arXiv:2602.02997v1 [math.DG] 3 Feb 2026

$\mathbb{R}^4$ 中的全空间面积极小曲面都是代数的

NICK EDELEN、Luis Atzin Franco Reyna 和 Paul Minter

Abstract. 我们将 $\mathbb{R}^4$ 中具有二次面积增长的整个二维面积极小曲面或稳定曲面分类为代数曲面：它们由有限个全纯多项式的并集所定义，且这些多项式的次数总和受无穷远处密度控制。由此，我们得到奇异集大小和亏格关于无穷远处密度的界。

众所周知， $\mathbb{C}^n$ 中的任何全纯子簇在其同调类中都是面积极小的；当然，该子簇经过任何（实）旋转或反射后，在 $\mathbb{R}^{2n}$中仍然是面积极小的。Micallef[10]证明了这一结论的一个部分逆命题：任何光滑嵌入（或真浸入）、稳定、定向、连通且具有二次面积增长的极小 $M^2 \subset \mathbb{R}^4$ ，在 $\mathbb{R}^4$中经过可能的刚体运动后，必定在 $\mathbb{C}^2$中是全纯的。更早之前，Morgan [13] 证明， $\mathbb{R}^n$ 中任何面积极小的二维平面并集，都必定相对于其张成空间上的某个固定正交复结构是全纯的。

我们在此指出， [10] 所考虑的任何 M 实际上都是 $\mathbb{C}^2$中的代数的对象，由一个次数等于 M 在无穷远处密度的全纯多项式刻画，并由此得到亏格的界。此外，我们将 [10] 中的结果推广到 $\mathbb{R}^4$ 中任意具有有限无穷远密度 Θ 的面积极小 2-流 T ，从而推出 T与 $\mathbb{C}^2$中的代数流之和重合，且其次数、奇异集和亏格均有关于 Θ的先验界。构成 T 的代数流可能分别相对于不同的正交复结构全纯，这使奇异集界的推导稍显复杂；尽管这些复结构之间存在某种相容性，但它们是否必须全部相同，仍是一个有趣的问题。

M 的代数性或许已有一些专家知晓（因为可以从全纯性和面积增长假设，借助 [17, 定理 D]等复解析方法推导出来），但 [10] 中并未提及这一点，据我们所知，其他地方也没有。我们给出一种更偏向极小曲面的证明，利用切锥的唯一性

（由 Rivi`ere [15] 证明）来表明 M 可延拓为$\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$中的解析子簇，然后运用“GAGA”原理。

给定 $\mathbb{R}^4$ 中的平稳2-流 T，记

$$\Theta_T(\infty) := \lim_{r\to\infty} \frac{\|T\|(B_r(0))}{\pi r^2}$$

表示无穷远处密度。由单调性公式可知，$\Theta_T(\infty)$ 总是存在（尽管先验上它可能是无穷大）。记 reg $T \subset$ spt T为 spt$T$在其附近与某个光滑嵌入子流形重合的点集，并记 sing $T =$ spt $T \setminus$ reg T。对于子集 $A \subset \mathbb{R}^4$，记 A 为其闭包。

若 M 是 $\mathbb{R}^4$ 中浸入或嵌入的定向2-曲面，我们可以根据其关联的2-流 $[\![M]\!]$ 来定义 Θ_M、reg M 和 sing M，例如 $\|M\|(A) = \mathcal{H}^2(M \cap A)$，而 sing M 由 M 中那些附近的 M 不与光滑嵌入子流形局部重合的点组成。

我们的第一个定理如下。

定理 0.1. 设 $F\colon M^2 \to \mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$ 为一个无边界的连通可定向光滑稳定极小浸入，它：

(i) 在离散集 $X \subset \mathbb{R}^4$ 之外是恰当的，即对每个紧的 $K \subset \mathbb{R}^4 \setminus X$，$F^{-1}(K)$ 都是紧的；(ii) 相对于环境球具有二次面积增长，即 $\Theta := \Theta_{F(M)}(\infty) < \infty$。[1]

于是，我们可以写成

$$\overline{F(M)} = A\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : p(z,w) = 0\} \tag{1}$$

对某个 $A \in O(4)$，以及 $p\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ 一个次数为 Θ 的全纯多项式。特别地，$F(M)$ 在有限奇异集之外是光滑且适当嵌入的，并具有如下界：

$$\#\operatorname{sing} F(M) + \operatorname{genus}(\operatorname{reg} F(M)) \le \frac{1}{2}(\Theta-1)(\Theta-2). \tag{2}$$

注 0.2。众所周知，全纯性蕴含二维流$[\![F(M)]\!]$是面积极小的，也蕴含 M只能在孤立点处发生浸入。我们指出，两张沿一条直线相交的平面构成一个稳定极小曲面，但作为浸入是不连通的，因此定理 0.1（或 Micallef 的全纯性结果 [10]）只能应用于该浸入的每个连通分支。

[1]我们的假设蕴含 $F(M)$ 在整个$\mathbb{R}^4$中定义了一个平稳整varifold，因此由单调性，极限 $\Theta_{F(M)}(\infty)$ 将存在于 $[1,\infty]$ 中（参见注 1.3）。

注 0.3。 与 $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$相比， $\mathbb{CP}^n$中的稳定极小曲面具有严格得多的刚性: Lawson–Simons [8] 证明， $\mathbb{CP}^n$ 中的任意整系数 p-流稳定，当且仅当它是一个复代数循环。

注 0.4。 我们强调，定理 0.1 适用于 $M^2 \subset \mathbb{R}^4$ ： 这类曲面是连通、定向、光滑嵌入且稳定的极小二维曲面，除一个离散集外完备（即 $M \setminus M$ 在$\mathbb{R}^4$中是离散的）[2]，并且具有二次面积增长（即 $\Theta_M(\infty) < \infty$）。

我们的第二个主要定理如下。

定理 0.5。 设 T 是 $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$ 中一个面积极小的积分2-流，满足 $\partial T = 0$ 且 $\Theta := \Theta_T(\infty) < \infty$。那么，存在正整数 $m_1, \dots, m_k$，全纯多项式 $\{p_i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}\}_{i=1}^k$，满足$d_i := \deg(p_i) \geq 1$，并满足 $m_1 d_1 + \cdots + m_k d_k = \Theta$, $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$，复刚性运动 $\{B_i \in U(2)\}_{i=\ell+1}^k$，以及实刚性运动 $A \in O(4)$，使得

$$T = A_\# \sum_{i=1}^{\ell} m_i [\![\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : p_i(z,w) = 0\}]\!] + A_\# \sum_{i=\ell+1}^{k} m_i (B_i R)_\# [\![\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : p_i(z,w) = 0\}]\!]. \tag{3}$$

这里 $R(z,w) = (z,w)$。要么 $d_i = 1$ 对每个 i 成立，此时我们可以假设 $\ell = k$；要么我们可以假设至少一个次数 $\{d_i : i \leq \ell\}$ 至少为2，每个次数 $\{d_i : i \geq \ell + 1\}$ 至少为2，并且

$$p_i(z,w) = w^{d_i} + (\text{lower order terms in } z, w) \quad \forall i \geq \ell + 1.$$

此外，我们有这些界

$$\#\operatorname{sing} T \leq \Theta^3, \tag{4}$$

and

$$\operatorname{genus}(\operatorname{reg} T) \leq \frac{1}{2} \sum_i (d_i - 1)(d_i - 2) \leq \frac{\Theta^2}{2} \tag{5}$$

注 0.6. (3) 的一个稍弱表述可以简单地是

$$T = A_\# \sum_{i=1}^{k} m_i (A_i)_\# [\![\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : p_i(z,w) = 0\}]\!]$$

[2]严格来说，对于一般的子流形，完备并不等同于作为集合闭合。然而，由于 M 在任何外围球中具有有限面积，例如由 [3] 的曲率估计可得， $M = M$ 位于 M 完备的区域中。

对适当的 $A_i \in O(4)$ 成立，但 (3) 刻画了不同的 $T_i := m_i(A_i)_\# [\![\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : p_i(z, w) = 0\}]\!]$ 之间复结构的某种相容性，该相容性由如下条件所保证： T 的任一切锥都必须由相对于同一正交复结构 ([13]) 全部正向定向且全纯的平面组成。

特别是，(3) 表明，每个 T_i 要么相对于标准复结构 J 是正向全纯的，要么存在一个（正向定向的）复平面 $P_i \equiv B_i\{w = 0\}$ ，使得对于某个关于 $P_i^\perp$ 的实反射 R_i ， T_i 相对于 $(R_i)_\# J$ 是正向全纯的。第二种情况有一定限制：只有当 T_i 在无穷远处的切锥是平面 $m_i d_i [\![P_i]\!]$ 时才可能出现；此外，对于任意给定的 $j \le \ell < i$ ，$\operatorname{spt} T_i$ 与 $\operatorname{spt} T_j$ 只能在这样的点 x 相交： T_i 或 T_j 在 x 处的切锥支承于 P_i。

所有 T_i 都可能相对于同一个正交复结构（即 (3) 中的 $\ell = k$ ）全纯，因此 T 只需经过实刚性运动，就会成为一个正的 (1,1)-流；这也将给出以下（可能是尖锐的）界

$$(6)\quad \#\operatorname{sing} T + \operatorname{genus}(\operatorname{reg} T) \le \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} d_i d_j + \frac{1}{2}\sum_i (d_i - 1)(d_i - 2) \le \frac{\Theta^2}{2}.$$

如果 $\Theta_T(\infty) \le 3$ 这成立，是因为定理 0.5 对次数 d_i施加了限制。然而，我们并不能立即看出，为什么例如形如

$$[\![\{w^2 = z\}]\!] + R_\# [\![\{w^2 = z + 1\}]\!]$$

的流不可能是面积极小的（注意，该流的无穷远处切锥是 $4[\![\{w = 0\}]\!]$）。

注 0.7. 估计式 (4) 并非最优。我们猜想，#sing$T$应当关于密度 $\Theta_T(\infty)$满足二次上界，并且即使在 $\ell < k$的情形下，(6) 也可能是紧确估计。我们的上界 (4) 具有三次形式，是由 T_i, T_j 在$i \le \ell < j$中的交点所致；但这类交点似乎极不一般（因为任何这类交点都必须是 6 个实多项式方程的零点集）。

注 0.8. 假设 $\Theta_T(\infty) < \infty$ 显然是必要的，因为任意全纯函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的图像在 $\mathbb{C}^2$中都是面积极小的，但未必具有二次体积增长（例如 $f(z) = e^z$）。

对于像 $\Theta_T(\infty) = 2, 3$ 这样的小密度，定理 0.5 对面积极小体给出了更严格的刻画。例如，我们有：

推论 0.9。设 T 是 $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$ 中的一个面积极小整数2维流，满足 $\partial T = 0$ 和 $\Theta_T(\infty) = 2$。那么，对于某个 $A \in O(4)$以及某些$a, b, c, d, e, f, \in \mathbb{C}$, T，有以下两种可能之一：

(i) 两个（可能重合的）正向定向复仿射平面的和：

$$T = A_{\#}[\![\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : az + bw = c]\!] + A_{\#}[\![(z,w) \in \mathbb{C}^2 : dz + ew = f]\!];$$

(ii) 处处正则、重数为一、零亏格，且是二次全纯多项式的零点集：

$$T = A_{\#}[\![(z,w) \in \mathbb{C}^2 : az^2 + bzw + cw^2 + dz + ew + f = 0]\!].$$

我们感谢 Jeff Diller、Christos Mantoulidis、Davide Parise、Nick Salter 和 Eric Riedl 的有益交流，并感谢 Brian White 的关注与鼓励。N.E. 得到了美国国家科学基金会 DMS-2506700 项目资助以及西蒙斯基金会的差旅资助。本研究是在 P.M. 担任克雷研究学者期间开展的。

1. Proof of Main Result

我们将 $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2 \equiv \{(z,\ w)$ 识别为 $z,\ w \in \mathbb{C}\}$。通常我们用J表示 $\mathbb{C}^2$上的标准复结构；给定 $A \in O(4)$，记$A_{\#}J \equiv AJA^{-1}$ 为由 A 诱导的正交复结构。给定一个子集 $A \subseteq \mathbb{C}^2$（或 $\mathbb{CP}^2$），A 始终表示其集合论闭包。用 $\mathcal{H}^k$ 表示 k维豪斯多夫测度。我们将使用整流和变分流形的术语，并请读者参阅例如 [16] 了解相关背景和记号。我们用 $\mathcal{F}$ 表示紧支撑流的平坦范数。给定一个浸入二维曲面 M，我们用 $|M|$ 表示其诱导的变分流形；若 M 是定向的，则用 $[\![M]\!]$ 表示其诱导的流，使得 $\|M\|(A) \equiv \mathcal{H}^2(M \cap A)$。

给定一个二维流 T，记

$$\Theta_T(x,r) = \frac{\|T\|(B_r(x))}{\pi r^2}$$

为 T 在 $B_r(x)$ 中的密度。若 T 是驻定的，则单调性公式断言 $\Theta_T(x,r)$ 关于 r 递增，因此密度$\Theta_T(x) := \lim_{r\to 0} \Theta_T(x,r)$ 与 $\Theta_T(\infty) := \lim_{r\to\infty} \Theta_T(0,r)$ 总是存在（后者可能为 $+\infty$）。

回顾一个众所周知的事实：在 $\mathbb{R}^m$ 中，任何有限质量的锥形面积极小整 2-流都由有限个二维平面组成（可能带有重数），且这些平面除原点外互不相交。特别地，若 T 是一个面积极小整 2-流，那么对于每个 $x \in \operatorname{spt} T$，都有 $\Theta_T(x) \in \mathbb{N}$，并且 $\Theta_T(\infty) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。

我们需要的第一个结果是无穷远处切锥的唯一性。

定理 1.1（无穷远处切锥的唯一性，[15]）。设 T^2 是 $\mathbb{R}^{2+m}$ 中满足 $\partial T = 0$ 且 $\Theta := \Theta_T(\infty) < \infty$ 的面积极小整2维流。那么，存在定向2维平面 P_1、……、P_ℓ，它们除0外彼此不相交，并存在重数 n_1、……、$n_\ell \in \mathbb{N}$，使得锥 $\mathbf{C} = n_1\llbracket P_1\rrbracket + \cdots + n_\ell\llbracket P_\ell\rrbracket$ 是 T 在无穷远处的唯一切锥。换言之，当 $R \to \infty$ 时，有

(i) $(1/R)_{\#}T \to \mathbf{C}$ 作为流及变分流形；(ii) $(1/R)$ 的支集 $T \to$ 的支集 $\mathbf{C}$ 在豪斯多夫距离意义下局部收敛。

证明。[15]中建立的反向外周不等式蕴含 $\mathbf{C}$ 的唯一性。更确切地说，[15] 证明存在一个 $\epsilon(m,\Theta) > 0$，使得只要存在定向 2-平面 $P_1,\dots,P_\Theta$（其中任意两个要么重合，要么横截），满足

$$\mathcal{F}\left(T \llcorner B_2 - \sum_{i=1}^{\Theta}\llbracket P_i\rrbracket \llcorner B_2\right) < \epsilon \tag{7}$$

那么即可推出

$$\pi\Theta - \frac{1}{2}\|\partial(T \llcorner B_1)\|(\partial B_1) \le (1-\epsilon)(\pi\Theta - \|T\|(B_1)).$$

通过直接的反证论证可知，对于所有 $R \gg 1$，以 $(1/R)_{\#}T$ 替代 T，式 (7) 仍成立。因此，[15] 得到了如下形式的衰减估计

$$\Theta - \Theta_T(0,R) \le \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2\epsilon}(\Theta - \Theta_T(0,R_0)) \quad \text{for all } R \ge R_0$$

对于某个 $R_0 \gg 1$。通过类似于 [18], 中的论证可知，对于任意序列 $R_i \to \infty$，流 $\partial(((1/R_i)_{\#}T) \llcorner B_1)$ 在平坦范数下构成一个柯西序列，这意味着 T 在无穷远处存在唯一的切锥 $\mathbf{C}$。由此可得所有所声称的收敛结果。□

接下来，我们阐述 [10]所得到的关键全纯性结果

定理 1.2（稳定极小曲面在 $\mathbb{R}^4$，[10] 中的全纯性）。设 $F\colon M^2 \to \mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$ 为一个无边界的连通定向2-曲面的光滑、等距、稳定极小浸入，满足：

(i) F 在离散集 $X \subset \mathbb{R}^4$ 之外是恰当的（即，对于每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^4 \setminus X$，$F^{-1}(K)$ 都是紧的）；(ii) $F(M)$ 相对于外围球具有二次面积增长（即 $\Theta := \Theta_{F(M)}(\infty) < \infty$）。

那么，我们可以找到一个（实）刚体运动 $A \in O(4)$，使得 $A \circ F$ 相对于 $\mathbb{C}^2$上的标准复结构是全纯的。

注 1.3。根据正则性，$|F(M)|$ 在 $\mathbb{R}^4 \setminus X$中定义了一个平稳整varifold；由于 X是离散的，并且 $|F(M)|$ 在任意外围球中具有有限质量，$|F(M)|$ 可延拓为整个$\mathbb{R}^4$上的平稳整varifold。因此，根据单调性公式，对于所有 $x \in \mathbb{R}^4$ 和所有 $r > 0$，我们有 $\Theta_{F(M)}(x, r) \leq \Theta$。

证明。如前所述，[10] 最初在 $X = \emptyset$的情形下证明了定理 1.2。对 [10], 中的证明作一处小的修改——该证明在分支浸入的情形下已在 [11] 中基本勾勒出——即可将结果推广到奇异集离散的情形（且 M 不一定先验完备）。有两个必要事实需要验证。为方便起见，下面将 M替换为 $M \setminus F^{-1}(X)$并无损失，因为 $F^{-1}(X)$是离散的（可能为空，也可能为无限集）。

首先，我们需要以下结果：该结果最初是针对完备、非紧致的 M 证明的：若在 M 上存在某个光滑函数 Q，使得

$$\int_M Qf^2 \leq \int_M |\nabla f|^2 \quad \forall f \in C_c^1(M)$$

那么，存在一个正函数 u，定义在 M 上并满足 $\Delta u + Qu = 0$。在 [5] 中，这是通过在 M 的紧穷竭$D_i \equiv B_{R_i}(p) \subset M$ 上求解一列偏微分方程、重新归一化，然后利用 Harnack不等式取极限，从而得到所需的 u。容易验证，当 $F\colon M^2 \to \mathbb{R}^4$ 是非紧致的，且在离散奇异集 $X = \{x_j\}_j \subset \mathbb{R}^4$之外真浸入时，对适当的 $R_i \to \infty$、$r_{ij} \to 0$, 在形如 $D_i = F^{-1}(B_{R_i} \setminus \cup_j B_{r_{ij}}(x_j))$ 的区域上进行同样的论证也成立。

其次，我们需要 M 是抛物型的，即 M 上任意正的超调和函数都是常数。为此，我们采用对数截断法。首先注意到，根据注 1.3，对于所有 $x \in \mathbb{R}^4$ 和 $r > 0$，我们有界估计$\mathcal{H}^2(F(M) \cap B_r(x)) \leq \Theta \pi r^2$。我们首先断言，存在一个数 k，使得对于 $\mathcal{H}^2$-几乎处处的 $x \in M$，有 $F^{-1}(F(x)) \leq k$。

考虑满足以下性质的集合 $M_k \subseteq M$，即可看出这一点：对于每个 $x \in M_k$，都存在 k 个互不相交的开子集 V_1、.....、$V_k \subset M$，使得 $x \in V_1$且 $F(V_1) = F(V_2) = \cdots = F(V_k)$。根据（实）解析延拓，$M_k$ 在 M中既开又闭，因此 $M_k = \emptyset$ 或$M_k = M$。显然 $M_1 = M$。令 k为满足 $M_k = M$的最大整数；由 F的正则性可知该整数有限。

给定 $p \in F(M) \setminus X$且 $r > 0$充分小，我们可以写成$F(M) \cap B_r(p) = M_1 \cup \cdots \cup M_l$，其中每个 M_i都是一个小圆盘的嵌入，且 $l < \infty$。对于每个 $i \neq j$，要么 M_i，M_j 在 p 附近重合，要么由 [7]

（另见 [12]） M_i, M_j 相切的点集是离散的。另一方面，根据逆函数定理， M_i, M_j 非相切相交的点集的豪斯多夫维数为 ≤ 1。由于 $\{x \in F^{-1}(B_r(p)) : \#F^{-1}(F(x)) > k\}$ 包含于集合 $F^{-1}(\cup_{i,j}\{M_i \cap M_j : M_i, M_j$不在局部重合$\})$ 中，我们推得 $\{x \in M : \#F^{-1}(F(x)) > k\}$ 的 $\mathcal{H}^2$-测度为零。这表明，对于 $\mathcal{H}^2$-几乎处处的 $x \in M$，有 $\#F^{-1}(F(x)) = k$。

按照例如 [2, Example 3.10(3)], ，要证明 M 是抛物型，只需证明存在一族非负函数 $\psi_i \in C^0_c{}^1(M)$，使得在 M的紧子集上一致地有 $\psi_i \to 1$ ，且 $\int_M |\nabla\psi_i|^2 d\mathcal{H}^2 \to 0$。为此，固定 $\epsilon > 0$，并回顾枚举 $X = \{x_j\}_j$ ，令$r_j = \exp(-2^i/\epsilon)$，其中 $j \geq 1$ ，且 $r_0 = \exp(1/\epsilon)$。定义

$$\phi_j(y) = \begin{cases} 0 & |y - x_j| < r_j^2 \\ \frac{\log(|y-x_j|)-\log(r_j^2)}{\log(r_j)-\log(r_j^2)} & r_j^2 \leq |y - x_j| \leq r_j \\ 1 & r_j < |y - x_j| \end{cases} \qquad \text{for } j \geq 1$$

and

$$\phi_0(y) = \begin{cases} 1 & |y| < r_0 \\ \frac{\log(r_0^2)-\log(|y|)}{\log(r_0^2)-\log(r_0)} & r_0 \leq |y| \leq r_0^2 \\ 0 & |y| > r_0^2 \end{cases} .$$

令 $\phi(y) = \min_{j\geq 0} \phi_j(y)$。根据离散性假设，这实际上只是关于每个点的局部邻域内有限多个 j 上的最小值。因此 $\phi \in C^0_c{}^1(\mathbb{R}^4)$，并且显然，当 $\epsilon \to 0$时， $\phi \to 1$在$\mathbb{R}^4 \setminus X$ 的紧集上一致地成立。

定义 $\psi = \phi \circ F \in C^0_c{}^1(M)$。然后，当 $\epsilon \to 0$ 时， $\psi \to 1$ 属于 $C^0_{\text{loc}}(M)$，并且我们计算

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla\psi|^2 d\mathcal{H}^2 &\leq k \int_{F(M)\cap B_{r_0^2}\setminus B_{r_0}} \frac{1}{|y|^2 \log^2(r_0)} d\mathcal{H}^2 \\ &\qquad + k \sum_{j\geq 1} \int_{F(M)\cap B_{r_j}(x_j)\setminus B_{r_j^2}(x_j)} \frac{1}{|y - x_j|^2 \log^2(r_j)} d\mathcal{H}^2 \\ &\leq \frac{16\Theta k\pi}{\log(r_0)} + \sum_{j\geq 1} \frac{16\Theta k\pi}{-\log(r_j)} \\ &\leq 32\Theta k\pi\epsilon, \end{aligned}$$

在第一个不等式中使用了界 $\#F^{-1}(F(x)) \leq k$，在第二个不等式中使用了界 $\mathcal{H}^2(F(M) \cap B_r(x)) \leq \Theta\pi r^2$（适当的二进尺度）。

[10] 的证明其余部分无需改动即可沿用（另见[2]），不过我们还是概述一下通用论证。

由于 M 可定向，起点是通过旋转 $90°$，分别在 M 和（拉回）法丛 $NM \subset F^*(T\mathbb{R}^4) \cong M \times \mathbb{R}$ 上赋予复结构 $J^\top$ 和 $J^\perp$。对每个 $p \in M$定义映射 $J_p(v) = J^\top(\pi_{T_pM}(v)) + J^\perp(\pi_{N_pM}(v))$，它在 $T_{F(p)}\mathbb{R}^4$ 上给出一个正交复结构。最终目标是证明 J_p 与 p无关。

用 $(z,\ \bar{z})$ 表示 M上的（局部）复坐标。利用复结构 $J^\top$、$J^\perp$ 将复化切丛和法丛分解为 $T_{\mathbf{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$，$N_{\mathbf{C}}M = N^{1,0}M \oplus N^{0,1}M$。记$F^{1,0}_{zz} = \pi_{N^{1,0}M}(F_{zz})$，$F^{0,1}_{zz} = \pi_{N^{0,1}M}(F_{zz})$。

逐点计算表明，若 $F^{1,0}_{zz}$或 $F^{0,1}_{zz}$在 M上恒为零，那么经过可能的替换，将 $J^\perp$替换为 $-J^\perp$后，映射J_p 将与 p无关。为此，[10] 利用二次变分公式得到不等式

$$\int_M q(a) f^2 \le |a| \int_M |\nabla f|^2 \qquad \forall f \in C_c^1(M),$$

对任意固定的 $a \in \mathbb{C}^4$，其中 $q(a) = \frac{-2}{|F_z|^4}\mathrm{Re}\ \{(F^{1,0}_{zz} \cdot a)(F^{0,1}_{zz} \cdot a)\}$。

取 $a \in \{e_i\}_{i=1}^4$ 为 $\mathbb{C}^4$的一组标准正交基中的元素，[5] 的（修正后的）论证表明，存在定义在 M 上的光滑正函数 u_i，满足$\Delta u_i + q(e_i)u_i = 0$。[10] 接着指出，由于 $\sum_{i=1}^4 q(e_i) = 0$，若令 $w_i = \log(u_i)$，则可得

$$\frac{1}{16}\int_M \Big(\sum_{i=1}^4 |\nabla w_i|^2\Big) f^2 \le \int_M |\nabla f|^2 \qquad \forall f \in C_c^1(M).$$

再次应用修正后的 [5]，可推出存在定义在 M 上的光滑正函数 f，满足 $\Delta f + \frac{1}{16}(\sum_{i=1}^4 |\nabla \overline{w}_i|^2) f = 0$，特别地有 $\Delta f \le 0$。由 M的抛物性可知，f 必为常数，因此所有的 w_i 均为常数，从而 $|F^{1,0}_{zz}||F^{0,1}_{zz}| \equiv 0$。由于 $F^{1,0}_{zz}dz^2$和 $F^{0,1}_{zz}dz^2$都是全纯微分，因此两个因子之一必在 M上恒为零。□

现在我们来证明主要定理。

定理 *0.1* 的证明。我们首先应用定理 1.2 得到，经过适当的旋转和反射后，$F:\ M^2 \to \mathbb{C}^2$ 是全纯的，因此 $F(M)$ 是 $\mathbb{C}^2 \setminus X$ 的闭复解析子集。由于 X 是离散的，标准的可去奇点定理（例如 [4, 定理 8.7]）推出 $F(M)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的复解析子集。在一个

离散奇异集 $F(M)$ 是适当嵌入的，因此从现在起我们将 M 与 reg $F(M)$ 等同。

流 $T = [\![M]\!]$ 是$\mathbb{C}^2$ 中的一个闭的、正的、整的$(1,1)$-流（参见注 1.3），因此特别地， T 是面积极小的。由定理 1.1， T在无穷远处有唯一的切锥 $\mathbf{C} = n_1[\![P_1]\!] + \cdots + n_l[\![P_l]\!]$（在流、变分流形以及支集的豪斯多夫距离意义下达到），其中不失一般性，我们可以假设对所有 $i \neq j$都有 $P_i \cap P_j = \{0\}$ 。由 T 的全纯性，每个 P_i 都是 $\mathbb{C}^2$ 的复子空间（另见 [13]）。

将 $\mathbb{C}^2$ 嵌入 $\mathbb{CP}^2$，并用 $\mathbb{CP}^1$ 表示无穷远球面。我们可以把 M 视为 $\mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{CP}^1$的解析子集，由上一段可知它满足

$$\overline{M} \cap \mathbb{CP}^1 = (\cup_i P_i) \cap \mathbb{CP}^1$$

是一个离散集。因此，事实上， $M \cap \mathbb{C}^2$ 是 $\mathbb{CP}^2$ 减去有限个点后的解析子集；于是再次利用可去奇点定理，M 是 $\mathbb{CP}^2$的解析子集。由周定理（[4, 定理 8.10]）可知， M 在 $\mathbb{CP}^2$中是代数的，因此存在一个定义在 $\mathbb{C}^3$ 上的齐次多项式 $P(z,w,y)$，使得$M = \{[z\colon w\colon y]\colon P(z,w,y) = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$。令 $p(z,w) = P(z,w,1)$，得到 $M \cap \mathbb{C}^2 = \{(z,w)\colon p(z,w) = 0\}$。

由于 M是连通的，假设 $P(z,w,y)$不可约并无损失。关于 $\mathbb{CP}^2$中代数曲线上同调的一个基本事实（例如 [14,定理 5.22]）表明

$$\deg(P)\pi = \mathrm{vol}_{FS}(M) = \int_M \omega_{FS}$$

其中，vol_{FS}表示相对于 Fubini–Study 度量的 $M \subset \mathbb{CP}^2$ 的体积，而 ω_{FS} 表示 $\mathbb{C}^2$ 上的 Fubini–Study Kähler 形式，即，若写作 $(z_1, z_2) = (z, w)$，则

$$\omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)\delta_{i\bar{j}} - \bar{z}_i z_j}{(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)^2} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

另一方面，直接计算可得

$$\int_{\mathbf{C}} \omega_{FS} = \sum_{i=1}^{l} n_i \int_{P_i} \omega_{FS} = \Theta\pi$$

根据定理 1.1，我们可以选取一列半径 $R_i \to \infty$、支撑于 B_{R_i} 中的 3-流 E_i ， 以及支撑于 $\overline{\partial B_{R_i}}$ 中的 2-流 S_i ， 使得

$$([\![M]\!] - \mathbf{C}) \llcorner B_{R_i} = \partial E_i + S_i, \quad R_i^{-2}\|S_i\|(\partial B_{R_i}) \to 0.$$

现在，由于 ω_{FS} 是闭的，并注意到对于某个一致常数 c，$|\omega_{FS}| \le cR^{-2}$ 在 ∂B_R 上成立，我们有

$$\left| \int_{M\cap B_{R_i}} \omega_{FS} - \int_{\mathbf{C}\cap B_{R_i}} \omega_{FS} \right| \le cR_i^{-2}\|S_i\|(\partial B_{R_i}) \to 0$$

如 $i \to \infty$。由于 ω_{FS} 是 M和$\mathbf{C}$上的体积形式（因而 ≥ 0），且两个积分都有限，我们推得 $\int_M \omega_{FS} = \int_{\mathbf{C}} \omega_{FS}$，进而 $\deg(P) = \Theta$。

（更直接的分析会表明 $p(z, w) = (a_1z+b_1w)^{n_1}\cdots(a_lz+b_lw)^{n_l}+q(z, w)$，其中 $P_i = \{(z, w): a_iz+b_iw = 0\}$ 且 $\deg(q) \le d-1$。）

最后，奇异集和亏格的界由亏格—次数公式推出（例如参见 [6, 第四章, 习题 1.8]）。□

定理 *0.5* 的证明。根据 [1]（另见 [9]），T 除离散奇异集 sing T 外都是正则的。令 M_1，……，M_k 为 reg T的连通分支，因此若设 $T_i = T \llcorner M_i$，则（由常值定理和 T的整性） $T_i = m_i[\![M_i]\!]$，其中某个正整数m_i 满足

$$T = T_1 + \cdots + T_k, \quad \|T\| = \|T_1\| + \cdots + \|T_k\|.$$

特别地，我们有 $m_1\Theta_{M_1}(\infty) + \cdots + m_k\Theta_{M_k}(\infty) = \Theta_T(\infty)$。注意，由于每个 M_i 本身都是驻定的，单调性意味着 $\Theta_{M_i}(\infty) \ge 1$，因此 $k < \infty$。

每个 M_i 都是稳定、连通、定向、嵌入的，并且在离散集 sing M 之外完备，且具有 $\Theta_{M_i}(\infty) < \infty$。因此，我们可以应用定理 0.1 得出

$$M_i = A_i\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : p_i(z, w) = 0\}$$

对于 $A_i \in O(4)$，以及 $p_i(z, w)$ 一个次数为 $d_i \equiv \Theta_{M_i}(\infty)$ 的多项式。

令 $\mathbf{C} = [\![P_1]\!] + \cdots + [\![P_\Theta]\!]$ 为 T在无穷远处的（唯一）切锥。根据 [13], ，所有这些 P_i 必定关于同一个正交复结构全纯且正向定向；经过在 $\mathbb{R}^4$ 中的刚体运动后，我们可以假设该结构为 J。给定任意一个 T_i，存在某个子集 $I_i \subseteq \{1, \ldots, \Theta\}$，使得 T_i 在无穷远处的切锥为$\mathbf{C}_i = \sum_{j\in I_i}[\![P_j]\!]$。

每个 P_j $(j \in I_i)$ 都必须关于两个正交复结构 J 与 $(A_i)_\# J$ 全纯。若 $\{P_j : j \in I_i\}$ 张成 $\mathbb{R}^4$，则该复结构被唯一确定，且必有 $J = (A_i)_\# J$，从而得到 $A_i \in U(2)$。若所有 $\{P_j : j \in I_i\}$ 重合，则该复结构在 $P_j^\perp$ 中 $(90°)$ 旋转的选取下被唯一确定，因此我们要么有 $J = (A_i)_\# J$，要么有 $(R_i)_\# J = (A_i)_\# J$，其中 R_i 是 $P_j^\perp$ 中任意选取的实反射，从而要么得到 $A_i \in U(2)$

要么 $R_i^{-1}A_i \in U(2)$。在这最后一种情形中，由于 P_j 是复的，我们可以写成 $R_i = B_i R B_i^{-1}$，其中 $B_i \in U(2)$ 且 $R(z,w) = (\overline{z}, w)$。

因此，对每个多项式 $p_i(z,w)$ 施以复刚性运动后，我们可以假设以下情形之一成立：

$$T_i = m_i[\![\{p_i(z,w)=0\}]\!], \quad \text{or} \quad T_i = m_i(B_iR)_{\#}[\![\{p_i(z,w)=0\}]\!].$$

在上述第二种情形中，必有 $\mathbf{C}_i$ 支持在平面 $B_i\{w=0\}$ 上，因此 $p_i(z,w) = w^{d_i} +$（关于 z,w 的低阶项），且 $\mathbf{C}_i = m_i d_i (B_i)_{\#}[\![\{w=0\}]\!]$。由于 $\mathbf{C}$ 相对于标准复结构必须正向定向，若将每个流 $[\![\{p_i(z,w)=0\}]\!]$ 赋予正向定向，我们就可以保留 $m_i > 0$。这就得到分解式 (3)。亏格的界 (5) 直接由定理 0.1 得出。

现在我们证明奇异集的界 (4)。T 的任一奇异点可能是某个 $\operatorname{sing} T_i$ 中的点，也可能是某个交集 $\operatorname{spt} T_i \cap \operatorname{spt} T_j$ 中的点（甚至可能只是 $\operatorname{reg} T_i \cap \operatorname{reg} T_j$）。我们分三种情形讨论：

(1) T_i、T_j 关于标准复结构 J（因此 i、$j \le \ell$）均为全纯；(2) T_i 是 J_i-全纯的，而对于 J_i、J_j，T_j 是 J_i-全纯的，它们都是反定向正交复结构（因此，i、$j \ge \ell+1$）；(3) 对某个反定向复结构 J_j，T_i 是 J-全纯的，且 T_j 是 J_j-全纯的（因此 $i \le \ell < j$）。

情形（1）。在这种情形下，我们可以直接用贝祖定理给出界

(8) #支集 $T_i \cap$ 支集 T_j = #{(z、w)：$p_i(z,w) = p_j(z,w) = 0\} \le d_i d_j$.

情形（2）。我们将证明界（8）在情形（2）中同样成立。在这种情形下，采用“实”贝祖定理得到的朴素界为 $d_i^2 d_j^2$；然而，我们可以利用 $T_i + T_j$ 的极小性推得（经过适当扰动后），支集 $T_i \cap$ 与支集 $T_j =$ 横截相交，且交数为正，从而可以应用“标准”贝祖定理（我们强调，这一点依赖于和的面积极小性）。

当然，如果 $J_1 = J_2$，那么在（实）刚体运动意义下，T_i和 T_j 都是J-全纯的，因此（8）再次由贝祖定理得出，所以不失一般性，我们可以假设 $J_1 \neq J_2$。

为简化记号，在这种情况下，我们只写作 $i=1$、$j=2$，并令 $k \in \{1,2\}$。我们的设定如下：

$$T_k = m_k(B_kR)_{\#}[\![\{p_k(z,w)=0\}]\!], \quad B_k \in U(2),$$
$$p_k(z,w) = w^{d_k} + (\text{lower order terms in } z,w).$$

因此， T_1 是正向 $J_1 \equiv$ （BR）$_{\#}J$ 全纯的，而 T_2 是正向$J_2 \equiv$ （B_2R）$_{\#}J$ 全纯的。若记 $P_k = B_k\{w = 0\}$，则 T_k 在无穷远处的切锥为 $m_k[\![P_k]\!]$，并且（由于 $J_1 \neq J_2$）我们有 $P_1 \neq P_2$。

固定 $x \in \operatorname{spt} T_1 \cap \operatorname{spt} T_2$，并设$\mathbf{C}'_1, \mathbf{C}'_2$ 为 T_1, T_2在 x处的切锥，从而$\mathbf{C}'_1 + \mathbf{C}'_2$ 是 $T_1 + T_2$ 在 x处的切锥。我们声称存在横截平面 P'_1，P'_2，对于某个保定向正交复结构，它们都是正向 J'-全纯的，使得

$$\mathbf{C}'_1 = m'_1[\![P'_1]\!], \quad \mathbf{C}'_2 = m'_2[\![P'_2]\!] \tag{9}$$

其中 $m'_1, m'_2 > 0$为某些整数。特别地， P'_1, P'_2将具有正交数。另请注意，(9)意味着 T_1 或 T_2 仅当 x 是分支点时才可能在x 处奇异。

我们证明这一断言。首先注意，由于 $J_1 \neq J_2$ 且二者均为反定向，不存在同时为 J_1-全纯和J_2-全纯的平面。因此$\mathbf{C}'_1$ 是若干定向平面之和，每个平面都带有重数，且均为正向 J_1-全纯但并非 J_2-全纯；而$\mathbf{C}'_2$ 是若干平面之和，每个平面都带有重数，且均为正向 J_2-全纯但并非 J_1-全纯。另一方面，根据 [13] ，在$\mathbf{C}'_1$ 和$\mathbf{C}'_2$ 中的每个平面，相对于某个正交复结构 J'，都必须是正向 J'-全纯的。

我们不可能有 $J' = J_1$或 $J' = J_2$。但是，给定的平面 P若要相对于 J'和 J_i都为正向全纯，则只有当 J'由 J_i 经 $P^{\perp}$中的实反射得到时才可能；在这种情况下， P 将是相对于 J' 和 J_i都为正向全纯的唯一平面。因此 J' 将保定向，而$\mathbf{C}'_1$、$\mathbf{C}'_2$ 将分别是单个平面 P'_1、 P'_2，各自带有某个重数，如式 (9) 所示。

由于每个 $B_kRB_k^{-1}$ $\operatorname{spt} T_k \equiv B_k\{p_k(z, w) = 0\}$ 都可延拓为 $\mathbb{CP}^2$中的代数簇，我们可以找到带 puncture 的黎曼曲面 Σ_1， Σ_2（具有紧闭包），以及简单分支浸入 $v_k : \Sigma_k \to \mathbb{C}^2$，用以参数化 $B_k\{p_k(z, w) = 0\}$ （带正向定向）。定义 $u_k = B_kRB_k^{-1}v_k$ ，使得 $u_k(\Sigma_k) = \operatorname{spt} T_k$，并且在其正则部分与 T_k 的定向一致。

选取一个大球 B_r，使得对于每个 $k = 1,2$，都有 $\operatorname{sing} T_k \subset B_{r/2}$，且对于所有 $\rho \geq r/2$，$\operatorname{spt} T_k \cap \partial B_\rho$与 $P_k \cap \partial B_\rho$的豪斯多夫距离为 $\epsilon\rho$。任取 $0 < \epsilon < \frac{1}{100} d_H(P_1 \cap B_1, P_2 \cap B_1)$（其中 d_H为豪斯多夫距离），使得 $\operatorname{spt} T_1$与 $\operatorname{spt} T_2$在 $B_{r/2}$之外互不相交。令 π_k为到 P_k上的正交投影，并定义

$$\tilde{\Sigma}_k = v_k^{-1}(\{|\pi_k(y)| < 2r\}) \equiv u_k^{-1}(\{|\pi_k(y)| < 2r\}),$$

我们可以假设（必要时改变 r 后）这是一个带光滑边界的紧黎曼曲面。令 $\eta\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个光滑的非增函数，它在 $(-\infty, 1.1r]$ 上为 $\equiv 1$，在 $[1.9r,\infty$上为 $\equiv 0$，并定义截断映射

$$\tilde{u}_k(x) = \eta(|(\pi_k\circ u_k)(x)|)u_k(x) + (1-\eta(|(\pi_k\circ u_k)(x)|))(\pi_k\circ u_k)(x),$$

类似地，我们可以令 $\tilde{v}_k(x)\equiv B_kRB_k^{-1}\tilde{u}_k(x)$（回想一下，$B_kRB_k^{-1}$ 固定平面 P_k）。于是每个 $\tilde{u}_k$，$\tilde{v}_k\colon \tilde{\Sigma}_k\to B_r\subset\mathbb{C}^2$，并且

$$\tilde{u}_k(\partial\tilde{\Sigma}_k) = \tilde{v}_k(\partial\tilde{\Sigma}_k) = \partial B_{2r}\cap P_k, \tag{10}$$
$$\tilde{v}_k(\tilde{\Sigma}_k)\cap B_r = v_k(\tilde{\Sigma}_k)\cap B_r,\quad \tilde{u}_k(\tilde{\Sigma}_k)\cap B_r = u_k(\tilde{\Sigma}_k)\cap B_r.$$

˜特别地，根据我们对 r 的选择，有支集 $T_1\cap$支集 $T_2=\tilde{u}_1(\Sigma_k)\cap\tilde{u}_2(\Sigma_2)$。

如果 $x\in$支集 $T_1\cap$支集 T_2 是 T_1（因而也是 $\tilde{u}_1$）的一个分支点，那么由于 reg T_1 的切平面在 x 附近连续变化（并且当趋近 x 时趋近于 P_1' ˜），我们可以对附近的 $\tilde{u}_1$ 作微扰，使得 $\tilde{u}_1(\Sigma_1)$、$\tilde{u}_2(\Sigma_2)$ 仅在 x 附近的正则部分相交，交点数只会增加，而且任何新的交点都将保持为正。例如，如果 v 是一个不属于 $P_1'\cup P_2'$ 的向量，那么我们可以考虑形如 $\phi(y)=y+\epsilon v\xi(|y-x|)$ 的微分同胚，其中 ξ 是一个适当的凸起函数，然后令 $\phi\circ\tilde{u}_1$ 为我们的微扰。同样，如果 x 是 T_2 的一个分支点，也可以使用同样的论证。

由于分支点的集合是有限的，且包含于$B_{r/2}$中，因此我们可以按照上述方式对 $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2$ 进行有限次同伦变形，并使每个 $\tilde{u}_k$ 在 B_r之外保持不变，从而使得在任意交点处，映射 $\tilde{u}_k$ 都是光滑的横截浸入，且交点为正；此外，$\#\operatorname{spt}T_1\cap\operatorname{spt}T_2\le\#\tilde{u}_1(\Sigma_1)\cap\tilde{u}_2(\Sigma_2)$。

根据交点理论（例如 [12, 第 7]节），我们得到

$$\#\operatorname{spt}T_1\cap\operatorname{spt}T_2\le[\tilde{u}_1(\tilde{\Sigma}_1)]\cdot[\tilde{u}_2(\tilde{\Sigma}_2)] \tag{11}$$

其中右侧对于每个 $\tilde{u}_k$而言，在所有保持边界 $\tilde{u}_k(\partial\Sigma_k)$不变的 ˜ ˜映射 $\Sigma_k\to B_r$ 中都是一个同伦不变量。利用（10），例如通过线性插值，我们可以将 $\tilde{u}_k$ 同伦变形为 $\tilde{v}_k$

$$(x,t)\mapsto(1-t)\tilde{u}_k(x)+t\tilde{v}_k(x),$$

而这将保持边界不变，从而推得 (11) 的˜ ˜右端也等于 $[\tilde{v}_1(\Sigma_1)]\cdot[\tilde{v}_2(\Sigma_2)]$。但现在

$$\tilde{v}_1(\tilde{\Sigma}_1)\cap\tilde{v}_2(\tilde{\Sigma}_2) = v_1(\Sigma_1)\cap v_2(\Sigma_2) = B_1\{p_1(z,w)=0\}\cap B_2\{p_2(z,w)=0\}$$

并且由于每个 v_k 都是对代数簇 $B_k\{p_k(z,\ w)\ =0\}$进行参数化的简单分支浸入，我们可以利用贝祖定理得到

$$[\tilde{v}_1(\tilde{\Sigma}_1)]\cdot[\tilde{v}_2(\tilde{\Sigma}_2)]=d_1d_2.$$

这就完成了情形（2）。

情形（3）。和之前一样，为了简化记号，下面我们将简写为 $i=1$ 和 $j=2$。经过刚体运动后，我们的设置变为

$$T_1=m_1[\![\{p_1(z,w)=0\}]\!];\quad T_2=m_2R_{\#}[\![\{p_2(z,w)=0\}]\!];$$

$$\mathbf{C}_2=m_2d_2R_{\#}[\![\{w=0\}]\!]=m_2d_2[\![\{w=0\}]\!],$$

其中 $\mathbf{C}_2$ 是 T_2 在无穷远处的切锥。因此，T_1 是 J-全纯的，而 T_2 是 J-全纯的，其中我们记 $J=R_{\#}J$。

与情形（1）、（2）不同，据我们所知，T_1,T_2之间不一定存在交点正性；相反，交点集具有另一种刚性。

任取 $x\in\operatorname{spt}T_1\cap\operatorname{spt}T_2$，令 $\mathbf{C}_1',\mathbf{C}_2'$ 分别为 T_1、T_2 在 x 处的切锥，则 $\mathbf{C}_1'+\mathbf{C}_2'$ 是 T_1+T_2 在 x 处的切锥。我们断言，$\mathbf{C}_1'$、$\mathbf{C}_2'$ 至少有一个支集包含于 $\{w=0\}$。否则，假设 $\mathbf{C}_1'$ 含有一个定向平面 P_1'（具有重数），且 $\mathbf{C}_2'$ 含有一个定向平面 P_2'（具有重数），因此 P_1' 和 P_2' 均不与 $\{w=0\}$ 重合。

由此，[13],、P_1'和 P_2'都必须相对于某个正交复结构 J'是正向 J'-全纯的。由于 $\{w=0\}$ 是唯一一个相对于 J 和J都正向全纯的平面，我们知道 $J'\neq J$和 $J'\neq J$。因此，J'必定是由 J 关于 P_1'作实反射得到的，而 J则是由 P_2'作实反射得到的。但是，J 是保定向的，而J 是反定向的，这意味着 J' 必须既保定向又反定向，矛盾。

由我们的断言可得

$$\begin{aligned}\operatorname{spt}T_1\cap\operatorname{spt}T_2\subset&\{(z,w):p_1(z,w)=(\partial_zp_1)(z,w)=0\}\\&\cup\{(z,\overline{w}):p_2(z,w)=(\partial_zp_2)(z,w)=0\},\end{aligned}$$

因此，由贝祖定理可得

$$\#\operatorname{spt}T_1\cap\operatorname{spt}T_2\leq d_1(d_1-1)+d_2(d_2-1).$$

至此，情形（3）得以完备。

结合情形（1）、（2）、（3）以及界（5），我们得到

$$\begin{aligned}\#\operatorname{sing} T &\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j\leq \ell, i\neq j} d_i d_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq \ell+1, i\neq j} d_i d_j + \frac{1}{2}\sum_i (d_i-1)(d_i-2) \\ &\quad + \sum_{i\leq \ell<j} d_i(d_i+1) + d_j(d_j+1) \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j\leq \ell} d_i d_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq \ell+1} d_i d_j + (k-\ell)\sum_{i\leq \ell} d_i^2 + \ell \sum_{j\geq \ell+1} d_j^2 \\ &\leq k\sum_i d_i^2 \leq \Theta^3. \end{aligned}$$

□

推论 *0.9* 的证明。 如果 T 尚非圆锥形，那么根据单调性公式，对所有 x，都有 $\Theta_T(x) < \Theta_T(\infty) = 2$，因此对于每个 $x \in \operatorname{spt} T$，都有 $\Theta_T(x) = 1$。所以，除非 T是重数为二的仿射平面，否则根据阿拉德定理， T 处处正则且重数为一。由此即可推出定理 0.5。□

References

[1] S. X. Chang，二维面积极小整流是经典极小曲面，《美国数学会杂志》**1**（1988年），第4期，699–778页。[2] D. Cheng、C. Li 和 C. Mantoulidis，*R. Schoen* 关于极小子流形讲座的笔记，（2015年）。[3] H. I. Choi 和 R. Schoen，正里奇曲率三维流形中曲面的极小嵌入空间，《数学发明》**81**（1985年），387–394页。[4] Jean-Pierre Demailly，复解析与微分几何，2012年。[5] D. Fischer-Colbrie 和 R. Schoen，非负标量曲率三维流形中完备稳定极小曲面的结构，《纯粹与应用数学通讯》**33**（1980年），第2期，199–211页。[6] R. Hartshorne，代数几何，《数学研究生教材》第52卷，施普林格出版社，1977年。[7] D. Hoffman 和 R. Osserman，广义高斯映射的几何，《美国数学会回忆录》**28**（1980年），第236期。[8] H. B. Lawson 和 J. Simons，关于稳定流及其在实几何与复几何全局问题中的应用，《数学年刊》（第2辑）**98**（1973年），第3期，427–450页。[9] C. De Lellis、E. Spadaro 和 L. Spolaor，正则性理论：2维近似极小流 *III*：放大，《微分几何杂志》**116**（2020年），第1期，125–185页。[10] M.J. Micallef，欧几里得空间中的稳定极小曲面，《微分几何杂志》**19**（1984年），第1期，57–84页。[11] ,关于分支稳定二维极小曲面的注记，《几何与偏微分方程小型会议论文集》，《数学分析中心论文集》，澳大利亚国立大学（1985年），157–162页。

[12] M. J. Micallef 和 B. White，极小曲面与伪全纯曲线中分支点的结构，《数学年刊》（第2辑）**141**（1995年），第1期，35–85页。[13] F. Morgan，关于中二维面积极小曲面的奇异结构，《数学年刊》**261**（1982年），101–110页。[14] D. Mumford，代数几何 *I*：复射影簇，第1版，《数学经典丛书》，柏林施普林格，1995年。[15]T. Rivi`ère，面积极小曲面的下方超等周不等式，《纯粹与应用数学通讯》**57**（2004年），第12期，1673–1685页。[16] L. Simon，几何测度论讲义，《澳大利亚国立大学数学分析中心论文集》第3卷，澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983年。[17] G. Stolzenberg，解析簇的体积、极限与延拓，《数学讲义》，施普林格出版社，1966年。[18] B. White，二维面积极小整流的切锥唯一，《杜克数学杂志》**50**（1983年），第1期，143–160页。

Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame,IN 46556 USA电子邮件地址: nedelen@nd.edu

Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame,IN 46556 USA电子邮件地址: lfrancor@nd.edu

Department of Mathematics, Stanford University, Building 380, Stan-ford, CA 94305, USA电子邮件地址: pminter@stanford.edu