arXiv:2602.02996v1 [q-fin.MF] 3 Feb 2026

多期多资产鞅最优传输中的对偶可达性及其计算

Charlie Che*†[1]、Tongseok Lim*‡[2]和 Yue Sun*§[3]

[1]摩根大通量化交易与研究部，美国纽约州纽约市 10017[2]普渡大学米奇·丹尼尔斯商学院，美国印第安纳州西拉法叶 47907[3]摩根大通全球技术应用研究部，美国纽约州纽约市 10001

2026年2月4日

摘要

我们证明了多边缘多资产鞅最优传输（MOT）问题的对偶可达性。这是量化金融中模型无关定价与对冲数学理论的一项基础问题。我们的主要结果表明，在温和的正则性和不可约条件下，对偶最优解存在；这将此前经典及双边缘情形中的对偶性和可达性结果推广到任意数量的资产和时间段。这一理论进展为复杂的路径依赖型金融衍生品的稳健定价与对冲奠定了严谨基础。为支持我们的分析，我们给出了数值实验，展示了利用最先进的原始-对偶线性规划（PDLP）算法求解大规模离散鞅最优传输问题的实际可行性。特别是，我们求解了由最差表现自动赎回期权稳健定价所产生的多维（或向量型）MOT实例，验证了理论结果的准确性与可行性。我们的研究推进了对MOT数学理论的理解，并凸显了其在高维和模型不确定环境下稳健金融工程中的意义。

1 引言

鞅最优传输（MOT）已成为数理金融与概率论中的核心课题，为在边际约束和鞅约束下对金融衍生品进行模型无关定价与对冲提供了严谨的框架。MOT问题将经典最优传输（OT）推广为要求传输计划满足鞅性质，这一性质是量化金融中风险中性估值的基础。经典最优传输问题由 Monge 和 Kantorovich 提出，拥有丰富的数学理论并有广泛的应用；而鞅扩展在理论和计算方面都带来了重大的新挑战。

鞅最优传输中的一个关键问题是对偶最优解是否存在，即所谓的对偶可达性性质。对偶可达性不仅具有内在的数学研究价值，也对稳健对冲有直接影响：对偶最优解对应于利用可交易工具 [2, 3, 5, 4]构造的明确次对冲与超对冲策略。尽管经典最优传输以及单资产、双时间段的鞅最优传输中的对偶性和对偶可达性已得到广泛研究 [3, 5, 4, 13], ，但多边缘多资产鞅最优传输的一般情形仍鲜有深入探讨。在这一方向上取得理论进展，对于复杂产品的稳健定价与对冲至关重要，

*作者按姓氏字母顺序排列。
†charlie.che@jpmchase.com
‡
l
i
m
3
3
6
@
p
ur
due.edu§yue.sun@jpmorgan.com

这类路径依赖型金融产品通常取决于多个资产在若干时间段内的联合演变。

本文致力于多边际、多资产鞅最优传输问题对偶可达性的理论研究。我们在温和的正则性条件和不可约条件下，证明了对偶最优解的存在性，并将以往的结果推广到任意数量的资产和时间段。我们的方法建立在单资产两期情形的相关技术之上，并对其加以推广，为高维路径依赖情形中的稳健定价与对冲提供了严谨的理论基础。主要结果有助于加深对鞅最优传输的数学理解，并为其在量化金融领域的进一步应用开辟道路。

虽然本文主要聚焦于理论研究，但我们也通过数值演示补充了分析。具体而言，我们采用先进的大规模线性规划求解器 PDLP [1, 18], ，求解多边际鞅最优传输问题的离散实例。据我们所知，这是首次展示将 PDLP 应用于大规模多边际鞅最优传输问题；结果为理论发现的实际意义和准确性提供了佐证。数值实验包括最差表现自动赎回期权的案例研究，旨在展示求解高维鞅最优传输问题的可行性，并验证对偶可达性结果在现实金融情景中的适用性。

贡献。 本文的主要贡献是在一般条件下，严格证明多边缘多资产鞅最优传输（MOT）问题具有对偶可达性。我们还提供了基于 PDLP 的数值示例作为辅助证据；不过，计算方法的开发并非本文重点，其作用仅是佐证理论结果。总体而言，我们的研究推进了鞅最优传输的数学理论，并为复杂金融市场中的稳健定价与对冲奠定了基础。

组织结构。 本文其余部分安排如下。第 1.1 节回顾最优传输、鞅最优传输及其与数理金融的关联方面的相关文献。第 1.2 节讨论鞅最优传输在量化金融中的重要应用，为本文的理论发展提供动机。第 2 节介绍多边际鞅最优传输问题的数学表述，包括市场设定、VMOT 问题及其对偶问题。第 3 节阐述本文的主要理论结果，确立多边际多资产设定下的对偶性与对偶可达性，并概述证明所依据的关键思路。第 4 节介绍数值方法，包括 PDLP 算法和离散MOT表述；第 5 节报告支持理论发现的数值实验，重点研究一个最差表现自动赎回期权案例。第 6 节总结全文并提出未来研究方向。最后，第 7 节给出主要理论结果的详细证明。

1.1 相关文献

经典最优传输问题已得到广泛研究，Monge、Kan- torovich 以及后来的维拉尼 [34]和桑坦布罗吉奥 [31]作出了奠基性贡献。 [2, 3], 开创了向鞅约束的推广，此后又有研究进一步探讨对偶性和对偶可达性 [5, 4, 13]。多边际和多资产鞅最优传输已在 [10, 28, 15, 21], 中得到研究，但一般情形下的对偶可达性仍是一个开放且具挑战性的问题。量化金融领域的应用包括模型校准 [25, 17, 16],、稳健定价与对冲 [19, 13], ，以及利用 Breeden–Litzenberger公式从市场数据中提取风险中性边际分布 [6]。此外，近年来大规模线性规划领域取得的进展，例如 PDLP [1, 18], ，使高维多边际最优传输问题得以实际求解；本文采用该方法作为计算方案。

1.2 定量金融中的应用

鞅最优传输（MOT）框架在量化金融中的应用日益广泛，既可用于模型校准，也可用于复杂衍生品的稳健定价与对冲。在本节中，

我们将回顾主要应用领域，介绍近期进展，并阐述多边际、多资产鞅最优传输方法如何为从业者带来新的能力。

1.2.1 基于鞅最优传输的模型校准

鞅最优传输在金融中的一项主要应用，是将市场模型校准至观测数据，尤其是由普通期权价格推断出的波动率曲面和边缘分布。传统校准方法往往依赖参数模型，可能无法刻画市场隐含动态的全部范围。鞅最优传输提供了一种非参数替代方案，使从业者能够拟合与观测边缘分布一致的模型，同时施加风险中性定价所要求的鞅性质。

近期研究利用鞅最优传输进行波动率曲面拟合和随机波动率模型校准 [25, 17, 16]。例如，Demarch和Labordere利用熵正则化将波动率曲面拟合表述为一个MOT问题，而Guyon则研究了SPX与VIX波动率微笑的联合校准。Guo、Loeper和Wang将这些思想推广到一般情形，从而能够在任意代价泛函和约束条件下进行校准。MOT框架的灵活性允许纳入额外的可观测市场信息，例如中间时点边缘分布或可观测的非普通金融工具，以进一步收紧校准与定价界 [22, 32]。

1.2.2 稳健定价与对冲

除校准之外，鞅最优传输已成为复杂衍生品稳健定价与对冲的有力工具。Hobson [19] 的开创性工作利用斯科罗霍德嵌入问题，推导出了复杂衍生品的紧致、与模型无关的价格界。然而在实践中，经典最优传输生成的价格界通常过于宽泛，难以发挥实际作用，因此促使人们施加额外的约束条件，例如鞅性和可观测市场数据。

鞅最优传输问题的对偶形式对于对冲尤为重要，因为对偶可达性对应于使用可交易工具构造最优次对冲或超对冲策略的存在性。因此，确立对偶可达性不仅为稳健对冲方法提供了理论依据，也为构建实用的对冲投资组合提供了指导。

迄今为止，大多数研究都集中于单资产两期收益，这是因为它们在理论上较易处理。然而，市场上许多广受欢迎的结构性产品都是多资产且具有路径依赖性。正如本文所做的那样，将对偶可达性结果拓展至向量值多边缘设定，为此类复杂产品的稳健定价与对冲奠定了基础。

1.2.3 多资产路径依赖产品

MOT框架尤其适用于多资产路径依赖衍生品的定价与对冲，例如自动赎回票据、最差表现期权和篮子产品。这些工具通常取决于多个标的资产在多个时间段内的联合演变，其收益对边缘分布以及资产之间的依赖结构都很敏感。

MOT方法的一项关键优势是几乎不依赖关于资产相关性或联合动态的假设。只需满足观测到的边缘分布和鞅性质，MOT便能给出反映真实模型不确定性的价格界。通过纳入额外的市场信息，例如流动性良好的相关性敏感产品的价格或中间时点边缘分布，还可以进一步收紧这些界限。例如，向量化多边际MOT框架生成的定价界，可解释为由未知相关性导致的模型不确定性范围。引入基于两两相关性产品市场价格的约束条件（例如看涨期权对看涨期权或看跌期权对看跌期权），从业者可以进一步细化这些界限。这种灵活性为各类奇异产品的稳健定价与风险管理开辟了道路。

总而言之，鞅最优传输框架为广泛的金融应用提供了坚实基础，涵盖从模型校准到复杂衍生品的定价与对冲。在接下来的

一节中，我们将转向数值实现与结果，展示这些方法在实践中的有效性。

2 问题表述

本节介绍多资产、多到期日市场中鞅最优传输的数学框架。我们首先描述市场设定和可获得的边缘信息，随后构造向量鞅最优传输（VMOT）问题，最后给出其对偶形式及其金融解释。

2.1 市场设定与边缘信息

考虑一个拥有 d 个标的资产的金融市场，其价格过程记为 $(X_{t,i})_{t\geq 0}$，其中每个资产 $i \in [d] := \{1, 2, \ldots, d\}$。我们不假设所有资产价格的联合分布——通常称为市场模型——是已知的，因为此类信息无法从可观测市场数据中完全推断出来。

相反，遵循 Breeden 和 Litzenberger 的经典论证 [6], ，我们假设市场揭示了每项资产价格在任意固定到期日 $t > 0$ 的边缘分布。也就是说，对于每个 t 和 i，分布 $\mathrm{Law}(X_{t,i}) = \mu_{t,i} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 是可观测的，其中 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 表示空间 $\mathcal{X}$ 上的概率测度集合。我们考虑有限个到期日 $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_N$，并为方便记号写作 $X_{t,i} := X_{T_t,i}$ 以及 $X_t := (X_{t,1}, \ldots, X_{t,d})$。全文中，我们假设 $(X_t)_{t\in[N]}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的鞅，这与数理金融中的标准风险中性框架一致。虽然完整的联合分布 $\mathrm{Law}(X_1, \ldots, X_N)$ 仍未确定，但我们假设由 Nd 个边缘分布 $\mu_{t,i} := \mathrm{Law}(X_{t,i})$ 构成的集合是固定且已知的。这引出了以下可容许类。

定义 2.1（向量鞅传输）。 假设边缘测度 $(\mu_{t,i})_{t,i}$ 具有有限一阶矩。设 $\mu_t := (\mu_{t,1}, \ldots, \mu_{t,d})$ 且 $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_N)$。向量鞅传输 的集合定义为

$$\mathrm{VMT}(\mu) := \Big\{ \pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{Nd}) \;\Big|\; \pi = \mathrm{Law}(X), \quad \mathbb{E}_\pi[X_{t+1} \mid X_t] = X_t, \quad \mathrm{Law}(X_{t,i}) = \mu_{t,i} \text{ for all } t \in [N],\ i \in [d] \Big\}. \tag{2.1}$$

2.2 向量鞅最优传输（VMOT）

给定可测成本（或收益）函数 $c : \mathbb{R}^{Nd} \to \mathbb{R}$，向量鞅最优传输（VMOT）问题定义为

$$\min_{\pi\in\mathrm{VMT}(\mu)} \mathbb{E}_\pi[c(X)] \qquad \text{or} \qquad \max_{\pi\in\mathrm{VMT}(\mu)} \mathbb{E}_\pi[c(X)]. \tag{2.2}$$

从金融角度解释， $c(X)$表示由整个价格轨迹 $X = (X_t)_{t=1}^N$决定的路径依赖衍生品的收益。由于真实市场模型 π 未知，必须考虑所有与观测到的边际信息一致的鞅测度。因此，式（2.2）中的最小值和最大值分别对应于衍生品价格的下界和上界无套利界限。

VMOT 与经典最优传输的一个关键区别在于鞅约束$\mathbb{E}_\pi[X_{t+1} \mid X_t] = X_t$。该约束要求对于每个资产 i 和时刻 t，边际分布满足凸序 条件

$$\mu_{t,i} \preceq_c \mu_{t+1,i},$$

这意味着对 $\mathbb{R}$上的所有凸函数 f，有$\mu_{t,i}(f) \leq \mu_{t+1,i}(f)$，其中 $\mu(f) := \int f(x)d\mu(x)$。斯特拉森定理 [33] 保证该条件是$\mathrm{VMT}(\mu)$非空的充要条件。因此，我们在全文中对所有 $t < N$ 和 $i \in [d]$ 假设$\mu_{t,i} \preceq_c \mu_{t+1,i}$ 。

2.3 对偶问题与金融解释

VMOT问题是一个无穷维线性规划，因此具有自然的对偶表述。当(2.2)为极小化问题时，对偶问题具有如下形式

$$\sup_{(\phi,h)\in\Psi} \mu(\phi), \tag{2.3}$$

其中 $\phi=(\phi_1,\ \ldots,\ \phi_N)$，其中 $\phi_t=(\phi_{t,\ 1},\ \ldots,\ \phi_{t,\ d})$，每个 $\phi_{t,\ i}\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$，且

$$\mu(\phi):=\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{d}\int \phi_{t,i}\,d\mu_{t,i}.$$

过程 $h=(h_1,\ \ldots,\ h_N)$（其中 $h_N\equiv 0$）由函数 $h_{t,\ i}\colon\ \mathbb{R}^{td}\to\mathbb{R}$ 构成，表示动态交易策略。可容许类 Ψ 由所有满足以下条件的 $(\phi,\ h)$ 组成：$\phi_{t,\ i}\in L^1(\mu_{t,\ i})$，$h_{t,\ i}$ 有界，且满足以下逐路径不等式：

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{d}\phi_{t,i}(x_{t,i})+h_{t,i}(x_1,\ldots,x_t)\,(x_{t+1,i}-x_{t,i})\le c(x), \tag{2.4}$$

对所有 $x=(x_1,\ \ldots,\ x_N)\in\mathbb{R}^{Nd}$。

对于任意 $\pi\in\mathrm{VMT}(\mu)$ 和 $(\phi,\ h)\in\Psi$，鞅性质蕴含

$$\mu(\phi)=\mathbb{E}_\pi\left[\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{d}\phi_{t,i}(X_{t,i})+h_{t,i}(X_1,\ldots,X_t)\,(X_{t+1,i}-X_{t,i})\right]. \tag{2.5}$$

因此，对偶值表示由欧式期权ϕ 和动态交易策略 h组成的半静态对冲策略的成本。不等式 (2.4) 确保投资组合逐路径地对收益c 进行次对冲。当 (2.2) 是最大化问题时，对偶问题变为 $\inf_{(\phi,h)\in\Psi}\mu(\phi)$，且不等式方向反转（而 $\phi_{t,\ i}$ 在 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 中取其值）。

在建立了市场框架、VMOT表述及其对偶解释之后，我们现在转向关于对偶性和对偶可达性的主要理论结果，这些结果构成了多资产、多期市场中稳健定价与对冲的基础。

3 主要理论结果

本节介绍本文的核心理论贡献。我们首先回顾向量鞅最优传输（VMOT）问题的对偶性结果，接着讨论对偶可达性所面临的挑战并陈述主要定理，最后直观解释证明策略，重点说明不可约性和局部 L^1 界的作用。

3.1 鞅最优传输中的对偶性

在成本函数 c和边缘分布满足温和假设的条件下，原问题与对偶问题的最优值相等（例如，参见 [13, 35]）：

$$\begin{aligned} P(c)&:=\inf_{\pi\in\mathrm{VMT}(\mu)}\mathbb{E}_\pi[c(X)] \\ &=\sup_{(\phi,h)\in\Psi}\mu(\phi)=:D(c). \end{aligned} \tag{3.1}$$

此外，已知原始问题存在极小化解；也就是说，存在一个鞅传输计划 $\pi\in\mathrm{VMT}(\mu)$，使得 $\mathbb{E}_\pi[c(X)]=P(c)$。这类鞅传输对应着资产价格演化的极值市场模型，并以衍生品 c 的期望支付为优化目标。

3.2 对偶可达性：存在性与挑战

与原始问题不同，原始问题在对 c 满足较弱正则性条件时，可通过标准紧性论证证明其可解；而证明对偶可达性——即存在最优对偶对 $(\phi,\ h)$——则要微妙得多。这一难题在经典最优传输中早已出现，Brenier 的工作[7]便是例证。在鞅情形下，额外的鞅约束使问题大为复杂。正如 [3, 4, 5], 所示，即使在单资产两期情形下（$d,\ N$）$=(1,\ 2)$，自然函数类 Ψ中的对偶可达性也可能不成立；而要得到肯定结果，通常需要仔细分析极限凸势函数。

这一问题不仅仅是技术层面的。在金融领域，对偶最优解对应于最优次对冲／超对冲策略，并包含有关原始解（即极值市场模型）的重要结构信息。因此，对偶可达性问题受到广泛关注，不过大多数文献聚焦于单资产两期框架。值得注意的例外包括 [10, 28, 30], ，它们研究多期单资产情形；以及 [23, 24, 26, 15, 21, 29], ，它们主要在两期模型中研究向量值鞅传输。

3.3 主要结果：多资产多期鞅最优传输的对偶可达性

我们的主要理论结果证明，对于具有任意数量时间步 N 和资产 d的鞅最优传输问题，对偶可达性成立。这一推广对于金融应用尤为重要，因为在这些应用中，衍生品支付取决于多个标的资产的完整价格路径。

定理3.1。 设 $(\mu_{t,i})^{t\in[N]}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的边缘分布不可约序列，对每个 $i\in[d]$均成立。假设 $c\colon\ \mathbb{R}^{Nd}\to\mathbb{R}$ 是下半连续成本函数，并且满足

$$|c(x)|\ \leq\ \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{d}v_{t,i}(x_{t,i})$$

存在某些连续函数 $v_{t,i}\ \in\ L^1(\mu_{t,i})$。那么存在一个对偶优化器，即一族函数

$$(\phi,h)=(\phi_{t,i},h_{t,i})_{t\in[N],\,i\in[d]}$$

它们满足逐路径不等式 (2.4)，并且对于每个求解 (2.2) 的原问题优化解 $\pi\in\mathrm{VMT}(\mu)$ ，都有逐路径等式

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{d}\phi_{t,i}(x_{t,i})+h_{t,i}(x_1,\ldots,x_t)\,(x_{t+1,i}-x_{t,i})=c(x)\quad\pi\text{-}a.s. \tag{3.2}$$

对偶优化器不一定属于 Ψ这一类。

定理3.1中的这一对 (ϕ,h) 通常称为对偶最大化元，因为它求解的是与原问题最小化问题 (2.2) 相对应的对偶问题 (2.3)。恒等式 (3.2) 表明，由 (ϕ,h) 构建的半静态投资组合复制了衍生品 c：对于任意原问题极小化解 π，投资组合收益与$c(X)$ 在 π-几乎每条价格路径上都相同。不等式 (2.4) 确保在原问题极小化解之外，同一投资组合对 c提供逐路径次对冲。根据对称性，当 c 为上半连续时，定理3.1也保证了最大化问题 (2.2) 存在对偶极小化解；在这种情况下，所得投资组合对收益进行超对冲，并沿着原问题极大化解复制 c。

必须指出，对偶优化器并不保证落在 Ψ中。已有工作表明，对偶问题(2.3)一般不能在 Ψ内达到，即使对于$(d,N)\ =(1,2)$（见 [3, 5]）也是如此，除非 c满足额外的正则性假设 [4]。尽管 Ψ是表述对偶问题的自然定义域，但由于无穷维中缺乏紧性，它相对“狭窄”。因此，证明对偶可达性要比证明对偶性(3.1)困难得多，后者通常可由泛函分析与凸对偶中的标准工具得到。特别地，尽管定理3.1中的对偶优化器(ϕ,h)可能位于 Ψ之外，但每个分量$\phi_{t,i}$ 均为实值$\mu_{t,i}$-a.s.，且每个$h_{t,i}$ 同样为实值。由于边缘分布$(\mu_{t,i})_{t,i}$ 在VMOT问题中是固定的，定理中出现的所有函数都可视为本质上实值的可测函数，而不再施加进一步的正则性。

3.4 直观解释与近似对偶最大化解

将对偶关系(3.1)提升为完整的对偶可达性，需要更精细的逼近论证。其关键思想源于 [3, 5]中的单资产两期情形，即构造一列“良好”的对偶候选解，再利用局部紧性与不可约性提取逐点极限。

我们称一个序列 $(\phi_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为近似对偶最大化元，若对每个 n:

- $\phi_{t,i,n}$ 是实值、连续且关于 $\mu_{t,i}$可积的，即 $\phi_{t,i,n} \in L^1(\mu_{t,i})$;
- $h_{t,i,n}$ 有界且连续（约定 $h_{N,i,n} \equiv 0$）；
- 下列逐路径不等式成立:

$$\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} \phi_{t,i,n}(x_{t,i}) + h_{t,i,n}(\bar{x}_t)\,\Delta x_{t,i} \;\le\; c(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^{Nd}, \tag{3.3}$$

其中 $\bar{x}_t := (x_1, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^{dt}$ 且 $\Delta x_{t,i} := x_{t+1,i} - x_{t,i}$;

- 且对偶值递增收敛到 $D(c)$:

$$\mu(\phi_n) := \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} \int \phi_{t,i,n}(x_{t,i})\, d\mu_{t,i}(x_{t,i}) \nearrow D(c) \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.4}$$

将 [3, 5] 的策略推广到多资产多期情形，下一个命题给出(ϕ_n, h_n)的某个子序列的逐点收敛，这是通向定理3.1的关键一步。

命题 3.2. 在定理*3.1*的假设下，存在一个近似对偶最大化元$(\phi_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $t \in [N]$ 和 $i \in [d]$，序列$\phi_{t,i,n}$ 在 $n \to \infty$时$\mu_{t,i}$-几乎必然收敛到一个实值函数$\phi_{t,i}$ 。

命题 3.2的证明依赖于边缘分布的一个结构性质，即凸序不可约性，以及一个局部 L^1 界。我们简要回顾相关概念（详见 [5] ）。 $\mathbb{R}$ 上的一对概率测度 $\mu \preceq_c \nu$ （具有有限一阶矩）称为不可约，如果开集

$$I := \{x \in \mathbb{R} : u_\mu(x) < u_\nu(x)\}$$

是一个连通区间，且 $\mu(I) = \mu(\mathbb{R})$，其中

$$u_\mu(x) := \int_{\mathbb{R}} |x - y|\, d\mu(y)$$

是 μ 的势函数。在这种情况下，我们定义 (I定义域 J) 为 $(\mu,\ \nu)$ 的定义域：令 J 为满足 $\nu(J) = \nu(\mathbb{R})$ 的最小区间。于是， J 是 I 与 I 的任意端点（若其为 ν 的原子）的并集，并且有 $I = \mathrm{int}(J)$。区间 J 可以是有界或无界的，其形式可以是 $(a,\ b]$, $[a, b)$、$(a,\ b)$ 或 $[a, b]$; 在所有情况下， $I = (a,\ b)$。直观而言，不可约性表示 ν 以一种规则的方式从 μ “扩散开来”。这是一个自然且普遍的性质：凸序下的大多数分布对都满足不可约性，而不满足该性质的分布对通常只需稍作扰动即可使其满足。

令 $(I_{t,\ i},\ J_{t,\ i})$ 表示在 $t \in [N-1]$ 下不可约对 $\mu_{t,\ i} \preceq_c \mu_{t+1,\ i}$ 的定义域，并约定 $J_{0,\ i} := J_{1,\ i}$，以及 $I_{N,\ i} := J_{N-1,\ i}$。对于所有 $t \in [N-1]$ 和 $i \in [d]$，我们有 $J_{t,\ i} \subset I_{t+1,\ i}$。下一个引理给出逼近势函数的一个局部有界性界。

引理 3.3。 在定理*3.1*的假设下，存在一个近似对偶最大化元 $(\phi_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$。此外，对于每个 $t \in [N-1]$ 和 $i \in [d]$，都存在一个递增的紧区间序列$(J_{t,i,k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_{t,i,k} = J_{t,i}$ 并且

$$\sup_n \left\| \phi_{t,i,n} - \int \phi_{t,i,n}\, d\mu_{t,i,k} \right\|_{L^1(\mu_{t,i,k})} \;\le\; C_k, \tag{3.5}$$

其中$\mu_{t,i,k} := \mu_{t+J_{t-1,(\cdot,i,k)}}\mu_{t,i}\big|_{J_{t-1}{}^{,i,k}}$ 是$\mu_{t,i}$ 在$J_{t-1,i,k}$上的归一化限制，并且 C_k 仅取决于 k （而不取决于 n）。

引理 3.3 中的局部 L^1 界是提取逐点收敛子列的关键要素，因此也是证明命题 3.2 和定理3.1 的关键。除了这一技术作用外，该界在一般成本函数下的鞅最优传输分析中也具有独立的研究价值。命题 3.2 和引理 3.3 的详细证明见第 7 节。

这些对偶性与对偶可达性结果为多资产、多期市场中的稳健定价与对冲奠定了严谨基础。在接下来的章节中，我们将展示如何将这些结果转化为模型校准、风险管理以及复杂路径依赖衍生品定价的实用工具。

4 数值方法与实现

如第 1.2 节所述，鞅最优传输（MOT）框架已成为量化金融中的有力工具，既能根据观测到的市场边际分布进行模型校准，也能对复杂的多资产衍生品进行稳健定价与对冲。特别是，MOT 提供了一种非参数、与模型无关的方法，能够自然地处理路径依赖性，且对资产动态的假设要求极少。此外，该方法还允许从业者纳入其他市场信息，例如中间时点边缘分布或相关性敏感产品，从而进一步收紧价格界。这些理论进展，尤其是在多边际和多资产情形下的进展，凸显了开发可扩展且准确的数值方法的重要性。受这些应用的启发，我们现在转向数值实现，以使高维 MOT问题能够在实践中求解。

本节详细介绍用于求解多边际 MOT问题的计算策略，重点强调高维性和路径依赖约束带来的挑战。我们引入原始-对偶线性规划（PDLP）方法，描述其算法改进，并给出适用于大规模数值求解的 MOT问题离散表述。

4.1 计算挑战

近年来，鞅最优传输（MOT）问题的数值求解受到了广泛关注。在多边际情形下，直接求解 MOT的底层线性规划（LP）表述会遭遇维数灾难，因为随着时间段数量和过程维数的增加，计算复杂度呈指数增长。

求解 MOT的传统方法包括熵正则化方法，其中最具代表性的是 Sinkhorn算法，以及基于神经网络（NN）的方法。Sinkhorn算法通过利用 Bregman投影求解正则化线性规划，已成功应用于最优传输问题的原始表述中 [11]。De March [12] 提出了一种用于双边际鞅最优传输的改进型 Sinkhorn算法，以近似投影过程取代标准 Bregman投影，通过不动点更新机制迭代施加鞅约束，从而在缓解精确投影计算固有的数值不稳定性的同时达到足够的精度。然而，将这一方法扩展至多边际 MOT框架时会面临重大挑战。此外，在鞅约束下，Sinkhorn算法所必需的 Bregman投影难以计算；事实上，即使在双边际情形下，这些投影也只能近似求解，从而影响精度。另外，Sinkhorn的迭代特性使其在处理鞅要求所施加的复杂约束时容易出现显著的数值不稳定性。

神经网络方法旨在求解鞅最优传输问题的对偶形式 [14], ，为处理高维数据提供了灵活的途径。然而，目前这些方法尚未就收敛性或精度提供理论保证，这限制了它们在对严格准确性要求极高的场景中的可靠性。

鉴于这些挑战，需要可扩展的鲁棒算法，以高效处理多边际最优传输问题的高维、稀疏且路径依赖结构。

4.2 PDLP算法及改进

为应对这些计算挑战，我们采用原始-对偶线性规划（PDLP）框架 [1, 18], ，该框架非常适合大规模线性规划。PDLP是一种一阶方法，它将线性规划的鞍点重构与自适应算法改进相结合。它将标准线性规划重构为鞍点问题，并利用矩阵-向量乘积迭代更新原始变量和对偶变量，从而避免显式的矩阵存储和因式分解。其固有的无矩阵特性以及对矩阵-向量乘积的唯一依赖，使PDLP特别适合多边际最优传输问题中常见的高维稀疏场景。

简而言之，PDLP首先将标准线性规划表述重写为

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} \; c^\top x, \\ &\text{s.t. } Ax = b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

一个等价的鞍点（或原始-对偶）问题:

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} \; L(x,y) \quad \text{with} \quad L(x,y) = c^\top x - y^\top Ax + b^\top y, \tag{4.2}$$

其中有 $X = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 和 $Y = \mathbb{R}^m$。随后，通过迭代执行以下更新，应用原始-对偶混合梯度（PDHG）方案 [8]

$$x_{k+1} = \mathrm{proj}_X\left(x_k - \tau\left(c - A^\top y_k\right)\right), \tag{4.3}$$

$$y_{k+1} = y_k + \sigma\left(b - A\left(2x_{k+1} - x_k\right)\right), \tag{4.4}$$

其中， τ 和 σ 分别表示原始和对偶步长。

PDLP通过引入若干关键特性，增强了基础PDHG方法:

- **自适应步长**。 自适应启发式方法会动态调整步长，以确保满足步长条件

$$\tau, \sigma \leq \frac{\|z_{k+1} - z_k\|_\omega^2}{2\left(y_{k+1} - y_k\right)^\top A(x_{k+1} - x_k)}$$

  。这样可以避免采用过于保守的固定步长估计（例如 $\tau = \sigma = 1/\|A\|^2$），并加快收敛。

- **自适应重启**。 基于归一化对偶间隙（即使标准对偶间隙无界，该指标仍保持有限）的周期性重启，可确保定期“重置”进展，以抵消自抑制式收敛停滞，从而实现经验上的线性收敛。

- **原始权重更新**。 重启期间会更新权重参数，以平衡原始变量和对偶变量的进展。实际上，这种更新旨在使两个空间中加权后的最优性距离相等。

- **预求解与对角预条件**。 在主迭代开始之前，先使用预求解程序简化问题数据，再通过对角预条件器进行重新缩放。这种缩放有助于缓解数值不平衡，从而降低数据矩阵的有效条件数。

从计算复杂度的角度来看，近期分析已为 PDLP 算法在特殊情形和一般情形下建立了严格的界。尽管对于全幺模约束矩阵，PDLP 能够实现尤为强的复杂度保证 [18], 但需要注意的是，约束矩阵的全幺模性 A 是经典双边际最优传输（OT）问题特有的性质。相比之下，由于边际约束和鞅约束的结构更为复杂，多边际最优传输以及双边际和多边际鞅最优传输（MOT）问题中的约束矩阵通常不具备全幺模性。

对于一般线性规划，PDLP 至多需要进行 $O\left(\frac{L^2R^2}{\epsilon^2}\right)$ 次矩阵-向量乘法，即可得到一个 ϵ-最优解 [1]，，其中 L 是与问题数据相关的 Lipschitz 常数， R 是可行域的一个界，而 ϵ 是所需的精度。尽管这一最坏情形界不如幺模情形理想，PDLP 在实践中对于大规模、稀疏且具有结构的问题仍然十分有效，例如多边际 MOT 中遇到的问题。其无矩阵实现和可扩展性使其成为高维最优传输计算的稳健选择。

这一一般复杂度结果凸显了 PDLP 在 MOT 应用中的实际可行性，即使底层线性规划不具备特殊结构也是如此。该算法能够利用稀疏性并避免显式矩阵分解，这一点在多边际 MOT 的高维路径依赖场景中尤为有利。

4.3 离散多边际 MOT 表述

在数值实现中，我们在资产价格和时间步构成的有限网格上对多边际 MOT问题进行离散化。具体而言，我们考虑一个跨越多个资产和时间步、定义在离散支撑集上的 MOT问题。其离散表述由以下线性规划给出：

问题 4.1（离散多边际 MOT）。

$$\begin{aligned} \min_{\pi \geq 0} \quad & \langle C, \pi \rangle \\ \textit{subject to} \quad & \mathrm{proj}_{(t,k)}(\pi) = \mu_{t,k}, \quad \forall t \in [T],\ k \in [d], \\ & \mathbb{E}_\pi \left[s_{t+1,k} - s_{t,k} \mid \mathcal{F}_t \right] = 0, \quad \forall t \in [T-1],\ k \in [d], \end{aligned} \tag{multiMOT}$$

其中，$C = [C_{i_{1,1},\ldots i_{T,d}}]_{i_{1,1} \in [n_{1,1}], \ldots, i_{T,d} \in [n_{T,d}]}$ 表示秩为 $m = Td$ 的非负成本张量，$\mu_{t,k} = [\mu_{t,k,i}]_{i \in [n_{t,k}]}$ 是表示第 k 个过程在第 t 个时间步的边际分布的概率向量。

为考虑离散化误差，我们通过引入一个与网格大小相对应的容差参数来松弛鞅约束：

问题 4.2（带松弛鞅约束的离散多边际鞅最优传输）。

$$\begin{aligned} \min_{\pi \geq 0} \quad & \langle C, \pi \rangle \\ \textit{subject to} \quad & \mathrm{proj}_{(t,k)}(\pi) = \mu_{t,k}, \quad \forall t \in [T],\ k \in [d], \\ & \mathbb{E}_\pi \left[s_{t+1,k} - s_{t,k} \mid \mathcal{F}_t \right] \leq \frac{\Delta_{t,k}}{2}, \quad \forall t \in [T-1],\ k \in [d], \\ & \mathbb{E}_\pi \left[s_{t+1,k} - s_{t,k} \mid \mathcal{F}_t \right] \geq -\frac{\Delta_{t,k}}{2}, \quad \forall t \in [T-1],\ k \in [d], \end{aligned} \tag{multiMOTrelaxed}$$

其中，$C = [C_{i_{1,1},\ldots i_{T,d}}]_{i_{1,\ 1} \in [n_{1,1}],\ \ldots,\ i_{T,\ d} \in [n_{T,d}]}$ 表示秩为 $m = Td$、$\mu_{t,\ k} =$ 的非负成本张量；$[\mu_{t,k,i}]_{i \in [n_{t,k}]}$ 是概率向量，表示第 k 个过程在第 t 个时间步的边际分布。

这种离散表述使我们能够使用高效的大规模线性规划求解器（例如 NVIDIA cuOpt 中的 PDLP 实现），在现实的市场约束下计算最优传输方案及相应的对偶证书。借助这一计算框架，我们现在展示数值实验的结果，包括解质量指标、示例案例研究，以及对原问题和对偶解的分析。

5 数值实验与结果

在本节中，我们展示针对MOT问题的数值实验结果。我们首先描述用于评估解质量的指标，详述如何由市场信息构造边际数据，分析计算得到的原始解与对偶解，并给出一个最差表现自动赎回期权的案例研究。最后，我们讨论研究结果的意义与局限性。

5.1 解的质量指标

为严格评估MOT问题计算解的质量与可靠性，我们采用一套同时刻画最优性与可行性的定量指标。这些指标旨在对PDLP方法在MOT框架所特有的高维与路径依赖约束下的数值性能进行全面评估。

主要指标是原始目标值，它表示在给定成本张量下，最优传输方案的期望成本（或收益）。与之相辅相成的是对偶目标值，它根据给定的边际分布，对与边缘约束相关的对偶变量所作的贡献进行汇总。这两个值之差称为对偶间隙，可作为最优性证书：间隙较小表明计算所得的解接近最优，而间隙较大则可能意味着存在数值问题或出现次优收敛。

通过原始不可行性和对偶不可行性的度量来评估解是否满足问题约束条件。原始不可行性量化计算所得传输方案与给定边缘分布之间的偏差，而对偶不可行性则衡量对偶变量未能满足由成本结构和鞅条件所规定的对偶约束的程度。

为汇总这些偏差，我们报告不可行性向量的 ℓ_p 范数，包括 ℓ_1、ℓ_2 和 ℓ_∞ 范数。这些范数分别反映总体、平均和最坏情况下的违反程度，可用于比较不同问题实例和参数范围下的求解器性能。

为清楚起见，关键指标如下：

- **原始目标值** (V_p)：最优传输方案下的期望成本或收益。
- **对偶目标值** (V_d)：根据给定边际分布加权后的对偶变量汇总值。
- **对偶间隙** (G)：原始目标值与对偶目标值之差，用于衡量解的最优性。
- **原始不可行性** (δ^p)：计算得到的传输计划与给定边缘分布之间的偏差。
- **对偶不可行性** (δ^d)：对偶变量未能满足对偶约束的程度。
- ℓ_p**不可行性范数**：总体（ℓ_1）、平均（ℓ_2）和最坏情形（ℓ_∞）的约束条件违反。

综合来看，这些指标能够对所计算解的准确性与可行性进行透明且稳健的评估，从而便于与替代方法进行有意义的比较，并指导进一步的算法改进。

5.2 案例研究：最差表现自动赎回期权

为展示本方法的实际意义，我们考虑一份参考标普500指数和纳斯达克100指数的最差表现自动赎回期权。自动赎回期权是金融中一类重要的结构性产品，因其具有吸引力的风险收益特征和内嵌的路径依赖特征，而在股票挂钩市场中广泛交易。这些工具根据一项或多项标的资产相对于指定障碍水平的表现，提供定期提前赎回（自动赎回）的机会。其受欢迎程度源于能够在低波动环境中产生更高收益、提供部分下行保护，并为零售和机构投资者量身定制风险敞口。自动赎回产品的流动性与市场深度，尤其是那些挂钩主要股票指数的产品，使其成为稳健定价与风险管理研究的自然选择。此外，最差表现型——其收益取决于资产篮子中表现最差的资产——对于风险转移和资本保护策略尤为相关。

定义 5.1（多资产自动赎回收益）。令 $\boldsymbol{S}(t) := (S_1(t)\ S_2(t) \ldots, S_d(t))$ 表示描述 d 标的资产价格的随机过程向量。考虑一系列观察日期 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = T$，在这些日期评估障碍水平和敲出条件，并

累积票息。令 K 为行权价， B_{KI} 为敲入障碍， B_{KO} 为敲出障碍， C_j为在 $[t_{j-1}, t_j]$ 期间累积的票息，其中 $j \in [m]$（ $t_0 := 0$）。

将时刻 t 表现最差的资产定义为

$$X(t) := \min_{i \in [d]} S_i(t).$$

将敲出时刻定义为

$$\tau := \inf \{ j \in [m] : X(t_j) \geq B_{\mathrm{KO}} \},$$

约定 $\inf \varnothing = +\infty$。

多资产最差表现自动赎回产品在时刻 t_k 对 $k \in [m]$ 的收益为

$$f_k\left(\boldsymbol{S}(t_1), \ldots, \boldsymbol{S}(t_k)\right) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\tau} C_j, & \text{if } k = \tau < m, \\ \min\{X(T) - K, 0\}, & \text{if } k = m \leq \tau \text{ and } X(T) \leq B_{\mathrm{KI}}, \\ \sum_{j=1}^{m} C_j, & \text{if } k = m \leq \tau \text{ and } X(T) > B_{\mathrm{KI}}, \\ 0, & \text{otherwise, i.e., } k < \min\{m, \tau\}. \end{cases}$$

在具体应用中，我们考虑一种与两大股票指数挂钩的最差表现自动赎回结构：标普500指数（SPX）和纳斯达克100指数（NDX），对应 $d = 2$ 项标的资产。该产品期限为三年，起始日为 $t_{\mathrm{inc}} = -\frac{5}{24}$ 年，并设有三个年度观察日：第 $t_1 = t_{\mathrm{inc}} + 1$、 $t_2 = t_{\mathrm{inc}} + 2$和 $t_3 = t_{\mathrm{inc}} + 3$ 年。敲出障碍设为初始水平的 $B_{\mathrm{KO}} = 120\%$，敲入障碍设为 $B_{\mathrm{KI}} = 60\%$。行权价为 $K = 100\%$。票息为固定利率，年化利率为8%，按期累计，即每 $j \in \{1, 2, 3\}$计息 $C_j = 8\% \times (t_j - t_{j-1})$。我们以 $t_0 = 0$为基准进行现值计算，并假设贴现率恒定为1%。[1]

需要注意的是，上述收益函数是按单位名义本金定义的。在实际应用中，投资者最终获得的支付金额，是将计算出的收益乘以合约的名义本金。

在每个监测日，参考水平由 SPX 和 NDX 中表现最差的标的资产决定。例如，假设在 $t_1 = t_{\mathrm{inc}} + 1$ 年时，SPX 和 NDX 分别达到各自初始水平的 125% 和 130%。表现最差的资产是 SPX，其水平高于 120% 的敲出障碍，触发自动赎回机制。随后产品提前赎回，持有人获得名义本金以及截至该日累计的票息。

如果在任何监测日两种资产均未突破敲出障碍，产品将持续至到期日。在 $t_3 = t_1 + 3$ 年时，如果表现最差资产低于敲入障碍（60%），持有人将获得向下敲入看跌期权收益 $\min\{X(T) - K, 0\}$，反映相对于行权价的损失。如果表现最差资产始终高于敲入障碍，持有人将获得三年内累计的全部票息。

这一结构为鞅最优传输框架提供了一个现实且具有挑战性的测试案例，因为该收益高度路径依赖，并对资产联合动态十分敏感。该问题的维数为 $dm = 2 \times 3 = 6$，涉及两项资产和三个观察日，因此可通过大规模线性规划进行数值求解。在以下各节中，我们给出数值结果，用以说明在规定的边际约束和鞅约束下，使用PDLP求解器计算得到的该最差表现型自动赎回收益的对偶可达性与最优传输方案。

5.3 边际数据构建

为构造多期、多资产鞅最优传输（MOT）问题所需的边缘分布，我们采用标普500指数（SPX）和

[1]在实践中， *inception date* 指产品发行且初始资产水平被固定的日期，而*evaluation date* 是对产品进行估值或分析的日期，通常用于风险管理或定价。这种区分使得可以对已运行一段时间的产品进行建模，并在估值中使用当前市场数据。

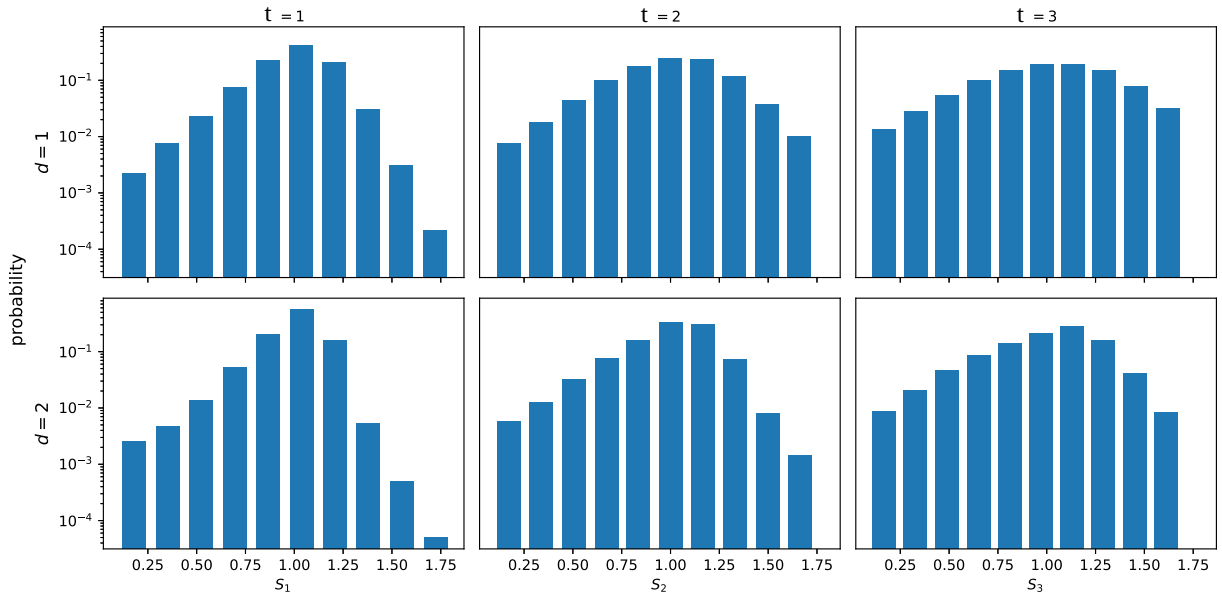


图1：用作二维、三时间步MOT问题输入的离散边缘分布。资产价格按其各自在 t_0处的现货价格进行缩放。

纳斯达克100指数（NDX）截至2025年12月5日（t_0）的普通期权价格作为市场数据。这些期权价格用于推断自动赎回型收益定义中指定的三个观察日对应的标的资产价格的风险中性边缘分布（参见定理5.1）。

对于每项资产和每个观察日，边缘分布都离散化到由$n = 10$ 个点构成的支撑集上，以充分覆盖市场隐含的合理价格情景范围。支撑点按估值日(t_0)相应的现货价格进行缩放，确保不同资产和时间步之间具有可比性并实现规范化。

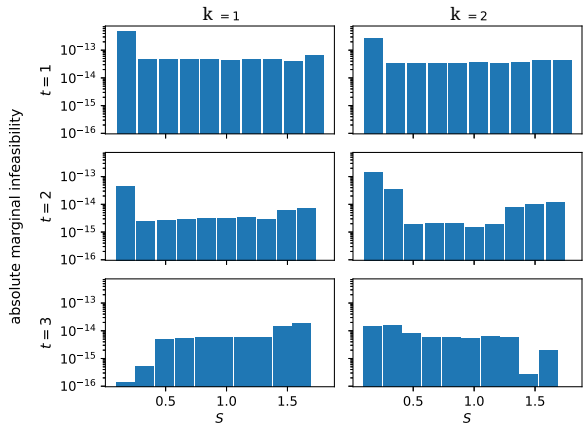
根据市场数据构造这些边缘分布，遵循量化金融中的标准流程。首先，针对每项资产和每个到期日，利用观测到的普通期权价格校准出平滑的隐含波动率曲面。然后，使用Breeden–Litzenberger公式 [6], ，对看涨期权价格关于行权价求二阶导数，从而提取风险中性概率密度函数。最后将所得密度离散化，形成MOT问题的输入边际。

图1展示了SPX和NDX在全部三个观察日的离散边缘分布。这些边缘分布作为MOT问题的输入约束，使得能够在给定市场信息下，对最差表现型自动赎回收益进行稳健定价与对冲。

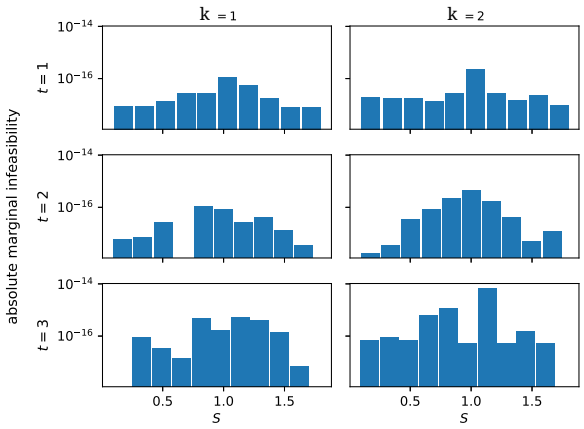
5.4 结果讨论

在数值实验中，我们使用运行于 GPU 硬件上的 NVIDIA cuOpt [9], 中实现的 PDLP 求解器，求解离散多边缘MOT问题。借助 GPU 加速，可高效完成大规模计算，并显著缩短高维实例的求解时间。求解器的最优性容差设为 10^{-12}，确保原始不可行性、对偶不可行性以及最优性间隙在绝对值和相对值两方面都低于此阈值。这一严格的容差保证了计算所得解不仅精度高，而且对于 MOT框架中固有的复杂约束条件也具有稳健性。

原始解由最优传输方案 π 表示，它编码了资产价格与时间步上的联合概率分布，该分布在指定的条件下使期望支付最小化（或最大化）

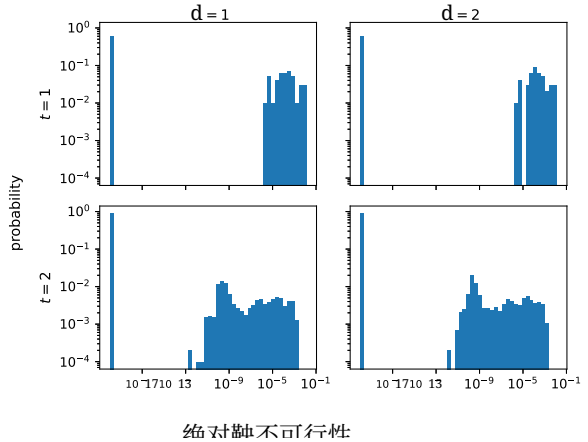


(a) 原始最大化

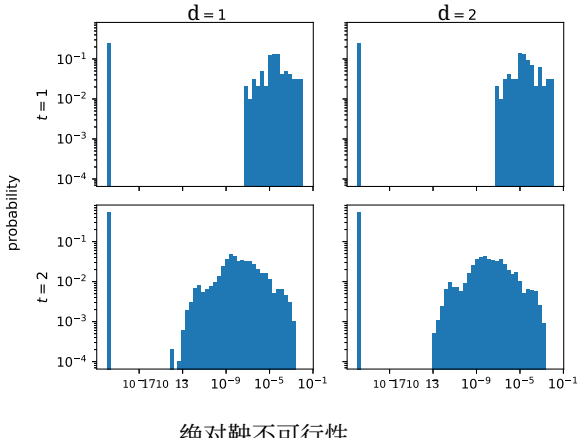


(b) 原始最小化

图 2：二维三时间步 MOT问题原始解中相对于边缘约束的绝对不可行性。结果分别展示了最大化和最小化方向，并使用 NVIDIA cuOpt 中的 PDLP 求解器计算，最优性容差为 10^{-12}。较低的不可行性水平证实了该求解器能够以高精度满足边缘约束。



(a) 原始最大化

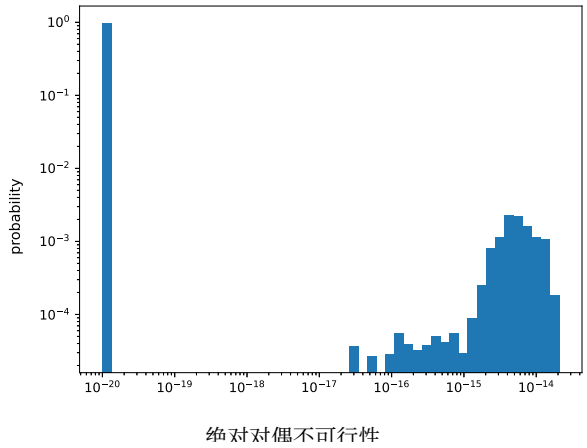


(b) 原始最小化

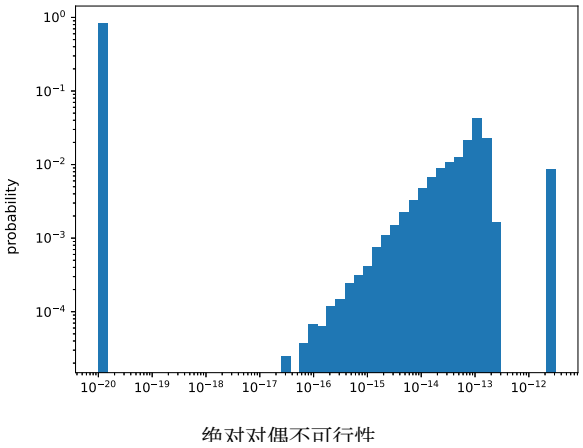
图 3：二维、三时间步MOT问题的原始解中，相对于鞅约束的绝对不可行度。cuOpt 中的 PDLP 求解器在两种优化方向下均将不可行度控制在网格离散化误差以下，展现出对路径依赖鞅约束的稳健执行能力。

成本函数，并服从边际约束和鞅约束。图 2 和图 3 分别展示了最大化和最小化问题中原始解相对于边际约束和鞅约束的不可行性。结果表明，PDLP 求解器实现了很高的精度，不可行性水平完全处于规定容差之内。特别是，松弛鞅约束在网格离散化误差范围内得到满足，证实了数值计算流程中预求解和预处理步骤的有效性。

由变量 ϕ 和 h 构成的对偶解，揭示了与边际约束和鞅约束相关的影子价格，具有重要的参考价值。这些对偶变量可分别解释为最优值对输入边缘分布和鞅条件扰动的敏感



（a）原始最大化



（b）原始最小化

图 4：二维三时间步 MOT问题原始解中相对于对偶约束的绝对不可行性。结果突显了 cuOpt 中 PDLP 求解器所获得的对偶界的紧致性，其不可行性始终低于规定的容差。

优化方向		**最大化**	**最小化**
最优原始目标值		0.187880	0.062208
最优对偶目标值		0.187880	0.062208
对偶间隙		-7.7577×10^{-14}	-1.1971×10^{-13}
原始不可行性	ℓ_1	4.1653×10^{-12}	1.3085×10^{-14}
	ℓ_2	1.6503×10^{-12}	7.0355×10^{-15}
	ℓ_∞	1.4217×10^{-12}	6.8279×10^{-15}
对偶不可行性	ℓ_1	7.0409×10^{-11}	3.7987×10^{-8}
	ℓ_2	7.7958×10^{-13}	2.8302×10^{-10}
	ℓ_∞	2.0761×10^{-14}	3.0800×10^{-12}

表 1：使用 NVIDIA cuOpt 中的 PDLP 求解器求解二维、三时间步MOT问题的数值结果汇总。表中报告了最大化和最小化情形下的最优原始与对偶目标值、对偶间隙及不可行性范数。所有指标均处于10^{-8}量级或低于该值，且大多数远低于 10^{-10}，这证实了所计算解的准确性与稳健性。

性。图 4 展示了对偶解的不可行性，进一步印证了所计算界限的紧致性以及求解器的稳健性。

表 1 汇总了关键数值结果，包括最大化和最小化方向下的最优原始与对偶目标值、对偶间隙及不可行性范数。对偶间隙处于 10^{-13} 量级或更小，表明所得解的最优性几乎达到机器精度。原始与对偶不可行性范数同样很小，反映出求解器能够在高维、路径依赖情形下满足 MOT问题的复杂约束条件。

总体而言，计算得到的原问题解和对偶解验证了 PDLP 方法的理论保证，并展示了该方法在大规模、多资产、多期鞅最优传输问题中的实际效果。借助 NVIDIA cuOpt 进行 GPU 加速计算，对于处理这些问题的高维路径依赖结构至关重要，使得原本无法通过标准基于 CPU 的求解器求解的鞅最优传输实例也能得到稳健且可扩展的求解。这些结果为其在金融工程及相关领域中的稳健定价、风险管理和模型校准等进一步应用奠定了基础。

6 结论与未来工作

在本研究中，我们为多边际、多资产鞅最优传输（MOT）问题的对偶可达性构建了一个全面框架。通过将对偶性和存在性结果扩展到任意数量的资产和时间段，我们为复杂金融衍生品的稳健定价与对冲提供了理论和实践基础。我们的分析表明，在温和的正则性和不可约条件下，对偶最优解存在且可构造，从而能够在多维情形下复制路径依赖收益，并对其进行次对冲和超对冲。

在计算方面，我们展示了原始-对偶线性规划（PDLP）方法在 NVIDIA cuOpt 中实现并在 GPU 硬件上运行后，能够高效求解大规模离散鞅最优传输问题。利用 GPU 加速对于处理此类问题的高维、路径依赖结构至关重要，使求解时间和可扩展性达到标准基于 CPU 的求解器无法实现的水平。数值实验表明，即使对于最差表现自动赎回期权等具有挑战性的产品，PDLP 求解器也能达到近乎最优的结果，并以高精度满足复杂的边际约束和鞅约束。

因此，鞅最优传输框架为量化金融提供了一种强大而灵活的工具，能够在模型假设有限、市场数据丰富的环境中支持模型校准、稳健定价和风险管理。研究所展示的 GPU 加速计算的有效性，进一步拓展了鞅最优传输在现实世界大规模金融问题中的实际适用性。

未来工作 多边际、多资产鞅最优传输研究仍有若干值得探索的方向。一种思路是研究如何利用收益函数的其他结构性质，以改进理论界并增强定价结果的稳健性。另一个重要方向是开发更高效的计算技术，尤其是利用问题特定特征来提升可扩展性，并降低大规模数值实现中的维数。推进这些方面的研究，有望显著深化对高维金融场景下 MOT框架的理论认识，并提升其实践适用性。我们将这些及相关问题留待未来研究。

7 主要结果的证明

假设对于某个连续函数， $|c(x)| \le \sum_{t,i} v_{t,i}(x_{t,i})$ 成立，则可保证 (3.1) 中的 $P(c) = D(c)$（例如参见 [35]）。显然， $c(x)$ 存在对偶优化器，当且仅当 $\tilde{c}(x)$ 也存在对偶优化器：$= c(x) - \sum_{t,i} v_{t,i}$。因此，将 c 替换为 $\tilde{c}$ 后，从现在起我们可以（并且将会）假设在整个证明过程中 $c \le 0$。

引理 3.3 的证明。令 $(\phi_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个满足 (3.3)、(3.4) 的近似对偶最大化元，其中 $D(c) = P(c) \in \mathbb{R}$ 且不失一般性地令 $c \le 0$。记 $\phi_{t,n}^{\oplus}(x_t) = \sum_{i=1}^{d} \phi_{t,i,n}(x_{t,i}), h_{t,n}(\bar{x}_t) = \big(h_{t,1,n}(\bar{x}_t) \ldots, h_{t,d,n}(\bar{x}_t)\big)$。定义

$$\chi_{t,n}(x_t) := \sup_{x_1,\ldots,x_{t-1}} \sum_{s=1}^{t-1} \big(\phi_{s,n}^{\oplus}(x_s) + h_{s,n}(\bar{x}_s) \cdot \Delta x_s\big) \tag{7.1}$$

约定 $\chi_{1,\,n} = \chi_{N+1,\,n} \equiv 0$。注意，$\chi_{t,\,n}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的凸函数，因为它是关于 x_t的仿射函数的上确界。我们断言

$$\chi_{t,n} \le \chi_{t+1,n} - \phi_{t,n}^{\oplus} \quad \text{for all } t \in [N] \text{ and } n \in \mathbb{N}. \tag{7.2}$$

该不等式可证明如下:

$$\begin{aligned}\chi_{t+1,n}(x_{t+1}) &= \sup_{x_1,\dots,x_t} \sum_{s=1}^{t} \big(\phi^{\oplus}_{s,n}(x_s) + h_{s,n}(\bar{x}_s)\cdot\Delta x_s\big)\\ &\geq \sup_{\substack{x_1,\dots,x_{t-1}\\ x_t = x_{t+1}}} \sum_{s=1}^{t-1} \big(\phi^{\oplus}_{s,n}(x_s) + h_{s,n}(\bar{x}_s)\cdot\Delta x_s\big) + \phi^{\oplus}_{t,n}(x_{t+1})\\ &= \chi_{t,n}(x_{t+1}) + \phi^{\oplus}_{t,n}(x_{t+1}),\end{aligned}$$

而不等式 $\chi_{N,\,n} \leq -\phi^{\oplus}_{N,\,n}$ 直接由 $c \leq 0$ 得出。令 $\mu^{\otimes}_t = \mu_{t,\,1}\otimes\cdots\otimes\mu_{t,\,d}$ 表示该乘积测度。我们声称有如下界

$$\int \chi_{t,n}\, d(\mu^{\otimes}_t - \mu^{\otimes}_{t-1}) \leq C \quad \text{for all } t = 2, ..., N \text{ and } n \in \mathbb{N}, \tag{7.3}$$

其中, C 在整个证明过程中均独立于 n。

为证明 (7.3), 注意到反复应用 (7.2) 可得

$$\begin{aligned}\mu^{\otimes}_t(\chi_{t,n}) &\leq \mu^{\otimes}_t(\chi_{t+1,n}) - \mu^{\otimes}_t(\phi^{\oplus}_{t,n})\\ &\leq \mu^{\otimes}_{t+1}(\chi_{t+1,n}) - \mu^{\otimes}_t(\phi^{\oplus}_{t,n})\\ &\leq \mu^{\otimes}_{t+1}(\chi_{t+2,n}) - \mu^{\otimes}_{t+1}(\phi^{\oplus}_{t+1,n}) - \mu^{\otimes}_t(\phi^{\oplus}_{t,n})\\ &\leq \cdots \leq -\sum_{s=t}^{N} \mu^{\otimes}_s(\phi^{\oplus}_{s,n}),\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式源于 $\mu^{\otimes}_t \preceq_c \mu^{\otimes}_{t+1}$ 以及 χ 的凸性。同理,

$$\begin{aligned}\mu^{\otimes}_{t-1}(\chi_{t,n}) &\geq \mu^{\otimes}_{t-1}(\chi_{t-1,n}) + \mu^{\otimes}_{t-1}(\phi^{\oplus}_{t-1,n})\\ &\geq \mu^{\otimes}_{t-2}(\chi_{t-1,n}) + \mu^{\otimes}_{t-1}(\phi^{\oplus}_{t-1,n})\\ &\geq \mu^{\otimes}_{t-2}(\chi_{t-2,n}) + \mu^{\otimes}_{t-2}(\phi^{\oplus}_{t-2,n}) + \mu^{\otimes}_{t-1}(\phi^{\oplus}_{t-1,n})\\ &\geq \cdots \geq \sum_{s=1}^{t-1} \mu^{\otimes}_s(\phi^{\oplus}_{s,n}).\end{aligned}$$

这两个不等式, 加上由 $\mu^{\otimes}_{t-1} \preceq_c \mu^{\otimes}_t$ 得出的 $\mu^{\otimes}_{t-1}(\chi_{t,\,n}) \leq \mu^{\otimes}_t(\chi_{t,\,n})$, 推出

$$\int \chi_{t,n}\, d(\mu^{\otimes}_t - \mu^{\otimes}_{t-1}) \leq -\sum_{s=1}^{N} \mu^{\otimes}_s(\phi^{\oplus}_{s,n}) = -\mu(\phi_n) \tag{7.4}$$

结合 (3.4), 即可得到所述的 (7.3)。

现在, 我们可以利用 (7.3) 和命题 A. 得到 $\{\chi_{t,n}\}_n$ 的局部一致有界性。我们需要满足该命题的第二个条件。为此, 任取 $a \in I_1 := I_{1,1} \times \cdots \times I_{1,d}$, 并令 $L_{2,n} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为一个满足 $L_{2,n} \leq \chi_{2,n}$ 和 $L_{2,n}(a) = \chi_{2,n}(a)$ 的仿射函数。由线性性可得 $L_{2,n}(x_2) = \nabla L_{2,n}(x_1)\cdot(x_2 - x_1) + L_{2,n}(x_1)$。这使我们可以对给定的近似对偶最大化元 $(\phi_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 进行修改: 将 $\phi^{\oplus}_{1,n}(x_1)$ 替换为 $\phi^{\oplus}_{1,n}(x_1) - L_{2,n}(x_1)$, 将 $\phi^{\oplus}_{2,n}(x_2)$ 替换为 $\phi^{\oplus}_{2,n}(x_2) + L_{2,n}(x_2)$, 并将 $h_{1,n}(x_1)$ 替换为 $h_{1,n}(x_1) - \nabla L_{2,n}(x_1)$ ($\nabla L_{2,n}$ 是常数, 且不依赖于 x_1)。注意, 这样便得到 $\chi_{2,n} \geq 0$ 和 $\chi_{2,n}(a) = 0$。我们可以继续减去适当的线性函数 $L_{t,n}$, $t = 2, ..., N$, 从而得到

$$\chi_{t,n} \geq 0 \quad \text{and} \quad \chi_{t,n}(a) = 0 \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } t \in [N]. \tag{7.5}$$

注意, 这些修改不会影响 $\mu(\phi_n)$ 的值。

接下来，设 $\{\epsilon_k\}_k$ 是一个趋于零的正递减序列，当 $k\to\infty$ 时成立，并记 $I_{t,\,i}=]a_{t,\,i},\ b_{t,\,i}[$，其中 $-\infty\le a_{t,\,i}<b_{t,\,i}\le+\infty$。然后，我们定义紧区间 $J_{t,\,i,\,k}:=[c_{t,i,k},d_{t,i,k}]$，对于 $t\in[N-1]$、$i\in[d]$ 和 $k\in\mathbb{N}$，定义如下:

$$
\begin{aligned}
&\text{If } a_{t,i}>-\infty,\ \text{then define } c_{t,i,k} \text{ by the following rule:}\\
&\ \mu_{t+1,i}(a_{t,i})=0\Rightarrow c_{t,i,k}:=a_{t,i}+\epsilon_k;\ \ \mu_{t+1,i}(a_{t,i})>0\Rightarrow c_{t,i,k}:=a_{t,i};\\
&\text{If } b_{t,i}<+\infty,\ \text{then define } d_{t,i,k} \text{ by the following rule:}\\
&\ \mu_{t+1,i}(b_{t,i})=0\Rightarrow d_{t,i,k}:=b_{t,i}-\epsilon_k;\ \ \mu_{t+1,i}(b_{t,i})>0\Rightarrow d_{t,i,k}:=b_{t,i};\\
&\text{If } a_{t,i}=-\infty,\ \text{then } c_{t,i,k}:=-1/\epsilon_k;\\
&\text{If } b_{t,i}=+\infty,\ \text{then } d_{t,i,k}:=+1/\epsilon_k.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

令 $J_{0,i,k}:=J_{1,i,k}$。例如，若 $\mu_{t+1,i}(a_{t,i})=0$ 且 $\mu_{t+1,i}(b_{t,i})>0$，则 $J_{t,i,k}=[a_{t,i}+\epsilon_k,b_{t,i}]$。令 ϵ_1 足够小，使得对每个 t,i，都有 $\mu_{t,i}(J_{t,i,1})>0,\ \mu_{t+1,i}(J_{t,i,1})>0$。注意，当 $k\to\infty$ 时，$J_{t,i,k}\nearrow J_{t,i}$。令 $J_{t,k}:=J_{t,1,k}\times J_{t,2,k}\times\ldots\times J_{t,d,k}$。于是，由命题 A.1] 结合 (7.3) 和 (7.5)，可知对每个 $k\in\mathbb{N}$，存在 $M_k\ge0$，使得

$$
0\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x_t\in J_{t-1,k}}\chi_{t,n}(x_t)\le M_k. \tag{7.7}
$$

接下来，再次重复应用 (7.2) 可得

$$
\begin{aligned}
C&\ge-\sum_{s=1}^{N}\mu_s^{\otimes}(\phi_{s,n}^{\oplus})\\
&\ge\mu_N^{\otimes}(\chi_{N,n})-\sum_{s=1}^{N-1}\mu_s^{\otimes}(\phi_{s,n}^{\oplus})\\
&\ge\mu_{N-1}^{\otimes}(\chi_{N,n})-\sum_{s=1}^{N-1}\mu_s^{\otimes}(\phi_{s,n}^{\oplus})\\
&=\mu_{N-1}^{\otimes}(\chi_{N,n})-\mu_{N-1}^{\otimes}(\chi_{N-1,n})+\mu_{N-1}^{\otimes}(\chi_{N-1,n})-\sum_{s=1}^{N-1}\mu_s^{\otimes}(\phi_{s,n}^{\oplus})\\
&=\|\,\chi_{N,n}-\chi_{N-1,n}-\phi_{N-1,n}^{\oplus}\,\|_{L^1(\mu_{N-1}^{\otimes})}+\mu_{N-1}^{\otimes}(\chi_{N-1,n})-\sum_{s=1}^{N-2}\mu_s^{\otimes}(\phi_{s,n}^{\oplus})\\
&\ge\|\,\chi_{N,n}-\chi_{N-1,n}-\phi_{N-1,n}^{\oplus}\,\|_{L^1(\mu_{N-1}^{\otimes})}+\mu_{N-2}^{\otimes}(\chi_{N-1,n})-\sum_{s=1}^{N-2}\mu_s^{\otimes}(\phi_{s,n}^{\oplus})\\
&\ge\cdots\ge\sum_{s=2}^{N}\|\,\chi_{s,n}-\chi_{s-1,n}-\phi_{s-1,n}^{\oplus}\,\|_{L^1(\mu_{s-1}^{\otimes})}
\end{aligned}
$$

其中，第三个和第六个不等式源于 χ 关于 $\mu_t^{\otimes}\preceq_c\mu_{t+1}^{\otimes}$ 的凸性，而第五个等式则由 (7.2) 中的非负性 $\chi_{t,\,n}-\chi_{t-1,\,n}-\phi_{t-1,\,n}^{\oplus}\ge0$ 得出。

另一方面，(3.3) 中的非正性 $c\le0$ 推出

$$
\sum_{s=1}^{N}\left(\phi_{s,n}^{\oplus}(x_s)+h_{s,n}(\bar{x}_s)\cdot\Delta x_s\right)\le\chi_{N,n}(x_N)+\phi_{N,n}^{\oplus}(x_N)\le0
$$

其中，第一个不等式是通过对 $x_1,\ldots,x_{N-1}$ 取上确界得到的（回顾式 (7.1) 及约定 $h_{N,n}\equiv0$）。对任意 $\pi\in$ VMT(μ) 积分可得 $\|\,\chi_{N,n}(x_N)+\phi_{N,n}^{\oplus}\,\|_{L^1(\mu_N^{\otimes})}\le-\sum_{s=1}^{N}\mu_s^{\otimes}(\phi_{s,n}^{\oplus})\le C$。因此我们推得

$$
\|\,\chi_{t+1,n}-\chi_{t,n}-\phi_{t,n}^{\oplus}\,\|_{L^1(\mu_t^{\otimes})}\le C\ \ \text{for all } n\in\mathbb{N},t\in[N]. \tag{7.8}
$$

现在，对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mu_{t,i,k}$ 为 $\mu_{t,i}$ 在 $J_{t-1,i,k}$ 上的限制（其中 $J_{0,i,k} := J_{1,i,k}$），然后将其归一化为概率分布，如引理 3.3 中所定义。令 $\mu_t^{\otimes}{}_{,k} = \otimes_i \mu_{t,i,k}$，使得 $\mu_t^{\otimes}{}_{,k}(J_{t-1,k}) = 1$，其中 $J_{t-1,k} := \otimes_i J_{t-1,i,k}$。定义

$$v_{t,i,k,n} := \int \phi_{t,i,n}\, d\mu_{t,i,k}, \quad t \in [N], i \in [d], k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$$

为完成引理 3.3 的证明，即证明对于每个 $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_n \| \phi_{t,i,n} - v_{t,i,k,n} \|_{L^1(\mu_{t,i,k})} \le C, \tag{7.9}$$

注意到 (7.7)、(7.8) 以及事实 $J_{t-1,\ k} \subset J_{t,\ k}$ 共同推出

$$\begin{aligned}
&\| \phi_{t,n}^{\oplus} \|_{L^1(\mu_{t,k}^{\otimes})} \\
\le &\| \chi_{t+1,n} - \chi_{t,n} - \phi_{t,n}^{\oplus} \|_{L^1(\mu_{t,k}^{\otimes})} + \| \chi_{t,n} - \chi_{t+1,n} \|_{L^1(\mu_{t,k}^{\otimes})} \\
\le &\, C + M_k =: C
\end{aligned}$$

其中，我们利用 $\chi_{t+1,\ n} - \chi_{t,\ n} - \phi_{t,\ n}^{\oplus} \ge 0$，由 (7.8) 得到界 $\| \chi_{t+1,\ n} - \chi_{t,\ n} - \phi_{t,\ n}^{\oplus} \|_{L^1\ (\mu_{t\ ,\ k}^{\otimes})} \le C$。由此，我们得到界

$$\left| \sum_{i=1}^{d} v_{t,i,k,n} \right| \le \| \phi_{t,n}^{\oplus} \|_{L^1(\mu_{t,k}^{\otimes})} \le C \ \text{ for all } n, \tag{7.10}$$

其中第一个不等式由詹森不等式得出。接下来，由于 $\phi_{t,\ n}^{\oplus} \le M_k$ 在 $J_{t,\ k}$ 上，根据 (7.2)、(7.5) 和 (7.7)，对 $J_{t,\ k}$ 取上确界，可得

$$\sum_{i=1}^{d} \sup_{x_{t,i} \in J_{t,i,k}} \phi_{t,i,n}(x_{t,i}) \le M_k \ \text{ for all } n.$$

特别地，由于 $v_{t,\ i,\ k,\ n} \le \sup_{x_{t,\ i} \in J_{t,\ i,\ k}} \phi_{t,\ i,\ n}(x_{t,\ i})$，

$$\sup_{x_{t,1} \in J_{t,1,k}} \phi_{t,1,n}(x_{t,1}) + \sum_{i=2}^{d} v_{t,i,k,n} \le M_k. \tag{7.11}$$

定义 $\hat{v}_{t,\ 1,\ k,\ n} := -\sum_{i=2}^{d} v_{t,\ i,\ k,\ n}$。由于 $\phi_{t,\ n}^{\oplus} \le M_k$ 在 $J_{t,\ k}$ 上，我们有

$$C \ge \| M_k - \phi_{t,n}^{\oplus} \|_{L^1(\mu_{t,k}^{\otimes})} = M_k - \int (\phi_{t,1,n} + \sum_{i=2}^{d} v_{t,i,k,n}) d\mu_{t,1,k}.$$

由 (7.11) 可知，$\sup_n \| \phi_{t,1,n} - \hat{v}_{t,1,k,n} \|_{L^1(\mu_{t,1,k})}$ 有界；进而由 (7.10) 可知，$\sup_n \| \phi_{t,1,n} - v_{t,1,k,n} \|_{L^1(\mu_{t,\ 1,k})}$ 有界。这就证明了 (7.9)。 □

下面我们证明命题 3.2。

命题 *3.2* 的证明。引理 3.3 和 Koml´os 引理（其指出，每个 L^1-有界的实值函数序列都包含一个子序列，使得该子序列所有子序列的算术平均几乎处处收敛）表明，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $\{\phi_{t,i,n}\}_n$ 的一个子序列 $\{\phi_{t,i,k,n}\}_n$，使得

(i) $\{\phi_{t,i,k+1,n}\}_n$ 是 $\{\phi_{t,i,k,n}\}_n$ 的进一步子序列，且 (ii) $\phi_{t,i,k,n}(x_{t,i}) - \tilde{v}_{t,i,k,n}$ 收敛 $\mu_{t,i,k}$-几乎处处，当 $n \to \infty$ 时，

其中 $v_{t,i,k,n} = \int \phi_{t,i,k,n}\, d\mu_{t,i,k}$，$\hat{v}_{t,1,k,n} = -\sum_{i=2}^{d} v_{t,i,k,n}$，$\tilde{v}_{t,1,k,n} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \hat{v}_{t,1,k,m}$，$\tilde{v}_{t,i,k,n} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} v_{t,i,k,m}$

对于 $i \geq 2$，以及 $\tilde{\phi}_{t,i,k,n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \phi_{t,i,k,m}$。请注意，对于每个 k，我们可以为每个 t, i选取相同的子序列指数，因为 t, i的指数有限。然后我们选取对角序列

$$\Phi_{t,i,n} := \phi_{t,i,n,n}$$

并再次定义

$$w_{t,i,k,n} = \int \Phi_{t,i,n} d\mu_{t,i,k}, \quad \tilde{w}_{t,i,k,n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} w_{t,i,k,m}, \quad 2 \leq i \leq d,$$
$$\hat{w}_{t,1,k,n} = -\sum_{i=2}^{d} w_{t,i,k,n}, \quad \tilde{w}_{t,1,k,n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \hat{w}_{t,1,k,m}, \quad \tilde{\Phi}_{t,i,n}(x_{t,i}) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \Phi_{t,i,m}(x_{t,i}).$$

于是我们断言：

$$\tilde{\Phi}_{t,i,n}(x_{t,i}) - \tilde{w}_{t,i,1,n} \text{ converges } \mu_{t,i} - a.s. \text{ for all } t \in [N], i \in [d]. \tag{7.12}$$

注意，现在对 k 的依赖已被消除。为证明该断言，由于对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$\{\Phi_{t,i,n}\}_n$ 都是 $\{\phi_{t,i,k,n}\}_n$ 的子序列，Koml´os 引理意味着

$$\tilde{\Phi}_{t,i,n}(x_{t,i}) - \tilde{w}_{t,i,k,n} \text{ converges } \mu_{t,i,k} - a.s. \text{ for all } t \text{ and } i. \tag{7.13}$$

˜ ˜特别地，$\{\Phi_{t,i,n}(x_{t,i}) - \tilde{w}_{t,i,k,n}\}_n$ 以及 $\{\Phi_{t,i,n}(x_{t,i}) - \tilde{w}_{t,i,k,n}\}_n$ 在 $n \to \infty$时都μ_t 收敛，$_i$几乎处处收敛，因此对于每个 k，差值 $\{\tilde{w}_{t,i,1,n} - \tilde{w}_{t,i,k,n}\}_n$ 也如此。于是（7.12）由（7.13）推出。恒等式 $\sum_{i=1}^{d} \tilde{w}_{t,i,1,n} = 0$ 随后允许将近似对偶最大化元 $(\phi_n, h_n)_n$ 替换为 $(\psi_n, \tilde{h}_n)_n$，其中˜ ˜$\psi_{t,i,n}$ ：$= \Phi_{t,i,n}(x_{t,i}) - \tilde{w}_{t,i,1,n}$，且$h_{t,i,n}$ 是与从 $\{\phi_{t,i,n}\}_n$中选取 $\{\Phi_{t,i,n}\}_n$ 相一致地选定的 $(h_{t,i,n})_n$子序列的相应 Cesàro 平均。 □

最后，我们转向定理3.1的证明。

定理*3*的证明。 *1.* 根据命题 3.2，我们有一个近似对偶最大化元 $(\phi_n, h_n)_n$，使得

$$\{\phi_{t,i,n}\}_n \text{ converges to a function } \phi_{t,i} \ \mu_{t,i} - a.s. \text{ as } n \to \infty \text{ for each } t \in [N] \text{ and } i \in [d]. \tag{7.14}$$

我们将证明式（7.1）中定义的凸函数 $\{\chi_{t,n}\}_n$ 的收敛性。

在引理 3.3的证明中，我们得到一个近似对偶最大化元（即 $(\phi_n^0, h_n^0)_n$），使得相应的 $\{\chi_{t,n}^0\}_n$ 满足局部界（7.7）。正如命题 3.2的证明中所述，满足（7.14）的近似对偶最大化元 $(\phi_n, h_n)_n$ 可以取为 $(\phi_n^0, h_n^0)_n$的某个适当子序列的Ces`aro平均。这意味着（7.7）中的上界仍然成立

$$\sup_n \chi_{t,n} \leq M_k \quad \text{on} \quad J_{t-1,k}. \tag{7.15}$$

我们将修改 $(\phi_n, h_n)_n$，使得（7.5）成立，同时保留（7.15）。令 $I_t := I_{t,1} \times \cdots \times I_{t,d}$。固定任意 $a \in I_1$ 并定义 $\phi_t^{\oplus} := \sum_i \phi_{t,i}$。首先，（7.14）意味着，对于每个 $t \in [N]$，存在 $a_t \in I_t$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t,n}^{\oplus}(a_t) = \phi_t^{\oplus}(a_t) \in \mathbb{R}. \tag{7.16}$$

鉴于（7.2）给出了 $\phi_{1,n}^{\oplus} \leq \chi_{2,n}$，这意味着

$$\inf_n \chi_{2,n}(a_1) > -\infty. \tag{7.17}$$

另一方面，由于 $I_1 = \text{int}(J_1)$ 与 $J_{1,k} \nearrow J_1$（关于紧区间 $J_{t,i,k}$ 的定义见 (7.6)），当 k 充分大时，我们有 $\{a, a_1\} \subset \text{int}(J_{1,k})$。现在，(7.15)、(7.17) 表明 $\chi_{2,n}(a)$ 与 $\nabla\chi_{2,n}(a)$ 关于 n 均一致有界，其中 $\nabla\chi_{2,n}(a) \in \partial\chi_{2,n}(a)$ 是凸函数 $\chi_{2,n}$ 在 a 处的一个次梯度。

因此，通过取一个子序列，我们可以假定 $\{\chi_{2,n}(a)\}_n$ 与 $\{\nabla\chi_{2,n}(a)\}_n$ 均收敛。如同引理 3.3 的证明，定义一个仿射函数 $L_{2,n}(y) = \chi_{2,n}(a) + \nabla\chi_{2,n}(a)\cdot(y-a)$，并将 $\phi_{1,n}^{\oplus}(x_1)$ 替换为 $\phi_{1,n}^{\oplus}(x_1) - L_{2,n}(x_1)$，将 $\phi_{2,n}^{\oplus}(x_2)$ 替换为 $\phi_{2,n}^{\oplus}(x_2) + L_{2,n}(x_2)$，最后将 $h_{1,n}(x_1)$ 替换为 $h_{1,n}(x_1) - \nabla\chi_{2,n}(a)$。由此得到对所有 n 均有 $\chi_{2,n}(a) = \nabla\chi_{2,n}(a) = 0$，同时 $\phi_{t,i,n}$ 的几乎处处收敛以及界 (7.15) 得以保留。接下来，带有 $\chi_{2,n} \geq 0$ 的不等式 $\chi_{3,n} \geq \chi_{2,n} + \phi_{2,n}^{\oplus}$ 给出 $\inf_n \chi_{3,n}(a_2) > -\infty$。因此我们可以重复上述论证并实现规范化 (7.5)，同时 $\phi_{t,i,n}$ 的几乎处处收敛以及界 (7.15) 得以保留。借助局部界 (7.7) 与 (7.3)，我们现在可以应用 [21, 命题 A.1]，从而推出在 J_{t-1} 上的逐点收敛 $\chi_{t,n} \to \chi_t$。

由于极限函数 $(\phi_{t,i})_{t,i}$ 仅在 $\mu_{t,i}$-几乎处处有定义，因此在一个 $\mu_{t,i}$-零测集（其中包括 $\mathbb{R}\setminus I_{t,i}$）上定义 $\phi_{t,i} := -\infty$，使其在 $\mathbb{R}$ 上处处有定义。现在我们证明，存在函数 $h_t = (h_{t,i})_i \colon \mathbb{R}^{td} \to \mathbb{R}^d$，对所有满足 $h_N \equiv 0$ 的 $t \in [N]$ 均成立，使得

$$\sum_{t=1}^{N} \big(\phi_t^{\oplus}(x_t) + h_t(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) \leq c(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^{Nd}. \tag{7.18}$$

对于任意函数 $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，若其有一个仿射函数作为下界，则令 $\operatorname{conv}[f] \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 表示 f 的下半连续凸包络，即满足条件 $l \leq f$ 的所有仿射函数 l 的上确界（如果不存在这样的 l，则令 $\operatorname{conv}[f] \equiv -\infty$。）我们将归纳地得到 $h_{N-1}, h_{N-2}, \ldots, h_1$。将 (3.3) 改写为

$$\sum_{t=1}^{N-1} \big(\phi_{t,n}^{\oplus}(x_t) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) \leq c(x) - \phi_{N,n}^{\oplus}(x_N). \tag{7.19}$$

定义 $H_{N-1,n}(\bar{x}_{N-1}, x_N) = \operatorname{conv}[c(\bar{x}_{N-1}, \cdot) - \phi_{N,n}^{\oplus}(\cdot)](x_N)$。于是有

$$\sum_{t=1}^{N-1} \big(\phi_{t,n}^{\oplus}(x_t) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) \leq H_{N-1,n}(\bar{x}_{N-1}, x_N) \leq c(x) - \phi_{N,n}^{\oplus}(x_N)$$

因为左侧关于 x_N 是仿射的。令 $x_N = x_{N-1}$，得到

$$\sum_{t=1}^{N-2} \big(\phi_{t,n}^{\oplus}(x_t) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) \leq H_{N-1,n}(\bar{x}_{N-1}, x_{N-1}) - \phi_{N-1,n}^{\oplus}(x_{N-1}). \tag{7.20}$$

我们看到，(7.19) 和 (7.20) 具有相似的结构。按照约定 $H_{N,n}(x) := c(x)$，我们可以据此沿 t 反向归纳地推出，

$$\sum_{s=1}^{t} \big(\phi_{s,n}^{\oplus}(x_s) + h_{s,n}(\bar{x}_s)\cdot\Delta x_s\big) \leq H_{t+1,n}(\bar{x}_{t+1}, x_{t+1}) - \phi_{t+1,n}^{\oplus}(x_{t+1}) \tag{7.21}$$

对于 $t = 1, \ldots, N-1$，其中

$$H_{t,n}(\bar{x}_t, x_{t+1}) := \operatorname{conv}[H_{t+1,n}(\bar{x}_t, \cdot) - \phi_{t+1,n}^{\oplus}(\cdot)](x_{t+1}) \tag{7.22}$$

记号滥用地写作 $H_{t+1,n}(\bar{x}_t, x_{t+1}) := H_{t+1,n}(\bar{x}_{t+1}, x_{t+1})$。

现在去掉指标 n，类似地定义

$$H_t(\bar{x}_t, x_{t+1}) := \operatorname{conv}[H_{t+1}(\bar{x}_t, \cdot) - \phi_{t+1}^{\oplus}(\cdot)](x_{t+1}) \tag{7.23}$$

其中 $H_N(x) := c(x)$。接下来，由于凸函数的上极限仍为凸函数，结合几乎必然收敛 (7.14)，可得

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} H_{N-1,n}(\bar{x}_{N-1}, x_N) &= \limsup_{n\to\infty} \operatorname{conv}[c(\bar{x}_{N-1}, \cdot) - \phi_{N,n}^{\oplus}(\cdot)](x_N) \\
&\leq \operatorname{conv}[\limsup_{n\to\infty} \big(c(\bar{x}_{N-1}, \cdot) - \phi_{N,n}^{\oplus}(\cdot)\big)](x_N) \\
&\leq \operatorname{conv}[c(\bar{x}_{N-1}, \cdot) - \phi_N^{\oplus}(\cdot)](x_N) \\
&= H_{N-1}(\bar{x}_{N-1}, x_N).
\end{aligned}$$

由此可归纳地推出，对于 $t=1,\ \ldots\ldots,\ N-1$,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} H_{t,n}(\bar{x}_t, x_{t+1}) &= \limsup_{n\to\infty} \operatorname{conv}[H_{t+1,n}(\bar{x}_t, \cdot) - \phi^{\oplus}_{t+1,n}(\cdot)](x_{t+1}) \\ &\le \operatorname{conv}[\limsup_{n\to\infty} \big(H_{t+1,n}(\bar{x}_t, \cdot) - \phi^{\oplus}_{t+1,n}(\cdot)\big)](x_{t+1}) \\ &\le \operatorname{conv}[H_{t+1}(\bar{x}_t, \cdot) - \phi^{\oplus}_{t+1}(\cdot)](x_{t+1}) \\ &= H_t(\bar{x}_t, x_{t+1}).\end{aligned}$$

我们来讨论凸函数 的连续性 $x_{t+1} \mapsto H_t(\bar{x}_t, x_{t+1})$。由 (7.23) 得到的不等式

$$H_t(\bar{x}_t, x_{t+1}) \le H_{t+1}(\bar{x}_{t+1}, x_{t+1}) - \phi^{\oplus}_{t+1}(x_{t+1})$$

变为 $H_{N-1}(\bar{x}_{N-1}, x_N) \le c(x) - \phi^{\oplus}_N(x_N)$，当 $t=N-1$ 时。接着，$\phi^{\oplus}_N$ 的 $\mu^{\otimes}_N$-几乎处处有限性蕴含，由凸性可得 $H_{N-1}(\bar{x}_{N-1}, x_N) < \infty$，若 $x_N \in J_{N-1}$。然后，对 t 进行逆向归纳可得 $H_t(\bar{x}_t, x_{t+1}) < \infty$，若 $x_{t+1} \in J_t$。这意味着，若存在 $y_0 \in \mathbb{R}^d$ 使得 $H_t(\bar{x}_t, y_0) > -\infty$，则 $y \mapsto H_t(\bar{x}_t, y)$ 是实值的，且关于 J_t 连续。观察到这一点后，由 (7.21)、(7.22) 得

$$\phi^{\oplus}_{1,n}(x_1) + h_{1,n}(x_1)\cdot\Delta x_1 \le H_{1,n}(x_1, x_2) \le H_{2,n}(x_1, x_2, x_2) - \phi^{\oplus}_{2,n}(x_2).$$

令 $x_2 = x_1$ 可得 $\phi^{\oplus}_{1,n}(x_1) \le H_{1,n}(x_1, x_1)$。取上极限可得

$$\phi^{\oplus}_1(x_1) \le H_1(x_1, x_1) \ \text{ and } \ H_1(x_1, x_2) \le H_2(x_1, x_2, x_2) - \phi^{\oplus}_2(x_2).$$

对每个 $t \in [N]$定义 $A_t := \{x_t \in \mathbb{R}^d \,|\, \phi^{\oplus}_t(x_t) \in \mathbb{R}\}$，并注意到 $A_t \subset I_t$。由于对每个 $x_1 \in A_1$，$x_2 \mapsto H_1(x_1, x_2)$ 关于 J_1 连续，故对每个 $x_2 \in I_1 = \operatorname{int}(J_1)$，次微分 $\partial H_1(x_1, \cdot)(x_2)$ 非空、凸且紧。由此我们可以选取可测函数 $h_1 : A_1 \to \mathbb{R}^d$，使其满足$h_1(x_1) \in \partial H_1(x_1, \cdot)(x_1)$。于是对 $x_1 \in A_1$，我们有

$$\begin{aligned}\phi^{\oplus}_1(x_1) + h_1(x_1)\cdot(x_2 - x_1) &\le H_1(x_1, x_1) + h_1(x_1)\cdot(x_2 - x_1) \\ &\le H_1(x_1, x_2) \\ &\le H_2(x_1, x_2, x_2) - \phi^{\oplus}_2(x_2).\end{aligned}$$

特别地，对 $x_1 \in A_1$ 与 $x_2 \in A_2$，有 $H_2(x_1, x_2, x_2) > -\infty$。因此我们同样可以选取 $h_2 : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}^d$，使其满足 $h_2(x_1, x_2) \in \partial H_2(x_1, x_2, \cdot)(x_2)$。于是对每个 $x_1 \in A_1$ 与 $x_2 \in A_2$，我们有

$$\begin{aligned}&\phi^{\oplus}_1(x_1) + \phi^{\oplus}_2(x_2) + h_1(x_1)\cdot(x_2 - x_1) + h_2(x_1, x_2)\cdot(x_3 - x_2) \\ &\le H_2(x_1, x_2, x_2) + h_2(x_1, x_2)\cdot(x_3 - x_2) \\ &\le H_2(x_1, x_2, x_3) \\ &\le H_3(x_1, x_2, x_3, x_3) - \phi^{\oplus}_3(x_3).\end{aligned}$$

通过对 t 进行归纳，我们得到 $h_t : A_1 \times \cdots \times A_t \to \mathbb{R}^d$（其中 $h_N \equiv 0$），满足所需的 (7.18)。我们可以在 $\mathbb{R}^{td} \setminus A_1 \times \cdots \times A_t$ 中定义 $h_t = 0$，注意到，当对于某个 t 有 $x_t \notin A_t$ 时，(7.18) 的左端为 $-\infty$。

最后一步是证明以下断言：对于任意函数 $h_t : \mathbb{R}^{td} \to \mathbb{R}^d$, $t=1,\ \ldots\ldots,\ N$，其中 $h_N \equiv 0$ 满足 (7.18)（其存在性刚刚得到证明），以及 VMOT问题 (2.2) 的任意极小化解 π^*，有

$$\sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_t(x_t) + h_t(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) = c(x), \quad \pi^* - a.s.. \tag{7.24}$$

换言之，每个极小化解 π^* 都集中在接触集上

$$\Gamma := \left\{ x \in \mathbb{R}^{Nd} \,\middle|\, \sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_t(x_t) + h_t(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) = c(x) \right\}$$

只要 $\{h_t\}_t$ 满足(7.18)。这将完成该定理的证明。

这一结论的证明已在 [5] 中针对单资产两期情形给出（$d,\ N$）=(1，2)，我们将在此基础上扩展到一般情形。首先，回顾 $\phi_{t,\ i,\ n} \to \phi_{t,\ i}\ \mu_{t,\ i}$-几乎处处成立，且 $\chi_{t,\ n} \to \chi_t$属于 J_{t-1}，其中 $\chi_{t,\ n}$ 在 (7.1) 中定义，χ_t 是其极限。对于任意 $\pi \in$ VMT(μ)（不一定是优化解），根据定理3.1的假设，有 $c \in L^1(\pi)$。我们断言：

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int \sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_{t,n}(x_t) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) d\pi \\ \le \int \sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_{t}(x_t) + h_{t}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) d\pi.\end{aligned} \tag{7.25}$$

为说明该断言如何推出 (7.24)，令 π^* 为 (2.2) 的任意一个极小化解（根据关于c的假设，该解存在）。于是 $D(c) = P(c) = \int c\, d\pi^*$，因此

$$\begin{aligned}P(c) &= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_{t,n}(x_t) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) d\pi^* \\ &\le \int \sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_{t}(x_t) + h_{t}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) d\pi^* \\ &\le \int c(x)\, d\pi^* = P(c)\end{aligned}$$

由 Fatou 引理，处处均取等式。注意，这意味着 (7.24) 成立。

为证明 (7.25)，固定任意 $\pi \in$VMT(μ)。记 $\pi =$Law(X)，其中 $X = (X_1, ..., X_N)$ 是 π 下的 $\mathbb{R}^d$ 值鞅，令 $\pi_t :=$ Law(X_t)。沿用建立 (7.8) 的论证，但此次利用凸序 $\pi_t \preceq_c \pi_{t+1}$ 而非 $\mu^{\otimes}_t \preceq_c \mu^{\otimes}_{t+1}$，由 (3.4) 与 (7.2)，我们可以推出

$$\| \chi_{t+1,n} - \chi_{t,n} - \phi^{\oplus}_{t,n} \|_{L^1(\pi_t)} \le C \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}, t \in [N]. \tag{7.26}$$

利用 $\phi^{\oplus}_{t,n} \to \phi^{\oplus}_t$、$\chi_{t,n} \to \chi_t$ 以及 Fatou 引理，由 (7.26) 我们推出

$$\begin{aligned}&\chi_{t+1} - \chi_t - \phi^{\oplus}_t \in L^1(\pi_t), \quad \text{and} \\ &\limsup_{n\to\infty} \int (\phi^{\oplus}_{t,n} + \chi_{t,n} - \chi_{t+1,n})\, d\pi_t \le \int (\phi^{\oplus}_t + \chi_t - \chi_{t+1})\, d\pi_t,\end{aligned}$$

回顾$\chi_{1,n} = \chi_{N+1,n} \equiv 0$ 以及 $\pi_t(J_{t-1}) = 1$。由此我们可以推出

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \int \sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_{t,n}(x_t) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) d\pi \\ &= \limsup_{n\to\infty} \int \sum_{t=1}^{N} \big(\phi^{\oplus}_{t,n}(x_t) + \chi_{t,n}(x_t) - \chi_{t+1,n}(x_t) \\ &\qquad\qquad - \chi_{t,n}(x_t) + \chi_{t+1,n}(x_t) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big) d\pi \\ &\le \sum_{t=1}^{N} \int \big(\phi^{\oplus}_t + \chi_t - \chi_{t+1}\big) d\pi_t \\ &+ \limsup_{n\to\infty} \int \sum_{t=1}^{N-1} \big(\chi_{t+1,n}(x_t) - \chi_{t+1,n}(x_{t+1}) + h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big)\, d\pi,\end{aligned} \tag{7.27}$$

由于$\sum_{t=1}^{N}\chi_{t,n}(x_t)=\sum_{t=1}^{N}\chi_{t+1,n}(x_{t+1})$。现记 $\bar{X}_t=(X_1,...,X_t)$，$\pi^t:=\mathrm{Law}(\bar{X}_t)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{td})$。于是我们可以写成 $\pi^{t+1}=\pi_{\bar{x}_t}\otimes\pi^t$，其中 $\pi_{\bar{x}_t}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$是鞅律 π下给定 $\bar{X}_t=\bar{x}_t$ 时 X_{t+1} 的条件分布。鞅性质意味着 $\int y\,d\pi_{\bar{x}_t}(y)=x_t$。对每个 t，选取一列函数$\xi_{t,n}:I_t\to\mathbb{R}^d$，使其满足$\xi_{t,n}(x_t)\in\partial\chi_{t+1,n}(x_t)$。然后我们计算

$$\begin{aligned}
&\int\sum_{t=1}^{N-1}\big(\chi_{t+1,n}(x_t)-\chi_{t+1,n}(x_{t+1})+h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big)\,d\pi\\
&=\int\Big(\int\big(\chi_{N,n}(x_{N-1})-\chi_{N,n}(x_N)+\xi_{N-1,n}(x_{N-1})\cdot\Delta x_{N-1}\big)d\pi_{\bar{x}_{N-1}}(x_N)\\
&\qquad+\sum_{t=1}^{N-2}\big(\chi_{t+1,n}(x_t)-\chi_{t+1,n}(x_{t+1})+h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big)\Big)d\pi^{N-1}(\bar{x}_{N-1}),
\end{aligned}$$

由于鞅性质，我们将$h_{N-1,n}(\bar{x}_{N-1})$替换为$\xi_{N-1,n}(\bar{x}_{N-1})$

$$\int h_{N-1,n}(\bar{x}_{N-1})\cdot\Delta x_{N-1}\,d\pi_{\bar{x}_{N-1}}(x_N)=\int\xi_{N-1,n}(x_{N-1})\cdot\Delta x_{N-1}\,d\pi_{\bar{x}_{N-1}}(x_N)=0.$$

根据 ξ的定义，我们有$\chi_{N,n}(x_{N-1})-\chi_{N,n}(x_N)+\xi_{N-1,n}(x_{N-1})\cdot\Delta x_{N-1}\le 0$。这使我们能够对$\pi^{N-1}=\pi_{\bar{x}_{N-2}}\otimes\pi^{N-2}$作析因分解，并重复相同的论证

$$\begin{aligned}
&\int\sum_{t=1}^{N-1}\big(\chi_{t+1,n}(x_t)-\chi_{t+1,n}(x_{t+1})+h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big)\,d\pi\\
&=\int\cdots\int\big(\chi_{N,n}(x_{N-1})-\chi_{N,n}(x_N)+\xi_{N-1,n}(x_{N-1})\cdot\Delta x_{N-1}\big)d\pi_{\bar{x}_{N-1}}(x_N)\\
&+\big(\chi_{N-1,n}(x_{N-2})-\chi_{N-1,n}(x_{N-1})+\xi_{N-2,n}(x_{N-2})\cdot\Delta x_{N-2}\big)d\pi_{\bar{x}_{N-2}}(x_{N-1})\\
&+\cdots+\big(\chi_{2,n}(x_1)-\chi_{2,n}(x_2)+\xi_{1,n}(x_1)\cdot\Delta x_1\big)d\pi_{\bar{x}_1}(x_2)d\pi^1(x_1).
\end{aligned}$$

由于对所有 t，都有$\chi_{t+1,n}(x_t)-\chi_{t+1,n}(x_{t+1})+\xi_{t,n}(x_t)\cdot\Delta x_t\le 0$，反复应用 Fatou 引理可使上极限继续进入最内层积分。利用上极限$(a_n+b_n)\le$上极限 a_n+上极限 b_n，最终得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\int\sum_{t=1}^{N-1}\big(\chi_{t+1,n}(x_t)-\chi_{t+1,n}(x_{t+1})+h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big)\,d\pi\\
&\le\int\cdots\int\big(\chi_N(x_{N-1})-\chi_N(x_N)+\xi_{N-1}(x_{N-1})\cdot\Delta x_{N-1}\big)d\pi_{\bar{x}_{N-1}}(x_N)\\
&+\big(\chi_{N-1}(x_{N-2})-\chi_{N-1}(x_{N-1})+\xi_{N-2}(x_{N-2})\cdot\Delta x_{N-2}\big)d\pi_{\bar{x}_{N-2}}(x_{N-1})\\
&+\cdots+\big(\chi_2(x_1)-\chi_2(x_2)+\xi_1(x_1)\cdot\Delta x_1\big)d\pi_{\bar{x}_1}(x_2)d\pi^1(x_1)
\end{aligned}$$

对于某个 $\xi_t(x_t)\in\partial\chi_{t+1}(x_t)$，它是有界序列 $\{\xi_{t,n}(x_t)\}_n$的一个极限点。将 $\xi_t(x_t)$代回上面的不等式中的 $h_t(\bar{x}_t)$，得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\int\sum_{t=1}^{N-1}\big(\chi_{t+1,n}(x_t)-\chi_{t+1,n}(x_{t+1})+h_{t,n}(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big)\,d\pi\\
&\le\int\sum_{t=1}^{N-1}\big(\chi_{t+1}(x_t)-\chi_{t+1}(x_{t+1})+h_t(\bar{x}_t)\cdot\Delta x_t\big)\,d\pi.
\end{aligned}$$

将 (7.27) 中的积分合并，即得结论 (7.25)，从而得到该定理。 □

参考文献

[1] David Applegate、Mateo D´ıaz、Oliver Hinder、Haihao Lu、Miles Lubin、Brendan O’Donoghue 和 Warren Schudy。使用原始-对偶混合梯度求解实用的大规模线性规划。《神经信息处理系统进展》，34:20243–20257，2021。[2] M. Beiglb¨ock、P. Henry-Labord`ere 和 F. Penkner。期权价格的模型无关界：一种质量输运方法。《金融与随机过程》，17:477–501，2013。[3] M. Beiglb¨ock 和 N. Juillet。关于边际鞅约束下的一个最优传输问题。《概率年刊》，44(1):42–106，2016。[4] M. Beiglb¨ock、T. Lim 和 J. Ob-l´oj。鞅输运问题的对偶可达性。Bernoulli，25(3):1640–1658，2019。[5] M. Beiglb¨ock、M. Nutz 和 N. Touzi。一维鞅最优传输的完全对偶性。《概率年刊》，45(5):3038–3074，2017。[6] D. T. Breeden 和 R. H. Litzenberger。期权价格中隐含的状态或有索赔价格。《商业杂志》，51(4):621–651，1978。[7] Y. Brenier。向量值函数的极分解与单调重排。《纯粹与应用数学通讯》，44(4):375–417，1991。[8] Antonin Chambolle 和 Thomas Pock。用于凸问题的一阶原始-对偶算法及其在成像中的应用。《数学成像与视觉杂志》，40:120–145，2011。[9] 英伟达公司。cuOpt：GPU 加速优化引擎。https://nvidia.com/cuopt，2025。版本 25.08.00。[10] A. M. G. Cox、J. Ob-l´oj 和 N. Touzi。多边际嵌入问题的根解：一种最优停止与时间反演方法。《概率论及相关领域》，173(1-2):211–259，2019。[11] Marco Cuturi。Sinkhorn 距离：快速计算最优传输。载于 C.J. Burges、L. Bottou、M. Welling、Z. Ghahramani 和 K.Q. Weinberger（编），《神经信息处理系统进展》，第 26 卷。Curran Associates, Inc.，2013。[12] Hadrien De March。多维鞅最优传输的熵近似。arXiv 预印本 arXiv:1812.11104，2018。[13] S. Eckstein、G. Guo、T. Lim 和 J. Ob-l´oj。多资产期权的稳健定价与对冲及其数值方法。SIAM 金融数学杂志，12(1):158–188，2021。[14] Stephan Eckstein、Gaoyue Guo、Tongseok Lim 和 Jan Ob-l´oj。多资产期权的稳健定价与对冲及其数值方法。SIAM《金融数学杂志》，12(1):158–188，2021。[15] N. Ghoussoub、Y-H Kim 和 T. Lim。一般维数下最优鞅传输计划的结构。《概率年刊》，47(1):109–164，2019。[16] I. Guo、G. Loeper 和 S. Wang。利用最优传输校准局部随机波动率模型。arXiv 预印本，2019。[17] J. Guyon。标普500指数/VIX 联合微笑曲面校准难题已解决。2020。[18] Oliver Hinder。全幺模线性规划上重启原始-对偶混合梯度的最坏情形分析。arXiv 预印本 arXiv:2309.03988，2023。

[19] D. Hobson. 斯科罗霍德嵌入问题与期权价格的模型无关界。载于《巴黎-普林斯顿数学金融讲座 2010》，《数学讲义》第 2003 卷，第 267–318 页。施普林格，柏林，2011。[20] L. V. Kantorovich. 论质量转移。《苏联科学院通报》，37：199–201，1942。[21] T. Lim. 向量鞅最优传输的几何与对偶性。《数学规划》，2023。https://doi.org/10.1007/s10107-023-01954-4。[22] E. L¨utkebohmert and J. Sester. 收紧奇异衍生品的稳健价格界。《量化金融》，19：1797–1815，2019。[23] H. De March. 多维鞅最优传输的局部结构。arXiv 预印本，2018。[24] H. De March. 多维鞅最优传输的准必然对偶性。arXiv 预印本，2018。https://arxiv.org/abs/1805.01757。[25] H. De March and P. Henry-Labordere. 构建无套利隐含波动率：Sinkhorn 算法及其变体。arXiv 预印本，2019。https://arxiv.org/abs/1902.04456。[26] H. De March and N. Touzi. 用于分解多维鞅传输计划的不可约凸铺砌。《概率年刊》，47(3)：1726–1774，2019。[27] 加斯帕尔·蒙日。论挖方与填方理论。《巴黎皇家科学院院刊》，第 666–704 页，1781。[28]M. Nutz, F. Stebegg, and X. Tan. 多期鞅传输。《随机过程及其应用》，130(3)：1568–1615，2020。[29] J. Ob˙l´oj and P. Siorpaes. 有限维空间中鞅传输的结构。arXiv 预印本，2017。https://arxiv.org/abs/1702.08433。[30] J. Ob˙l´oj and P. Spoida. 一种迭代的 Azéma–Yor 型嵌入，适用于有限多个边缘分布。《概率年刊》，45(4)：2210–2247，2017。[31]F. Santambrogio. 面向应用数学家的最优传输。变分法、偏微分方程与建模，《非线性微分方程及其应用进展》第 87 卷。Birkhäuser/施普林格，Cham，2015。[32] J. Sester. 关于鞅最优传输中的中间时点边缘分布。《数学与金融经济学》，17：615–654，2023。[33] V. Strassen. 给定边缘分布的概率测度之存在性。《数理统计年刊》，36：423–439，1965。[34] C. Villani.《最优传输：古今》，《数学科学基础》第 338 卷。施普林格，2009。[35] D. Zaev. 关于带附加线性约束的蒙日-康托罗维奇问题。《数学札记》，98(5-6)：725–741，2015。

致谢

YS 感谢摩根大通全球技术应用研究中心的同事给予的支撑和宝贵讨论。CC 感谢摩根大通量化交易与研究部门的同事进行的多次富有成效的讨论。

免责声明

本文由摩根大通公司全球技术应用研究中心参与编写，仅供参考。本文并非摩根大通公司研究部或其关联公司的产品。摩根大通公司及其任何关联公司均不作任何明示或默示的陈述或保证，也不对与本文有关的任何事项承担责任，包括但不限于本文所含信息的完整性、准确性或可靠性，以及由此可能产生的法律、合规、税务或会计影响。本文并非旨在作为投资研究或投资建议，也不是购买或出售任何证券、金融工具、金融产品或服务的推荐、要约或招揽，亦不得以任何方式用于评估参与任何交易的利弊。