在尺度进行序贯学习，避免将其与超高维全状态自举粒子滤波器的退化问题混为一谈。

为了在 NIG观测模型中学习(μ,β) ，考虑一个标量残差模型$r_t = y_t - Hu_t$ ，其中

$$r_t \mid \tau_t,\mu,\beta \sim \mathcal{N}(\mu+\beta\tau_t,\ \tau_t),$$

定义 $\theta=(\mu,\beta)^\top$ 以及（随机）设计向量 $x_t=(1,\tau_t)^\top$。给定 $\tau_{1:t}$，这是权重为 $1/\tau_t$ 的加权线性回归。采用高斯先验 $\theta\sim\mathcal{N}(m_0,V_0)$时，后验分布仍为高斯分布，其更新后的充分统计量为

$$A_t=\sum_{s=1}^{t}\frac{1}{\tau_s}x_s x_s^\top=\begin{pmatrix}\sum_{s=1}^{t}\tau_s^{-1} & \sum_{s=1}^{t}1\\ \sum_{s=1}^{t}1 & \sum_{s=1}^{t}\tau_s\end{pmatrix}, \tag{53}$$

$$b_t=\sum_{s=1}^{t}\frac{1}{\tau_s}x_s r_s=\begin{pmatrix}\sum_{s=1}^{t}r_s/\tau_s\\ \sum_{s=1}^{t}r_s\end{pmatrix}. \tag{54}$$

Then

$$V_t^{-1}=V_0^{-1}+A_t,\qquad m_t=V_t\left(V_0^{-1}m_0+b_t\right),$$

粒子学习通过在每个粒子中携带 (A_t, b_t) （或等价的标量和$\sum \tau_s^{-1}, \sum \tau_s, \sum r_s, \sum r_s/\tau_s$）来进行。同样的思路也可逐分量扩展到向量观测或逐模态残差。

要从增广尺度学习 NIG 尾部参数(α, δ) （尾部/尺度），请注意，与(μ, β) 不同，这些参数通过 τ_t 上的先验进入，并且一般并不共轭。然而，在以采样尺度 $\tau_{1:t}$为条件时，对数似然贡献依赖于诸如 $\sum \tau_s$ 和 $\sum \tau_s^{-1}$之类的低维汇总量（在涉及修正贝塞尔函数的归一化常数意义下）。实践中可以:

- 基于校准窗口固定(α, δ) ，然后运行在线滤波，或
- 嵌入一个数值 M 步（或偶尔进行 MCMC 刷新），利用粒子内累积的尺度样本更新(α, δ) 。

Rao–Blackwell化带来的方差降低是显著的。通过对高斯状态u_t 经由卡尔曼滤波进行解析积分，粒子只需跟踪较低维的尺度变量 τ_t。这将有效方差按与状态维数成比例的因子降低，从而使该方法对高维湍流场可行。

在这种粒子学习视角下，NIG 为高斯误差提供了一种稳健的重尾替代方案，同时使序贯计算基本保持接近标准高斯滤波器：新增的环节只有 (i) 对潜在尺度进行采样或近似，以及 (ii) 可选地传播参数的紧凑充分统计量。

5.9 数值演示：粒子学习避免权重退化（参数学习）

为具体展示粒子学习的优势，我们设计了一个最小化的玩具实验，将粒子学习与朴素序贯重要性采样（SIS）进行比较，以便从观测流中学习一个静态参数。SIS 方法随时间累乘似然而不进行复壮，因此会出现严重的权重退化；而粒子学习利用充分统计量和重采样–传播（单步平滑）构造，在跟踪参数后验分布的同时保持粒子群的多样性。

图 1 展示了有效样本量（ESS）随时间的变化，以及参数的后验带。脚本 `code/demo particle learning vs sis.py` 可重现该图。

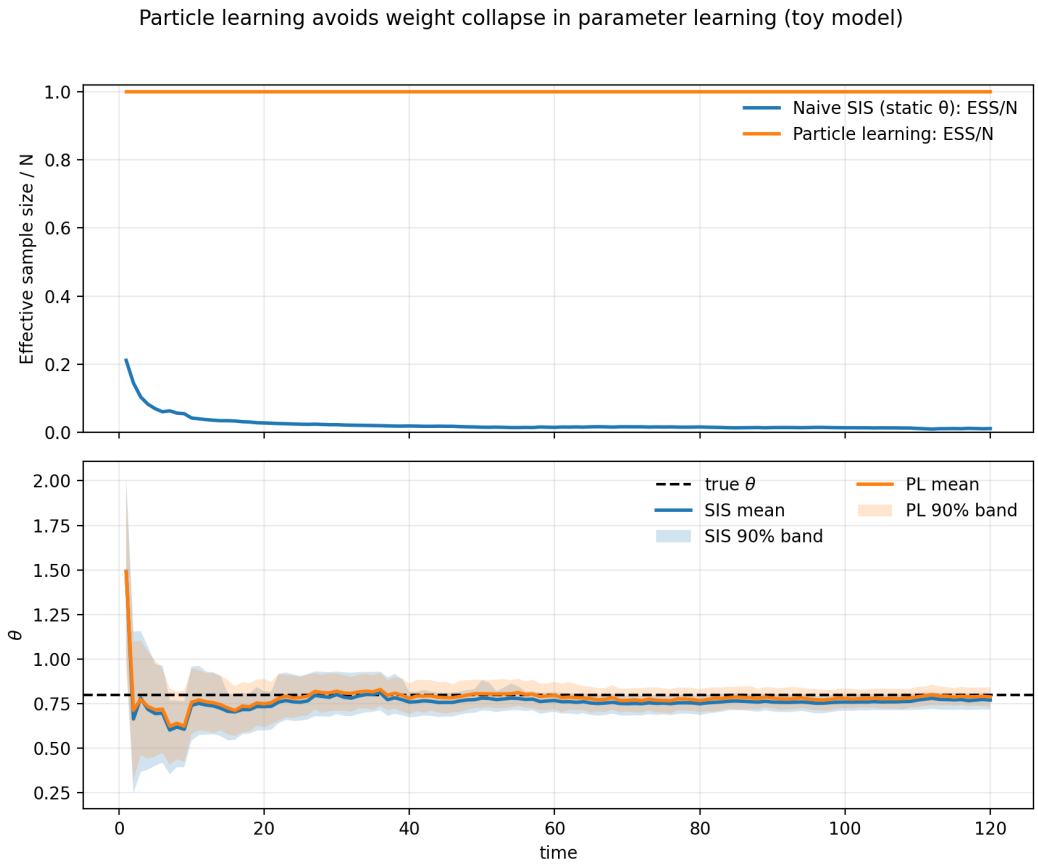


图 1：展示粒子学习一项关键计算优势的玩具参数学习示例。对静态参数进行朴素序贯重要性采样（SIS）会导致权重迅速退化（有效样本量不断下降），而粒子学习通过结合充分统计量（边缘化）与重采样–传播（单步平滑）更新来维持有效样本量。

5.10 数值演示：二维纳维–斯托克斯方程的粒子求解器（无观测）

为直接展示求解器视角（不进行同化），我们使用伪谱半隐式时间步进器，在周期环面上以涡量形式模拟二维纳维–斯托克斯方程。我们为不确定的物理/模型参数——即黏度 ν 和强迫振幅——设定先验，并通过粒子/集合近似，利用数值求解器传播该先验。最终得到解场及关注量（例如动能和涡量平方积分）的后验预测分布，这完全是通过偏微分方程求解器进行不确定性传播得出的。

图 2 展示了一次具有代表性的运行结果：终止时刻涡量场的样本、均值和标准差，以及动能的 90% 不确定性带。脚本`code/demo ns2d particle solver.py`复现了该图并输出汇总统计信息。

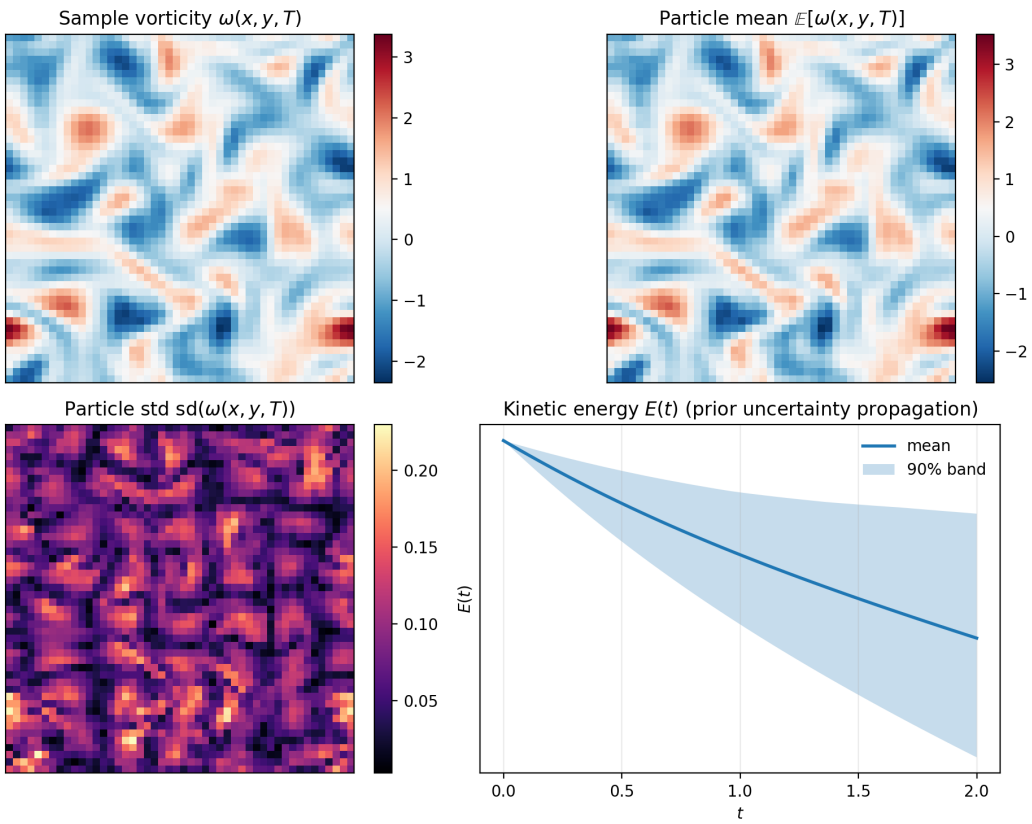


图2：二维纳维–斯托克斯方程（涡量形式）在环面上的粒子/系综贝叶斯数值解，黏度与外力振幅具有不确定性。未使用观测：不确定性通过求解器传播，从而得到涡量场与动能的分布。

5.11 数值演示：离群值下的稳健观测更新

为说明潜在尺度模型为何在计算上具有重要意义，我们模拟了一个带有偶发观测离群值的一维线性状态空间模型，并将设定错误的高斯卡尔曼滤波器与 NIG 型尺度增广 Rao–Blackwell 化粒子滤波器进行比较（尺度采用先验提议，高斯条件似然）。在这个玩具示例中，在存在离群值的情况下，RBPF 降低了均方根误差，并改善了不确定性校准（90% 区间覆盖率）。

图 3 展示了一次具有代表性的运行。脚本 `code/demo nig rbpf 1d.py` 可重现该图，并输出汇总指标（对于图中所示的运行：卡尔曼滤波器的均方根误差为 0.074，RBPF 为 0.037；卡尔曼滤波器的 90% 覆盖率为 0.76，RBPF 为 0.87）。

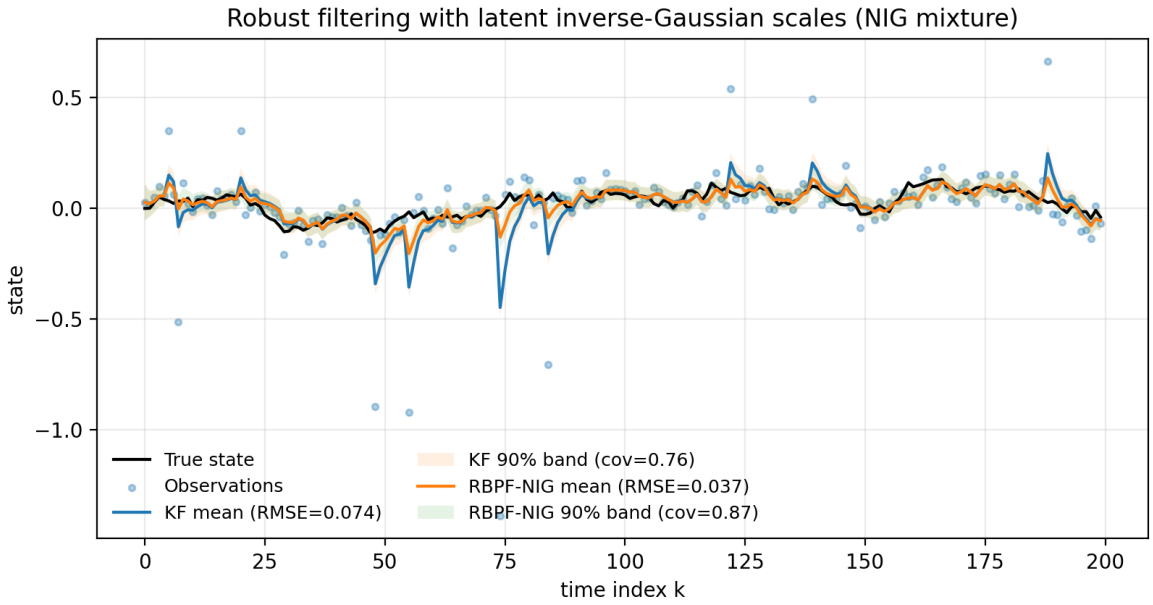


图 3：在含有离群值的一维线性系统中，高斯卡尔曼滤波器与尺度增强型（受 NIG 启发的）Rao–Blackwell化粒子滤波器的对比。通过对潜在逆高斯尺度进行采样，在离群值出现时增大观测方差，从而实现重尾稳健性。

6 应用

6.1 贝叶斯求解器在实践中的具体实现方式

本节将方法论转化为具体的建模与计算方案。在每个应用中，我们首先进行空间离散化（谱方法／有限体积法／有限元法），得到有限维状态 $u_k \in \mathbb{R}^d$；然后指定一个随机动力学模型 $u_{k+1} = F_k(u_k) + \xi_k$，以表征数值时间步进、亚网格效应和模型误差；并通过观测模型 $y_k = H_k u_k + \eta_k$ 将其与部分观测相结合（适当时允许采用非高斯 η_k）。基于这些要素，使用可扩展的贝叶斯算法（集合卡尔曼滤波／SM-EnKF 或粒子滤波／Rao–Blackwell 化滤波）进行推断，并以该模型的后验均值 $\mathbb{E}[u_k \mid y_{1:k}]$、不确定性摘要（可信带、谱、相干结构的概率）以及未来状态／可观测量的预测分布来汇总输出。我们使用标准诊断指标和适当评分规则评估性能，并着重考察校准。

6.2 相对于确定性求解器、集合卡尔曼滤波和四维变分的可行性

我们强调方法论贝叶斯数值计算的两项可行性标准。首先，后验不确定性必须经过校准：可信区间应达到名义覆盖率，预测分布应取得良好的适当评分（例如对数评分或连续秩概率评分），而不只是产生视觉上看似合理的区间带。其次，概率层必须

计算高效，并保持现代偏微分方程求解器的可扩展性；在实践中，这意味着避免仅为不确定性量化而采用昂贵的伴随／海森矩阵计算机制，也要避免在超高维情形下进行全状态粒子滤波。

我们将方法与三种经典基线进行比较：(i) 确定性求解器，即对离散化偏微分方程进行时间步进，生成单条轨迹且不进行不确定性量化；(ii) 集合卡尔曼滤波（EnKF），它在纳入观测时，提供一种可扩展的、基于集合的滤波分布高斯近似 [Evensen, 2009, Reich 和 Cotter, 2015]；以及 (iii) 变分四维变分，在观测场景中，通常通过伴随方法进行迭代优化，从而在一个时间窗口内得到最大后验估计量 [Law et al., 2015]。尽管四维变分通常非常适用于点估计，但不确定性量化并非自动实现，通常需要额外的近似（分析集合或海森矩阵／低秩构造），这会增加计算成本。

我们的核心主张并非概率方法在所有指标上都优于经过优化的点估计方法，而是能够以适中的额外开销实现大规模校准的不确定性 。具体而言，尺度混合／NIG 增广引入了低维潜变量，这些变量可以低成本地采样（或近似），同时保留条件高斯更新，从而维持集合卡尔曼滤波／Rao–Blackwell化滤波的计算开销。

图4展示了一个简单线性状态空间模型中的关键现象，该模型偶尔会出现观测离群值：高斯方法（集合卡尔曼滤波/四维变分）能够给出合理的点估计，但在存在离群值时，其不确定性校准可能不准确；而受 NIG 启发的尺度增强的拉奥-布莱克韦尔化粒子滤波器，通过潜在尺度调整观测方差，从而改善不确定性校准（覆盖率）。脚本 `code/demo_viability_baselines_rbpf_1d.py` 可重现该图及其汇总指标。

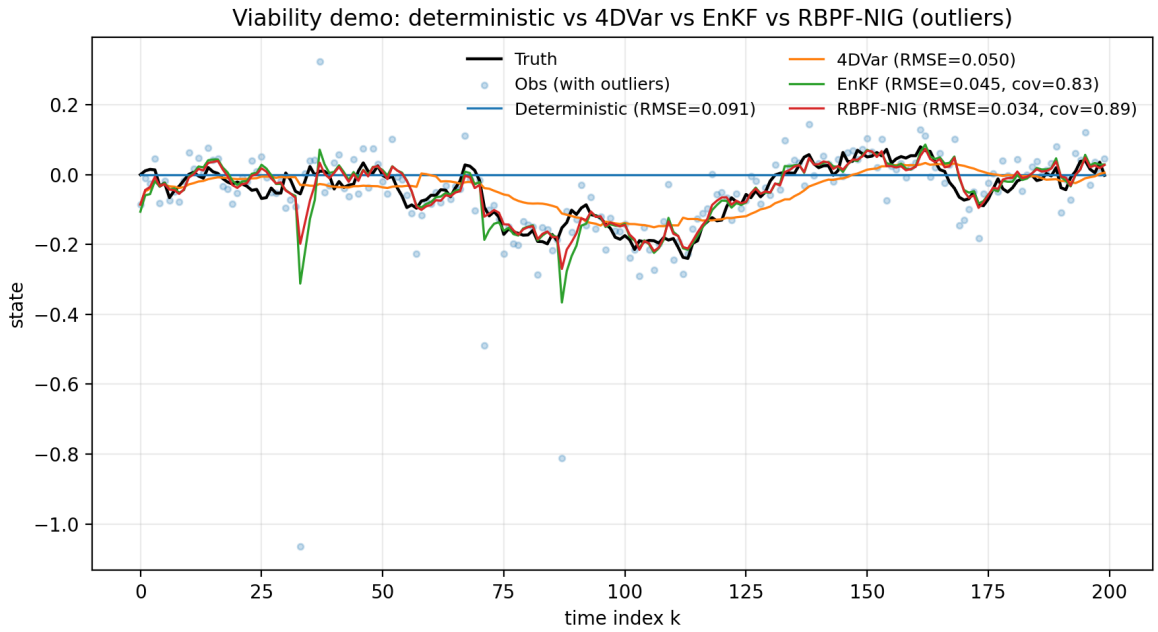


图4：在含有离群值的一维玩具问题上进行可行性比较：仅确定性预测基线、滑动窗口四维变分（最大后验点估计）、集合卡尔曼滤波（高斯不确定性），以及受 NIG 启发的尺度增广 RBPF。稳健的贝叶斯滤波器通过潜在尺度适应离群值，并改善不确定性校准。

6.3 数值天气预报

业务中心需要求解维度极高的原始方程模式（通常为$> 10^8$），而不可压缩纳维–斯托克斯的视角与理想化的区域／大涡模拟组件，以及通用的贝叶斯方法（状态空间建模、滤波和不确定性量化）最为直接相关。

观测 y_k（辐射、风、温度、压力等）通过一个（通常为非线性的）算子 h_k与流场状态相关：

$$y_k = h_k(u_k) + \eta_k,$$

其中， η_k 汇总了仪器噪声和代表性误差。线性化得到集合滤波中使用的形式 $y_k \approx H_k u_k + \eta_k$。

业务天气中心采用集合卡尔曼滤波器，集合规模适中（通常为几十至几百）。其中两个在数值上至关重要的组成部分是：

局地化。样本协方差 $\hat{P} = {}^{1}_{N-1}\sum_i (u^i - \bar{u})(u^i - \bar{u})^T$ 由于抽样噪声，在较大距离处会出现虚假相关。这些相关性通过与紧支撑相关函数进行舒尔积来抑制：

$$\hat{P}_{\text{loc}} = \rho \odot \hat{P}, \tag{55}$$

其中 ρ_{ij} 会随着距离 $|x_i - x_j|$的增加而衰减。

膨胀。 集合离散度乘以 $\lambda > 1$ （通常为 1.01–1.10），以补偿对不确定性的低估。

离群值和非高斯创新很常见（例如云污染辐射观测、间歇性有偏传感器）。第5节中的尺度混合集合卡尔曼滤波可作为一种稳健的替代方案：引入潜在尺度 τ_k （全局、按传感器或按观测类型），并使用膨胀协方差 $\tau_k R_k$进行集合卡尔曼滤波更新。这样既保留了集合卡尔曼滤波的计算开销，又具备重尾稳健性。

除了逐点均方根误差，贝叶斯实现还应报告校准诊断指标（创新统计量、关键可观测量的秩直方图，以及可信区间的覆盖率），以确保不确定性量化具有实际意义。

6.4 湍流流动控制

闭环流动控制需要根据稀疏传感器数据实时推断未观测到的流场状态。典型的受控离散模型形式如下：

$$u_{k+1} = F_k(u_k, a_k) + \xi_k, \qquad y_k = h_k(u_k) + \eta_k,$$

其中，a_k 是执行器输入（吹吸控制、等离子体驱动、体力驱动等）。贝叶斯滤波器生成后验分布 $\pi_k(du) = \mathbb{P}(u_k \in du \mid y_{1:k}, a_{1:k})$，供控制器使用。

对于中等维度的降阶模型，粒子滤波器（可采用 Rao–Blackwell 化方法）能够表示由间歇性和执行器非线性引起的非高斯后验分布。对于高维的大涡模拟/直接数值模拟离散化，通常使用集合卡尔曼滤波变体，并根据几何特征（壁面约束流、射流、尾流）定制局地化。

湍流环境中的传感器（例如壁面剪切应力传感器、压力测孔）偶尔会产生突发信号和离群值。正态-逆高斯/尺度混合观测模型提供了一种有理论依据的方法，可避免估计器不稳定：较大的残差会由推断出的较大尺度吸收，从而防止更新过度修正状态。

后验均值（或低维后验替代表示）可输入滚动时域控制器（模型预测控制），或用于线性二次高斯控制设计。从方法论角度看，其主要优势在于，控制器能够通过惩罚风险，或基于预测分布优化预期性能，将不确定性纳入考量。

7 结论

我们提出了一种从方法论角度看待数值纳维–斯托克斯问题的贝叶斯观点：离散化后的动力学定义了一个状态空间模型，而数值求解则转化为后验计算。由此得到的后验分布和预测分布可直接用于不确定性量化；在存在部分观测的情况下，同一框架还可进一步实现滤波。在二维情形中，随机表示为蒙特卡洛和粒子近似提供了直观理解；在三维情形中，基于集合和粒子的

方法可将贝叶斯推断扩展至大型离散化问题；此外，无需放弃条件高斯更新，即可通过潜变量增广纳入稳健的非高斯误差模型。

尽管本文的主要目标是方法论而非实证研究，我们仍纳入了简单的数值实验，以说明两个关键的计算要点。首先，我们展示了粒子学习通过将充分统计量（边缘化）与重采样–传播（单步平滑）更新相结合，能够在避免权重退化的同时进行在线参数学习（图 1）。其次，我们运行了一个小型二维纳维–斯托克斯涡量形式伪谱求解器，并使用粒子/集合近似，通过时间步进器传播关于不确定黏度和强迫振幅的先验。由此得到解场和关注量（如动能）的分布，且未使用任何观测数据（图 2）。最后，为了说明存在数据时稳健的观测更新，我们考虑了一个偶尔出现观测离群值的一维线性系统：高斯卡尔曼滤波器表现出覆盖不足，而与 NIG 混合相一致的潜在尺度（逆高斯）增广则产生了一个 Rao–Blackwell化粒子滤波器，其不确定性校准有所改善，均方根误差也更低（图 3）。与标准观测基线方法（集合卡尔曼滤波和窗口化四维变分）的比较突显了一项实际权衡：要在离群值存在时实现稳健且经过校准的不确定性，可能需要显式的非高斯建模层（图4）。这些实验均可通过 `code/` 中附带的脚本完整复现。

贝叶斯框架旨在有选择地使用，使算法复杂度与问题情形相匹配。对于**纯预测**（不进行观测更新），或不需要不确定性时，采用确定性求解器仍然合适。当纳入观测且问题情形近似高斯（非线性程度中等、传感器误差特征明确）时，**集合卡尔曼滤波**是稳健的默认选择，结合局地化和膨胀后可扩展至极高维状态空间。当优先目标是**窗口化 MAP估计**且具备伴随基础设施时，**四维变分**通常适用于点估计；然而，要获得校准的不确定性，通常还需要在 MAP 之外进行额外近似。我们提出的**尺度混合 / NIG 增广滤波器**（SM-EnKF、对潜在尺度进行 RBPF）最适用于观测中存在**离群值、间歇性或代表性误差**、从而违反高斯假设，且不确定性校准至关重要的情况（例如概率阈值、风险敏感决策或下游控制）。最后，全状态粒子滤波通常无法用于极高维问题，但**Rao–Blackwell化和低维潜变量增广**可通过将粒子限制在非高斯自由度（尺度和选定参数）内，保持计算的可行性。

若要加强理论、方法与实践之间的联系，还有几个值得探索的方向。首先，最重要的下一步是开展一项**纳维–斯托克斯尺度的实证研究**（例如二维涡量或三维周期盒），在可控的非高斯观测／外力扰动下，对比 EnKF、4DVar 风格的 MAP 以及尺度混合变体，并同时报告准确度和校准情况（覆盖率、秩直方图、适当评分）。其次，NIG 框架为**非高斯参数的在线学习**以及代表性误差的自适应建模提供了契机，其中包括针对超高维潜在尺度的高效采样器／近似方法（全局尺度与逐传感器／逐模态尺度）。第三，将**局地化、低秩结构和粒子更新**相结合的混合方法（对一小组潜变量或降阶坐标使用粒子，对其余部分采用 EnKF 风格的高斯更新）很有希望应用于湍流和流动控制场景。

最后，系统地**考量计算预算**——如何分配集合规模、局地化半径和增广复杂度，以达到校准目标——将使这套方法更易于在大规模部署中付诸实践。

参考文献

Ole E. Barndorff-Nielsen。正态逆高斯分布与随机波动率建模。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，24:1–13，1997年。Ole E. Barndorff-Nielsen、John Kent 和 Michael Sørensen。正态方差-均值混合与z分布。《国际统计评论》，50:145–159，1982年。Fischer Black 和 Myron Scholes。期权定价与公司负债。《政治经济学杂志》，81:637–654，1973年。Carlos M. Carvalho、Michael S. Johannes、Hedibert F. Lopes 和 Nicholas G. Polson。粒子学习与平滑。《统计科学》，25:88–106，2010年。Peter Constantin 和 Gautam Iyer。三维不可压缩纳维–斯托克斯方程的随机拉格朗日表示。《纯粹与应用数学通讯》，61:330–345，2008年。Georges-Henri Cottet 和 Petros D. Koumoutsakos。《涡方法：理论与实践》。剑桥大学出版社，2000年。Geir Evensen。《数据同化：集合卡尔曼滤波》。施普林格，第二版，2009年。Franco Flandoli 和 Dariusz Gatarek。随机纳维-斯托克斯方程的鞅解和平稳解。《概率论及其相关领域》，102:367–391，1995年。Thomas G. Kurtz 和 Jie Xiong。一类非线性随机偏微分方程的粒子表示。《随机过程及其应用》，83:103–126，1999年。Kody Law、Andrew Stuart 和 Konstantinos Zygalakis。《数据同化：数学导论》。《应用数学丛书》。施普林格，2015年。Jean Leray。关于充满空间的黏性液体的运动。《数学学报》，63:193–248，1934年。Henry P. McKean。与非线性抛物型方程相关的一类马尔可夫过程。《美国国家科学院院刊》，56:1907–1911，1966年。Sebastian Reich 和 Colin Cotter。《概率预测与贝叶斯数据同化》。剑桥大学出版社，2015年。

V. I. 尤多维奇。非定常的理想不可压缩液体流动。计算数学与数学物理杂志，3:1032–1066，1963年。英文译文发表于《苏联计算数学与数学物理》。

V. I. 尤多维奇。理想不可压缩流体动力学中基本非定常问题的唯一性定理。数学研究快报，2：27–38，1995年。