arXiv:2602.03021v1 [math.KT] 3 Feb 2026

范数与厄米K理论

BRIAN SHIN

Abstract. 在过去一个世纪中，上同调运算在同伦论及其应用中发挥了关键作用。谱中的交换代数理论为构造这类运算提供了强有力的框架。本文讨论这一框架的代数几何类比，即动机谱中的 *normed algebras* 理论。具体而言，我们证明，表示极有效厄米K-理论的动机谱 ko 可赋予范数代数结构，并且定向映射 MSL →ko 保持这一结构。关键步骤是证明动机无限环空间机器与范数相容。

Contents

1. 引言 1
2. 动机同伦论简述 2
3. 通过对应构造交换幺半群与交换代数 5
4. 动机同伦论中的范数 8
5. 动机无穷循环空间理论 11
6. 范数与转移、K-理论与协边 15
参考文献 16

1. Introduction

乘法上同调理论在经典同伦论中占据核心地位。在条件良好的情况下，表示乘法上同调理论的谱带有一种高度结构化的乘法，称为交换（即，$\mathbb{E}_\infty$）代数结构。在上同调理论的层面，这种结构体现为幂运算。例如，表示以 $\mathbb{F}_p$ 系数的普通上同调的谱 $H\mathbb{F}_p$ 具有交换代数结构，而相应的幂运算可识别为 Steenrod 运算。自同伦论诞生之初，这些运算便一直是同伦论研究与应用的基础。

在动机同伦论中，谱中的交换代数所扮演的角色由范数代数在动机谱中所承担，其由 Bachmann–Hoyois 在 [BH21]中定义。它们是配备了乘法的动机谱，这些乘法在某种将于本文稍后精确说明的意义上“比交换更交换”。（见第4节。）范数代数支撑一套幂运算理论，其丰富程度显著高于来自交换代数的类似理论。特别地，所得理论已足够丰富，足以恢复 Voevodsky 的动机 Steenrod 运算（见 [BH21，例 7.25]）。这些

Date：2026年2月4日。

幂运算在 Voevodsky、Rost 及其他人解决 Milnor 猜想与 Bloch–Kato 猜想的过程中至关重要，这些猜想将动机上同调与 étale 上同调联系起来。

本文旨在讨论以下定理。这里，我们用 ko_S 表示代表非常有效厄米K-理论的动机谱。这是普通谱 ko 的动机类比；普通谱 ko 代表连通实拓扑 K-理论。特别地，它是一种不承认陈类理论的上同调理论，因此可用于探测动机同伦论中的有趣现象。

定理 1.1 ([Shi24])**.** 设 S 是一个拟紧拟分离概形。动机谱 $\mathrm{ko}_S \in \mathcal{SH}(S)$ 具有范数代数结构。事实上，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MSL}_S & \longrightarrow & \mathrm{ko}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{MGL}_S & \longrightarrow & \mathrm{kgl}_S \end{array}$$

可以细化为 $\mathcal{SH}(S)$中的范数代数图表。

提纲。 我们先在第 2节简要概述动机同伦论。为引出范数代数理论，我们在第 3 节稍作迂回，重新阐述交换（即， $\mathbb{E}_\infty$）代数理论。遵循 [BH21], ，我们在第 4节深入探讨范数代数理论；在那里，我们特别指出证明定理 4.14时遇到的主要困难（张力 1.1）。克服张力 4.14的主要工具是 [EHKSY21], 中的动机无穷循环空间理论，我们将在第 5节回顾该理论。第 6 节专门用于证明定理1.1。

约定。 本文中，所有概形均假定为 $\mathbb{Z}$上的拟紧且拟分离概形，所有光滑态射均假定为有限表示。给定一个概形 S，我们将 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 记为光滑 S-概形范畴。我们将使用 ∞-范畴框架。我们将 ∞-群胚称为 anima，并将 $\mathcal{A}\mathrm{ni}$记为 anima 的 ∞-范畴。

致谢。 感谢 IAS/Park City Mathematics Institute 组织 2024年届活动，为我们带来了非凡的体验。我们尤其感谢 Marc Levine 邀请我们在该届活动中作报告并撰写本文。我们衷心感谢 Tom Bachmann、Elden Elmanto、Jeremiah Heller、Marc Hoyois 和 Denis Nardin，感谢他们就本文讨论的工作与我们进行了宝贵的交流。我们也感谢匿名审稿人，其意见极大地改善了本文的阐述。

2. A Brief Tour of Motivic Homotopy Theory

记号 2.1。 设 S 为一个概形，并在本文余下部分固定此概形。

简而言之，动机同伦论背后的思想是：用光滑的 S-概形取代光滑流形，从而构建同伦论。实直线 $\mathbb{R}$ 在其中的作用，则由仿射直线 $\mathbb{A}^1_S$承担。

定义 2.2. S 上的动机空间是一个 Nisnevich 层

$$F : \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}$$

使得对所有 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$， $F(X) \xrightarrow{\simeq} F(X \times_S \mathbb{A}^1_S)$。我们将用 $\mathcal{H}(S) \subseteq \mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 表示由 S 上的动机空间张成的满子范畴。

包含 $\mathcal{H}(S) \subseteq \mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 存在一个可达左伴随 $\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}$，称为动机局部化。特别地，$\infty$-范畴 $\mathcal{H}(S)$ 是可呈现的，并且任意预层 $F\colon \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}$，无论是常值的还是可表的，都会产生一个动机空间 $\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}F \in \mathcal{H}(S)$。当上下文清楚时，我们会省略记号中的 $\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}$。

注 2.3。如果采用上述定义，并将 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 替换为光滑流形范畴，将尼斯涅维奇拓扑替换为开覆盖拓扑，并将 $\mathbb{A}^1_S$ 替换为 $\mathbb{R}$，那么就能得到通常的 anima 的 ∞-范畴 $\mathcal{A}\mathrm{ni}$。

注 2.4。尼斯涅维奇拓扑介于扎里斯基拓扑与 ´étale 拓扑之间，这些拓扑对于熟悉代数几何的读者或许更为熟悉。原则上，可以针对任何想要的拓扑定义动机空间的一个版本。然而，尼斯涅维奇拓扑有几个突出之处。首先，它是使莫雷尔–沃埃沃茨基局部化定理 [MV99，第 3 节，定理 2。21]（也称为粘合）成立的最粗拓扑。这是对正合列的极大推广

$$\mathrm{CH}_n(Z) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}_n(X) \to \mathrm{CH}_n(X \smallsetminus Z) \to 0$$

周群，其中 $i\colon\ Z \to X$ 是簇的一个闭浸入。局部化定理是莫雷尔–沃埃沃茨基理论的基础性结果，也是这一背景下六函子形式的关键要素之一。关于这一点的更多内容，请参见 [Ayo07], [CD19], 和 [Hoy17]。

采用尼斯涅维奇拓扑的另一个原因是，它是使代数 K 理论满足下降的最精细拓扑。我们特别强调，´étale 拓扑往往过于精细，不适用于动机同伦论。这一点之后会给我们带来麻烦（见张力4.14）。

以 ∞为底的 $\mathcal{H}(S)_*$ 尖点动机空间范畴也是可呈示的。更好的是，我们在 $\mathcal{H}(S)_*$ 上有一个对称幺半结构，称为楔积，其特征由以下两点唯一确定：(1) 它分别在每个变量上保持余极限；(2) 对所有 $X,\ Y \in \mathcal{H}(S)$，都有 $X_+ \otimes Y_+ \cong (X \times_S Y)_+$。

练习 2.5。证明在 $\mathcal{H}(S)_*$中存在等价 $S^1 \otimes (\mathbb{A}^1_S \smallsetminus 0) \ \cong \mathbb{P}^1_S$。

定义 2.6。对于 $X \in \mathcal{H}(S)_*$，我们定义 $\Omega_{\mathbb{P}}X = \mathrm{Hom}_*(\mathbb{P}^1_S,\ X)$。这是 $\mathbb{P}^1$-环空间 X。

定义 2.7。一个在 E 上 S 的动机谱由以下组成

- 一列 $E_0,\ E_1,\ E_2,\ \ldots \in \mathcal{H}(S)_*$ 带基点动机空间，以及
- 一列等价 $E_i \xrightarrow{\simeq} \Omega_{\mathbb{P}}E_{i+1},\ i \in \mathbb{N}$,

我们将 E_0 称为 E的动机无限环空间，并记作 $\Omega^\infty_{\mathbb{P}}E$。在 S 上的动机谱可以组织成一个 ∞-范畴，记作 $\mathcal{SH}(S)$。

函子 $\Omega^\infty_{\mathbb{P}}\colon\ \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{H}(S)_*$ 有一个左伴随 $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}}\colon\ \mathcal{H}(S)_* \to \mathcal{SH}(S)$。事实上，函子 $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}}$将 $\mathcal{SH}(S)$呈现为从 $\mathcal{H}(S)_*$ 出发，通过在楔积下求逆 $\mathbb{P}^1_S$ 而得到的可呈示对称幺半 ∞-范畴。关于在可呈示对称幺半∞-范畴中求逆对象的更多细节，见 [Rob15，第 2 节。1] 和[Hoy17，第 6 节。1]。注意，在 $\mathcal{H}(S)_*$ 中，等价 $\mathbb{P}^1_S \cong S^1 \otimes (\mathbb{A}^1_S \smallsetminus 0)$蕴含 $\mathcal{SH}(S)$是稳定的。

发展动机同伦论的最初动机之一，是建立一个框架，使光滑簇的代数 K 理论能够由同伦论谱的代数几何版本表示。事实上，这可以如下实现。

例 2.8。 对于 $X \in \mathcal{S}$，记 $\mathcal{V}\mathrm{ect}(X)$ 为 X上向量丛的 anima。这是关于直和运算的交换幺半群。我们定义 K: $\mathcal{S}\mathrm{ch}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}_*$ 为预层 $X \mapsto \mathcal{V}\mathrm{ect}(X)^{\mathrm{gp}}$的扎里斯基层化，其中 $(-)^{\mathrm{gp}}$ 表示群完备化函子。关于群完备化的更多内容，参见 [GGN16] 。anima $\mathrm{K}(X)$ 称为代数 K-理论 *anima* 的 X。

现在我们定义一个动机谱 $\mathrm{KGL}_S \in \mathcal{SH}(S)$，它表示光滑 S-概形的代数 K 理论（的动机局部化）。为简化叙述，我们将重点讨论 S 正则的情形。（一般情形见注 2.10。）令 $\mathrm{K}_S : \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}_*$to 为 K 沿 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S \to \mathcal{S}\mathrm{ch}$ 的限制。 S 的正则性意味着 K_S 是 S 上的一个（带基点）动机空间。 $\mathbb{P}^1_S$ 上的典范线丛 $\mathcal{O}(1)$ 给出一个典范元素$\beta \in (\Omega_{\mathbb{P}}\mathrm{K}_S)(S)$，称为 Bott 元。利用射影丛公式可知，乘以 β 会诱导一个等价 $\mathrm{K}_S \xrightarrow{\simeq} \Omega_{\mathbb{P}}\mathrm{K}_S$。因此，我们可以定义一个周期动机谱

$$\mathrm{KGL}_S = (\mathrm{K}_S, \mathrm{K}_S, \ldots) \in \mathcal{SH}(S).$$

这是 代数 K-理论谱。

代数 K 理论的一个重要变体是*Grothendieck–Witt* 理论，也称为厄米 K-理论。这是代数 K 理论的一种形式，研究配备非退化对称双线性型的向量丛。关于 Grothendieck–Witt 理论的更多内容，可参阅 [Hor05],[Sch17], [HJNY22],和 [CHN24] 。本文的叙述主要遵循 [HJNY22第 7]节。

例 2.9。 对于 $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}$，我们用 $\mathcal{V}\mathrm{ect}^{\mathrm{sym}}(X)$ 表示 X 上配备非退化对称双线性型的向量丛所构成的 anima。它在正交直和运算下构成一个交换幺半群。我们将 $\mathrm{GW}^s : \mathcal{S}\mathrm{ch}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}_*$ 定义为预层 $X \mapsto \mathcal{V}\mathrm{ect}^{\mathrm{sym}}(X)^{\mathrm{gp}}$ 的扎里斯基层化。anima $\mathrm{GW}^s(X)$ 称为 X 上的对称 *Grothendieck–Witt* 理论 *anima* 。

现在我们定义一个动机谱 $\mathrm{KO}_S \in \mathcal{SH}(S)$，它表示光滑 S-概形上的对称 Grothendieck–Witt 理论（的动机局部化）。这里我们着重讨论 S 正则且满足 $2 \in \mathcal{O}(S)^\times$ 的情形。（一般情形见注 2.10 和注 2.11。）令 $\mathrm{GW}^s_S : \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}_*$ 为 GW^s 沿 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S \to \mathcal{S}\mathrm{ch}$ 的限制。利用 S 的正则性，可以证明 GW^s_S 是 S 上的一个（带基点）动机空间。存在一个典范元素 $\tilde{\beta} \in (\Omega^4_{\mathbb{P}}\mathrm{GW}^s_S)(S)$，称为厄米 Bott 元。乘以 $\tilde{\beta}$ 可诱导等价 $\mathrm{GW}^s_S \xrightarrow{\simeq} \Omega^4_{\mathbb{P}}\mathrm{GW}^s_S$。因此，我们可以定义一个 4 周期动机谱

$$\mathrm{KO}_S = (\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}\mathrm{GW}^s_S, \Omega^3_{\mathbb{P}}\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}\mathrm{GW}^s_S, \ldots, \mathrm{L}_{\mathrm{mot}}\mathrm{GW}^s_S, \Omega^3_{\mathbb{P}}\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}\mathrm{GW}^s_S, \ldots) \in \mathcal{SH}(S)$$

其中每第四个空间都是 $\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}\mathrm{GW}^s_S$。这就是厄米K理论谱。

注 2.10. 当 S 不假设为正则时，预层 K_S 和 GW^s_S 可能不是动机空间。尽管如此，通过处处应用 L_S 并作适当修改，可以定义动机谱 KGL_S 和 KO_S 。详情请参见 $_{\mathrm{mot}}$ HJNY22，其中 7] 讨论了 KO 的情形$_S$。为强调这一点，所得动机谱通常称为同伦 代数 K 理论谱和同伦厄米 K 理论谱。

注 2.11。 在 [Hor05], [Sch17],和 [HJNY22],中，人们普遍假设 2 在基概形上可逆。事实上，当 2 不可逆时，对称型理论会复杂得多。在 Calm [CDHHL+23] es–Dotto–Harpaz–Hebestreit–Land–Moi–Nardin–Nikolaus–Steimle 的最新工作中，不具备这一假设的情形已经变得更加

清晰。特别是，我们现在已经能够完全去除这一假设。参见 [HJNY22，注 7。3] 以及 [CHN24]。

注记 2.12. 可以将动机谱 KGL_S 和 KO_S 视为普通同伦论中拓扑 K-理论谱 KU 和 KO 的动机类比。事实上，普通同伦论中的许多谱在动机世界中都有对应物。[1] 下表列出了一些简要示例：左侧为普通谱，右侧为其动机类比。

$\mathcal{S}\mathrm{pt}$		$\mathcal{SH}(S)$	
$\mathrm{H}\mathbb{Z}$	普通上同调	$\mathrm{H}\mathbb{Z}_S$	动机上同调
KU	复拓扑 K-理论	KGL_S	代数 K 理论
KO	实拓扑K理论	KO_S	厄米K理论
MU	复配边	MGL_S	代数配边
MSU	定向复配边	MSL_S	定向代数配边

读者可参阅 [BEM25] 以进一步了解动机上同调，[2] 以及 [BH21的第 16]节，以进一步了解配边谱。

着眼于无穷循环空间的识别，我们引入以下概念；它是普通谱中连通性的动机类比。

定义 2.13。 域 S 上的动机谱，如果属于满子范畴$\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{veff}} \subseteq \mathcal{SH}(S)$，并且该满子范畴由 $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}} X_+$ 以及具有 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 的对象在余极限和延拓下生成，则称其为非常有效[3]

根据 [Lur17，命题 1.4.4，11], 包含 $\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{veff}} \subseteq \mathcal{SH}(S)$具有一个右伴随，它将一个动机谱映射为其非常有效覆盖。我们将 $\mathrm{KGL}S$ 和 ko_S 分别记作 KGL_S 和 KO_S的非常有效覆盖。动机谱 $\mathrm{H}\mathbb{Z}_S$、MGL_S和 MSL_S 已经是非常有效的。

由于 $\mathcal{SH}(S)$ 是稳定且可呈示对称幺半的，它为进行《高等代数》提供了极佳的环境。例如，迄今引入的所有动机谱实际上都是 $\mathcal{SH}(S)$ 中的交换代数，因而它们所表示的广义上同调理论是乘法的。

注 2.14. 注意，对应 $S \mapsto \mathcal{SH}(S)$ 实际上可以做成一个函子$\mathcal{SH}$： $\mathcal{S}\mathrm{ch}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{CM}\mathrm{on}(\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)$。如果 $f\colon S \to T$ 是一个概形态射，则拉回函子$f^*\colon \mathcal{SH}(T) \to \mathcal{SH}(S)$ 由以下事实刻画：（1）它是对称幺半的，（2）它保持所有余极限，并且（3）我们有 $f^*(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}} Y_+) \cong \Sigma^\infty_{\mathbb{P}}(Y_S)$+ 对所有 $Y \in \mathcal{S}\mathrm{m}_T$。此外，我们有 $\mathcal{SH}(S_1 \sqcup S_2) \cong \mathcal{SH}(S_1) \times \mathcal{SH}(S_2)$ 对所有 $S_1,\ S_2 \in \mathcal{S}\mathrm{ch}$。

3. Commutative Monoids and Commutative Algebras via Correspondences

作为范数幺半结构理论的热身，让我们思考一个更基本的情形。设 $F\colon \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}$ 为一个预层。赋予 F 交换幺半群结构意味着什么？更确切地说，我们考虑如下问题：

---

[1]这些动机谱与其“通常”对应物之间的精确关系是，当S 是一个子域的谱，该子域属于 $\mathbb{C}$，则存在一个函子 $r\colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{S}\mathrm{pt}$，称为 *complex Betti realization*，它将前者映到后者。[2]特别地，我们将 $\mathrm{H}\mathbb{Z}_S$ 理解为 KGL 的零切片$_S$ 在本文中。[3]事实上，动机同伦论中有若干概念可被视为连通性的类似物。值得注意的例子包括 *homotopy connectivity* 与 *effectivity*。参见 [Bac17] 与 [BH21，附录 B] 以了解这些概念的更多内容。每种概念都有其用途，但非常有效性是唯一将在本文中发挥作用的概念。

问题 3.1. 沿遗忘函子 $\mathcal{CM}\mathrm{on}(\mathcal{A}\mathrm{ni}) \to \mathcal{A}\mathrm{ni}$ 提升 F 意味着什么?

这样的提升包含大量数据。例如，对每个 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 以及每个自然数 n，我们都会有一个 anima 的映射

$$\mu_n : F(X)^{\times n} \to F(X)$$

由 n 元乘法给出。其余数据将编码乘法的相容性，例如幺元性、结合性与交换性。

如果 F 保持有限积（例如，我们可以有 F 是扎里斯基拓扑上的层），那么我们可以将 n 元乘法改写为

$$F\left(X^{\sqcup n}\right) \cong F(X)^{\times n} \xrightarrow{\mu_n} F(X)$$

并且我们可以将其视为预层 F 的一种额外函子性。也就是说，我们可以将其视为沿 ***Fold*** （亦称 余对角）映射 $\nabla : X^{\sqcup n} \to X$ 的一种推前。

我们很快会看到， F 上的交换幺半群结构可以等同于这种额外的函子性。为了编码这种额外的函子性，我们被引导去考虑 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 中的 对应（亦称跨度）。

定义 3.2。 令 $\mathcal{F}\mathrm{old}$ 表示 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 中可写成有限个折叠映射 $X^{\sqcup n} \to X$ 的有限余积的态射类。我们将 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S) = \mathcal{S}\mathrm{pan}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S, \mathcal{F}\mathrm{old}, \textit{all})$ 记为 -范畴，其对象为 ***old***-对应，并且属于 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$。 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 的对象与 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 的对象相同，而 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中从 X 到 Y 的态射是对应（也称为跨度）

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{X} & & \\ & \overset{p}{\swarrow} & & \overset{f}{\searrow} & \\ X & & & & Y \end{array}$$

in $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 其中 p 属于 $\mathcal{F}\mathrm{old}$。对应的复合由取拉回确定 s.

关于 [Bar17，第 5]节，我们参考其 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 作为完全 Segal 空间的构造。该处采用的记号为 $A^{\mathit{eff}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S, \mathcal{F}\mathrm{old}, \mathrm{all})$，并称其为有效 ***Burnside*** 范畴。

注 3.3。 注意， $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中的每个态射都存在一个分解

$$\left(\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{X} & & \\ & \overset{p}{\swarrow} & & \overset{f}{\searrow} & \\ X & & & & Y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccccc} & & \widetilde{X} & & & & \widetilde{X} & & \\ & \overset{p}{\swarrow} & & \overset{\mathrm{id}}{\searrow} & & \overset{\mathrm{id}}{\swarrow} & & \overset{f}{\searrow} & \\ X & & & & \widetilde{X} & & & & Y \end{array} \right)$$

分解为一个“反向态射”后接一个“正向”态射。事实上，这种分解在本质上是唯一的。因此，我们可以将函子 $F : \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}$ 视为由以下内容组成:

- 对每个 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$，一个 anima $F(X) \in \mathcal{A}\mathrm{ni}$,
- 对每个态射 $f : X \to Y$ in $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$，一个拉回态射 $f^* : F(Y) \to F(X)$, ~ ~
- 对每个态射 $p : X \to X$ in $\mathcal{F}\mathrm{old}$，一个推前态射 $p_\otimes : F(X) \to F(X)$。

此外，还附带有证明这些映射相容性的数据。

总之，我们可以将 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 上的预层视为 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 上的预层，并赋予其沿 $\mathcal{F}\mathrm{old}$ 中映射的一些额外协变函子性。我们可以将 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 视为 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中由“向前”态射组成的宽子范畴。沿包含 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S \to \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 作限制，会遗忘这些额外的协变函子性。

练习 3.4. 证明函子 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S \to \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 保持有限余积。由此可得， $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 上的预层保持有限积，当且仅当其到 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 的限制也保持有限积。

我们现在将如下断言形式化：在非常温和的条件下，交换幺半群结构可以编码为额外的函子性。

命题 3.5 （见 [BH21，命题 C.5]）。设 D 为一个 ∞-范畴，具有有限积，并设 $F : \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to D$ 为一个保持有限积的函子。存在一个等价

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & & \mathcal{C}\mathcal{M}\mathrm{on}(D) \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} & \xrightarrow[F]{} & D \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{F} & D \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} & & \end{array} \right\}$$

介于沿遗忘函子 $\mathcal{C}\mathcal{M}\mathrm{on}(D) \to D$ 的提升与沿包含$\mathcal{S}\mathrm{m}_S \to \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$的延拓之间。

换言之，在 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$上的预层这一语境中，我们可以把代数结构等同于额外的函子性。这一主题将在本文中反复出现。

基于上述讨论，我们给出如下内容：

定义 3.6. 在 S 上的对称幺半 ∞-范畴是一个函子 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ ，它保持有限积。

例 3.7. 利用命题3.5 和注 2.14，我们可以通过一个扩张来描述 $\mathcal{SH}(X)$ 上的楔积，其中 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 属于

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathcal{SH}} & \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty . \\ \downarrow & \nearrow_{\mathcal{SH}} & \\ \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} & & \end{array}$$

由此得到的函子是一个在 S 上的对称幺半 ∞-范畴。

给定一个对称幺半 ∞-范畴 $T : \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ ，它定义在 S 上，我们通常用以下记号表示

$$\begin{aligned} X &\mapsto T(X) \\ \left(Y \xleftarrow{f} X\right) &\mapsto \left(T(Y) \xrightarrow{f^*} T(X)\right) \\ \left(\widetilde{X} \xrightarrow{p} X\right) &\mapsto \left(T(\widetilde{X}) \xrightarrow{p_\otimes} T(X)\right) \end{aligned}$$

分别表示 T 对 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中对象、正向态射和反向态射的作用。

练习 3.8. 设 $T : \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是一个定义在 S 上的对称幺半 ∞-范畴。设 X 是一个光滑 S-概形，设 $n \geq 0$ 是一个自然数，并考虑折叠映射 $\nabla : X^{\sqcup n} \to X$。证明

$$\nabla_\otimes \nabla^*(E) \cong E^{\otimes n}$$

对所有 $E \in T(X)$ 均成立。

我们也可以用 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 来重新表述交换代数。具体细节稍显技术性，因此这里仅作概述。

定义 3.9。设 $T\colon \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是一个位于 S 上的对称幺半 ∞-范畴。粗略地说，函子 $T\colon \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的一个截面 E（即与之关联的余笛卡尔纤维化的截面）由以下内容组成

- 对于每个 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$，一个对象 $E_X \in T(X)$，
- 对于每个态射 $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$，一个态射 $f^\sharp\colon f^*(E_Y) \to E_X$，以及~
- 对于每个态射 $p\colon X \to X$ in $\mathcal{F}\mathrm{old}$，一个态射 $\mu_p\colon p_\otimes(E_{\widetilde{X}}) \to E_X$。

此外还有更多数据，用于编码无限相容性层级。

命题 3.10。设 $T\colon \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是一个 *sobre* S的对称幺半 ∞-范畴。两者之间存在一个等价

(1) T中的交换代数(S)，以及(2) T 的截面 E，满足 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$，使得对于每个映射 $f\colon X \to Y$（属于$\mathcal{S}\mathrm{m}_S$），态射 $f^\sharp\colon f^*(E_Y) \to E_X$都是等价。

为说明这一思路，设 E 是满足命题 3.10 的条件 (2) 的一个截面。~若 $p : X \to X$ 是折叠映射 $X^{\sqcup n} \to X$，则我们有一个态射

$$(E_X)^{\otimes n} \cong p_\otimes p^*(E_X) \cong p_\otimes(E_{\widetilde{X}}) \xrightarrow{\mu_p} E_X.$$

这些给出了在 E_X 上交换代数结构的 n 元乘法映射。事实上，由于 S 是 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 中的终对象，我们看到每个 $E_X \in \mathcal{CA}\mathrm{lg}(T(X))$ 都是沿结构映射 $X \to S$ 对 $E_S \in \mathcal{CA}\mathrm{lg}(T(S))$ 的拉回。

备注 3.11。以上所有内容均适用于将 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 替换为任意 广延 ∞-范畴 C。参见 [BH21，附录 C]。广延性保证有限余积存在且性质良好。为了定义 ∞-范畴 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(C)$。

4. Norms in Motivic Homotopy Theory

如第1节所述，范数代数理论旨在描述一种乘法运算“比交换还要交换”的代数。既然我们已将交换代数理论重新表述为沿折叠映射的推前，那么我们可以更精确地说明这意味着什么：允许沿更多映射进行推前。

定义 4.1。令 f´et 表示 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 中有限 ´étale 态射的类。我们将$\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S) = \mathcal{S}\mathrm{pan}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S,$ f´et, all) 记为 ∞-范畴，其对象为 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 中的 f´et-对应。

定义 4.2（见 [BH21，定义 6。5]）。一个 范数幺半 ∞-范畴 上的 S 是一个函子 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$，且保有限积。

给定范数幺半 ∞-范畴 $T\colon \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$，我们通常使用以下记号

$$\begin{aligned} X &\mapsto T(X) \\ \left(Y \xleftarrow{f} X\right) &\mapsto \left(T(Y) \xrightarrow{f^*} T(X)\right) \\ \left(\widetilde{X} \xrightarrow{p} X\right) &\mapsto \left(T(\widetilde{X}) \xrightarrow{p_\otimes} T(X)\right) \end{aligned}$$

分别表示 T 在对象、正向态射和反向态射上的作用，其中$\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$。我们将函子 $p_\otimes$ 称为沿有限 ´etale 映射 p的范数 。

注意，折叠映射是有限 ´etale 的，因此我们可以将 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$视为 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 的宽子范畴。因此，范数化幺半结构是对称幺半结构的增强。

注 4.3。更一般地，如果 D 是一个具有有限积的 ∞-范畴，那么我们可以将 D 上对象的一个范数化幺半群 定义为保持有限积的函子 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to D$ 。

注 4.4。“范数幺半”一词源自伽罗瓦理论。设 L/K 是一个域的有限伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G。元素 $x \in L^\times$ 的范数 定义为 $\mathrm{Nm}(x) = \prod_{\sigma\in G} \sigma(x)$。注意，这个乘积属于 $K^\times$，因为它在伽罗瓦作用下保持不变。

范数幺半 ∞-范畴的范数函子应被视为这一思想的广义化和范畴化版本。具体而言，如果 $p : X \to X$ 是一个有限伽罗瓦覆盖（尤其是有限 ´étale），那么范数函子 $p_\otimes$ 应被视为“由伽罗瓦群索引的张量积”。

例 4.5. 考虑函子 $\mathcal{S}\mathrm{m}^{(-)} : \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$，其中

$$X \mapsto \mathcal{S}\mathrm{m}_X$$
$$\left(Y \xleftarrow{f} X\right) \mapsto \left(\mathcal{S}\mathrm{m}_Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{S}\mathrm{m}_X\right).$$

这延拓为一个范数幺半 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{m}^{(-)} : \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$，其中沿有限 ´平展映射 $p : X \to X$ 的 $\widetilde{\ }$ 范数函子由拉回函子 $p^* : \mathcal{S}\mathrm{m}_X \to \mathcal{S}\mathrm{m}\,\tilde{x}$ 的右伴随 $\mathrm{R}p : \mathcal{S}\mathrm{m}_{\widetilde{X}} \to \mathcal{S}\mathrm{m}_X$ 给出，也称为沿 p 的*Weil* 限制 。[4]

练习 4.6. 设 L/K 是域的有限伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G，并设 $\mathrm{Spec}\, B$ 是一个光滑仿射 L-概形。考虑 L-代数

$$\widetilde{A} = \bigotimes_{g\in G} g^* B$$

其中 $g^*B = L \otimes_{L,g} B$ 是 B 沿 $g : L \to L$ 的基变换，且张量积是在 L 上的$\widetilde{\ }$。注意， A 带有由置换张量因子给出的 G 的（半线性！）作用。设 $A = \widetilde{A}^G$ 是在 G 的作用下不动的元素所构成的 k-代数。证明 $\mathrm{Spec}\, A$ 是 $\mathrm{Spec}\ B$ 沿 $\mathrm{Spec}\ L \to \mathrm{Spec}\ K$ 的 Weil 限制。

练习 4.7. 设 X 是一个光滑的 S-概形。验证沿 $\nabla : X \sqcup X \to X$ 的 Weil 限制等价于二元笛卡尔积函子

$$\mathcal{S}\mathrm{m}_X \times \mathcal{S}\mathrm{m}_X \to \mathcal{S}\mathrm{m}_X$$

在识别 $\mathcal{S}\mathrm{m}_{X\sqcup X} \cong \mathcal{S}\mathrm{m}_X \times \mathcal{S}\mathrm{m}_X$下。

命题 4.8 (参见 [BH21，第 6 节。1])。存在一个范数幺半 ∞-范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathcal{SH}} & \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \\ \downarrow & \nearrow_{\mathcal{SH}} & \\ \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} & & \end{array}$$

[4]严格来说， $p^* : \mathcal{S}\mathrm{m}_X \to \mathcal{S}\mathrm{m}\tilde{x}$ 的右伴随在一般情形下实际上并不存在。为解决这一问题，可以选择限制在拟射影概形范围内，或者将理论扩展至允许拟紧拟分离代数空间。第一种方案见 [BH21]。由于每个拟紧拟分离代数空间都存在一个由拟射影概形构成的 Nisnevich 覆盖 [Knu06，第二章，定理 6。4], 从动机同伦论的角度来看，这两种方案都无妨，并且会得到相同的最终结果。

在 S 之上，它扩展了示例 3.7 中的楔积。

~范数函子 $p_{\otimes}: \mathcal{SH}(X) \to \mathcal{SH}(X)$ 对于 $p: X \to X$ 由以下要求本质上刻画：

- 它是对称幺半的，
- 它保留筛余极限，并且
- 对于 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$，我们有 $p_{\otimes}(\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}} X_+) \cong \Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}} \mathrm{R}p(X)_+$。

证明命题4.8的核心思路是注意到，从 $\mathcal{S}\mathrm{m}_X$ 到 $\mathcal{SH}(X)$ 的每一步都与 Weil 限制适当地相容。

我们还有范数幺半结构的代数这一概念。设 $T: \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\text{fét}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是一个定义在 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 上的范数幺半 ∞-范畴。$T: \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\text{fét}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的截面，本质上与函子 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的截面相同，只不过我们对所有有限 étale 映射 $p: X \to X$ 都有 ~ $\mu_p: p_{\otimes} E_{\widetilde{X}} \to E_X$。

定义 4.9（参见 [BH21，定义 7.1]）。设 $T: \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\text{fét}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是一个定义在 S 上的范数幺半 ∞- 范畴。T 上的范数代数是 E 这个截面，它满足：对于 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 中的每个 $f: X \to Y$，$f^\sharp: f^* E_Y \to E_X$ 都是一个等价。我们将 T 上的范数代数构成的 ∞-范畴记作 $\mathcal{NA}\mathrm{lg}(T(S))$。

定理 4.10 ([BH21])**.** 以下动机谱可以提升到 $\mathcal{NA}\mathrm{lg}(\mathcal{SH}(S))$。[5]

(1)动机上同调谱 $\mathrm{H}\mathbb{Z}_S$.(2)代数 K-理论谱 KGL_S 及其非常有效覆盖 kgl_S.(3)代数配边谱 MGL_S 和 MSL_S。

备注 4.11。上文提到的每一种范数代数结构，都需要付出大量工作才能确立。对于 KGL_S，这需要为 Robalo 的非交换版本构造范数 $\mathcal{SH}$。接下来，通过研究范数与层过滤的相容性，建立 $\mathrm{H}\mathbb{Z}_S$ 上的范数代数结构。最后，对于配边谱，这需要仔细分析 Thom 构造的乘法性质。

一般来说，构造范数幺半 ∞-范畴和范数代数需要一些非平凡的工作。特别是，如何将给定的对称幺半 ∞-范畴扩展为 S 范数幺半范畴，或如何将交换代数扩展为范数代数，往往都完全不明显。然而，有一种情形下，这类延拓很容易实现。

口号 4.12。在满足有限 *´etale* 下降的情况下，对称幺半结构会自动 升级为范数幺半结构。

更准确地说，我们有如下结论：

命题 4.13（见 [BH21，命题 C。11]）。设 D 是一个可呈现的 ∞-范畴，并设 $F: \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} \to D$ 是一个对有限 *´etale* 拓扑满足下降的预层。那么存在一个等价

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{F} & D \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} & & \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathrm{m}_S^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{F} & D \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\text{fét}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} & & \end{array} \right\}$$

[5]我们提醒读者，我们将 $\mathrm{H}\mathbb{Z}_S$ 取为 KGL 的零切片 $_S$。参见注记 2.12。

在 F 上的对称幺半结构与 F上的范数幺半结构之间。

关键思想是，有限 ´étale 映射就是那些局部（沿有限 ´étale）而言是$\mathcal{F}$旧的映射。对于在有限 ´étale 下降情形下将交换代数提升为范数代数，也有类似的结论，但遗憾的是，要精确表述会稍微复杂一些。具体表述见 [BH21，推论 C16]。

这引出了动机同伦论中范数幺半结构的基本张力。

张力 4.14。对于具有有限 *´étale* 下降的不变量，将交换代数结构提升为范数代数结构很容易。然而，来自动机同伦论的不变量通常不具有这种下降性质。

我们指出，预层满足 ´étale 下降，当且仅当它同时满足有限 ´étale 下降和 Nisnevich 下降。关于谱代数几何背景下的类似表述，参见 [Lur18，定理 B.6.4。1] 。

人们或许希望在某些值得关注的情形下，能找到解决张力4.14的方法。如备注 4.11所述，此类方法已有若干种，详见 [BH21]。我们将在下文看到，动机无穷循环空间理论提供了另一种此类方法。这将是我们证明定理 1.1的主要工具。

5. Motivic Infinite Loop Space Theory

经典的无穷循环空间识别原理如下：

定理 5.1 (识别原理， [BV68], [May72], [Seg74])。 以下结论成立。

(1) 函子 $\Omega^\infty: \mathcal{S}\mathrm{pt} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}_*$ 存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{CM}\mathrm{on}(\mathcal{A}\mathrm{ni}) \\ & \overset{\Omega^\infty}{\nearrow} & \downarrow \\ \mathcal{S}\mathrm{pt} & \xrightarrow[\Omega^\infty]{} & \mathcal{A}\mathrm{ni}_* \end{array}$$

(2)提升后的函子 Ω^∞ 参与一个伴随

$$\mathrm{B}^\infty : \mathcal{CM}\mathrm{on}(\mathcal{A}\mathrm{ni}) \rightleftarrows \mathcal{S}\mathrm{pt} : \Omega^\infty$$

其中左伴随 B^∞ 是（强）对称幺半的。

(3) 伴随 $\mathrm{B}^\infty \dashv \Omega^\infty$ 限制为一个对称幺半等价

$$\mathcal{CM}\mathrm{on}(\mathcal{A}\mathrm{ni})^{\mathrm{gp}} \cong \mathcal{S}\mathrm{pt}_{\geq 0}$$

介于类群交换幺半群与连通谱之间。

换言之，一大类谱可以与配备交换幺半群结构的 anima 等同起来。上述内容的动机类比可以表述为：“一大类适当的动机谱可以与配备某种代数结构的动机空间等同起来。”事实证明，交换幺半群的恰当替代是带有框架转移的动机空间。

定义 5.2 （参见 [EHKSY21，第 2.3 节与第 4]）。设 p： $X \to X$ 是 S-概形的有限合成形态。所谓 框架 （ p 的）是如下等价： $[\mathrm{L}_p] \cong 0$ ，它在代数 K-理论 anima K(X) （ X的）中。这里，我们将 L_p 记为 p的余切复形。

设 S 为一个概形。我们将 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 记为对称幺半 ∞-范畴，即标架对应。对象是光滑 S-概形，而从 X 到 Y 的态射是一个对应

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{X} & & \\ & \overset{p}{\swarrow} & & \overset{f}{\searrow} & \\ X & & & & Y \end{array}$$

S概形，其中 p 是有限syntomic，并配备框架 $\alpha : [\mathrm{L}_p] \cong 0$。 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中的张量积是光滑 S 概形的笛卡尔积。

注 5.3。注意，有限syntomic映射是有限 étale 当且仅当其余切复形是平凡的。因此，可以将标架映射理解为可能比有限 étale 更差、但仍以受控方式表现的映射。

例 5.4。回顾（[Sta26，标签 0FKY]），态射 $p\colon\ X \to X$ 是有限syntomic，当且仅当在目标上作 Zariski 局部化后，它可以写成如下复合：

$$\operatorname{Spec} A/I \xrightarrow{i} \operatorname{Spec} A \xrightarrow{q} \operatorname{Spec} R$$

其中 $A = R[x_1, \ldots, x_r]$ 是 R上的多项式代数，而 $I \subseteq A$ 由正则序列 f_1、.....、 $f_r \in A$生成。给定这样的分解，我们可以将余切复形 L_p 表示为一个两项复形

$$I/I^2 = \mathcal{N}_i \xrightarrow{\delta} i^*\Omega_q \cong (A/I)\{dx_1, \ldots, dx_r\}$$

其中 $i^*\Omega_q$ 处于零次，而 δ 充当

$$g + I^2 \mapsto \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} + I \right) dx_i.$$

注意， p 是有限 ´étale 当且仅当 δ 是一个同构。无论如何，正则序列 $f_1, \ldots, f_r$ 的选择确定了 $\mathcal{N}_i$的一组基：它由 A/I 上的 $f_i + I^2$、$i = 1, \ldots, r$自由生成。因此，我们得到等价

$$\begin{aligned} [\mathrm{L}_p] &\cong [i^*\Omega_q] - [\mathcal{N}_i] \\ &\cong r[\mathcal{O}] - r[\mathcal{O}] \\ &\cong 0 \end{aligned}$$

在代数 K 理论 anima K(Spec A/I) 中。总之，正则序列$f_1, \ldots, f_r$的选择确定了 p的一个框架：Spec $A/I \to$ Spec R。

注 5.5。注意， $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$中的态射并非只是$\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 中满足某个给定性质的对应：框架是需要额外记录的数据。因此，构造 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$比构造$\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathcal{F}\mathrm{old}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$或 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$复杂得多。直观而言，问题在于必须明确框架在带标架对应的复合下如何变化。在 [EHKSY21 第 4],节中，这一问题通过一种称为对应标记函子的簿记工具得以处理。另见 [EHKSY20 附录 B]。

定义 5.6. 一个带标架转移的动机空间在 S 上是一个预层

$$F : \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}$$

其在 $\mathcal{S}\mathrm{m}_S$ 上的限制是定义 2.2 中所说的动机空间。我们将 $\mathcal{H}^{\mathrm{fr}}(S) \subseteq \mathcal{P}\mathrm{Sh}(\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S))$记作由 S 上带框架转移的动机空间所张成的满子范畴。

同样，包含 $\mathcal{H}^{\mathrm{fr}}(S) \subseteq \mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S))$ 存在一个左伴随 $\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}$，称为动机局部化。特别地，$\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 上的任意预层都会导出一个带框架转移的动机空间。

设 $F\colon \mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathrm{ni}$ 是一个预层。我们通常使用以下记号

$$X \mapsto F(X)$$
$$\Big(Y \xleftarrow{f} X\Big) \mapsto \Big(F(Y) \xrightarrow{f^*} F(X)\Big)$$
$$\Big(\widetilde{X} \xrightarrow{p} X, \quad \alpha : [\mathrm{L}_p] \xrightarrow{\simeq} 0\Big) \mapsto \Big(F(\widetilde{X}) \xrightarrow{(p,\alpha)_*} F(X)\Big)$$

表示 F 在$\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 的对象、正向态射和反向态射上的作用。[6] 我们将 $(p,\alpha)_*$ 称为沿框架映射 (转移 p,α)。

例 5.7。对于 $X \in \mathcal{S}\mathrm{m}_S$，我们记作

- $\mathcal{V}\mathrm{ect}_S(X)$ 表示 X ([HJNTY24，第 5] 节）中概形上向量丛的 anima,
- $\mathcal{FS}\mathrm{yn}_S(X)$ 表示 X-概形（[EHKSY20，第 3.3] 节）上有限syntomic对象的 anima,
- $\mathcal{V}\mathrm{ect}_{\mathrm{sym}\ S}(X)$ 上向量丛的 anima（配备非退化对称双线性型）的 X （[HJNY22，第 7] 节），以及
- $\mathcal{FS}\mathrm{yn}_{\mathrm{or}S}(X)$ 上有限syntomic X-概形的 anima，配备定向，即在 X ([EHKSY20，第 3 节 3]）中对偶化层的平凡化。

这些可以排成如下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{FS}\mathrm{yn}_S^{\mathrm{or}} & \longrightarrow & \mathcal{V}\mathrm{ect}_S^{\mathrm{sym}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{FS}\mathrm{yn}_S & \longrightarrow & \mathcal{V}\mathrm{ect}_S \end{array}$$

在 $\mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中的交换代数。$\mathcal{FS}\mathrm{yn}_S$ 和 $\mathcal{FS}\mathrm{yn}_S^{\mathrm{or}}$ 上的交换代数结构来自有限syntomic概形的笛卡尔积，而 $\mathcal{V}\mathrm{ect}_S$ 和 $\mathcal{V}\mathrm{ect}^{\mathrm{sym}}$ 上的交换代数结构则由向量丛的张量积给出。竖直态射是遗忘映射，水平映射则将有限syntomic概形映至其结构层。

我们声称，该图表可以提升为 $\mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S))$ 中交换代数的图表。此处我们仅描述 $\mathcal{V}\mathrm{ect}_S$ 和 $\mathcal{FS}\mathrm{yn}_S^{\mathrm{or}}$ 上的转移，更多细节请参阅上述参考文献。另请参见 [HJNY22，第 10] 节。

设 $p\colon X \to X$ 是有限合成映射，且 $\alpha\colon [\mathrm{L}_p] \cong 0$ 是一个框架。给定这些数据，我们必须指定沿

$$\mathcal{V}\mathrm{ect}_S(\widetilde{X}) \to \mathcal{V}\mathrm{ect}_S(X) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{FS}\mathrm{yn}_S^{\mathrm{or}}(\widetilde{X}) \to \mathcal{FS}\mathrm{yn}_S^{\mathrm{or}}(X)$$

$(p,\ \alpha)$ 的转移。在 $\mathcal{V}\mathrm{ect}_S$ 上，转移由拟凝聚层的推前给出。注意，p 是有限平坦的，因此这种推前实际上会将向量丛映为向量丛。还要注意，这实际上不依赖于框架 α。

在 $\mathcal{FS}\mathrm{yn}_S^{\mathrm{or}}$上的转移只是稍微更复杂一些。注意，行列式$(\mathrm{L}_p) \cong \omega_{\widetilde{X}/X}$。$\widetilde{\ }$（参见 [HJNY22，引理7.1]，以获得这一一般性情形下的参考文献。）设 $q\colon U \to X$ 为有限

[6]注意，在 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中的带标架对应里，处于中间的概形 $\widetilde{X}$ 不要求光滑地映射到 S。因此，$\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 中的态射不一定能分解为先一个反向态射、再一个正向态射的复合。为便于说明，我们将忽略这一技术细节，并继续根据预层对正向态射和反向态射的作用来描述 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)$ 上的预层。

合成上同调，并设 $\phi:\ \omega_{U/X}\cong\mathcal{O}_U$ 为对偶化层的一个平凡化。沿（$p,\ \alpha$）的转移将此送到 $U\overset{q}{\to}\widetilde{X}\overset{p}{\to}X$，并带有定向

$$\omega_{U/X}\cong\omega_{U/\widetilde{X}}\otimes q^*(\omega_{\widetilde{X}/X})\xrightarrow[\phi\otimes\det(\alpha)]{\simeq}\mathcal{O}_U.$$

注意，这取决于框架 α，但只通过行列式。

现在我们可以陈述动机无穷循环空间的识别原理。

定理 5.8 (动机识别原理，[EHKSY21])。设 S 是一个概形。

(1) 函子 $\Omega^\infty_{\mathbb{P}}\colon\mathcal{SH}(S)\to\mathcal{H}(S)_*$ 存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{H}^{\mathrm{fr}}(S) \\ & \overset{\Omega^\infty_{\mathbb{P}}}{\nearrow} & \downarrow \\ \mathcal{SH}(S) & \xrightarrow[\Omega^\infty_{\mathbb{P}}]{} & \mathcal{H}(S)_* \end{array}$$

(2)提升后的函子 $\Omega^\infty_{\mathbb{P}}$参与一个伴随

$$\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}:\mathcal{H}^{\mathrm{fr}}(S)\rightleftarrows\mathcal{SH}(S):\Omega^\infty_{\mathbb{P}}$$

其中，左伴随 $\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}$ 是（强）对称幺半的。

(3) 若 S 是完美域的谱，则伴随 $\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}\dashv\Omega^\infty_{\mathbb{P}}$ 限制为一个对称幺半等价

$$\mathcal{H}^{\mathrm{fr}}(S)^{\mathrm{gp}}\cong\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{veff}}$$

在带框架转移的类群动机空间与非常有效动机谱之间。

定理 5.8在 [EHKSY21]中的证明颇为困难，建立在 Ananyevskiy、Garkusha、Neshitov 和 Panin 的工作之上，相关工作见 [GP21], [GP20], [AGP21], 以及 [GNP21]„ 而这些工作最终又建立在 [Voe01]之上。

注 5.9。我们注意到，定理 5.8 (3) 中对完美域的限制，源于其主要组成部分之一——带标架对应的消去定理 [EHKSY21，定理 3.5。8] 在该定理中，这一限制源于对严格$\mathbb{A}^1$-不变层理论的使用，该理论由 [Mor12]发展。关于消去定理的更多内容，参见 [Bac21] ；关于严格 [Bac24a] -不变层的更多内容，参见 $\mathbb{A}^1$。

对于本文而言，定理5.8 的要点在于，许多感兴趣的动机谱都可通过 $\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}$获得几何描述。

例 5.10。设 S 为一个概形。将 $\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}$应用于例 5.7中的图表（或其动机局部化），可得

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MSL}_S & \longrightarrow & \mathrm{ko}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{MGL}_S & \longrightarrow & \mathrm{kgl}_S \end{array}$$

作为图示于 $\mathcal{CA}\mathrm{lg}(\mathcal{SH}(S))$. 这是综合了来自 [EHKSY20], [HJNTY24],[HJNTY24], 与 [Bac24b]。参见 [HJNY22，定理 10.1 与备注 10。2]以了解综述及更具体的参考文献。（注意，我们可以去掉如下假设：$2\in\mathcal{O}(S)^\times$ 根据[HJNY22，备注 7。3] 以及 [CHN24]。）

备注 5.11. 有趣的是，在动机同伦论中自然出现的加法结构与乘法结构，似乎是借助沿不同类型映射的前推来描述的。框架推前与有限´平展前推之间的差距意味着，就目前而言，尚不清楚是否存在一套良好的动机单位与 Picard 谱理论。

6. Norms and Transfers, K-theory and Cobordism

将前一节与再前一节进行比较，我们不禁要问：

问题 6.1。 动机识别原理是否与范数相容?

我们在 [Shi24]中给出了肯定的回答。

定理 *6.2* （[*Shi*24]） 。赋值 $X \mapsto \mathcal{C}orr^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}m_X)$ 可精化为一个范数幺半∞-范畴 $\mathcal{C}orr^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}m_{(-)})$: $\mathcal{C}orr^{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathcal{S}m_S)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}at_\infty$ *over* S。

备注 6.3. 构造 $\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_{(-)})$ 作为范数幺半 ∞-范畴依然相当技术性，因为需要将框架作为代数 K 理论 anima 中的路径加以追踪。简言之，这个想法可以归结为两项输入。首先，通过 ´étale 下降（见口号 4.12）很容易构造范数结构，而余切复形满足这一性质。其次，标记函子的技术足够稳健，能够克服代数 K 理论本身不满足 ´étale 下降这一事实。

有了这些，下面的结论几乎是显而易见的。

定理 6.4 ([Shi24])**.** 设 S 是一个概形。

(1)赋值

$$X \mapsto \left(\mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_X)) \xrightarrow{\mathrm{L_{mot}}} \mathcal{H}^{\mathrm{fr}}(X) \xrightarrow{\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}} \mathcal{SH}(X)\right)$$

可以细化为一个图表

$$\mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_{(-)})) \xrightarrow{\mathrm{L_{mot}}} \mathcal{H}^{\mathrm{fr}} \xrightarrow{\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}} \mathcal{SH}$$

上的范数幺半 ∞-范畴。特别地，函子$\mathrm{L_{mot}}$ 和 $\mathrm{B}^\infty_{\mathbb{P}}$都保持范数代数结构。

(2) 若 S 是完美域的谱，则存在等价 $\mathcal{N}\mathcal{A}\mathrm{lg}(\mathcal{H}^{\mathrm{fr}}(S)^{\mathrm{gp}}) \cong \mathcal{N}\mathcal{A}\mathrm{lg}(\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{veff}})$。

换言之，当 S 是完美域的谱时，我们可以将 $\mathcal{SH}(S)$ 中的某些范数代数与配备有限 ´étale 范数和框架转移的某些动机空间对应起来。请注意，定理 6.4 (2) 中的完美性假设直接继承自定理5.8 (3)。

最后，我们已经准备好证明主定理。

定理 *1.1* 的证明概要。 再次考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{FS}\mathrm{yn}_S^{\mathrm{or}} & \longrightarrow & \mathcal{V}\mathrm{ect}_S^{\mathrm{sym}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{FS}\mathrm{yn}_S & \longrightarrow & \mathcal{V}\mathrm{ect}_S \end{array}$$

在 $\mathcal{CA}\mathrm{lg}(\mathcal{PS}\mathrm{h}(\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S)))$（见例5.7）。由于该图中的每个预层都满足´étale 下降，口号4.12 告诉我们，这会自动提升为一个由范数

代数构成的 $\mathcal{PSh}(\mathcal{C}\mathrm{orr}^{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}\mathrm{m}_S))$。根据定理6.4 (1)，复合 $\mathrm{B}_{\mathbb{P}}^{\infty}\mathrm{L}_{\mathrm{mot}}$ 保持范数代数结构，因此问题得以解决。□

注6.5。 请注意，我们并未证明实拓扑K理论$_S$ 本身具有范数代数结构。人们或许会希望这一结论成立，因为实拓扑K理论$_S \cong \mathrm{ko}_S[\tilde{\beta}^{-1}]$，其中 $\tilde{\beta}$ 是一个称为厄米 *Bott* 元的特定元素。不幸的是，在范数代数中将元素求逆，并不会得到另一个范数代数。例如，可以证明，η-周期球谱 $\mathbf{1}_S[\eta^{-1}]$不可能是范数代数，尽管球谱 $\mathbf{1}_S$ 是 $\mathcal{SH}(S)$中的初始范数代数。

要证明实拓扑K理论$_S$ 也具有范数结构，或许可以尝试使用 [BH21，命题 12。6]这需要计算厄米 Bott 元的范数。到目前为止，似乎使用 ko_S $\mathrm{B}_S \cong \mathrm{ect}_{\mathbb{P}}^{\infty}\mathcal{V}$计算 ko 的范数$_S^{\mathrm{sym}}$ 最为容易，但从这一角度很难处理厄米 Bott 元。

注6.6。 动机上同调的一个有趣变体是 *Milnor–Witt* 动机共-˜同调，它由一个记作 $\mathrm{H}\tilde{\mathbb{Z}}_S$ 的动机谱表示。这是动机上同调的一种形式，其中代数循环配备了对称双线性型。特别是，它为向量丛的 欧拉类 提供了一个自然的归属空间。有关 H [BCDFØ25]˜ 的更多信息，请参见 $\mathbb{Z}_S$。

文献 [BEM25 第 10] 节证明了，当且仅当 $2 \in \mathcal{O}(\underline{S})^{\times}$（至少在此情形下），$\mathrm{H}\tilde{\mathbb{Z}}_S \cong \pi_0^{\mathrm{eff}}(\tilde{\mathrm{s}}_0\mathrm{ko}_S)$ ×。关于这一记号的详情，请参见[Bac17] 。特别地，结合我们的定理 1.1 与文献 [BH21 第 13]，节的结果˜，我们得出 $\mathrm{H}\tilde{\mathbb{Z}}_S$ 也具有范数代数结构，并且˜典范映射 $\mathrm{ko}_S \to \mathrm{H}\tilde{\mathbb{Z}}_S$ 是范数代数之间的映射。

References

[AGP21] Alexey Ananyevskiy、Grigory Garkusha 和 Ivan Panin。“代数簇框架动机的消去定理”。载于：《数学进展》383（2021），第107681页。[Ayo07] Joseph Ayoub。“格罗滕迪克六种运算与动机世界中的渐逝循环形式体系，I”。载于：Ast ´erisque 314（2007）。[Bac17] Tom Bachmann。“厄米K理论的广义切片”。载于：《拓扑学杂志》10.4（2017），第1124–1144页。[Bac21] Tom Bachmann。“具有有限平坦转移的动机空间的消去定理”。载于：《数学文献》26（2021），第1121–1144页。[Bac24a] Tom Bachmann。“强Aˆ 1-不变层（据F. Morel）”。载于：arXiv预印本 arXiv:2406.11526（2024）。[Bac24b] Tom Bachmann。“Dedekind概形上的实拓扑K理论和KGL的非常有效覆盖”。载于：《欧洲数学会杂志》（2024）。[Bar17] Clark Barwick。“谱Mackey函子与等变代数K理论（I）”。载于：《数学进展》304（2017），第646–727页。 ISSN: 0001-8708.DOI: https : / / doi . org / 10 . 1016 / j . aim . 2016 . 08 . 043. URL: https : // www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870816311434.[BCDFØ25] Tom Bachmann、Baptiste Calm`es、Fr´ed´eric D´eglise、Jean Fasel 和 Paul Østvær。“Milnor–Witt动机”。英文。在：《美国数学会回忆录》311.1572（2025年7月）。[BEM25] Tom Bachmann、Elden Elmanto 和 Matthew Morrow。“概形的$\mathbb{A}^1$-不变动机上同调”。载于：arXiv预印本 arXiv:2508.09915（2025）。[BH21] Tom Bachmann 和 Marc Hoyois。“动机同伦论中的范数”。载于：Asterisque 425（2021年9月）。

[BV68] J. Michael Boardman 和 Rainer M. Vogt。“同伦一切 H-空间”。载于：《美国数学会通报》74.6（1968），第1117–1122页。[CD19] Denis-Charles Cisinski 和 Fr´ed´eric D´eglise。《混合动机三角范畴》。第6卷。施普林格，2019年。[CDHHL+23] Baptiste Calm`es、Emanuele Dotto、Yonatan Harpaz、Fabian Hebestreit、Markus Land、Kristian Moi、Denis Nardin、Thomas Nikolaus 和 Wolfgang Steimle。“稳定 $\infty$-范畴的厄米K理论 I：基础”。载于：《数学精选》29.1（2023），第10页。[CHN24] Baptiste Calm`es、Yonatan Harpaz 和 Denis Nardin。“表示厄米K理论的动机谱”。载于：arXiv预印本 arXiv:2402.15136（2024）。[EHKSY20] Elden Elmanto、Marc Hoyois、Adeel A. Khan、Vladimir Sosnilo 和 Maria Yakerson。“代数配边上的模”。载于：《数学论坛：Pi》8（2020），e14。DOI: 10.1017/fmp.2020.13.[EHKSY21] Elden Elmanto、Marc Hoyois、Adeel A Khan、Vladimir Sosnilo 和 Maria Yakerson。“动机无穷循环空间”。英文。载于：Camb. J. Math. 9.2（2021），第431–549页。[GGN16] David Gepner、Moritz Groth 和 Thomas Nikolaus。“乘法无穷循环空间机器的普适性”。载于：《代数与几何拓扑》15.6（2016），第3107–3153页。[GNP21] Grigory Garkusha、Alexander Neshitov 和 Ivan Panin。“相对动机球的框架动机”。载于：《美国数学会汇刊》374.7（2021），第5131–5161页。[GP20] Grigory Garkusha 和 Ivan Panin。“具有框架转移的同伦不变预层”。载于：《剑桥数学杂志》8.1（2020），第1–94页。[GP21] Grigory Garkusha 和 Ivan Panin。“代数簇的框架动机（据 V. Voevodsky）”。载于：《美国数学会杂志》34.1（2021），第261–313页。[HJNTY24] Marc Hoyois、Joachim Jelisiejew、Denis Nardin、Burt Totaro 和 Maria Yakerson。“无限维仿射空间的希尔伯特概形与代数 K 理论”。载于：《欧洲数学会杂志》27.5（2024），第2037–2071页。[HJNY22] Marc Hoyois、Joachim Jelisiejew、Denis Nardin 和 Maria Yakerson。“通过定向戈伦斯坦代数构造厄米K理论”。载于：Journal f ¨ur die reine und angewandte Mathematik（克雷尔杂志）2022.793（2022），第105–142页。DOI: doi:10.1515/crelle-2022-0063. URL: https://doi.org/10.1515/crelle-2022-0063.[Hor05] Jens Hornbostel。“厄米K理论与维特群的$\mathbb{A}^1$-可表示性”。载于：《拓扑学》44.3（2005），第661–687页。[Hoy17] Marc Hoyois。“等变动机同伦论中的六种运算”。载于：《数学进展》305（2017），第197–279页。[Knu06] Donald Knutson。“代数空间”。载于：《代数空间》。施普林格，2006年，第91–152页。[Lur17] Jacob Lurie。《高等代数》。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/ HA.pdf。2017年9月。

[Lur18] Jacob Lurie。《谱代数几何》。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。2018年2月。[May72] J P May。《迭代环空间的几何》。英文。第1版。《数学讲义》。德国柏林：施普林格，1972年6月。[Mor12] Fabien Morel。《域上的A^1代数拓扑》。第2052卷。施普林格，2012年。[MV99] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky。“概形的A^1同伦论”。载于：《IH´ES数学出版物》90（1999年），第45–143页。[Rob15] Marco Robalo。“K-理论与从动机到非交换动机的桥梁”。载于：《数学进展》269（2015年），第399–550页。ISSN：0001-8708。DOI：https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.10.011。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870814003570。[Sch17] Marco Schlichting。“厄米K理论、导出等价与Karoubi基本定理”。载于：《纯粹与应用代数杂志》221.7（2017年），第1729–1844页。[Seg74] Graeme Segal。“范畴与上同调理论”。载于：《拓扑学》13.3（1974年），第293–312页。ISSN：0040-9383。DOI：https://doi.org/10.1016/0040-9383(74)90022-6。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0040938374900226。[Shi24] BRIAN SHIN。《动机同伦论中的范数与转移》。2024年。arXiv：2305.12684 [math.KT]。URL：https://arxiv.org/abs/2305.12684。[Sta26] Stacks项目作者。《Stacks项目》。https://stacks.math.columbia.edu。2026年。[Voe01] Vladimir Voevodsky。“框架对应的笔记”。载于：未发表（2001年）。