arXiv:2602.02981v1 [math.OC] 3 Feb 2026

基于费 Fisher 信息的传感器布置：结构数字孪生的解析结果与基准测试 *

Harbir Antil[†1]、Animesh Jain[‡2]和 Rainald Löhner[§3]

[1,2]乔治梅森大学数学科学系与数学与人工智能中心（CMAI），美国弗吉尼亚州费尔法克斯，邮编 22030。[3]乔治梅森大学物理系与计算流体力学中心，美国弗吉尼亚州费尔法克斯，邮编 22030。

摘要

高保真数字孪生依赖于将传感器数据准确融入基于物理的计算模型。在结构应用中，此类数字孪生旨在通过最小化测量响应与模拟响应之间的差异，并满足结构力学的控制方程，来识别空间分布的量，例如单元级弱化场、材料参数或等效热载荷。虽然基于伴随的方法能够高效地计算这些逆问题的梯度，但所得估计的质量和稳定性在很大程度上取决于传感器位置、测量类型和方向的选择。

本文为基于伴随的有限元数字孪生中的基于费舍尔信息的传感器布置，构建了一个严谨且可直接实施的框架。我们采用由测量映射线性化推导出的 D-最优设计准则评估传感器配置，从而得到具有统计学意义的信息量度。我们给出了用于计算雅可比矩阵及其伴随的无矩阵算子公式，因此只需进行正向和伴随求解即可计算费舍尔信息乘积 $Fv = J^\top R^{-1} J v$ 。基于这些算子评估，我们推导了关于测量参数的 D-最优传感器设计显式灵敏度表达式，并讨论了评估相关对数行列式目标函数的实用策略。为补充这一通用框架，我们针对一种典型的一维结构模型给出了可解析求解的传感器布置结果，阐明了可检测性与可定位性之间的区别，并证明多个位移传感器的 D-最优布置会形成近似均匀的间距。

1 引言

在工程结构的整个生命周期中，材料老化、疲劳和损伤会逐渐降低其力学性能。数字孪生——与来自物理系统的测量值同步的虚拟副本——可实现持续监测、系统辨识和预测性维护。对于结构系统，辨识任务可表述为一个逆问题

*本研究部分由美国海军研究局（ONR）项目资助，资助编号：N00014-24- 1-2147；美国国家科学基金会资助项目 DMS-2408877；以及美国空军科学研究局（AFOSR）项目资助，资助编号：FA9550-25-1-0231。

†电子邮箱： hantil@gmu.edu

‡电子邮箱： ajain34@gmu.edu

§电子邮箱： rlohner@gmu.edu

在该问题中，需要在满足支配结构力学的偏微分方程的条件下，最小化计算量与测量量（例如位移或应变）之间的失配。基于伴随的方法只需少量正向求解和伴随求解[1, 4, 5, 7, 8, 13]，即可计算此类失配泛函相对于高维未知量的梯度，例如单元级弱化场 α、材料参数 β或有效热载荷参数 $f_{\Delta T}$。

数字孪生在实际部署中面临的一项长期挑战，是可用于测量的传感器数量有限。传感器稀疏或布置不当，会使逆问题严重不适定且易受噪声影响；而冗余传感器则会增加成本和复杂性，却无法带来相称的信息增益。因此，传感器配置本身的设计——即应测量哪些位置、物理量和方向——是决定可辨识性、稳定性和预测能力的关键因素。

本研究基于费 Fisher 信息，为采用伴随方法的有限元数字孪生中的传感器布置构建了一个数学上精确且可直接实现的框架。我们不尝试求解完全耦合的双层设计—逆问题优化问题，而是通过一种基于费 Fisher 信息的准则来评估传感器配置；该准则通过在参考参数处对测量映射进行线性化而得出。在此框架下，雅可比矩阵和伴随雅可比算子的作用，以及由此得到的 $Fv = J^\top R^{-1} Jv$ 形式的费 Fisher 信息乘积，都可以仅利用正向求解和伴随求解，以无矩阵方式计算；同时，设计灵敏度则以相关测量算子的形式明确表示。

贡献。 本文的主要贡献如下：

(i) 提出一种基于 Fisher 信息的传感器布置方法，专为结构力学中的伴随法有限元数字孪生量身设计，并精确阐明传感器配置如何通过离散测量算子发挥作用。(ii) 给出雅可比矩阵及其伴随的无矩阵算子表达式，进而得到形如 $Fv = J^\top R^{-1} Jv$ 的费 Fisher 信息乘积，从而仅利用与现有反问题求解器相兼容的正向求解和伴随求解，即可进行基于信息的传感器评估。(iii) 以传感器算子为核心开展灵敏度分析，表明 D-最优设计目标函数对传感器设计参数的导数仅取决于测量算子的变化，而与正向偏微分方程解的二阶导数无关。(iv) 针对典型的一维结构模型给出解析上易于处理的基准结果，包括严格区分可检测性 与可定位性，并以闭式证明表明，多个位移传感器的 D-最优布置会产生（近似）均匀间隔的传感器位置。

最先进的技术与相关工作。 结构系统的传感器布置在结构动力学、模型更新和结构健康监测（SHM）领域已有悠久历史。早期具有影响力的研究提出了基于模态的布置准则，包括有效独立性（EI）策略，该策略通过迭代选择传感器位置，改善目标模态子空间的条件性和信息量。这些 EI 程序通常以信息矩阵及其行列式/迹的形式表示，在结构上与用于模态识别的 D-最优和 A-最优设计目标密切一致 [12]。

随后，人们提出了用于在噪声条件下对结构模型进行参数识别的信息论表述。Papadimitriou [14] 提出了基于参数不确定性信息熵度量的传感器布置方法，并推导出一种渐近近似

（大数据情形），表明无需在设计阶段获取完整的时程数据，仅使用名义结构模型即可对传感器配置进行排序。由此产生的设计问题属于离散问题，通常采用序贯传感器布置启发式方法或组合优化/元启发式搜索加以处理。

与此同时，针对由偏微分方程控制的大规模逆问题，最优试验设计（OED）已发展出可扩展的无矩阵 方法，因为显式构造 Fisher 矩阵、海森矩阵或协方差矩阵通常不可行。关于首部专门讨论基于偏微分方程的逆问题的最优试验设计专著，参见 Uciński [15]。Haber、Horesh 和 Tenorio [10]针对线性病态逆问题提出了设计准则，通过均方误差（MSE）明确量化 Tikhonov正则化估计量的偏差–方差权衡，并通过算子作用和随机迹估计量，而非稠密矩阵代数，来评估相应的目标函数/梯度。专题综述 [2]全面介绍了偏微分方程约束逆问题的贝叶斯最优试验设计，包括 A-/D-最优性、期望信息增益、无限维表述以及随机迹/对数行列式估计量。另见 [3, 16]，该文介绍了使用伴随方法研究相关贝叶斯逆问题和常微分方程。最后，我们提及一篇关于最优试验设计 [11] 和逆问题 [9]的综合综述文章。

本文的定位。与上述最优试验设计文献不同——这类文献通常围绕抽象的参数到可观测量映射及后验协方差算子展开——我们聚焦于结构力学中基于伴随的有限元数字孪生工作流程，其中传感器配置通过作用于有限元状态的离散测量算子明确体现出来（例如，在传感器位置进行节点位移插值和应变恢复）。在基于 Fisher 信息（局部线性化）的设计准则下，我们说明如何通过与现有逆问题求解器相一致的正向/伴随求解，计算雅可比矩阵和伴随雅可比矩阵算子作用，进而计算 Fisher 乘积 $Fv = J^\top R^{-1} J v$。此外，我们针对典型的一维杆模型提供了可解析的基准结果，包括对可检测性与可定位性的严格区分，以及多个位移传感器 D-最优布置的闭式表征；这些证明补充了通用框架，并带来超越纯数值设计研究的洞见。

2 正问题与逆问题的表述

我们考虑一个采用有限元离散的结构，其承受 n 个给定载荷工况。令 $u_i \in \mathbb{R}^{N_u}$表示第 i 个载荷工况对应的节点位移向量， f_i 表示相应的外力向量。结构平衡方程为

$$K(\alpha, \beta)\, u_i = f_i + f_{\Delta T}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

其中，刚度矩阵按单元组装如下：

$$K(\alpha, \beta) = \sum_{e=1}^{N_e} \alpha_e \, K_e(\beta), \tag{2}$$

且 $\alpha_e \in [\alpha_{\min}, 1], \quad \alpha_{\min} > 0$ 表示用于描述损伤或弱化的单元强度因子，而 β 表示材料参数，例如杨氏模量或泊松比。项 $f_{\Delta T}$ 表示由热效应引起的内力。

我们假设有限元离散包含了足够的本质边界条件，使得对于所有可容许参数（α, β），刚度矩阵 $K(\alpha, \beta)$ 均为对称正定。假设单元矩阵 $K_e(\beta)$ 对材料参数的依赖是光滑的

β，从而保证解映射 $(\alpha, \beta, f_{\Delta T}) \mapsto u_i$ 具有弗雷歇可微性。
参数 α 和 β 假设属于容许集 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{N_e}$ 和 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{N_\beta}$，且这些集合是闭且凸的。

系统响应将在 m 个传感器位置 x_j, $j = 1, \ldots, m$处与测量数据进行比较。对于每个载荷工况 i，位移和应变测量通过作用于有限元解的插值算子 I_{ij}^d和 I_{ij}^s 进行建模：

$$u_{ij}^{\mathrm{md}} \approx I_{ij}^d \, u_i,$$
$$s_{ij}^{\mathrm{ms}} \approx I_{ij}^s \, s_i(u_i),$$

其中， $s_i(u_i)$表示由位移导出的有限元应变场。假设算子I_{ij}^d 和 I_{ij}^s 是有界线性映射，分别对应于在传感器位置对有限元解和应变场进行插值或局部平均。

给定测量数据 $\{u_{ij}^{\mathrm{md}}, s_{ij}^{\mathrm{ms}}\}$，参数识别问题旨在求出使加权最小二乘失配最小的 $(\alpha, \beta, f_{\Delta T})$

$$I(u_1, \ldots, u_n, \alpha, \beta, f_{\Delta T}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^{\mathrm{md}} \, \|u_{ij}^{\mathrm{md}} - I_{ij}^d u_i\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^{\mathrm{ms}} \, \|s_{ij}^{\mathrm{ms}} - I_{ij}^s s_i(u_i)\|^2. \quad (3)$$

这里， $\|\cdot\|$ 表示相应测量空间中的欧氏范数。权重 w_{ij}^{md}和 w_{ij}^{ms}均严格为正，反映了测量噪声水平，从而得到具有统计意义的最小二乘形式。该问题受式 (1)–(2) 约束。相应的拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(u_i, \tilde{u}_i, \alpha, \beta, f_{\Delta T}) = I(u_i, \alpha, \beta, f_{\Delta T}) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i^{\mathsf{T}} (K(\alpha, \beta) u_i - f_i - f_{\Delta T}), \quad (4)$$

其中 $\tilde{u}_i$ 为伴随变量。对$\mathcal{L}$ 求变分，可得到标准的伴随系统、梯度表达式和更新公式，详见 [1, 5]。

3 传感器算子

Let S 表示传感器配置，涵盖所有设计选择，包括：

- 空间位置 x_j,
- 测量类型（位移、应变、加速度等），
- 测量方向或分量，以及
- 反映可靠性或成本的加权因子。

我们假设 S 属于预先规定的可容许集$\mathcal{S}_{\mathrm{ad}}$，该集合体现了几何、物理和预算约束。

与 S 相关联的插值算子集合 $\{I_{ij}^d, I_{ij}^s\}$ 由单个测量算子 $M_i(S) \in \mathbb{R}^{m_i \times N_u}$ 表示（其中 m_i 是第 i 个载荷对应的测量数量），该算子作用于离散位移场且为线性算子。算子 $M_i(S)$由有界线性有限元映射（例如应变–位移算子）与传感器选择和加权组合而成。由此得到的观测模型为

$$y_i(S, q) = M_i(S) \, u_i(q), \qquad y_i^{\mathrm{obs}} = y_i(S, q^\star) + \eta_i, \quad (5)$$

其中， $q = (\alpha, \beta, f_{\Delta T})$表示未知参数， $q^\star$ 是真实参数向量（未知）， η_i 表示测量噪声。

对于固定的传感器配置 S，逆问题通过最小化数据失配

$$J(q; S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \|W_i(y_i^{\text{obs}} - y_i(S, q))\|^2, \tag{6}$$

并满足（1）来求解。这里， W_i 为对称正定加权矩阵。

4 优化公式与 Fisher 信息

我们用 $q \in \mathbb{R}^{N_q}$ 表示待识别的参数向量，例如 e

$$q = (\alpha, \beta, f_{\Delta T}),$$

或根据具体应用选择其中一部分。令 $q^\star$ 表示（未知的）真实参数，q_0 表示参考参数，我们将在该参数附近对测量映射进行线性化。 q_0的典型选择包括:

- 标称模型或先验模型（例如，未受损结构），或者
- 外层优化循环中反问题求解器的当前迭代值。

4.1 双层结构的概念

从概念层面看，数字孪生的最优传感器布置自然可表述为一个双层优化问题。内层 （下层）问题是参数识别任务：对于固定的传感器配置 S 和测量数据 y^{obs}，通过求解以下问题来计算估计值 $\hat{q}(S)$

$$\hat{q}(S) \in \arg\min_{q \in \mathbb{R}^{N_q}} \Big\{ J(q; S) + R(q) \Big\}, \tag{7}$$

其中， $J(q; S)$ 是失配（6），而 $R_q(q)$ 表示用于编码先验信息或参数平滑性的正则化项。实际中，(7) 通过基于伴随方法的偏微分方程约束优化算法 [6] 求解。

外层 （上层）问题旨在选择传感器配置 S ，使估计器 $\hat{q}(S)$ 尽可能准确且稳健。一般形式可写为

$$\min_{S \in \mathcal{S}_{\text{ad}}} \Phi(S) \quad \text{with} \quad \Phi(S) := \mathbb{E}\big[\text{loss}(q^\star, \hat{q}(S))\big], \tag{8}$$

其中，$\mathcal{S}_{\text{ad}}$ 表示可行传感器配置集合，loss(·,·) 用于量化估计结果的质量（例如平方误差、风险度量），期望值可针对测量噪声、载荷场景以及 $q^\star$ 中的先验不确定性求取。

结合 (7) 和 (8) 可得一个双层问题：外层设计变量 S 根据内层偏微分方程约束优化问题的解 $\hat{q}(S)$ 进行优化。直接求解这个双层问题的代价高得难以承受。因此，我们利用局部费 Fisher 信息近似 $\hat{q}(S)$ 的统计行为，并得到一个以$F(S)$为变量、易于求解的单层设计问题；这是接下来几个小节的主题。

注 1（离线设计与在线推断）。 在典型的数字孪生工作流程中，传感器布置在离线 设计阶段进行，此时尚未开始采集运行数据，或采集工作与设计并行进行。选定传感器布局 $S^\star$ 后，数字孪生进入在线阶段，此时会针对不同测量值，使用固定配置 $S^\star$反复求解形式如 (7) 的逆问题。下文讨论的基于费 Fisher 信息的准则，为这些在线逆问题的预期性能提供了一种离线替代评估方法。

4.2 线性化统计模型与失配

对于给定的传感器配置 S，我们将所有载荷工况（对于瞬态问题，还包括所有时间步）下的测量值堆叠成一个向量

$$y(S,q) \in \mathbb{R}^{N_y}, \quad \text{where} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = N_y,$$

wh其中 N_y 为观测值总数。我们假设加性噪声模型 l

$$y^{\text{obs}} = y(S,q^\star) + \eta, \qquad \eta \sim \mathcal{N}(0,R), \tag{9}$$

其中 $R \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}$ 为测量噪声的协方差矩阵。在许多应用中， R 取为对角矩阵，其元素对应于各个传感器的方差。

在最小二乘形式（6）中，我们写为

$$J(q;S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left\| W_i (y_i^{\text{obs}} - y_i(S,q)) \right\|^2,$$

其中 W_i 是各载荷工况的加权矩阵。若将 y_i 堆叠为全局数据向量$y(S,\ q)$，并定义相应的块对角加权矩阵 W，则可得

$$J(q;S) = \frac{1}{2}\left\| W\big(y^{\text{obs}} - y(S,q)\big) \right\|^2.$$

在高斯噪声模型 (9) 下，（负）对数似然（忽略与 q 无关的加性常数）为

$$\mathcal{L}(q;S) := \frac{1}{2}\big(y^{\text{obs}} - y(S,q)\big)^\top R^{-1}\big(y^{\text{obs}} - y(S,q)\big),$$

而对数似然为

$$\ell(q; y^{\text{obs}}, S) := \log p(y^{\text{obs}} \mid q, S) = -\,\mathcal{L}(q;S) - \tfrac{1}{2}\log\det(2\pi R).$$

因此，选择 W，使 $W^\top W \approx R^{-1}$，即可使最小二乘失配 (6) 与该统计模型一致。

为与经典最优实验设计建立联系，我们围绕参考参数 q_0 对 $y(S,\ q)$ 进行线性化：

$$y(S,q) \approx y(S,q_0) + J(S)\,(q - q_0), \qquad J(S) := \left.\frac{\partial y(S,q)}{\partial q}\right|_{q=q_0} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}. \tag{10}$$

如果 $y(S,\ q)$ 关于 q 呈线性，则该表示在全局范围内是精确的；对于非线性模型，它则提供了围绕 q_0 的局部近似。 $J(S)$ 中编码的灵敏度可通过伴随方法高效计算。

4.3 线性高斯设定下的Fisher信息

q_0 处的费 Fisher 信息为

$$F(q_0, S) = \mathbb{E}\big[s(q_0; y, S)\, s(q_0; y, S)^\top\big], \qquad s(q; y, S) := \nabla_q \ell(q; y, S),$$

其中期望是关于 $q = q_0$处随机观测 y 的分布而取的。在标准正则性假设下（例如控制收敛以及 ℓ的充分光滑性），这等价于

$$F(q_0, S) = -\,\mathbb{E}\Big[\nabla_q^2 \ell(q; y, S)\Big]_{q=q_0} = \mathbb{E}\Big[\nabla_q^2 \mathcal{L}(q; S)\Big]_{q=q_0},$$

这在计算上通常更为方便。

利用线性化测量模型（10）和高斯噪声模型（9），对数似然（至多相差一个加性常数）可以写为

$$\ell(q; y^{\mathrm{obs}}, S) \approx -\frac{1}{2}\big(y^{\mathrm{obs}} - y(S, q_0) - J(S)(q - q_0)\big)^\top R^{-1}\big(y^{\mathrm{obs}} - y(S, q_0) - J(S)(q - q_0)\big).$$

对 q 求导，我们得到得分函数

$$\nabla_q \ell(q; y^{\mathrm{obs}}, S) \approx J(S)^\top R^{-1}\big(y^{\mathrm{obs}} - y(S, q_0) - J(S)(q - q_0)\big),$$

再求导一次即得到海森矩阵

$$\nabla_q^2 \ell(q; y^{\mathrm{obs}}, S) \approx -\,J(S)^\top R^{-1} J(S),$$

在该线性化模型中，它与具体的实现结果无关 y^{obs} 。因此， q_0 处的费舍尔信息为

$$F(S) := F(q_0, S) = -\mathbb{E}\Big[\nabla_q^2 \log p(y^{\mathrm{obs}} \mid q, S)\Big]_{q=q_0} = J(S)^\top R^{-1} J(S). \tag{11}$$

在线性高斯情形下，这一恒等式是精确的；对于非线性正向模型，它表示由线性化式 (10) 得到的局部费舍尔信息，并且与负对数似然海森矩阵的高斯–牛顿近似一致。

直观地说， $J(S)$ 的第 k 列描述数据如何响应第 k 个参数的单位扰动。左右乘以 R^{-1} 可根据测量噪声对这些变化进行加权，而二次型

$$v^\top F(S) v = \big\|R^{-1/2} J(S) v\big\|^2$$

则量化了在噪声存在时，参数扰动 v 的可区分程度。

4.4 传感器设计问题

回顾一下，式 (11) 中的费舍尔信息矩阵 $F(S)$ 取决于传感器配置 S 和所选的线性化点 q_0。为简化符号，我们省略这一依赖关系，直接记作 $F(S)$，并约定所有量均在固定的参考参数 q_0 处计算（例如名义未损伤结构）。

回顾$\mathcal{S}_{\mathrm{ad}}$ 表示可行传感器配置的集合，其中编码了对传感器数量、位置、类型和成本的约束。传感器设计问题随后被表述为在 $S \in \mathcal{S}_{\mathrm{ad}}$上对 $F(S)$的标量准则进行优化。来自最优实验设计的经典准则包括:

- **A-最优性：**最小化平均方差,

$$\min_{S\in\mathcal{S}_{\mathrm{ad}}} \operatorname{tr}\left(F(S)^{-1}\right);$$

- **D-最优性：** 最大化信息量,

$$\max_{S\in\mathcal{S}_{\mathrm{ad}}} \log\det F(S);$$

- **E-最优性：** 最大化最小特征值,

$$\max_{S\in\mathcal{S}_{\mathrm{ad}}} \lambda_{\min}\big(F(S)\big).$$

当 $F(S)$ 为对称正定矩阵时，这些目标定义明确；这对应于在 q_0 传感器配置 S 下参数的局部可辨识性。实践中，可以添加一个较小的正则化项 $F(S) \mapsto F(S) + \varepsilon I$，以处理近奇异情况。

在本文中，我们主要关注 D-最优设计，其目标是最大化 $F(S)$ 的行列式，或者等价地，最小化 $-\log\det F(S)$:

$$\min_{S\in\mathcal{S}_{\mathrm{ad}}} \Phi_{\mathrm{D}}(S), \qquad \Phi_{\mathrm{D}}(S) := -\log\det F(S). \tag{12}$$

更一般地，可以考虑稳健设计或基于情景的设计，即将式 (12) 中的 $F(S)$ 替换为在若干代表性参数值处计算得到的 Fisher 信息矩阵的平均值$q_0^{(1)}$，...，$q_0^{(L)}$（例如对应于不同损伤模式或运行条件），

$$\bar{F}(S) := \sum_{\ell=1}^{L} w_\ell F(S; q_0^{(\ell)}),$$

¯然后优化 $F(S)$ 的标量准则。这样，传感器布局便能在一系列合理情景下表现良好，而无需预先知道真实参数 $q^\star$。

在后续章节中，我们将推导 $\Phi_{\mathrm{D}}(S)$（及相关准则）关于传感器配置 S的灵敏度表达式，并介绍在有限元环境中计算近似最优传感器布局的实用算法。

5 基于伴随法的灵敏度与传感器布置

在本节中，我们 推导计算 D 最优目标函数梯度所需的表达式 e

$$\Phi_{\mathrm{D}}(S) = -\log\det F(S), \qquad F(S) = J(S)^\top R^{-1} J(S), \tag{13}$$

关于定义传感器配置 S 的设计变量。 $J(S)$ 对 S 的依赖通过测量算子 $M_i(S)$ 实现，这些测量算子用于提取或插值传感器位置处的状态量。

5.1 D-最优目标的变分

我们回顾一下 D-最优传感器设计目标

$$\Phi_{\mathrm{D}}(S) = -\log\det F(S), \qquad F(S) = J(S)^{\top} R^{-1} J(S), \tag{14}$$

其中，对于可行传感器配置 S， $F(S)$ 为对称正定矩阵。利用标准恒等式 $\mathrm{d}\log\det F = \mathrm{tr}(F^{-1}\mathrm{d}F)$，可得到 Φ_{D} 关于扰动 $\mathrm{d}F(S)$ 的一阶变分：

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = -\,\mathrm{tr}\left(F(S)^{-1}\,\mathrm{d}F(S)\right). \tag{15}$$

由于 $F(S) = J(S)^{\top} R^{-1} J(S)$，且 R 与 S 无关，因此由扰动 $\mathrm{d}J(S)$ 引起的 F 的变分为

$$\mathrm{d}F(S) = \mathrm{d}(J^{\top} R^{-1} J) = (\mathrm{d}J)^{\top} R^{-1} J + J^{\top} R^{-1} (\mathrm{d}J), \tag{16}$$

其中我们采用简写 $J = J(S)$。将（16）代入（15）得到

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = -\,\mathrm{tr}\big(F^{-1}(\mathrm{d}J)^{\top} R^{-1} J\big) - \mathrm{tr}\big(F^{-1} J^{\top} R^{-1} (\mathrm{d}J)\big).$$

利用 $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X^{\top})$ 以及 $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA)$（迹的循环不变性），我们首先对第一项进行转置：

$$\mathrm{tr}\big(F^{-1}(\mathrm{d}J)^{\top} R^{-1} J\big) = \mathrm{tr}\big(J^{\top} R^{-1} (\mathrm{d}J) F^{-1}\big),$$

然后对右端项进行循环置换，得到

$$\mathrm{tr}\big(J^{\top} R^{-1} (\mathrm{d}J) F^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(F^{-1} J^{\top} R^{-1} (\mathrm{d}J)\big).$$

因此，两项贡献相同，我们得到

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = -2\,\mathrm{tr}\big(F(S)^{-1} J(S)^{\top} R^{-1}\,\mathrm{d}J(S)\big). \tag{17}$$

引入“伴随权重”矩阵会很方便

$$B(S) := R^{-1} J(S) F(S)^{-1} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}, \tag{18}$$

其中 $B(S)^{\top} = F(S)^{-1} J(S)^{\top} R^{-1}$。于是，式 (17) 可更简洁地写为

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = -2\,\mathrm{tr}\big(B(S)^{\top}\,\mathrm{d}J(S)\big). \tag{19}$$

因此，D-最优目标对任意设计参数的灵敏度仅通过灵敏度矩阵 $J(S)$ 的方向导数 $\mathrm{d}J(S)$ 体现，无需计算前向映射关于参数 q 的二阶导数。下文将用控制有限元方程的前向解和伴随解表示 $\mathrm{d}J(S)$。

5.2 雅可比矩阵 $J(S)$ 的结构

对于每个载荷工况 $i = 1,\ldots,n$，测量向量为

$$y_i(S,q) = M_i(S)\,u_i(q),$$

其中， $M_i(S)$ 是由传感器配置 S 决定的测量（插值、提取或平均）算子。状态 $u_i(q) \in \mathbb{R}^{N_u}$ 满足静态平衡方程

$$K(\alpha,\beta)\,u_i(q) = f_i(q) + f_{\Delta T}(q), \tag{20}$$

其中 q 汇集了所有反演参数（例如，空间变化的材料弱化参数、热载荷参数、全局标量等）。

对于费 Fisher 信息，我们需要测量映射 关于参数 q的雅可比矩阵，并在参考 q_0处进行评估:

$$J(S) := \frac{\partial y(S,q)}{\partial q}\Big|_{q=q_0} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q},$$

其中， $y(S,\ q)$ 将所有载荷工况下的 $y_i(S,\ q)$ 堆叠在一起。由于此处传感器配置 S 固定，测量算子 $M_i(S)$ 不依赖于 q。

参数扰动 δq 会引起状态扰动 $\delta u_i \in \mathbb{R}^{N_u}$ ，后者满足线性化平衡方程

$$K(\alpha,\beta)\,\delta u_i = \Big(\frac{\partial f_{\Delta T}}{\partial q} - \frac{\partial K(\alpha,\beta)}{\partial q}\,u_i\Big)\,\delta q \ := \ C_i\,\delta q, \tag{21}$$

其中 $C_i \in \mathbb{R}^{N_u \times N_q}$ 是参数到右端项的灵敏度算子。因此

$$\delta y_i = M_i(S)\,\delta u_i = M_i(S)\,U_i\,\delta q,$$

其中 U_i 是状态灵敏度矩阵,

$$U_i := \frac{\partial u_i(q)}{\partial q}\Big|_{q=q_0} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_q}, \quad K(\alpha,\beta)\,U_i = C_i.$$

堆叠所有载荷工况可得分块雅可比矩阵

$$J(S) = \begin{bmatrix} M_1(S)\,U_1 \\ \vdots \\ M_n(S)\,U_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}.$$

$J(S)$ 的第 k 列对应于对第 k 个参数分量 q_k 施加单位扰动时完整传感器数据集的响应，可通过求解带有 $\delta q = e_k$ 的式 (21) 得到。

当 N_q 较小时（例如全局参数），直接构造 $J(S)$ 是可行的。当 q 的维度很高时（例如空间分布的弱化场），显式构造 U_i 和 $J(S)$ 将难以实现。在这种情况下，我们采用 J 的 算子视角，应用 J 和 $J^\top$，而不显式构造它们。

伴随/算子视角（无矩阵）。雅可比矩阵 $J(S)$ 是堆叠测量向量 $y(S,\ q)$ 关于参数向量 q 的导数，在 q_0 处求值。给定一个方向 $v \in \mathbb{R}^{N_q}$，乘积 Jv 是 y 在 q_0 处沿方向 v 的方向导数:

$$Jv = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} y(S, q_0 + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

我们现在展示 ow 如何计算 Jv、 $J^\top w$ 和 $Fz: = J^\top R^{-1} J z$而不显式构造 J。

1. 前向（线性化）求解 Jv。 固定 S和一个方向 $v \in \mathbb{R}^{N_q}$。对于每个载荷工况 i，状态 $u_i(q)$ 求解

$$K(\alpha,\beta)\,u_i(q) = f_i(q) + f_{\Delta T}(q).$$

将 q 扰动为 $q_0 + \varepsilon v$，并在 $\varepsilon = 0$处求导。定义状态变化量

$$\delta u_i := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} u_i(q_0 + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

于是， δu_i 满足（21）。由于传感器配置 S 是固定的，测量算子 $M_i(S)$ 与 q无关，因此载荷工况 i 下测量值的变化量为

$$(Jv)_i := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} y_i(S, q_0 + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} = M_i(S)\,\delta u_i.$$

对所有载荷工况进行堆叠可得 $Jv \in \mathbb{R}^{N_y}$。因此，为计算 Jv，我们需要:

1. 为 $i = 1$、... 、 n组装右端项 $C_i v$，

2. 求解 $K(\alpha、\ \beta)\ \delta u_i = C_i v$；3. 构
造 $(Jv)_i = M_i(S)\ \delta u_i$并进行堆叠。

这需要使用刚度矩阵 $K(\alpha、\ \beta)$进行 n 次线性求解。

2. $J^\top w$**的伴随求解**。给定 $w \in \mathbb{R}^{N_y}$，将其分解为 $w = (w_1,\ \ldots,\ w_n)$，其中 w_i汇集与载荷工况 i相关的分量。

为推导 $J^\top w$ 的伴随表示，令 $w = (w_1,\ \ldots,\ w_n)$ 汇集所有载荷工况的贡献，并回顾对于任意 $v \in \mathbb{R}^{N_q}$,

$$Jv = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} y(S, q_0 + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

对于载荷工况 i，相应的状态变化和测量变化满足

$$K(\alpha,\beta)\,\delta u_i = C_i v, \qquad (Jv)_i = M_i(S)\,\delta u_i,$$

其中 C_i 定义见式（21）。因此

$$w^\top (Jv) = \sum_{i=1}^{n} w_i^\top (Jv)_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i(S)^\top w_i)^\top \delta u_i.$$

引入满足以下方程的伴随变量 $\lambda_i \in \mathbb{R}^{N_u}$

$$K(\alpha,\beta)^\top \lambda_i = M_i(S)^\top w_i. \tag{22}$$

Then

$$(M_i(S)^\top w_i)^\top \delta u_i = (K(\alpha,\beta)^\top \lambda_i)^\top \delta u_i = \lambda_i^\top K(\alpha,\beta)\,\delta u_i = \lambda_i^\top C_i v.$$

对载荷工况求和可得

$$w^\top (Jv) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\top C_i v = \sum_{i=1}^{n} \left(C_i^\top \lambda_i\right)^\top v = \left(\sum_{i=1}^{n} C_i^\top \lambda_i\right)^\top v,$$

这里我们利用线性性质将求和移入其中。

由于这对所有 $v \in \mathbb{R}^{N_q}$ 均成立，因此我们得出

$$J^\top w = \sum_{i=1}^{n} C_i^\top \lambda_i. \tag{23}$$

这表明，对向量 w 应用 $J^\top$ 可通过使用同一刚度矩阵 $K(\alpha,\ \beta)$ 进行 n 次伴随求解（22）来计算。

3. 应用 $F = J^\top R^{-1} J$。对于任意 $z \in \mathbb{R}^{N_q}$，我们有

$$Fz = J^\top (R^{-1} J z).$$

使用上述过程计算 Jz 和 $J^\top(\cdot)$，即可得到 Fz，而无需显式构造 J 或 F:

$$y = Jz, \qquad \tilde{y} = R^{-1} y, \qquad Fz = J^\top \tilde{y}.$$

因此，o 次应用 F 需要使用 $K(\alpha,\ \beta)$ 进行 n 次求解，并使用 $K(\alpha,\ \beta)$ 进行 n 次求解$^\top$.

注释。

(i) (21) 中的矩阵 C_i 包含参数到右端项的灵敏度

$$C_i = \frac{\partial f_{\Delta T}}{\partial q} - \frac{\partial K(\alpha,\beta)}{\partial q}\, u_i,$$

并使用反问题求解器中同样的 K、 f_i 和 $f_{\Delta T}$ 导数逐单元组装。无需额外的模型导数。

(ii) 当 N_q 适中（未知参数数量较少）时，可以实际组装 Fisher矩阵

$$F = J^\top R^{-1} J$$

并应用稠密分解（例如乔列斯基分解）来计算 log det F 和 F^{-1}。

(iii) 当 N_q 较大（例如参数在空间上分布）时，我们以无矩阵方式处理 $F = J^\top R^{-1} J$，仅通过算子作用访问它

$$Fz = J^\top R^{-1} (Jz),$$

每次乘积计算都需要一次正向扫描和一次伴随扫描。这足以 :

– 在需要时（A-最优性或显式构造 $B = R^{-1} J F^{-1}$）使用 Krylov 方法（例如共轭梯度法）求解线性方程组 $Fx = g$，并– 利用随机 Lanczos 求积，通过恒等式 log det F =tr(log F) 以及与 F 的重复矩阵-向量乘积来近似 D-最优目标。

(iv) Jv和 $J^\top w$的表达式仅取决于相对于参数 q的导数，不涉及相对于传感器设计变量 S的导数。D-最优目标的灵敏度

$$\Phi_{\mathrm{D}}(S) = -\log\det F(S)$$

关于 S 需要再进行一层微积分才能计算 dJ(*S*)；这将在下一小节中推导。

5.3 关于传感器设计的 D-最优准则灵敏度

我们现在推导 D-最优目标的导数表达式

$$\Phi_{\mathrm{D}}(S) = -\log\det F(S), \qquad F(S) = J(S)^{\top} R^{-1} J(S),$$

关于定义传感器配置 S的连续设计参数。典型示例包括传感器位置（用于点测量或插值测量）。

回顾式（11 ）和式（19）， Φ_{D} 关于扰动 $\mathrm{d}J(S)$ 的一阶变分为 s

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = -2\,\mathrm{tr}\big(B(S)^{\top}\,\mathrm{d}J(S)\big), \qquad B(S) := R^{-1}J(S)F(S)^{-1} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}. \tag{24}$$

这里， $B(S)$ 是“伴随权重”矩阵，其对 S 的依赖仅通过 $J(S)$ 和 $F(S)$ 体现。一旦获得雅可比矩阵 $J(S)$ 和 Fisher 信息算子 $F(S)$ 的作用（可通过显式组装实现，适用于参数维数适中的情况；也可通过结合 F、 $B(S)$ 的无矩阵线性求解实现），便可通过求解含 $F(S)$ 的线性方程组来计算，也可在组装 $F(S)$ 后通过显式乘法计算。

5.3.1 块结构及其对 S 的依赖

我们首先明确 $J(S)$如何通过测量算子 $M_i(S)$依赖于传感器配置。由线性化状态方程(21)，我们有

$$K(\alpha,\beta)\,U_i = C_i, \qquad C_i = \frac{\partial f_{\Delta T}}{\partial q} - \frac{\partial K(\alpha,\beta)}{\partial q}\,u_i,$$

因此，载荷工况 i的雅可比块为

$$J_i(S) = M_i(S)\,U_i \in \mathbb{R}^{m_i \times N_q},$$

其中 m_i 表示载荷工况 i的测量数量。将所有载荷工况堆叠后，

$$J(S) = \begin{bmatrix} J_1(S) \\ \vdots \\ J_n(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(S)\,U_1 \\ \vdots \\ M_n(S)\,U_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}.$$

注意， U_i 依赖于参数向量 q ，但在我们的“被动传感器”假设下与传感器配置 S无关： S 仅影响测量算子 $M_i(S)$，而不影响偏微分方程本身。

类似地，我们将伴随权重矩阵 $B(S)$划分为与各载荷工况相对应的块：

$$B(S) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1(S) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_n(S) \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_i(S) \in \mathbb{R}^{m_i \times N_q}.$$

Then

$$\mathrm{tr}\big(B(S)^{\top}\mathrm{d}J(S)\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\big(\mathcal{B}_i(S)^{\top}\,\mathrm{d}J_i(S)\big),$$

且（24）变为

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\big(\mathcal{B}_i(S)^{\top}\,\mathrm{d}J_i(S)\big). \tag{25}$$

由于 $J_i(S) = M_i(S)U_i$ 和 U_i 与 S无关，因此设计 S 发生扰动所引起的 $J_i(S)$ 的变化为

$$\mathrm{d}J_i(S) = (\mathrm{d}M_i(S))\, U_i.$$

将其代入式 (25) 得

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\mathcal{B}_i(S)^{\top}\, (\mathrm{d}M_i(S))\, U_i). \tag{26}$$

这一恒等式表明，一旦获得 U_i 和块权重 $\mathcal{B}_i(S)$，D-最优准则关于传感器设计的灵敏度就完全由测量算子 $M_i(S)$ 的变化决定。

5.3.2 标量设计参数的导数

设 θ 为一个标量设计参数（例如，某个候选传感器的权重，或传感器位置向量的一个分量）。我们假设依赖关系 $S \mapsto M_i(S)$ 足够光滑，因此对于感兴趣的设计参数，导数 $\partial M_i(S)/\partial\theta$ 存在。那么，式 (26) 中的 $\mathrm{d}M_i(S)$ 变为

$$\mathrm{d}M_i(S) = \frac{\partial M_i(S)}{\partial\theta}\, \mathrm{d}\theta,$$

由此得到方向导数

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{D}} = \frac{\partial\Phi_{\mathrm{D}}}{\partial\theta}\, \mathrm{d}\theta = -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\mathcal{B}_i(S)^{\top}\, \frac{\partial M_i(S)}{\partial\theta}\, U_i)\, \mathrm{d}\theta.$$

因此，D-最优目标关于 θ 的导数为

$$\frac{\partial\Phi_{\mathrm{D}}}{\partial\theta} = -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\mathcal{B}_i(S)^{\top}\, \frac{\partial M_i(S)}{\partial\theta}\, U_i). \tag{27}$$

公式 (27) 为 完全通用，涵盖了广泛的传感器设计参数化方式 ：

- 传感器权重。 如果 $M_i(S)$ 构造为候选传感器行的加权和， $M_i(S) = \sum_j \theta_j M_{i,\,j}$，那么 $\partial M_i(S)/\partial\theta_j = M_{i,\,j}$，且 (27) 可简化为 $\mathcal{B}_i(S)$ 与 $M_{i,\,j}U_i$ 的简单弗罗贝尼乌斯内积加权形式。

- 传感器位置。 对于通过节点值插值定义的点传感器， $M_i(S)$ 由在传感器坐标$x_{\mathrm{sens}}(\theta)$处计算的形函数行组成。此时， $\partial M_i(S)/\partial\theta$ 涉及形函数的梯度和雅可比矩阵 $\partial x_{\mathrm{sens}}/\partial\theta$，这些都是有限元代码中的标准组成部分。

在所有情况下，除计算 U_i、 $J(S)$、 $F(S)$ 和 $B(S)$ 所需的偏微分方程求解外，无需进行额外的偏微分方程求解。设计梯度 (27) 通过对测量算子和已计算出的灵敏度矩阵 U_i进行简单的局部运算即可得到。

备注 2 （关于伴随方法和参数维数的作用）**.** 在逆问题中，通常需要求标量失配泛函关于参数向量 q的梯度，并使用伴随技术避免构造雅可比矩阵 $J(S) = \partial y/\partial q$。相比之下，D-最优传感器设计依赖于完整的费舍尔信息矩阵 $F(S) = J(S)^{\top}R^{-1}J(S)$，该矩阵汇总了所有 参数方向上的灵敏度。因此，精确计算 $F(S)$（及其对数行列式）

本质上需要获取 q所有分量的灵敏度，例如通过求解 $KU_i = C_i$得到状态灵敏度矩阵 U_i 。本文关注维数适中的参数向量，此时存储 U_i 和 $F(S)$是可行的。对于维数极高的参数，则需要采用其他近似方法（例如降维参数子空间，或对 F进行随机低秩近似）；这部分留待未来研究。

5.3.3 梯度计算步骤总结

对于给定的传感器配置 S 和参数向量 q_0:

1. 对于每个载荷工况 $i = 1, \ldots\ldots, n$:

   (a) 求解正问题 $K(\alpha, \beta)\, u_i(q_0) = f_i(q_0) + f_{\Delta T}(q_0)$。(b) 按照式 (21) 组装 C_i，并求解线性化状态方程 $K(\alpha, \beta)\, U_i = C_i$ 以获得$U_i = \partial u_i/\partial q$。(c) 构造雅可比块 $J_i(S) = M_i(S)\, U_i$。

2. 组装 Fisher矩阵 $F(S) = J(S)^\top R^{-1} J(S)$，并计算 D-最优目标$\Phi_{\mathrm{D}}(S) = -\log\det F(S)$。

3. 计算伴随权重矩阵 $B(S) = R^{-1} J(S) F(S)^{-1}$，并提取其载荷工况块$\mathcal{B}_i(S)$。

4. 对于每个感兴趣的标量设计参数 θ ，计算导数 $\partial M_i(S)/\partial\theta$ ，并利用(27)构造$\partial\Phi_{\mathrm{D}}/\partial\theta$ 。

该流程给出D-最优传感器设计目标关于传感器配置任意光滑参数化的梯度，且仅使用线性代数以及逆问题求解器中已有的模型要素。

6 教学　　示例：单一载荷、单一传感器、逐元素弱化

我们现在说明Fisher信息框架如何在简化设定下恢复一条简单的“闭式”传感器布置准则。考虑具有如下参数的单一载荷工况

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_e}) \in [\alpha_{\min}, 1]^{N_e},$$

其中 α_e 缩放单元 e的刚度。令 $u(\alpha) \in \mathbb{R}^{N_u}$ 表示相应的有限元状态，求解

$$K(\alpha)\, u(\alpha) = f,$$

对于固定的右端项 f，我们假设存在参考参数 α_0 （例如未损伤构型），并考虑围绕 α_0 的小扰动。

考虑一组候选点传感器（或局部传感器），其索引为 $j = 1, \ldots, m$。对于给定的传感器j，标量测量为

$$y_j(\alpha) = M_j\, u(\alpha),$$

其中， $M_j \in \mathbb{R}^{1\times N_u}$ 用于选取或插值得到传感器位置处的位移/应变分量x_j。令

$$U := \frac{\partial u(\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} \in \mathbb{R}^{N_u\times N_e}$$

表示状态灵敏度矩阵，其第 e列表示状态对单元 e刚度缩放的灵敏度。则传感器 j 关于逐元素弱化的雅可比矩阵行为

$$J_j := \frac{\partial y_j(\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = M_j U \in \mathbb{R}^{1\times N_e}.$$

该项 $(J_j)_e$ 表示第 j个传感器对单元扰动的灵敏度 e.

我们假设传感器 j上的噪声为加性标量高斯噪声，

$$y_j^{\text{obs}} = y_j(\alpha^\star) + \eta, \qquad \eta \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

其中真实参数向量 $\alpha^\star$ 未知，方差 $\sigma^2 > 0$已知。

命题 3 (一个载荷、一个传感器、逐元素弱化**).** 假设至多有一个单元被弱化，即我们关注的是检测单个标量参数 α_k 相对于其参考值的偏差，同时保持 α 的所有其他分量不变。对于传感器 j，标量参数 α_k 的费舍尔信息为

$$F_{j,k} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\,(J_j)_k^2.$$

如果我们要寻找一个能够适用于所有可能的单元素弱化的稳健传感器位置，一个自然的设计准则是最大化平均费舍尔信息

$$\sum_{k=1}^{N_e} F_{j,k}.$$

由此得到最优的单传感器位置

$$j^\star \in \arg\max_{j=1,\dots,m} \|J_j\|_2^2 = \arg\max_{j=1,\dots,m} \sum_{k=1}^{N_e}\left(\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right)^2. \tag{28}$$

换言之，最优传感器应放置在测量对逐元素弱化集合同时最敏感的位置（以 ℓ_2 意义而言）。

证明。 固定一个传感器索引 j 和一个单元索引 k。考虑标量参数 $\theta := \alpha_k$，同时将 α 的所有其他分量固定为其参考值。对于α_0附近的小扰动，测量映射可用其一阶泰勒展开很好地近似:

$$y_j(\theta) \approx y_j(\alpha_0) + \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}(\theta - \alpha_{0,k}).$$

定义标量灵敏度

$$s_{j,k} := \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0} = (J_j)_k.$$

我们将传感器 j 处的测量建模为真实（无噪声）模型预测值加上加性高斯噪声，

$$y_j^{\text{obs}} = y_j(\theta) + \eta_j, \qquad \eta_j \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

其中，$y_j(\theta)$ 是有限元模型针对参数值 θ 预测的确定性响应。由于在固定的 θ 条件下，$y_j(\theta)$ 是非随机的，因此 y_j^{obs} 给定 θ 的条件密度为

$$p(y_j^{\text{obs}} \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(y_j^{\text{obs}} - y_j(\theta))^2}{2\sigma^2}\right),$$

即，

$$y_j^{\mathrm{obs}} \mid \theta \sim \mathcal{N}\big(y_j(\theta),\, \sigma^2\big).$$

对数似然（略去与 θ 无关的加性常数）为

$$\ell(\theta\,;\, y_j^{\mathrm{obs}}) = \log p(y_j^{\mathrm{obs}} \mid \theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}\big(y_j^{\mathrm{obs}} - \mu(\theta)\big)^2, \qquad \mu(\theta) := y_j(\theta).$$

对 θ 求导，得到

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2}\big(y_j^{\mathrm{obs}} - \mu(\theta)\big)\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta}.$$

在参考点 $\theta_0 = \alpha_{0,\ k}$，均值的导数为

$$\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta_0} = \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0} = s_{j,k}.$$

标量参数 θ 在 θ_0 处的费 Fisher 信息为

$$F_{j,k} = \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\Big|_{\theta_0}\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{\sigma^4}\big(y_j^{\mathrm{obs}} - \mu(\theta_0)\big)^2 s_{j,k}^2\Big],$$

其中，期望是针对服从 $\mathcal{N}(\,)$ 分布的

y_j^{obs} $\mu\ \theta_0\ \ \sigma^2$ $\mathbb{E}[\ y_j^{\mathrm{obs}} - \mu\ \theta_0\ \ ^2] =$ 计算的。由于 $(\,)$，我们得到

σ^2

$$F_{j,k} = \frac{1}{\sigma^4}\,\sigma^2\, s_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2}\, s_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2}\Big(\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\Big)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\,(J_j)_k^2.$$

现在假设受损单元未知，且可能是 $e = 1$、.....、N_e 中的任意一个。针对传感器 j，一种自然的鲁棒设计准则是最大化这些可能情况下的 平均费 Fisher 信息，

$$\sum_{k=1}^{N_e} F_{j,k} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N_e}(J_j)_k^2 = \frac{1}{\sigma^2}\|J_j\|_2^2.$$

由于 σ^2 对所有传感器而言都是相同的，因此不会影响 argmax。因此，从平均意义上说，最优单传感器位置为

$$j^\star \in \arg\max_{j=1,\dots,m} \|J_j\|_2^2,$$

这正是式（28）。 □

注4。 命题 3 表明，在单一载荷工况、单个传感器和逐单元刚度缩放这一简单设定下，一般的 Fisher信息框架可简化为一条直观的规则：将传感器布置在测量对一系列逐元素弱化同时最为灵敏的位置。实践中，可通过计算雅可比矩阵 $J(S)$ 的行范数（或等价地，计算状态灵敏度矩阵 U 的行范数）来实现这一点，并将传感器布置在行范数最大的候选位置。这个示例有助于检验更一般的多载荷、多传感器公式表述是否合理。

命题 5 （考虑可检测性的平均费歇尔准则）。 在命题 *3* 的设定下，假设：

- 最小的逐单元刚度损失 $\Delta\alpha_{\min} > 0$ 具有实际意义（例如，5% 的降低），并且

- 传感器无法可靠地区分小于分辨率（或噪声底）的测量变化 $\delta_y > 0$。

那么，只有满足以下条件时，传感器 j 才能实际检测到单元 k 的扰动 $\Delta\alpha_k$

$$|\Delta y_{j,k}| \;\approx\; \left|\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right| \Delta\alpha_{\min} \;\gtrsim\; \delta_y.$$

等价地，用标量费 *Fisher* 信息表示

$$F_{j,k} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right)^2,$$

可检测性要求

$$F_{j,k} \;\gtrsim\; F_{\min} := \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\delta_y}{\Delta\alpha_{\min}}\right)^2. \tag{29}$$

那么，传感器 j 的考虑可检测性的平均费歇尔准则为

$$\mathcal{J}_j^{\text{trunc}} := \sum_{k=1}^{N_e} \max\{F_{j,k} - F_{\min},\, 0\}, \tag{30}$$

在此意义下，最优的单传感器位置为

$$j^\star \in \arg\max_{j=1,\dots,m} \mathcal{J}_j^{\text{trunc}}. \tag{31}$$

证明。 根据一阶近似，

$$\Delta y_{j,k} \;\approx\; \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0} \Delta\alpha_{\min}.$$

要求 $|\Delta y_{j,\,k}| \gtrsim \delta_y$ 可得

$$\left|\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right| \;\gtrsim\; \frac{\delta_y}{\Delta\alpha_{\min}}.$$

将两边平方并乘以 $1/\sigma^2$ 可得

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right)^2 \;\gtrsim\; \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\delta_y}{\Delta\alpha_{\min}}\right)^2 = F_{\min},$$

这正是（29）。因此，具有 $F_{j,\,k} < F_{\min}$ 的单元对应于会产生低于有效分辨率的测量变化的参数扰动，实际上无法被传感器 j检测到。

为在设计准则中排除这类贡献，我们将原始求和 $\sum_k F_{j,\,k}$ 替换为截断求和

$$\mathcal{J}_j^{\text{trunc}} = \sum_{k=1}^{N_e} \max\{F_{j,k} - F_{\min},\, 0\}.$$

对于任意 k 满足 $F_{j,\,k} \le F_{\min}$，其贡献均为零；对于 $F_{j,\,k} > F_{\min}$，仅计入超过可检测性阈值 $F_{\min}$ 的部分。因此，在 $j = 1$、.....、m 上最大化$\mathcal{J}_{\text{trunc}}{}^j$，所选出的传感器不仅在平均费舍尔意义下具有较高灵敏度，还能为尽可能多的单元提供实际可检测的信号水平。这得到最优性条件（31）。

□

注 6（基于计数和平滑变体）。（30）中的截断平均费舍尔准则仍会根据单元超过可检测性阈值 $F_{\min}$ 的程度对其进行加权。在某些情况下，更自然的做法是忽略 这一幅度，而只计算可检测单元的数量。

为此，我们引入基于计数的准则

$$\mathcal{J}_j^{\text{count}} := \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{1}\{F_{j,k} \geq F_{\min}\},$$

其中 $\mathbf{1}\{\cdot\}$ 是指示函数。对于固定的传感器位置 j，量 $\mathcal{J}_j^{\text{count}}$恰好是 Fisher 信息 $F_{j,k}$ 超过最低可检测阈值 $F_{\min}$的单元数量。因此，$\mathcal{J}_j^{\text{count}}$选出能够可靠地检测到数量最多的潜在弱化单元的传感器，这与“将传感器布置在能够检测到最多单元的位置”这一启发式原则相符。

示例引入。 标量 Fisher 信息公式和单传感器规则为理解传感器布置原则提供了一种简单而强大的方法。当每个参数都表示一种局部效应（例如逐单元刚度 α_k）时，行 J_j 描述了传感器j 处的测量对各个位置特定参数扰动的响应。因此， $\|J_j\|_2^2$ 反映了传感器 j 对多少个参数敏感，以及敏感程度有多强。

在下文的示例中，我们针对若干经典模型（一维杆、应变传感器等）显式计算 J 。由于这些系统较为简单，Fisher 信息和最优传感器位置可以通过闭式求得，因此这些理论规则可直接结合工程直觉进行解读。

6.1 算例：含 10 个单元的一维杆

我们通过一个简单的一维情形来说明命题 3 的思想，在该情形下，所有量都可以写成闭式。

考虑一根长度为 $L > 0$ 、横截面积恒定为 A 、杨氏模量为 E 的轴向受载杆。我们将杆离散为 $N_e = 10$ 个长度为

$$\ell = L/N_e.$$

令 $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{10} = L$ 表示节点位置，其中 $x_j = j\ell$。假设左端固定，右端承受拉伸载荷 $P > 0$:

$$u(0) = 0, \qquad EA\,u'(L) = P.$$

候选位移传感器位于节点 x_j、 $j = 1, \ldots, 10$ 处，即位于除固定左端 x_0 之外的所有节点处；该处规定了 $u_0 = 0$ ，因此对损伤检测没有提供有效信息。

逐单元弱化参数。我们引入逐单元刚度缩放系数

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}) \in [\alpha_{\min}, 1]^{10},$$

其中 $\alpha_e = 1$ 对应未损伤单元 e ， $\alpha_e < 1$ 表示该单元的弱化（刚度损失）。在标准的两节点线性有限元离散中，每个单元 e 都相当于一个刚度为

$$k_e = \alpha_e \frac{EA}{\ell},$$

and 的弹簧，在端部载荷 P 作用下，这根杆表现为这些弹簧的串联连接。

单元 e在载荷 P 作用下的伸长为

$$\delta_e = \frac{P}{k_e} = \frac{P\ell}{\alpha_e EA},$$

因此，节点 j （从左端固支端起计）的位移为前 j 个单元的累积伸长：

$$u_j(\alpha) := u(x_j) = \sum_{e=1}^{j} \delta_e = \frac{P\ell}{EA} \sum_{e=1}^{j} \frac{1}{\alpha_e}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 10, \tag{32}$$

其中 $u_0 = 0$。

传感器模型与雅可比矩阵。我们考虑设置在节点x_j、 $j = 1$、.....、10处的候选位移传感器。设置在节点x_j处的传感器测量

$$y_j(\alpha) := u_j(\alpha),$$

因此，传感器 j 的测量算子就是行向量 $M_j = e_j^\top$，其中e_j 是 $\mathbb{R}^{11}$ （完整节点位移向量）中的第 j个标准基向量。

我们将无损杆作为参考参数,

$$\alpha_0 = (1, \ldots, 1),$$

和直线 围绕 α_0参数化测量值。对 (32) 关于 α_k 求导，得到 s

$$\frac{\partial u_j(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \frac{P\ell}{EA} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \Big(\sum_{e=1}^{j} \frac{1}{\alpha_e} \Big) = \begin{cases} -\dfrac{P\ell}{EA} \dfrac{1}{\alpha_k^2}, & k \le j, \\ 0, & k > j. \end{cases}$$

在 $\alpha = \alpha_0$ 处求值（即 $\alpha_k = 1$）可得

$$\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0} = \begin{cases} -\,c, & k \le j, \\ 0, & k > j, \end{cases} \qquad c := \frac{P\ell}{EA}. \tag{33}$$

因此，传感器 j 对应的雅可比矩阵行是

$$J_j := \frac{\partial y_j}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha_0} = \big((J_j)_1, \ldots, (J_j)_{10}\big) = \big(-c, \ldots, -c, 0, \ldots, 0\big), \tag{34}$$

其中前 j 个条目等于 $-c$ ，其余 $10 - j$ 个条目等于零。换言之，位于节点x_j的传感器对单元 1、.....、j中的弱化敏感，但对其右侧的单元 $k > j$ 完全不敏感。

单元弱化情况下的平均费舍尔信息。与命题 3 中一样，我们现在假设每次至多弱化一个单元，即考虑单个 α_k 的标量扰动，同时保持其他所有单元不变。我们将节点 x_j 处的传感器噪声建模为

$$y_j^{\mathrm{obs}} = y_j(\alpha^\star) + \eta, \qquad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

对于固定的 单元索引 k，由传感器 j获得的关于 α_k 的标量费舍尔信息 is

$$F_{j,k} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}(J_j)_k^2.$$

利用（33），可得

$$F_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{c^2}{\sigma^2}, & k \le j, \\ 0, & k > j. \end{cases}$$

如果我们希望设计一个传感器，使其平均而言能够有效检测十个单元中任意一个单元的弱化，那么一个自然的准则是平均费舍尔信息

$$\sum_{k=1}^{10} F_{j,k} = \frac{c^2}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{10} \mathbf{1}\{k \le j\} = \frac{c^2}{\sigma^2}\, j.$$

由于 c^2/σ^2 与 j无关，从这个意义上说，最优传感器位置为

$$j^\star \in \arg\max_{j=1,\dots,10} j = \{10\},$$

即最右侧的节点 $x_{10} = L$。在此位置，传感器对全部 十个单元的弱化都很敏感，而位于节点 x_j的传感器则只能“看到”单元 1、.....、 j。

这一显式计算证实了命题 3 中讨论的直观规则：对于这个简单的一维杆，将传感器放置在位移最大的地方（此处为自由端），可以使该传感器能够检测的单元数量达到最大，并使单元弱化时的平均费舍尔信息达到最大。

注 7（阈值化变体）。 如果传感器的分辨率有限 δ_y，且只关注超过某一尺寸的刚度损失$\Delta\alpha_{\min}$，则可以像命题 5 中那样引入可检测性阈值 $F_{\min}$，并且只统计满足 $F_{j,k} \ge F_{\min}$ 的单元。在当前示例中，对于给定的传感器位置 j，要么所有单元 $1, \dots, j$ 都可检测（若 $c^2/\sigma^2 \ge F_{\min}$），要么一个也不可检测。因此，阈值化准则归结为同一条规则：将传感器放在自由端 x_{10}，以最大化其弱化既能被传感器检测到、又超过可检测性阈值的单元数量。

6.2 带有一个应变传感器的一维杆

现在我们重新考察前一小节中的一维杆，但不再测量节点位移，而是在一个单元上放置一个应变传感器。

单元应变。 载荷 P 作用下，单元 e的伸长为

$$\delta_e(\alpha) = \frac{P}{k_e} = \frac{P\ell}{\alpha_e EA},$$

因此，单元 e中的（轴向）应变为

$$\varepsilon_e(\alpha) = \frac{\delta_e(\alpha)}{\ell} = \frac{P}{\alpha_e EA}. \tag{35}$$

因此， ε_e 仅取决于自身的刚度因子 α_e：在这个简单的串联模型中，其他单元的弱化不会影响单元 e 中的应变。

单个应变传感器。现在考虑放置在单元 r, $1 \le r \le N_e$中的单个应变传感器，它测量的是

$$y_r(\alpha) := \varepsilon_r(\alpha) = \frac{P}{\alpha_r EA}.$$

如前所述，我们将参考参数取为无损杆，

$$\alpha_0 = (1, \dots, 1),$$

并在 α_0 处将 $y_r(\alpha)$ 关于 α 线性化。

由 (35)，偏导数为

$$\frac{\partial y_r(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\Big(\frac{P}{\alpha_r EA}\Big) = \begin{cases} -\dfrac{P}{EA}\dfrac{1}{\alpha_r^2}, & k = r, \\ 0, & k \neq r, \end{cases}$$

因为 y_r 仅依赖于 α_r。在 $\alpha = \alpha_0$ 处求值（从而 $\alpha_r = 1$）得到

$$\frac{\partial y_r}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0} = \begin{cases} -c_s, & k = r, \\ 0, & k \neq r, \end{cases} \qquad c_s := \frac{P}{EA}. \tag{36}$$

因此，与单元 r 中的单个应变传感器相关联的雅可比矩阵行 is

$$J_r := \frac{\partial y_r}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha_0} = (0, \dots, 0, \underbrace{-c_s}_{k=r}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times N_e}, \tag{37}$$

即一个在位置 $k = r$ 处仅有一个非零分量的向量。

具体而言，单元 r 中的传感器仅对该单元的弱化敏感，而对所有其他单元的弱化完全不敏感；这与节点x_j处的位移传感器形成对比，后者的响应取决于所有单元 1、…、j。

单元弱化的费 Fisher 信息。如命题 3 所述，假设每次至多只有一个单元发生弱化，并且我们关注检测单个标量参数 α_k 相对于其参考值的偏差，同时保持所有其他分量不变。

对于固定的 k，这次单独测量所提供的关于 α_k 的标量费 Fisher 信息为（参见命题 3）

$$F_{r,k} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial y_r}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}(J_r)_k^2.$$

利用（36），可得

$$F_{r,k} = \begin{cases} \dfrac{c_s^2}{\sigma^2}, & k = r, \\ 0, & k \neq r. \end{cases}$$

换言之，位于单元 r 中的应变传感器仅对该同一单元的刚度因子 α_r 提供非零的费 Fisher 信息；它对于 $k \neq r$不携带关于 α_k 的任何信息。

未知弱化单元的平均信息。 在基于位移的一维示例中，我们考虑了这样一种情形： N_e 个单元中的任意一个 可能被弱化，且所有下标先验 等可能，并使用了平均费 Fisher 信息

$$\sum_{k=1}^{N_e} F_{j,k}$$

作为比较不同单传感器位置的简单鲁棒性准则 j。由此得出规则“将位移传感器置于自由端”，因为该位置同时对所有单元敏感。

对于单元 r中的单个应变传感器，类似的平均准则为

$$\mathcal{J}_r^{\mathrm{avg}} := \sum_{k=1}^{N_e} F_{r,k}.$$

利用上文$F_{r,k}$ 的表达式，

$$\mathcal{J}_r^{\mathrm{avg}} = \sum_{k=1}^{N_e} F_{r,k} = F_{r,r} = \frac{c_s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\Big(\frac{P}{EA}\Big)^2,$$

其独立 于单元索引 r。

因此，在“单个未知弱化单元”假设下，且对各单元赋予相等的先验权重时，在这一简单一维杆中，所有逐单元的应变传感器位置都是等价的：任意单个应变传感器关于哪个单元可能被弱化都提供相同的平均费舍尔信息。

注8 （与位移感知的比较）**.** 在位移传感器示例中，位于节点x_j 的传感器的雅可比矩阵行具有如下结构

$$J_j = (-c, \dots, -c, 0, \dots, 0),$$

因此，自由端处的传感器 x_{10} 会同时对所有十个单元的弱化敏感，且平均费舍尔信息随 j增大。相比之下，应变传感器雅可比矩阵 (37) 恰好只有一个非零项，因此每个应变传感器“看到”的只有其自身所在的单元。从未知弱化单元的平均信息角度来看，没有哪个特定单元会受到区别对待。

这一对比揭示了结构数字孪生的一般规律：位移（或转角）测量往往整合多个单元的信息，而应变测量则具有局部性。在实践中，将少量全局位移传感器与局部应变传感器结合起来，既能实现广泛覆盖，也能精确定位弱化区域。

7 一维杆上的多个位移传感器：可检测性与可定位性

在单传感器情形中，我们证明，对于具有逐单元弱化参数$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{10})$且仅配备一个位移传感器的一维轴向杆，平均费舍尔信息准则会选择自由端 $x_{10} = L$。这是一个可检测性结果：节点 j 处的传感器对单元 $1, \dots, j$中的弱化敏感，而自由端位移对所有单元都敏感。

当有多个传感器可用时，设计目标会发生变化。一旦在 x_{10} 处安装一个传感器，每一处单元弱化都仍然可检测；增加传感器不会扩大可检测单元的集合

。它们的主要作用是提高可定位性（空间分辨率），以区分杆上何处发生了弱化。本节将这一差别明确化，并推导一维杆中多个位移传感器的 D-最优布置的闭式解。

7.1 设置：传感器集合的雅可比矩阵行与费舍尔矩阵

我们考虑在自由节点 $j \in \{1, \dots, 10\}$ 处设置候选位移传感器（节点 $j = 0$ 固定，并测量 $u_0 \equiv 0$）。位于节点 j 处的传感器测量

$$y_j(\alpha) := u_j(\alpha).$$

在参考（无损伤）配置 $\alpha_0 = (1, \dots, 1)$ 下，我们推导出灵敏度

$$\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha_0} = \begin{cases} -c, & k \le j, \\ 0, & k > j, \end{cases} \qquad c := \frac{P\ell}{EA}, \tag{38}$$

因此，传感器 j 对应的雅可比矩阵行为一个“前缀”向量

$$J_j := \frac{\partial y_j}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha_0} = (-c)\,(\underbrace{1, \dots, 1}_{j \text{ entries}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{10}. \tag{39}$$

设 $S = \{j_1 < \cdots < j_m\} \subset \{1, \dots, 10\}$ 为一个包含 m 个传感器节点的集合，并令 $J(S) \in \mathbb{R}^{m \times 10}$ 表示按行 J_{j_p} 堆叠的雅可比矩阵。在方差为 σ^2 的独立同分布噪声下（因此 $R = \sigma^2 I$），费舍尔信息矩阵为

$$F(S) = J(S)^\top R^{-1} J(S) = \frac{1}{\sigma^2} J(S)^\top J(S). \tag{40}$$

因此，除去常数因子 σ^{-2}，D-最优设计最大化格拉姆矩阵 $J(S)^\top J(S)$ 的行列式。

关键观察（定位需要非冗余行）。如果两个传感器放置在同一节点，它们会产生相同行，且不会提高 $J(S)$的秩。即使传感器彼此不同，如果它们对应的行几乎线性相关，那么 $\det\big(J(S)^\top J(S)\big)$ 就很小，该配置的定位效果也会很差。因此，本例中的多传感器设计本质上是选择传感器节点，使得式（39）中的前缀向量能够“区分”各个单元。

7.2 D-最优目标的闭式表达

前缀向量的内积有显式表达。对于 $p,\ q \in \{1, \dots, m\}$，

$$J_{j_p} \cdot J_{j_q} = c^2 \min(j_p, j_q).$$

定义 $m \times m$ 矩阵

$$K(S) := \big[\min(j_p, j_q)\big]_{p,q=1}^{m}. \tag{41}$$

Then

$$J(S)J(S)^\top = c^2 K(S), \qquad \det\big(J(S)J(S)^\top\big) = c^{2m} \det K(S), \tag{42}$$

并且（由于满行秩矩形 J 的 $\det\big(J^\top J\big) = \det\big(JJ^\top\big)$），对于固定的 m，D-最优性等价于最大化 $\det K(S)$。

引理 9 (“min”矩阵的行列式)。 设 $0 = j_0 < j_1 < \cdots < j_m$，并定义 $K = [\min(j_p, j_q)]_{p,\,q=1}^{m}$。那么

$$\det K = \prod_{p=1}^{m} (j_p - j_{p-1}). \tag{43}$$

证明。令 $\Delta_p := j_p - j_{p-1} > 0$。注意，$j_p$ 表示第 p 个传感器的物理节点索引，而 $\Delta_p := j_p - j_{p-1}$ 是相邻传感器间距。

定义单位下三角矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 为

$$A_{pr} := \begin{cases} 1, & r \le p, \\ 0, & r > p. \end{cases}$$

令 $D := \operatorname{diag}(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$。直接计算表明

$$(ADA^{\top})_{pq} = \sum_{r=1}^{\min(p,q)} \Delta_r = j_{\min(p,q)} = \min(j_p, j_q),$$

因此 $K = ADA^{\top}$。由于 A 是单位下三角矩阵，$\det A = 1$，故

$$\det K = \det(A)\det(D)\det\left(A^{\top}\right) = \det(D) = \prod_{p=1}^{m} \Delta_p = \prod_{p=1}^{m} (j_p - j_{p-1}),$$

即为 (43)。 □

引理 9 表明，对于一维杆，D-最优传感器布置可归结为一个离散的“增量最大乘积”问题。

7.3 D-最优传感器位置：相等增量（均匀间距）

现在，我们求解传感器数量固定为 m 的 D-最优布置问题。令 $S = \{j_1 < \cdots < j_m\} \subset \{1, \ldots, 10\}$，并令 $j_0 := 0$ 和 $\Delta_p := j_p - j_{p-1} \in \mathbb{N}$。根据引理 9,

$$\det K(S) = \prod_{p=1}^{m} (j_p - j_{p-1}) = \prod_{p=1}^{m} \Delta_p, \qquad \sum_{p=1}^{m} \Delta_p = j_m \le 10.$$

特别地，在传感器集合 S 上最大化 $\det K(S)$，等价于在满足条件 $\sum_{p=1}^{m} \Delta_p \le 10$的情况下最大化正整数增量 $\prod_{p=1}^{m} \Delta_p$ 的乘积。

由于总和 $\sum_{p=1}^{m} \Delta_p$ 增加时（保持其他增量不变并增大其中一个增量），乘积 $\prod_{p=1}^{m} \Delta_p$ 会严格增大，因此任何最大化解都必须使约束 $j_m = \sum_{p=1}^{m} \Delta_p = 10$取等号。因此，自由端始终包含在 D-最优集合中。

定理 10 (一维杆上的 D-最优布置闭式解)。 固定 $m \in \{1, \ldots, 10\}$，并考虑在节点 $\{1, \ldots, 10\}$处安装的位移传感器，其噪声方差为独立同分布噪声方差 σ^2。令 $S = \{j_1 < \cdots < j_m\}$为选定的传感器集合。那么，选择 $j_m = 10$ 并令增量满足以下条件，即可实现 *D*-最优传感器布置（最大化 $\log\det F(S)$)。

$$\Delta_p := j_p - j_{p-1}, \quad j_0 := 0,$$

尽可能相等，即所有增量最多相差1。

具体而言，令

$$q := \left\lfloor \frac{10}{m} \right\rfloor, \qquad r := 10 - mq \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

那么，任取满足以下条件的正整数$(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$

$$\Delta_p \in \{q, q+1\}, \qquad \#\{p : \Delta_p = q+1\} = r, \qquad \sum_{p=1}^{m} \Delta_p = 10,$$

即可通过下式得到 *D*-最优设计

$$j_p = \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_\ell, \qquad p = 1, \ldots, m,$$

因此，传感器节点 j_p（取整后）在 $\{1, \ldots, 10\}$ 上均匀分布，且始终包含自由端 $j_m = 10$。

证明。 根据引理 9，在严格递增的整数 $1 \le j_1 < \cdots < j_m \le 10$上最大化 $\det K(S)$，等价于最大化

$$\prod_{p=1}^{m} \Delta_p \quad \text{subject to} \quad \Delta_p \in \mathbb{N},\ \Delta_p \ge 1,\ \sum_{p=1}^{m} \Delta_p = j_m \le 10.$$

步骤 1：饱和（$j_m = 10$）。 若 $j_m < 10$，则增大最后一个增量 $\Delta_m \mapsto \Delta_m + 1$仍满足可行性，并会严格增大乘积，因为 $(\Delta_m + 1)/\Delta_m > 1$ 会乘到 $\prod_{p=1}^{m} \Delta_p$ 上。因此，任何最大化解都必须满足 $j_m = 10$，即 $\sum_{p=1}^{m} \Delta_p = 10$。

步骤 2：相等增量（离散平衡）。 </style}固定 后，增量尽可能相等时乘积最大。事实上，假设存在指标 , b，使得 $\Delta_a \ge \Delta_b + 2$。将 (Δ_a, Δ_b) 替换为 $(\Delta_a - 1, \Delta_b + 1)$，总和保持不变，并得到

$$(\Delta_a - 1)(\Delta_b + 1) - \Delta_a \Delta_b = \Delta_a - \Delta_b - 1 \ge 1,$$

因此乘积严格增加。由此可知，任何最大化解都不能包含这样一对增量。重复应用这一均衡步骤，最终会得到一个所有增量之差至多为 1 的配置。记 $q := \left\lfloor \frac{10}{m} \right\rfloor$，所有增量之差至多为 1 这一条件意味着每个 Δ_p只能取 q或 $q+1$这两个值之一。令 r表示满足 $\Delta_p = q+1$的指标 $p \in \{1, \ldots..., m\}$ 的数量。其余 $m - r$ 个增量均等于 q，于是求和约束变为

$$\sum_{p=1}^{m} \Delta_p = r(q+1) + (m-r)q = mq + r.$$

由于 $\sum_{p=1}^{m} \Delta_p = 10$ 是按定义构造的，因此必有

$$mq + r = 10, \qquad \text{hence} \qquad r = 10 - mq.$$

由于 $q = \lfloor 10/m \rfloor$，可得 $0 \le r < m$，因此这个 r 的取值是可行的，且由此唯一确定。因此，最优增量序列恰有 r 项等于$q+1$，另有 $m - r$ 项等于 q，从而得到所述的刻画。

□

注 11（小型 m的显式传感器集合）。 举例来说，一种方便的"整数均匀"选择是将较大的增量 $q+1$ 尽可能均匀地分布在 m 个间隔中。由此得到：

- $m = 1$: $S^\star = \{10\}$;
- $m = 2$: $S^\star = \{5,10\}$（增量为 5，5）；
- $m = 3$: $S^\star = \{3,6,10\}$（增量为 3，3,4）（等价地，$\{4,7,10\}$ 增量为 4，3,3）；
- $m = 4$: $S^\star = \{2,5,7,10\}$（增量为 2,3, 2,3）。

其他 D-最优集合可通过对增量多重集进行排列得到（行列式仅取决于 $\{\Delta_p\}_{p=1}^m$）。

参考文献

[1] Facundo N. Airaudo、Rainald Löhner、Roland Wüchner 和 Harbir Antil。基于伴随方法的结构薄弱部位判定。《计算机方法在应用力学与工程中的应用》，417:116471，2023。[2] Alen Alexanderian。无限维贝叶斯反问题的最优实验设计：综述。逆问题，37(4):043001，2021。[3] Alen Alexanderian、Noemi Petra、Georg Stadler 和 Omar Ghattas。用于无限维贝叶斯非线性反问题 A-最优实验设计的一种快速、可扩展方法。*SIAM* 科学计算杂志，38(1):A243–A272，2016。[4] Talhah Shamshad Ali Ansari、Rainald Löhner、Roland Wüchner、Harbir Antil、Suneth Warnakulasuriya、Ihar Antonau 和 Facundo Airaudo。基于伴随方法，通过位移或应变测量重建温度场。《计算机方法在应用力学与工程中的应用》，438:117818，2025。[5] Talhah Shamshad Ali Ansari、Rainald Löhner、Roland Wüchner、Harbir Antil、Suneth Warnakulasuriya、Ihar Antonau 和 Facundo Airaudo。基于伴随方法，通过位移或应变测量重建温度场。《计算机方法在应用力学与工程中的应用》，438:117818，2025。[6] Harbir Antil、Drew P. Kouri、Martin-D. Lacasse 和 Denis Ridzal，编。偏微分方程约束优化前沿，*IMA*数学及其应用丛书第163卷。施普林格，纽约，2018。收录了基于数学及其应用研究所于2016年6月6日至10日在明尼阿波利斯举行的研讨会撰写的论文。[7] Ihar Antonau、Suneth Warnakulasuriya、Talhah Ansari、Roland Wüchner、Rainald Löhner、Facundo Nicolas Airaudo 和 Habir Antil。推进用于结构健康监测的高保真数字孪生技术。第*13*届智能基础设施结构健康监测国际会议，2025。[8] Ihar Antonau、Suneth Warnakulasuriya、Roland Wüchner、Facundo Airaudo、Rainald Löhner、Harbir Antil 和 Talhah Ansari。用于求解高保真数字孪生系统辨识问题的一阶算法比较。载于 *AIAA SCITECH 2025* 论坛，第0285页，2025。

[9] Omar Ghattas 和 Karen Willcox。从数据中学习基于物理的模型：逆问题与模型降阶视角。*Acta Numerica*，30:445–554，2021。

[10] Eldad Haber、Lior Horesh 和 Luis Tenorio。用于大规模线性病态逆问题实验设计的数值方法。逆问题，24(5):055012，2008。[11] Xun Huan、Jayanth Jagalur 和 Youssef Marzouk。最优实验设计：公式表述与计算。*Acta Numerica*，33:715–840，2024。[12] Daniel C Kammer。用于大型空间结构在轨模态识别与相关性分析的传感器布置。《制导、控制与动力学杂志》，14(2):251–259，1991。[13] Rainald Löhner、Facundo Airaudo、Harbir Antil、Roland Wüchner、Suneth Warnakulasuriya、Ihar Antonau 和 Talhah Ansari。高保真数字孪生：深入探查结构中的薄弱环节。载于*AIAA SCITECH 2025* 论坛，第0286页，2025。[14] Costas Papadimitriou。用于结构系统参数识别的最优传感器布置方法。《声学与振动杂志》，278(4-5):923–947，2004。[15] Dariusz Uciński。分布参数系统辨识的最优测量方法。系统与控制丛书。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2005。[16] Keyi Wu、Peng Chen 和 Omar Ghattas。用于大规模高维贝叶斯最优实验设计的快速可扩展计算框架。《*SIAM/ASA*不确定性量化杂志》，11(1):235–261，2023。