arXiv:2602.02954v1 [math.NT] 3 Feb 2026

赫克代数某个商在其正规化中的指数

Amod Agashe

摘要

设 Γ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 的一个同余子群，且 f 是 Γ 上权为 k 的归一化特征形式。令 K 表示由 f 的傅里叶系数在 $\mathbf{Q}$ 上生成的数域。令 R 表示 K 中由 f 的傅里叶系数生成的序，它包含于 K 的整数环 $\mathcal{O}$ 中。我们将整除 $\mathcal{O}$ 中 R 的指数的素数，与满足以下条件的素数 p 联系起来：f 模剩余特征为 p 的某个素理想同 f 的一个共轭同余。上述指数等于赫克代数除以 f 的湮灭子理想所得商在其正规化中的指数。

关键词：模形式、模形式之间的同余、赫克代数的指数、分歧。

数学主题分类代码：11F33、11F11。

1 引言与结果

设 N 为正整数，并按惯例，令 $\Gamma(N)$ 表示水平为 N 的主同余子群，即 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 中由模 N 约化为单位矩阵的那些矩阵所组成的子群。设 Γ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 的一个包含 $\Gamma(N)$ 的子群，因此它是一个同余子群。设 f 为 Γ 上权 k 的尖点形式，它是一个特征形式（即 Hecke 算子的特征向量），并且是正规化的（即其第一个傅里叶系数为 1）。令 $\mathcal{O}$ 表示数域 K 的整数环，该数域由 f的傅里叶系数在$\mathbf{Q}$上生成。令 R 表示 $\mathcal{O}$ 中由 f的傅里叶系数生成的序。一般而言，R 不必是 $\mathcal{O}$的全部，因此一个自然的问题是：关于指数 $[\mathcal{O}:R]$能说些什么？专家们知道，整除该指数的素数与 f 及其共轭之间的同余素数有关；然而，这一点似乎并未记载于文献之中。本文的目的在于陈述并证明这些精确关系。

上文所提及的指数可以按如下方式从另一角度来看待。令 $S_k(\Gamma)$ 表示 Γ上权 k 的尖点形式空间。令 $\mathbf{T}$ 表示由作用在 $S_k(\Gamma)$ 上的 Hecke 算子所生成的赫克代数。于是我们有映射 $\mathbf{T}\to K$，它通过将 T_n 映到 f的第 n个傅里叶系数 $a_n(f)$ 而得到。该映射的像恰好是 R，而其核为 $I_f = \mathrm{Ann}_{\mathbf{T}}(f)$。因此我们有同构 $\mathbf{T}/I_f \cong R$。现在 $\mathcal{O}$ 是 R在 K中的整闭包，因此指数 $[\mathcal{O}:R]$ 正是 $\mathbf{T}/I_f$ 在其正规化中的指数。

令 $J_{\mathfrak{p}}$ 表示满足 $\sigma(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$ 且 σ 在 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 上作用平凡的元素 $\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbf{Q})$ 的集合；它是 $\mathrm{Aut}(K/\mathbf{Q})$ 的一个子群。若 $K/\mathbf{Q}$ 是伽罗瓦扩张，则它就是通常所说的惯性群，记作 $I_{\mathfrak{p}}$[1]。下文中，p 始终表示任意一个素数。

命题 1.1. 若 f 在素理想 $\mathfrak{p}$ 模 f 的某个共轭（由 $\mathrm{Aut}(K/\mathbf{Q})$ 中的非平凡元素作用得到）同余，且该素理想位于 $\mathcal{O}$ 中，剩余特征为 p，则 $J_{\mathfrak{p}}$ 非平凡，或者 p 整除 $[\mathcal{O}:R]$。若对于 $\mathcal{O}$ 的某个素理想 $\mathfrak{p}$，$J_{\mathfrak{p}}$ 含有非平凡元素 σ，则 f 模 $\mathfrak{p}$ 同余于 σ 对 f 的共轭。

证明。上述命题的第二个结论成立，因为根据假设，对所有 n，$\sigma(a_n(f)) = a_n(f)$ 都属于 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$，即 $\sigma(a_n(f)) - a_n(f) \in \mathfrak{p}$，因此 $f \equiv \sigma(f)$ 模 $\mathfrak{p}$ 同余，证毕。

我们现在证明第一个陈述。设 σ 表示假设中 $\mathrm{Aut}(K/\mathbf{Q})$ 的元素。由于 f 的傅里叶系数生成 R，并且对所有 n，$a_n(f) \equiv \sigma(a_n(f)) \bmod \mathfrak{p}$，

$$\text{for all } x \in R, x - \sigma(x) \in \mathfrak{p} \ . \tag{1}$$

如果 p 整除 $[\mathcal{O}: R]$，则证明完成，因此假设它不整除。设 $m = [\mathcal{O}: R]$，并设 $y \in \mathcal{O}$。则 $my \in R$，所以由 (1)，$m(y - \sigma(y)) = (my) - \sigma(my) \in \mathfrak{p}$。因此 $m(y-\sigma(y))$ 在 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 中的像为 0。由于 p与 m互素，这意味着 $y - \sigma(y)$ 在 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 中的像为 0。因此

$$\text{for all } y \in \mathcal{O}, y - \sigma(y) \in \mathfrak{p}. \tag{2}$$

特别地，如果 $y \in \mathfrak{p}$，那么 $\sigma(y) \in \mathfrak{p}$，因此 $\sigma(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$。此外，由 (2) 可知，$\sigma$ 在 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$上平凡作用。因此 $\sigma \in J_{\mathfrak{p}}$，所以 $J_{\mathfrak{p}}$ 非平凡。 □

[1]在文献中，惯性群似乎仅在数域为伽罗瓦时才被定义，并且它与分歧的关系也仅在伽罗瓦情形下被讨论。在非伽罗瓦情形下，该关系可能并不完全相同，因此为避免任何潜在混淆，我们不把 $J_{\mathfrak{p}}$ 称为惯性群。

注意，上述命题中第一条陈述的逆命题未必成立，因为 Aut($K/\mathbf{Q}$) 可能是平凡的，而 $[\mathcal{O}:R]$ 非平凡（特别是可被某个素数 p 整除）。为了得到某种形式的逆命题，我们将 K 扩张，以获得足够多的自同构。设 K 是 K 的伽罗瓦闭包，$\mathcal{O}$ 是 K的整数环。

定理 1.2. 如果 p 在 $\mathcal{O}$ 中分歧，或者 p 整除 $[\mathcal{O}:R]$，那么 f 模同余于 f 在 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ 的某个非平凡元素作用下的共轭元，模掉 $\mathcal{O}$ 中一个剩余特征为 p的素理想。

我们将在下一节证明这个定理。

推论 1.3. 如果 p 在 $\mathcal{O}$ 中分歧，或者 p 整除 $[\mathcal{O}:R]$，那么 f 模同余于 f 在 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ 的某个非平凡元素作用下的共轭元，模掉 $\mathcal{O}$ 中一个剩余特征为 p的素理想。

证明。这由上面的定理推出，因为如果 p 在 $\mathcal{O}$中分歧，那么它在 $\mathcal{O}$中分歧；而如果 p 整除 $[\mathcal{O}:R]$，那么它也整除 $[\mathcal{O}:R]$。 □

如果 $K/\mathbf{Q}$ 不是伽罗瓦扩张，那么上述推论的逆命题不成立，因为 Gal(K/K) 中任何非平凡元素都会固定 f，而存在一些素数 p，它们在 $\mathcal{O}$ 中不分歧，也不整除 $[\mathcal{O}:R]$（因为在 $\mathcal{O}$ 中分歧或整除 $[\mathcal{O}:R]$ 的素数只有有限多个）。如果$K/\mathbf{Q}$ 是伽罗瓦扩张，情况就好得多，因为由上述命题和定理可得一个“当且仅当”命题：

推论 1.4. 设 $K/\mathbf{Q}$ 是伽罗瓦扩张。那么，p 在 $\mathcal{O}$ 中分歧或 p 整除$[\mathcal{O}:R]$，当且仅当 f 模 $\mathcal{O}$ 中一个剩余特征为 p 的素理想同余于 f 在 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ 中被某个非平凡元素共轭后的元素。

在本节余下部分，我们提及几种指数 $[\mathcal{O}:R]$ 具有相关性的情形。文献中还考虑了其他一些指数，它们与本文中的指数类似。令 $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$。正如 [Joc79], $\mathbf{T}\otimes\mathbf{Q}$ 中所解释的，$\mathbf{Q}$ 是数域的乘积，并且有唯一的极大阶 $\mathcal{O}_k$，它同构于其分量数域的整数环的乘积。在该文献中，作者研究指数 $[\mathcal{O}_k:\mathbf{T}]$（在该文献中，$\mathbf{T}$ 记作 $\mathbf{T}_k$）随权 k 变化的情形。现在通过投影，我们得到一个映射 $\mathcal{O}_k\to\mathcal{O}$，它是满射。此外，$\mathbf{T}$ 在此满射下的像包含于 R。因此我们有一个满射 $\mathcal{O}_k/\mathbf{T}\to\mathcal{O}/R$，所以我们的指数 $[\mathcal{O}:R]$ 整除该文献中所考虑的指数 $[\mathcal{O}_k:\mathbf{T}]$；后一个指数正是$\mathbf{T}$ 在其正规化中的指数，

因为$\mathbf{T}$ 的正规化是 $\mathcal{O}_k$。类似地，对于 $\Gamma = \Gamma_1(N)$，在 [CE04], 中，作者考虑$\mathbf{T}$ 作用于新形式所得像在其正规化中的指数；基于上述相同的原因，我们的指数也整除这个指数。

我们的指数也与赫克代数的判别式有关：回想一下，若 M是一个秩为 n 、基为 $b_1, \ldots, b_n$ 的自由 Z 模，则 M 的判别式记作 disc(M)，是矩阵的行列式；该矩阵的 (i, j) 项为 tr($b_i b_j$)，其中，对于 $b \in M$，tr(b)表示左乘 b的迹。为简便起见，我们只研究 $\Gamma = \Gamma_0(N)$ 和 $\mathrm{T}^{\mathrm{new}}$ （而非 T），其中 $\mathrm{T}^{\mathrm{new}}$ 是 T 的一个商，它在由新形式张成的子空间 $S_k(\Gamma_0(N)^{\mathrm{new}}$ 上忠实作用。下文中，我们改编了 [Gha02, §6]中的论述。设 f_i（其中 i 取自适当的指标集 I）是一组代表元，分别代表新形式的伽罗瓦轨道。对每个 $i \in I$, 令 $\mathrm{T}f_i$ 表示 $\mathrm{T}^{\mathrm{new}}$ 的一个商，它在由 f_i 及其伽罗瓦共轭张成的子空间上忠实作用。于是 $\mathrm{T}^{\mathrm{new}}$ 嵌入$\oplus_{i\in I}\mathrm{T}f_i$。此外，对每个 $i \in I$，令 K_i 表示由 f_i的傅里叶系数生成的数域，则将 T_n 映到 f_i 的第 n 个傅里叶系数的映射 T $\to K_i$ 的像落在 $\mathcal{O}_i$中； $\mathcal{O}_i$是 K_i的整数环，其像是 K_i中的一个序 R_i，其核为 I_{f_i}，从而得到同构 $\mathrm{T}f_i = \mathrm{T}/I_{f_i} \cong R_i$。将判别式记作 disc，由判别式的性质可知

$$\begin{aligned} \mathrm{disc}(\mathbf{T}^{\mathrm{new}}) &= \left|\frac{\oplus_{i\in I}\mathbf{T}_{f_i}}{\mathbf{T}^{\mathrm{new}}}\right|^2 \cdot \prod_{i\in I} \mathrm{disc}(\mathbf{T}_{f_i}) \\ &= \left|\frac{\oplus_{i\in I}\mathbf{T}_{f_i}}{\mathbf{T}^{\mathrm{new}}}\right|^2 \cdot \prod_{i\in I} \Big([\mathcal{O}_i : R_i]^2 \cdot \mathrm{disc}(\mathcal{O}_i)\Big) \qquad (3) \end{aligned}$$

现在，素数 p 整除 (3) 中的项 $|(\oplus_{i\in I}\mathrm{T}f_i)/\mathrm{T}^{\mathrm{new}}|$，当且仅当某个 f_i 与一个归一化特征形式 g 同余，模一个位于由 f_i 和 g 的傅里叶系数生成的数域的整数环中、位于 p 之上的素理想；其中该归一化特征形式属于 S_k ($\Gamma_0(N)^{\mathrm{new}}$，且不与 f_i 共轭（例如，参见 [Rib83, p.193–194, 196]）。由推论 1.3 可知，如果素数 p 整除 (3) 中剩余的项 $\prod_{i\in I}([\mathcal{O}_i : R_i]^2 \cdot \mathrm{disc}(\mathcal{O}_i))$, 那么某个 f_i 与其在伽罗瓦闭包 K_i 的伽罗瓦群 $\widetilde{}$ 中某个非平凡元素作用下的共轭形式同余，模 K_i 的整数环 $\widetilde{}$ 中一个剩余特征为 p 的素理想；根据上文所述，遗憾的是，与前一句不同，这里并不存在“当且仅当”。我们还要指出，在此背景下，素数 p 整除 disc($\mathrm{T}^{\mathrm{new}}$), 当且仅当在特征 p 下， $S_k(\Gamma_0(N)^{\mathrm{new}}$ 中两个归一化特征形式之间存在同余（例如，参见 [CS04, Prop 2]）；分解式 (3)

上文表明，共轭形式之间的同余与非共轭形式之间的同余在判别式中发挥着不同作用。

本文其余部分将用于证明定理 1.2。

致谢：K. Ribet 向我们指出了定理 1.2 的证明思路，我们对此深表感谢。我们还要感谢 H. Hida 回答了若干与本文主题相关的问题。

2 定理 1.2 的证明

~ ~设 p 在 $\mathcal{O}$中分歧。那么对于 p上方的任意素理想 $\mathfrak{p}$ （属于 $\mathcal{O}$ ）， $\mathfrak{p}$ 处的惯性群非平凡；取其中任意一个非平凡元素 σ 。~于是对所有 n， $\sigma(a_n(f)) = a_n(f)$ 都属于 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$，也就是说， $\sigma(a_n(f)) - a_n(f) \in \mathfrak{p}$，因此 $\sim f \equiv \sigma(f)$ 模 $\mathfrak{p}$，得证。所以设 p 在 $\mathcal{O}$ 中不分歧。~假设 p 整除 $[\mathcal{O} : R]$。只需证明此时 f 模~同余于 f 在 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ 的某个非平凡元素作用下的共轭，且该同余模 $\mathcal{O}$ 中一个剩余特征为 p 的素理想~成立。

设 A 是有限半单交换 $\mathbf{F}_p$-代数。我们将其关联到集合 $S(A)$，该集合由从 A 到 $\mathbf{F}_p$ 的 $\mathbf{F}_p$-代数同态组成。

引理 2.1. $S(A)$ 的基数等于 A 的 $\mathbf{F}_p$-维数。

证明。简单交换代数没有非平凡理想，因此是一个域。因此， A 是若干有限且包含 F_p 的域的乘积，也就是说，是 F_p 的有限扩张。因此，对于某个 $f_1, \ldots, f_r$，有 $A \cong \mathrm{F}_{p^{f_1}} \times \cdots \times \mathrm{F}_{p^{f_r}}$。令$\{e_i\}_{i=1}^r$ 表示此乘积的标准基，并令 $\phi \in S(A)$。于是$0 = \phi(0) = \phi(e_i e_j) = \phi(e_i)\phi(e_j)$。因此，对每个 $i \neq j$，若 $\phi(e_i) \neq 0$，则$\phi(e_j) = 0$。所以只有一个 $\phi(e_i)$ 非零。因此， $S(A)$ 的基数至多为各个 $S(\mathrm{F}_{p^{f_i}})$ 基数的乘积；显然它也至少有这么大，故二者相等。从 $\mathrm{F}_{p^{f_i}}$ 到 F_p 的 F_p-代数同态数等于弗罗贝尼乌斯自同构的序，也就是 f_i。因此， $S(A)$ 的基数为 $f_1 \cdots f_r = \dim A$。 □

设 B 是 A 的一个子代数。以下引理可能广为人知，但我们未能找到合适的参考文献。

引理 2.2. B 是半单的。

证明。 首先要注意，所讨论的所有代数都是阿廷的，因为它们是有限的。阿廷环是半单的，当且仅当它没有

除零理想以外的幂零理想（例如，参见 [Coh03，第 5.3 定理。5]或 [Jac89，第 4 节中的“半本原阿廷环的结构定理”4]）。假设 B 不是半单的。那么它有一个除零理想以外的幂零理想 I。因此存在一个非零幂零元素 $b \in I$。那么，在 A 中由 b生成的理想是幂零的（考虑到 A 是交换的），且非零（因为它包含 b）。由本证明的第二句话可知， A是半单的。这一矛盾证明了该引理。 □

引理 2.3。 如果 B 是 A 的真子代数（即 $B \neq A$），那么将 ϕ 映射到 $\phi|_B$ 的自然限制映射 $S(A) \to S(B)$ 不是单射。

证明。 将 B 视为$\mathbf{F}_p$-向量空间时，它是 A的真子空间，因此维数更小。由引理 2.1， $S(A)$大于 $S(B)$。引理得证。

□

由于 p 在 $\mathcal{O}$中不分歧，对于 $\mathcal{O}$中互不相同的素理想 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$，我们有 $p\mathcal{O} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$。于是

$$\widetilde{\mathcal{O}}/p\widetilde{\mathcal{O}} = \widetilde{\mathcal{O}}/(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r) \cong \widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_1 \times \cdots \times \widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_r \ , \tag{4}$$

其中第二个同构来自中国剩余定理。对于每个 $i = 1, \ldots, r$ π_i $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_1 \times \cdots \times \widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_r$ 令表示从.....出发的自然投影映射 $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_r$到 $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_i$。设 f表示 $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_i$在 $\mathbf{F}_p$上的次数（它对所有 i都相同，因为 $K/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦的）。则对每个 $i = 1$, ..., r，存在 f个 $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_i$到 $\mathbf{F}_p$的嵌入，记为 $\tau_{i,1}, \ldots, \tau_{i,f}$。因此，通过投影到 (4) 中的某个 r 因子，再与某个到 $\mathbf{F}_p$ 的 f 嵌入复合，我们得到 $\widetilde{\mathcal{O}}/p\widetilde{\mathcal{O}}$ 到 $\mathbf{F}_p$ 的 rf个嵌入的列表（更精确地说，该列表由 $\tau_{i,n} \circ \pi_i$ 组成，其中 $i = 1$, ..., r， $n = 1$, ..., f）；此列表中有 rf个元素。

引理 2.4. 上述列表中 $\widetilde{\mathcal{O}}/p\widetilde{\mathcal{O}}$ 到$\mathbf{F}_p$ 的嵌入互不相同，并且 $S(\widetilde{\mathcal{O}}/p\widetilde{\mathcal{O}})$ 由该列表中的嵌入组成。

证明。 根据引理 2.1， $S(\widetilde{\mathcal{O}}/p\widetilde{\mathcal{O}})$ 的大小等于其 $\mathbf{F}_p$-维数，由 (4) 可知，该维数为 rf。因此，引理中的第二个结论由第一个结论推出，下面我们证明第一个结论。假设对于某些 $j, k \in \{1, \ldots, r\}$ 和 $n, m \in \{1, \ldots, f\}$，先投影到第 j 个因子，再取 $\mathbf{F}_p$ 中第 n 个可能的嵌入，所得嵌入与先投影到第 k 个因子，再取 $\mathbf{F}_p$ 中第 m 个可能的嵌入所得的嵌入相同；我们将证明 $j = k$ 和 $m = n$，从而证明该引理。

令 $x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{O}$。根据上述假设，我们有 $\tau_{j,m}\pi_j(x_1 + \mathfrak{p}_1, \ldots, x_r + \mathfrak{p}_r) = \tau_{k,n}\pi_k(x_1 + \mathfrak{p}_1, \ldots, x_r + \mathfrak{p}_r)$，即，

$$\tau_{j,m}(x_j + \mathfrak{p}_j) = \tau_{k,n}(x_k + \mathfrak{p}_k) \ . \tag{5}$$

若 $j \neq k$，则取 $x_j = 1$ 和 $x_k = 0$，由上面的等式可得 $1 = 0$；这一矛盾说明 $j = k$。若 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_j = \mathbf{F}_p$，则其中只有一个$\tau_{j,\ m}$，因此 $m = n = 1$。若 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_j \neq \mathbf{F}_p$ 且 $m \neq n$，则 $\tau_{j,\ m}$ 与$\tau_{j,\ n}$ 相差弗罗贝尼乌斯的一个非平凡幂，这会使等式（5）两边任意 $x_j + \mathfrak{p}_j \in (\mathcal{O}/\mathfrak{p}_j)\backslash\mathbf{F}_p$ 的值不同（注意此时 $j = k$）；这一矛盾说明 $m = n$，证毕。 □

引理 2.5. 自然映射 $R/pR \to \mathcal{O}/p\mathcal{O}$ 不是满射。

证明。由于 R 和 $\mathcal{O}$ 是秩相同的自由**Z**-模，R/pR 和 $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$是维数相同的$\mathbf{F}_p$ 上的向量空间。因此，只需证明映射 $R/pR \to \mathcal{O}/p\mathcal{O}$ 不是单射，这正是我们接下来要做的。由于 p 整除 $[\mathcal{O} : R]$，存在一个 $x \in \mathcal{O}\backslash R$ 使得 $px \in R$。假设 px在 R/pR中的像为零。那么，对于某个 $y \in R$，有 $px = py$。因此 $p(x - y) = 0$。由于 $\mathcal{O}$ 是无挠的，我们有 $x = y$。但是 $x \notin R$，而 $y \in R$。这个矛盾说明 px 在 R/pR 中的像非零；将这个像记为 z。现在在自然映射 $R/pR \to \mathcal{O}/p\mathcal{O}$下，$z$ 映到 px 在 $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$中的像；这个像为 0。因此，在映射 $R/pR \to \mathcal{O}/p\mathcal{O}$下，非零元素 z 映到 0，所以这个映射不是单射，证毕。 □

取 $A = \mathcal{O}/p\mathcal{O}$，并取 B 为上述讨论中 $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ 内 R/pR 的像。由引理 2.5 可知，B 小于 A。因此，根据引理 2.3，$S(A) = S(\mathcal{O}/p\mathcal{O})$ 中的两个元素映射到 $S(B) = S(R/pR)$ 中的同一个元素。接着由引理 2.4 可知，在该引理之前刚构造的、将 $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ 嵌入$\mathbf{F}_p$ 的嵌入中，有两个在 R/pR 上相同。定理的证明基本完成，因为这两个嵌入中的一个可以通过施加 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ 的某个适当元素从另一个得到，具体说明如下。

根据两句之前所述，对于某个 $j, k \in \{1, \ldots, r\}$ 和 $n, m \in \{1, \ldots, f\}$，对所有 $a \in R$，都有 $\tau_{j,m}\pi_j(a + \mathfrak{p}_1, \ldots, a + \mathfrak{p}_r) = \tau_{k,n}\pi_k(a + \mathfrak{p}_1, \ldots, a + \mathfrak{p}_r)$，即

$$\tau_{j,m}(a + \mathfrak{p}_j) = \tau_{k,n}(a + \mathfrak{p}_k) \ . \tag{6}$$

由于 $\tau_{j,m}$ 和 $\tau_{k,n}$ 分别将 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_j$ 和 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_k$ 识别为 $\mathbf{F}_{p^f}$ 在 $\mathbf{F}_p$ 中的一个副本，而这样的副本只有一个，记作 F，因此我们得到

$\widetilde{\tau}_{j,m}$ 和 $\tau_{k,n}$ 诱导出同构 $\widetilde{\tau}_{j,m}\colon \mathcal{O}/\mathfrak{p}_j \xrightarrow{\sim} F$ 和 $\widetilde{\tau}_{k,n}\colon \mathcal{O}/\mathfrak{p}_k \xrightarrow{\sim} F$，使得 $\widetilde{\tau}_{j,m}(a+\mathfrak{p}_j) = \widetilde{\tau}_{k,n}(a+\mathfrak{p}_k)$（根据方程 (6)）。于是 $\phi := \widetilde{\tau}_{k,n}^{-1} \circ \widetilde{\tau}_{j,m}$ 是一个同构 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}/\mathfrak{p}_k$，满足

$$\phi(a+\mathfrak{p}_j) = a + \mathfrak{p}_k \ . \tag{7}$$

取一个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$，使得 $\mathfrak{p}_k = \sigma(\mathfrak{p}_j)$（这可以做到，因为 $K/\mathbf{Q}$ 是伽罗瓦的）；它诱导出一个同构 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}/\mathfrak{p}_k$，我们仍用 σ 表示它。于是

$$\forall b \in \widetilde{\mathcal{O}}, \sigma^{-1}(b+\mathfrak{p}_k) = \sigma^{-1}(b) + \mathfrak{p}_j \ . \tag{8}$$

$\widetilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{p}_j$ 的自同构 $\sigma^{-1} \circ \phi$ 满足

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1}\circ\phi)(a+\mathfrak{p}_j) &= \sigma^{-1}(\phi(a+\mathfrak{p}_j)) \\ &= \sigma^{-1}(a+\mathfrak{p}_k) \ \ (\text{by equation (7)}) \\ &= \sigma^{-1}(a) + \mathfrak{p}_j \ \ (\text{by equation (8)}) \end{aligned} \tag{9}$$

$\mathcal{O}/\mathfrak{p}_j$ 的这个自同构由某个 $\tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ 诱导，该自同构保持 $\mathfrak{p}_j$ 不变，因为 $\mathfrak{p}_j$ 处的惯性群是平凡的，而 p 在 $\mathcal{O}$ 中不分歧。于是

$$\begin{aligned} \tau(a+\mathfrak{p}_j) &= (\sigma^{-1}\circ\phi)(a+\mathfrak{p}_j) \\ &= \sigma^{-1}(a) + \mathfrak{p}_j \ \ (\text{by equation (9)}) \end{aligned} \tag{10}$$

将 τ^{-1} 应用于（10），得到

$$\begin{aligned} a+\mathfrak{p}_j &= \tau^{-1}(\sigma^{-1}(a)+\mathfrak{p}_j) \\ &= \tau^{-1}(\sigma^{-1}(a)) + \mathfrak{p}_j \\ &= (\tau^{-1}\circ\sigma^{-1})(a) + \mathfrak{p}_j \ . \end{aligned} \tag{11}$$

由于对所有 n，都有 $a_n(f) \in R$，因此方程（11）适用于 $a = a_n(f)$。所以我们看到，f 与其共轭 $(\tau^{-1}\circ\sigma^{-1})(f)$ 模 $\mathfrak{p}_j$ 同余，至此便完成了所需证明。

参考文献

[CE04] Frank Calegari 和 Matthew Emerton，《赫克代数 $\mathbf{T}_k$ 具有较大指数》，《数学研究通讯》**11**（2004），第 1 期，125–137。MR 2046205

[Coh03] P. M. Cohn, 《基础代数》，Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2003 年，群、环与域。MR 1935285[CS04] Frank Calegari 和 William A. Stein, 《关于素数层赫克代数判别式的猜想》，《算法数论》，《计算机科学讲义》，第 3076 卷，Springer，柏林，2004 年，第 140–152 页。MR 2137350[Gha02] Eknath Ghate, 《模形式之间的同余导论》，《数论新趋势》（阿拉哈巴德，2000 年），Hindustan Book Agency，新德里，2002 年，见 https://mathweb.tifr.res.in/~eghate/math.html，第 39–58 页。[Jac89] Nathan Jacobson, 《基础代数 *II*》，第二版，W. H. Freeman and Company，纽约，1989 年。MR 1009787[Joc79] N. Jochnowitz, 《赫克环的指数 $\mathbf{T}_k$，在 $\mathbf{T}_k \otimes \mathbf{Q}$ 的整数环中》，Duke Math. J. **46** （1979），第 4 期，861–869。MR 80k:10023[Rib83] KennethA. Ribet, 《模 p *Hecke* 算子与模形式之间的同余》，Invent. Math.**71**（1983），第 1 期，193–205。