arXiv:2602.03047v1 [math-ph] 3 Feb 2026

高维旋转对称黎兹气体的平衡测度

SUNG-SOO BYUN、PETER J. FORRESTER、SATYA N. MAJUMDAR 和 GREGORY SCHEHR

Abstract. 我们研究维数为 d 、成对相互作用核为$|x-y|^{-s}$的里斯气体在径向对称外场作用下的平衡测度。我们刻画了广泛的禁闭势类别，在这些势下，平衡测度的支撑集为单位球，且具有显式密度。我们的主要贡献是一种逆向构造：从给定的、以半径平方的幂级数表示的径向对称平衡密度出发，确定相应的外势，并建立相应的欧拉–拉格朗日变分条件。证明中的一个关键要素是两个在单位参数处取值的${}_3F_2$ 超几何函数之间的恒等式，这一结果本身也具有独立的研究价值。作为应用，我们确定了与正比于 $(1-|x|^2)^\alpha$, $\alpha>-1$ 的平衡密度相对应的外势，并证明这些势可以用高斯超几何函数 ${}_2F_1$ 表示；当 α 取某些特殊值时，它们可化为多项式。我们还确定了纯幂次外势对应的平衡测度；在对数气体研究中，这类势通常称为 Freud 势或 Mittag–Leffler势，其平衡密度具有显式的 ${}_2F_1$ 表示。此外，我们将这一框架应用于受调和势约束在半空间内的维数为 $d+1$ 的库仑气体。我们推导出一个必要条件：在该条件下，平衡测度的支撑集完全位于维数为 d 的边界超平面上，且诱导密度对应于指数为 $s=d-1$ 的里斯气体。

1. Introduction

长程排斥相互作用在多体系统中起着核心作用，因此在物理学 [16] 和数学 [15, 61, 71, 72]中都引起了广泛关注。当与外部禁闭场相结合时，这类相互作用通常会在热力学极限下产生具有紧支撑、非平凡密度分布以及依赖于相互作用形式的微观结构的平衡构型。这些特征出现在广泛的物理背景中，包括经典等离子体和电解质 [4, 9, 24, 51], 、因禁离子和冷原子气体 [13], , 以及旋转费米子系统和量子霍尔态的有效描述 [20, 28, 58, 67, 73]。

这些系统的统一理论框架由黎兹气体 [70], 提供，它们描述维数 d 中通过形式为 $|x_i-x_j|^{-s}$的排斥性成对势相互作用的 N 个相同粒子，其中 x_i表示粒子的位置。指数 s 决定有效相互作用范围。通过改变 s，黎兹气体在库仑系统（$s=d-2$）、在随机矩阵理论中起核心作用的对数相互作用（$s\to 0$） [14,39,66], 以及更一般的幂律相互作用之间进行插值。相互作用指数 s、空间维数 d与禁闭势之间的相互影响决定了平衡测度的形状及其支撑集的结构，从而提供了一个灵活的框架，用以研究维数和相互作用范围如何影响集体行为。特别地，这些系统会根据相互作用是真正长程的（$s<d$）还是有效短程的（$s>d$）而呈现出定性不同的状态。

尽管黎兹气体的许多一般性质——例如平衡测度的存在性、大偏差原理以及极小化子的定性特征——如今已得到充分理解 [61, 72], , 平衡密度的显式描述仍然稀缺。在一维情形中，近期已取得引人关注的进展，尤其是在物理学文献中：对于调和势 [3], 以及存在附加硬壁的情形 [32, 33,35, 53, 54], , 平衡测度可以显式计算，这往往与最右粒子的统计相联系；另见 [59] 关于线性统计与计数统计的讨论。然而，在高维中，对于一般的约束势，此类显式结果大体上仍不可得，关于平衡结构的许多问题仍未解决。即便对于径向对称势——这正是本文所关注的设定——闭式表达式通常也仅在特殊情形下可得，例如调和约束或

针对特定的相互作用指数。值得注意的例子包括库仑气体 $s = d - 2$，以及更为奇特的、带有 $s = d - 4$ [19]的“迭代库仑气体”；另见 [18] 关于 $s = d - 3$。在本工作中，我们研究任意维数下、处于径向对称外势中的旋转不变黎兹气体，并识别出一大类允许显式表达式的平衡密度。

本文研究的里斯气体定义如下。对于正整数 N 和 d，令 $X_N = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$为一个点构型。我们考虑相应的 N粒子哈密顿量

$$\mathcal{H}_N(X_N) := \sum_{1 \le i \ne j \le N} g(x_i - x_j) + N \sum_{i=1}^{N} V(x_i), \tag{1.1}$$

其中 $V\colon \mathbb{R}^d \to (-\infty, +\infty]$ 是一个禁闭势，并且

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{s}|x|^{-s}, & s \ne 0, \\ -\log|x|, & s = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

不失一般性，我们通常将禁闭势归一化为 $V(0) = 0.$ 。特别地，取 $s = d - 2$ 时可得到 d维库仑气体。注意，情形 $s = 0$对应于对数气体 [39], ，形式上可通过对一般里斯气体取极限得到，因为

$$-\log|x| = \lim_{s \to 0} s^{-1}(|x|^{-s} - 1). \tag{1.3}$$

库仑势的一个特殊性质是，它满足 d维泊松方程

$$\Delta g(x)|_{s=d-2} = -c_d \delta(x), \qquad c_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2). \tag{1.4}$$

这里，Δ 是拉普拉斯算子，$\delta(x)$ 是 d维狄拉克δ函数，而 c_d 是 $\mathbb{R}^d$中单位球的表面积。我们考虑逆温度为 $\beta > 0$时的正则吉布斯测度，其定义为

$$d\mathbb{P}_{N,\beta}(X_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} \exp\Big(-\frac{\beta}{2} N^{-\frac{s}{d}} \mathcal{H}_N(X_N) \Big) dX_N. \tag{1.5}$$

这里我们采用一种缩放方式，使所得的平衡测度支撑在紧集上。文献中也常采用其他约定，此时支撑集会随 N 增大；例如参见 [3]。

根据定义，平衡测度 μ_V 是能量的唯一极小化者

$$I_V[\sigma] := \iint_{(\mathbb{R}^d)^2} g(x-y)\, d\sigma(x)\, d\sigma(y) + \int_{\mathbb{R}^d} V(x)\, d\sigma(x), \tag{1.6}$$

满足总电荷 $Q = \int \sigma(x)\, dx$ 守恒这一约束。此外，根据弗罗斯特曼定理 [44] （另见 [36, 定理 2]），当 $0 < s < d$ 时，μ_V 由欧拉–拉格朗日条件刻画

$$2\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\, d\mu_V(y) + V(x) \begin{cases} = c & \text{if } x \in \operatorname{supp}(\mu_V), \\ \ge c & \text{if } x \notin \operatorname{supp}(\mu_V)\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

这里，常数 c 称为（修正的）罗宾常数。

在本文中，我们旨在找到一类势 V 及其相应的、支撑在单位球 $\{x \in \mathbb{R}^d$ 上的平衡测度 $|x| \le 1\}$，使二者均可显式表示。我们首先指定平衡测度，然后确定相应的势。具体而言，稍微滥用一下记号，我们写作 $d\mu(x) = \mu(x)\, dx$，其中

$$\mu(x) = \frac{d}{c_d}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k |x|^{2k} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{|x| \le 1\}}\,. \tag{1.8}$$

这里，c_d按 (1.4) 中的形式给出。假设 μ 定义了一个有效的概率密度，接下来我们要问：　　：

对于哪个禁闭势 V（x），μ 会成为相应的平衡测度？

我们旨在针对一大类外部势，为这一问题的研究作出贡献。

在讨论一般的里斯气体情形之前，我们先聚焦于库仑相互作用。在库仑情形 $s = d - 2$ 下，平衡问题的表述尤为清晰。外势

由泊松方程 (1.4) 刻画，其中 $g(x)|_{s=d-2}$ 替换为 $\frac{1}{2}V(x)|_{s=d-2}$，狄拉克δ函数替换为 $-\mu(x)$，如 (1.8) 所示。即

$$\Delta\Big(V(x)|_{s=d-2}\Big) = 2d\sum_{n=0}^{\infty} a_n|x|^{2n}. \tag{1.9}$$

回顾一下，d维拉普拉斯算子的径向部分为 $\frac{1}{r^{d-1}}\frac{d}{dr}r^{d-1}\frac{d}{dr}$，其中 ~~$(r=|x|)$~~，对 $V(x)$采用幂级数拟设，并结合我们选取的归一化 $V(0) = 0$，可得

$$V(x)|_{s=d-2} = \frac{d}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+\frac{d}{2})(n+1)}|x|^{2n+2}. \tag{1.10}$$

从平衡测度的角度来看，通过上述计算，欧拉–拉格朗日条件（1.7）的等式部分已经得到满足。确保（1.7）的不等式部分也得到满足，最简单的方法是对 $|x| > 1$选取外势 $V(x) = +\infty$。在这种情况下，在 $|x| > 1$ 之外施加硬墙约束的势（1.10）确实会产生作为平衡测度的（1.8）；参见 [29]。一个自然的问题（在应用中也会出现，参见例如 [71]）是：对所有 $x \in \mathbb{R}^d$通过（1.10）定义外势 $V(x)$，是否仍能保证欧拉–拉格朗日条件成立？对于库仑情形下的径向对称密度，若 $Q = \int_{|x|<1}\mu(x)\,dx$ 为该测度的质量，那么根据牛顿的著名结果，在外部区域 $|x| > 1$中，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\,d\mu_V(y) = Qg(x)$。利用这一恒等式可知，欧拉–拉格朗日条件（1.7）的不等式部分要求，对于 $|x| > 1$,

$$2Qg(x) + V(x)|_{s=d-2} \geq c = 2\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,d\mu_V(y). \tag{1.11}$$

当去掉库仑条件 $s = d-2$ 时，先前用于在 $|x| \leq 1$上推导 $V(x)$、以及在将 $V(x)$延拓到整个 $\mathbb{R}^d$ 之后验证欧拉–拉格朗日条件的论证不再适用。这给一般黎兹气体的研究带来了相当大的额外困难，也部分解释了为何已知的显式例子相对较少；若干已知情形及相关猜想见 [19, 节 2] 。

在此设定下，外势的计算需要求一个真正的 d维积分。然而，正如我们将看到的，径向对称的假设将这一问题化为一个一维积分，尽管其被积函数看似复杂。此外，为了确保欧拉–拉格朗日条件中的不等式部分，人们自然会被引向推广(1.11)的问题。

我们的主要结果将在下一节中详细给出，可概括如下。

- 在定理 2.1中，我们建立一般框架。我们说明如何构造一个外势 V，使得欧拉–拉格朗日条件的等式部分成立，并将欧拉–拉格朗日条件的不等式部分改写为一个涉及定义平衡测度之系数的显式不等式。这一一般结果在第 2.1 小节中讨论。我们给出两个可以验证所需不等式的显式例子。摘要见下方表1。

- 第一个例子见定理 2.4，讨论以高斯超几何函数表示的外势 ${}_2F_1$。在这种情况下，相应的平衡密度正比于 $(1-|x|^2)^{\alpha}$，其中 $\alpha > -1$。此例在第 2.2 小节中讨论。

- 第二个例子见定理 2.6，讨论形式为 $|x|^{2p}$ 的纯幂型外势，其中 p 是非负整数。在这种情况下，平衡测度的密度可用一个 ${}_2F_1$ 函数显式表示。此例在第 2.3 小节中讨论。

- 最后，在定理 2.7 中，我们研究带有半空间约束的库仑情形。通过分析违反欧拉–拉格朗日不等式的点，我们推导出一个必要条件；在该条件下，系综完全受限于边界超平面。此结果见第 2.4 小节。

从技术层面看，我们分析中最具挑战性的部分出现在软壁情形，此时必须证明欧拉–拉格朗日条件 (1.7) 中的不等式部分。相比之下，Riesz 的经典结果 [70]（见下文推论2.3）研究的是 $\mathbb{R}^d$ 中单位球内、外势为常数时的平衡测度，并采用硬壁假设，即球外的势为无穷大。因此，欧拉-拉格朗日条件中的不等式部分便是多余的。

2. Main results

本节将介绍我们的主要结果。

2.1. 一般情形的表述。 为处理一般情形，我们首先引入一个实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，该序列满足以下条件。

定义 1。 对于 $d \geq 1$，设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是满足以下条件的实数序列

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+d} = \frac{1}{d}, \tag{2.1}$$

并假设对每个 $0 \leq x \leq 1$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \qquad \text{and} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2n+s-2k-d} \right) x^{2n} \tag{2.2}$$

均有定义（即收敛），且第一个级数非负。在这些条件下，我们称序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为可容许的。

由于对于所有 $d \geq 1$，(1.8) 中有 $\mu(x) = \mu(|x|)$，因此我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu(x)\, dx = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^{\infty} \mu(r) r^{d-1}\, dr; \tag{2.3}$$

注意，左边的记号 dx 表示 d 维勒贝格测度，这与积分区域相一致。因此，条件 (2.1) 确保 μ 若非负，则通过积分为 1 而成为概率测度。

我们将构造一类旋转对称势 V，以及与之对应的平衡测度。回忆一下，（递升）波赫哈默符号定义为 $(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$。

定理 2.1（径向对称平衡测度）。 设 $d \geq 1$ 且 $s \in [d-2, d)$。对于可容许序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 且 $x \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x| \leq 1$，定义

$$V(x) := \frac{2d}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{s}{2})_n (\frac{s-d}{2}+1)_n}{(\frac{d}{2})_n\, n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2n+s-2k-d} \right) |x|^{2n}. \tag{2.4}$$

对于 $x \in \mathbb{R}^d$，令 $\mu(x)$ 由 *(1.8)* 给出。于是有如下结论。

(i) **（欧拉–拉格朗日等式）** 对于任意 $|x| < 1$，有

$$\frac{2}{s} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} + V(x) = \frac{2d}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2k+d-s}. \tag{2.5}$$

因此，μ 是与该势相关的平衡测度

$$V_{\mathrm{h}}(x) := \begin{cases} V(x) & \text{if } |x| \leq 1, \\ +\infty & \text{if } |x| > 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

(ii) **（欧拉-拉格朗日不等式）** 此外，假设对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$，V 都有定义。那么，当且仅当不等式成立时，μ 是 V 的平衡测度

$$\frac{2d}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{s}{2})_n (\frac{s-d}{2}+1)_n}{(\frac{d}{2})_n\, n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2k+d+2n} \right) \frac{1}{|x|^{2n+s}} + V(x) \geq \frac{2d}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2k+d-s} \tag{2.7}$$

对每个 $|x| \geq 1$都成立。

在定义（2.6）中，硬壁位于平衡测度支撑集的“自然”边界处。这种情形通常称为“软边缘与硬边缘相遇”；例如，参见 [6,7,27,29–31]。注意，由（1.6）和（1.7）可得

$$I_V[\mu_V] = \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} V(x)\, d\mu_V(x). \tag{2.8}$$

由（2.8）可直接得出，在定理 2.1(i) 和 (ii) 所述的两种情形下，相应的能量有一个显式表达式：

$$I_V[\mu] = I_{V_{\mathrm{h}}}[\mu] = \frac{d}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d-s} + \frac{1}{2}\int_{|x|<1} V(x)\,d\mu(x). \tag{2.9}$$

注 1（库仑气体 $s = d-2$）。注意，当 $s \to d-2$ 时，我们有

$$V(x) \sim \frac{d}{\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{d}{2})(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2n+2+s-2k-d}\delta_{k,n}\right)|x|^{2n+2}.$$

注意到 $\Gamma(\frac{s-d+2}{2})(2n+2+s-2k-d)\delta_{k,n} \to 2$ 在此极限下，可得 $V(x)|_{s=d-2}$ 由 (1.10) 给出。事实上，由于

$$\Delta\left(|x|^{2n+2}\right) = 2(n+1)(2n+d)|x|^{2n},$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子，因此我们得到泊松方程 (1.10)。此外，在此极限下，(2.7) 中的各项可与 (1.11) 中对应的各项相对应，其中 $Q = 1$。

注 2（与短程情形 $s \to d$ 的联系）。现在我们取形式极限 $s \to d$，由此与短程情形建立联系。在极限 $s \to d$ 下，我们有

$$V(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2n+s-2k-d}\delta_{k,n}\right)|x|^{2n} \sim -\frac{2}{d-s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n|x|^{2n} = \frac{2}{d-s}\left(a_0 - \sum_{n=0}^{\infty}a_n|x|^{2n}\right).$$

我们记

$$\widetilde{V}(x) = \lim_{s\to d}\frac{d-s}{2}V(x). \tag{2.10}$$

于是可得

$$\mu(x)|_{s=d} = a_0 - \widetilde{V}(x). \tag{2.11}$$

这与短程情形下平衡测度的显式公式一致。更确切地说，由 [3,48]可知，在短程情形中，平衡测度由如下形式的 Thomas–Fermi型密度给出（$c - \widetilde{V}(x)^{d/s}$。我们注意到，按照约定，在短程情形 $s > d$中，势N 前的前置因子 V在（1.1）中被替换为 $N^{s/d}$。然而，在临界情形 $s = d$下，前置因子的定义需要额外的对数 N修正；参见 [49,50,57] 以及 arXiv 版本 [3]的附录 C。这类对数修正与（2.10）中所出现的重整化需求是一致的。

注 3（通过超几何恒等式进行约化）。在推导势（2.4）——等价地，在推导（2.5）——的过程中，利用引理 3.3 可实现显著简化；参见命题 3.4 的证明。引理 3.3 中的恒等式可以用广义超几何函数表示（例如参见 [68,第 16] 章），如下所示：

$$\frac{1}{2k+d}{}_3F_2(1+\tfrac{s-d}{2},\tfrac{d}{2}+k,\tfrac{s}{2};\tfrac{d}{2},\tfrac{d}{2}+k+1;1) = \frac{1}{2k+d-s}{}_3F_2(1+\tfrac{s-d}{2},\tfrac{s-d}{2}-k,\tfrac{s}{2};\tfrac{d}{2},\tfrac{s-d}{2}+1-k;1), \tag{2.12}$$

对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$和一般的 s， d，只要满足 $s \in (d-2,\ d)$（该条件足以保证相关级数收敛），上述结论便成立。这类超几何恒等式中有很大一部分可以置于经典 Thomae关系及其扩展的框架下考察；例如参见 [55,56]。尽管如此，我们仍未能将 (2.12) 与这一类恒等式相匹配。

在以下小节中，我们介绍一些典型的平衡测度；概要请见表1。

	a_k	$V(x)$	$\mu(x)$
幂型 平衡测度, 参见定理 2.4	(2.15)	$\sum_{k=1}^{2m+1} b_k\|x\|^{2k}$，参见 (2.21)	$(1-\|x\|^2)^{\frac{s-d}{2}+2m+1}$
幂型 外势, 参见定理 2.6	(2.35)	$\|x\|^{2p}$	${}_2F_1(\frac{d-s}{2}, \frac{d-s-2p}{2}; \frac{d-s+2-2p}{2}\ \|x\|^2;$)

TABLE 1. 该表总结了这些示例，列出了势以及相应的平衡测度，均取到乘法常数。

2.2. **幂型平衡测度**。首先，我们考虑一类多项式势，其对应的平衡测度为幂型。为此，我们先引入相应的序列 $\{a_k\}$。首先回顾一下，超几何函数 ${}_2F_1$ 由高斯级数定义

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)s!} z^s, \qquad (|z|<1) \tag{2.13}$$

并通过解析延拓推广到其他地方。注意，如果 $a=-m$ 且 $m=0$，1，2，.....，超几何函数就变为多项式

$$ {}_2F_1(-m,b;c;z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} \binom{m}{s} z^s. \tag{2.14}$$

引理2.2（**幂型平衡测度的可容许序列**）。设 $d \geq 1$ 且 $s \in [d-2, d)$。定义

$$ a_k = \frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)k!}, \qquad \alpha > -1. \tag{2.15}$$

（我们将在（*2.18*）中看到，这会产生一个定义良好的非负密度。）那么，与相应密度（*1.8*）相关的势（2.4）由下式给出

$$ V(x) = -\frac{d}{s} \frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(\alpha+1+\frac{d-s}{2})} \Big({}_2F_1(\tfrac{s}{2}, \tfrac{s-d}{2}-\alpha; \tfrac{d}{2}; |x|^2) - 1 \Big). \tag{2.16}$$

此外，若 $\alpha = \frac{s-d}{2} + n$ 满足 $n=0$、1、2、.....，则(2.16) 中的势 V 将成为一个多项式

$$ V(x) = \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n+1)\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(k+\frac{s}{2})}{\Gamma(k+\frac{d}{2})} |x|^{2k}. \tag{2.17}$$

由定理 2.1 (i) 和引理2.2 可直接得到以下推论。

推论2.3 (**具有硬边缘的幂型平衡测度**)。 设 $d \geq 1$ 和 $s \in [d-2, d)$，并假设 $\alpha > -1$。按照(2.6)定义 V_{h}，其中 V 由(2.16)给出。则与 V_{h} 相关的平衡测度为

$$ d\mu(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{d}{2}+1)} (1-|x|^2)^{\alpha} \cdot \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}} dx. \tag{2.18}$$

证明。 由 (1.8)、(2.15) 和二项式展开可得 (2.18)

$$ (1-z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)k!} z^k, \qquad (|z|<1). \tag{2.19}$$

于是立即可由定理 2.1（i）推出该推论。 □

注 4。 我们讨论推论2.3的一些重要特例。
1.（盒势）当 $\alpha = \frac{s-d}{2}$ 时，推论2.3中的势便化为所谓的盒势，即 V_{h} 在单位球内部为零，在外部则等于 $+\infty$ 。对于这种盒势，相应的平衡测度为

$$d\mu_{\mathrm{box}}(x) = \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\,(1-|x|^2)^{\frac{s-d}{2}}\cdot \mathbb{1}_{\{|x|\le 1\}}\,\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}}\,dx, \tag{2.20}$$

由 (2.18) 可直接看出。这个结果可追溯至 Riesz [70]；另见 [18, 定理 1。1] 以及 [11]。还要指出，对于 $-2 < s \le d-2$，盒势的平衡测度已知会变为奇异测度，并均匀集中在单位球的边界上。对于 $s = d-1$，这一结果可通过如下投影得到：将库仑势下、 $d+1$维空间中一个$d+1$维球上的均匀带电表面进行投影；见 [15, 命题 4。2]。
2.（二次势）由 (2.17) 可知，对于 $n = 1$，势 V是二次的；而 (2.18) 表明，密度正比于 $(1-|x|^2)^{1+(s-d)/2}$。值得将其与谐振子势阱中 d 维无自旋费米子在缩放后的大 N 极限下的密度分布进行比较。对于后者，托马斯–费米密度正比于 $(1-|x|^2)^{d/2}$，其中 $|x|$ 以最大壳层标号为单位度量；参见例如 [17]。对于 $s \in [d-2, d)$，如引理2.2和推论2.3所要求的，只有当 $d = 1$、 $s = 0$时，两种密度的指数才一致。事实上，此时在有限 N 下，费米气体基态波函数的平方与耦合为 $\beta = 2$的对数气体系统的玻尔兹曼因子等价；参见例如 [34]。

注意，若我们考虑式 (2.16) 中带软边界的势 V，而不是推论2.3中的 V_{h}，那么并非任意选择 $\alpha > -1$ 都能得到有效的势。特别是，对于任意 $\alpha > -1$，不等式 (2.7) 都不成立。例如，在式 (2.17) 中，当 n 为偶数时，多项式的首项为负，这不适合用于定义该模型，因为此时无法满足第二个欧拉-拉格朗日条件。另一方面，当 n 为奇数时，势定义良好，并且可以构造相应的平衡测度。我们在下述定理中将此结果形式化。

定理 2.4 (软边幂型平衡测度)。设 $d \ge 1$ 且 $s \in [d-2, d)$。对于$m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，令

$$V(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} b_k |x|^{2k}, \qquad b_k = \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2m+2+\frac{s}{2})(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+\frac{d}{2})k!(2m+1-k)!}\,\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+k)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}. \tag{2.21}$$

那么，相应的平衡测度 μ 由 (2.18) 给出，其中

$$\alpha = \frac{s-d}{2} + 2m + 1. \tag{2.22}$$

此外，相应的能量 $I_V[\mu]$ 由下式给出

$$I_V[\mu] = \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2m+2+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\left(\frac{1}{(2m)!}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k!(2m+1-k)!}\,\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+k)\Gamma(\frac{s}{2}+2m+2)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)\Gamma(\frac{s}{2}+k+2m+2)}\right). \tag{2.23}$$

(2.21) 中最前面的几个多项式如下。

- 对于 $m = 0$,

$$V(x)|_{m=0} = \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}|x|^2. \tag{2.24}$$

- 对于 $m = 1$,

$$V(x)|_{m=1} = \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(4+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\,\frac{(s+2)(s+4)}{6(d+2)(d+4)}\left(|x|^6 - \frac{3(d+4)}{s+4}|x|^4 + \frac{3(d+2)(d+4)}{(s+2)(s+4)}|x|^2\right). \tag{2.25}$$

注 5. 对于势能 在 (2.16) 中，欧拉-拉格朗日条件 (2.5) 的等号部分可写为

$$\int_{|x|<1}\frac{(1-|x|^2)^{\alpha}}{|x-y|^s}\,dx = \pi^{d/2}\,\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\alpha+1+\frac{d-s}{2})}\,{}_2F_1(\tfrac{s}{2}, \tfrac{s-d}{2}-\alpha; \tfrac{d}{2}; |y|^2), \tag{2.26}$$

其中 $d \geq 1$ 且 $|y| < 1$。这一恒等式也曾在 [46, 引理 24], 中基于分数阶微分算子理论给出。 [37, 推论 4]。对于 $d = 1$的情形，参见 [45, 式 (2.3)] 和 [3, 式 (9)]。另请参见 [47] 及其中的参考文献，了解此类恒等式的更多示例。

注 6（用雅可比多项式表示）。 回顾雅可比多项式的超几何表达式 [68, Eq.(15.9.1)]

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(a+1)\,n!}\,{}_2F_1(-n, n+a+b+1; a+1; \tfrac{1-x}{2}). \tag{2.27}$$

利用这一点，可以看出 (2.17) 中的势 V 可表示为

$$V(x) = -\frac{2}{s}\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2m+2+\frac{s}{2})}{\Gamma(2m+1+\frac{d}{2})}\left(P_{2m+1}^{(a,b)}(1-2|x|^2) - \frac{\Gamma(2m+1+\frac{d}{2})}{(2m+1)!\Gamma(\frac{d}{2})}\right), \tag{2.28}$$

其中

$$a = \frac{d}{2} - 1, \qquad b = -2m - 1 + \frac{s-d}{2}. \tag{2.29}$$

注 7（与一维里斯气体的 [3] 一致性检验）。 对于 $d = 1$ 和 $m = 0$的情形，纯二次势 (2.24) 具有如下形式

$$V(x) = \frac{2\,\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(2+\frac{s}{2})}{\sqrt{\pi}}\,x^2. \tag{2.30}$$

相应的极限测度由 (2.18) 给出，其支撑集为 $[-1, 1]$，指数为 $\alpha = \frac{s+1}{2}$。W —— 现在比较 this with th结果 lts of [3] wh这里 h单一 dimensional Ri气体 ith Hamiltonian

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N x_j^2 + \frac{J\mathrm{sgn}(s)}{2}\sum_{j\neq k}\frac{1}{|x_j - x_k|^s} = \frac{J\mathrm{sgn}(s)s}{2}\left(\frac{1}{J\mathrm{sgn}(s)s}\sum_{j=1}^N x_j^2 + \frac{1}{s}\sum_{j\neq k}\frac{1}{|x_j - x_k|^s}\right) \tag{2.31}$$

已有研究。令 $B(x, y)$ 表示欧拉贝塔积分的伽马函数取值。在大-N 极限下，极限密度可表示为

$$\ell_s^{-1} F_s(y/\ell_s), \qquad F_s(z) = \frac{1}{B(\gamma_s+1, \gamma_s+1)}\left(\frac{1}{4} - z^2\right)^{\gamma_s}. \tag{2.32}$$

这里，对于 $-2 < s < 1$,

$$\gamma_s = \frac{s+1}{2}, \qquad \ell_s = \left(\frac{J|s|\pi(s+1)}{\sin(\frac{\pi}{2}(s+1))B(\frac{s+3}{2}, \frac{s+3}{2})}\right)^{\frac{1}{s+2}}. \tag{2.33}$$

注意， γ_s 与 $\alpha = \frac{s+1}{2}$ 重合。此外，为了满足 $\ell_s = 2$ ，使极限支撑集为 $[-1, 1]$，我们选择

$$J = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(s+1))B(\frac{s+3}{2}, \frac{s+3}{2})}{|s|\pi(s+1)}2^{s+2}. \tag{2.34}$$

于是，由于

$$\frac{1}{J\mathrm{sgn}(s)s} = \frac{\pi}{\sin(\frac{s+1}{2}\pi)}\frac{|s|(s+1)}{B(\frac{s+3}{2}, \frac{s+3}{2})2^{s+2}\mathrm{sgn}(s)s} = \frac{\pi}{\sin(\frac{1-s}{2}\pi)}\frac{2\,\Gamma(2+\frac{s}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1+s}{2})},$$

可以看出，所得二次势与 (2.30) 一致。

2.3. 幂型外部势。 作为第二个重要示例，我们考虑纯幂型外部势。与前面一样，我们先引入相应序列。

引理 2.5 （幂型外部势的可容许序列）。设 $d \geq 1$ 且 $s \in [d-2, d)$ 。对于 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，令

$$a_k = -\frac{\sin(\pi\frac{d-s}{2})}{\pi}\frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{2p+s}{d}\frac{\Gamma(k+\frac{d-s}{2})}{(k+\frac{d-s}{2}-p)k!}. \tag{2.35}$$

（我们将在（2.37）中看到，这会产生定义良好的非负密度。）与此序列相关的势（2.4）由下式给出

$$V(x) = \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+p)}{\Gamma(\frac{d}{2}+p)} \frac{2p+s}{2p}|x|^{2p}. \tag{2.36}$$

纯幂型势(2.36)已针对对数气体得到广泛研究。对于 $d = 1$，它通常被称为*Freud* 势（参见例如 [26]），而对于 $d = 2$ 它被称为米塔格-莱夫勒势（参见例如 [5,12,21,23]）。然而，对于一般的黎兹气体，纯幂型势尚未得到广泛研究，我们在以下定理中给出其平衡测度。

定理 2.6 (**具有软边缘的幂型外势**)。 设 $d \geq 1$ 且 $s \in [d-2, d)$。设 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。则与(2.36) 中的纯幂型势 V 相关联的平衡测度 μ 由下式给出

$$d\mu(x) = \frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(1+\frac{s-d}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \frac{2p+s}{2p-d+s} {}_2F_1(\tfrac{d-s}{2}, \tfrac{d-s}{2}-p; \tfrac{d-s}{2}+1-p; |x|^2) \cdot \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}}\, dx. \tag{2.37}$$

此外，我们有

$$I_V[\mu] = \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{(2p+s)^2}{2p(4p+s)}. \tag{2.38}$$

见图1中 $\mu(|x|)$的图像。

R备注 8（纯二次情形）。我们考虑情形 $p = 1$。此时，(2.36) 为

$$V(x)|_{p=1} = \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+2)}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} |x|^2. \tag{2.39}$$

这与前一个例子中的特殊情形 (2.24) 一致。注意，在一维情形$d = 1$中，这种纯二次势已在 [3], 中得到广泛研究，其中分析了 $s > -2$ 的所有情形，包括长程（$s < 1$）和短程（$s > 1$）相互作用情形。我们还注意到，对于对数气体情形，能量 (2.38) 变为

$$\lim_{s\to 0}\left(I_V[\mu]|_{p=1} - \frac{1}{s}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4} + \log 2 & \text{if } d = 1, \\ \frac{3}{4} & \text{if } d = 2. \end{cases} \tag{2.40}$$

Th这分别对应于半圆律和圆律的加权能量 y.

原则上，定理 2.6 对于 $s \geq d-2$ 有效，但即使在扩展情形 $s = d-3$ 中，(2.37) 中平衡测度的显式公式对于 $p = 1$ 仍然定义良好。在这种情况下可得

$$d\mu(x) = \frac{\Gamma(\frac{1+d}{2})}{\pi^{(1+d)/2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\ , \tag{2.41}$$

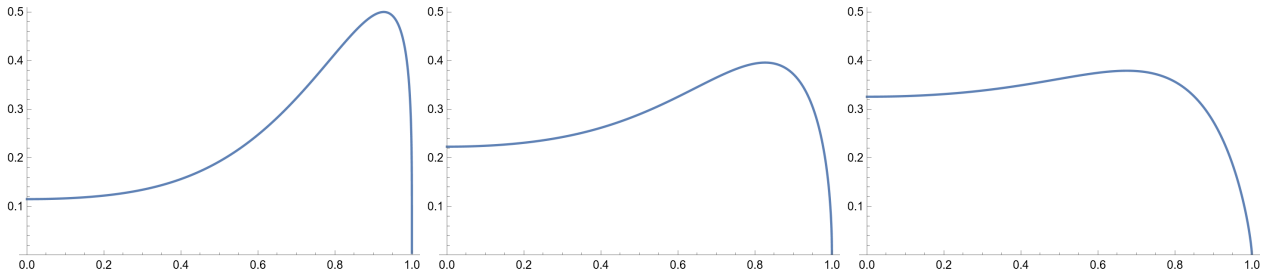
这与 [18] 中得到的结果完全一致。若令 $s = d-3$ 并考虑情形 $p > 1$，我们会观察到以下现象。例如，若令 $p = 2$, 则 (2.37) 中的公式在 $s = d-3$ 下给出

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi^{(1+d)/2}} \frac{d+1}{2} \Gamma\Big(\frac{d-1}{2}\Big) \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\ . \tag{2.42}$$

显然，该密度仅在$|x| \in [\sqrt{2}/2, 1]$时非负。尽管式（2.42）可能并非正确的平衡分布——尤其是它在 $|x| \in [\sqrt{2}/2, 1]$上未能正确归一化——但其定性行为与 [19,第 2.1 节3]中的观察相似。该节中针对情形 $s = d-3$ 和 $p > 1$ 的数值模拟表明，平衡测度的支撑集并非整个单位球，而是集中在一个球壳上。

注 9（一维对数气体的 Freud 势 $d = 1$, $s = 0$）。对于 $d = 1$ 和 $s = 0$，势 (2.36) 具有如下形式

$$V(x)|_{d=1,s=0} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} x^{2p}. \tag{2.43}$$



(A) $s = 1/2$ (B) $s = 1$ (C) $s = 3/2$

FIGURE 1. 式 (2.37) 中密度 $|x| \to \mu(|x|)$ 的图像，其中 $d = 2$ 和 $p = 3$。

相应的平衡测度支撑在 $[-1, 1]$ 上，其密度为

$$\frac{2p}{\pi}|x|^{2p-1}\int_1^{1/|x|}\frac{u^{2p-1}}{\sqrt{u^2-1}}\,du; \tag{2.44}$$

例如，参见 [71, 第四章。5] 以及 [26, 式 (1.9)]。关于其在随机矩阵理论中的应用，特别是随机矩阵乘积方面的应用，请参阅 [40]。这里，与 [26, 式 (1.9)], 相比，我们采用适当的归一化，使支撑集变为 $[-1, 1]$。该密度可用不完全贝塔函数表示为

$$-\frac{p}{\pi}|x|^{2p-1}B_{x^2}(\tfrac{1}{2}-p,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\pi}\frac{2p}{2p-1}{}_2F_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}-p;\tfrac{3}{2}-p;x^2), \tag{2.45}$$

这里我们用到了 [68,式 (8.17.7)]。因此可以看出，该密度是 (2.37) 的一个特例。另见 [40] ，其中介绍了 Freud权在随机矩阵乘积背景下的一种应用。

注10（边缘行为）。应用高斯求和公式 (3.14) 可知，对于$d - 2 < s < d$，密度 (2.37) 在边缘 $|x| = 1$ 处为零。此外，利用超几何函数的求导公式（例如，参见 [68, 式 (15.5.1)]），我们得到

$$\mu(|x|) = O\Big((1-|x|^2)^{1-\frac{d-s}{2}}\Big), \qquad \text{as } |x| \to 1. \tag{2.46}$$

在特殊情形 $d = 1$ 和 $s = 0$下，这重现了一维对数气体在边界处经典的平方根衰减。另一方面，在库仑情形 $s = d - 2$下，密度在边缘处出现不连续性（圆律是这一情形的一个著名例子）。

2.4. 库仑情形下的约束半平面平衡问题。本小节将介绍定理 2.1 在具有半空间约束的库仑气体中的另一项应用。

我们首先讨论二维情形。令 $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$。对于二维库仑势 $-\log |x|$，考虑在外势为以下形式时求平衡测度的问题

$$V(x) = \begin{cases} |x|^2, & \text{if } x_0 > a, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.47}$$

换言之， $x_0 = a$左侧有一道硬壁，而右侧则有一个约束谐势。对于$a = -\infty$，前者不起作用；由（1.8）和（1.10）可知，当 $a_0 = 1$、 $a_1 = a_2 = \cdots = 0$和 $d = 2$时，平衡测度是在单位圆盘上支撑的常数密度 $\frac{1}{\pi}$。此外， $a = -\infty$ 的情形对应软墙边界条件，这一事实表明，对所有 $a < -1$，平衡测度都保持不变。在 [8] 中已证明，对于 $a \in (-1, \sqrt{2})$，平衡测度分解为支撑在 $x_0 = a$ 上的奇异分量，以及支撑在 $\mathbb{R}^2$内的绝对连续分量。此外，对于 $a \geq \sqrt{2}$，平衡密度在 $x_0 = a$ 上具有全支撑，其函数形式为半圆函数形式

$$\sigma(x) = \delta(x_0 - a)\frac{\sqrt{2-x_1^2}}{\pi}\mathbb{1}_{\{|x_1|\leq\sqrt{2}\}}. \tag{2.48}$$

现在我们考虑参数为 s的（$d+1$）维里斯气体，并将其特化为库仑情形，使得 $s=d-1$。令$\hat{x}=(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_d)$，并取 $a\in\mathbb{R}$，考虑势

$$V(\hat{x})=\begin{cases}|\hat{x}|^2, & \text{if } x_0>a,\\ +\infty, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.49}$$

注意，如果 $a=-\infty$，也就是说没有约束，那么平衡测度在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的单位球面上均匀分布，

$$d\mu_V(\hat{x})|_{a=-\infty}=\frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\pi^{(d+1)/2}}\,\mathbb{1}_{\{|\hat{x}|\le 1\}}\,d\hat{x}; \tag{2.50}$$

这可由 (1.8) 和 (1.10) 中的情形 $a_0=1, a_1=a_2=\cdots=0$ 得出。

对于 $d=0$ 和 $d=1$，[8,35]中得到了一个有趣的临界现象。如第 2.4 节中$d=1$ 所述，该现象由一个临界值 $a_{\mathrm{cri}}=a_{\mathrm{cri}}(d)$ 刻画，它将三种可能情形中的两种区分开来。我们在此重新讨论这些情形。

(i) **硬壁不起作用**：$a<-1$。在这种情形下，硬墙约束没有实际影响；因此，平衡测度与无约束情形下 (2.50) 中的平衡测度一致。(ii) **硬壁部分起作用**：$a\in(-1,\ a_{\mathrm{cri}})$。平衡测度由一个支撑在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的绝对连续分量，以及一个支撑在余维为一的集合 $\{a\}\times\mathbb{R}^d$ 上的奇异分量构成。(iii) **硬壁完全起作用**：$a>a_{\mathrm{cri}}$。平衡测度完全局限于 $\{a\}\times\mathbb{R}^d$。更确切地说，已证明如下结果。

- 在一维情形 $d+1=1$中，文献 [35] 证明，临界阈值为 $a_{\mathrm{cri}}(0)=1$；而对于 $a>1$，该测度是纯狄拉克测度

$$d\mu_V(x)=\delta_a(dx_0). \tag{2.51}$$

- 在二维情形 $d+1=2$中，文献 [8] 证明，临界阈值为 $a_{\mathrm{cri}}(1)=\sqrt{2}$。对于 $a>\sqrt{2}$，该测度仅支撑在一维上，其对应的密度见 (2.48)。（另见注 17，其中将结果扩展到了在一维与二维情形之间插值的椭圆势。）

这种现象是库仑情形的一个特殊特征。对于一般的里斯气体，可能不会出现完全有效的硬壁。例如，在一维对数气体中，所得测度相对于一维测度绝对连续。许多研究都探讨了这一情形；不完全的文献列表见 [10,32,33,43,52,62,64,65,69]。需要注意的是，在库仑情形下，半平面约束的作用并非扫掠测度 [1,2,22]（另见近期综述 [15, 第 5] 节），后者会使由障碍约束导致的所有位移电荷密度都累积在边界上。例如，若将 (2.49) 中的条件 $x_0>a$ 改为 $|x|>a$，便会出现后一种情形。

我们可以为高维情形建立一种部分类比。

定理2。 7（受限于半空间的库仑气体）。设 $d=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$并定义

$$a_{\mathrm{cri}}\equiv a_{\mathrm{cri}}(d):=(d+1)\Big(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})}\Big)^{\frac{d}{d+1}}. \tag{2.52}$$

于是我们有如下结论。

（i）平衡测度仅当 $a\ge a_{\mathrm{cri}}$时才支撑在 $\mathbb{R}^d$ 上。（ii）假设平衡测度支撑在 $\mathbb{R}^d$上。引入记号$\hat{x}=(x_0,x)\in\mathbb{R}^{d+1}$，其中 $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$。那么平衡测度为

$$d\mu_V(\hat{x})=\delta_a(dx_0)\,d\mu_W(x), \tag{2.53}$$

其中 $\hat{x}=(x_0,x)\in\mathbb{R}^d$，其中 $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$，并且

$$d\mu_W(x)=\frac{2R}{\pi}\,(1-|x/R|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbb{1}_{\{|x|\le R\}}\,\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}}\,dx,\qquad R=\Big(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\Big)^{\frac{1}{d+1}}. \tag{2.54}$$

此外，对于任意 $\beta > 0$，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}[x_0 \geq a]}{N^{\frac{d+3}{d+1}}} = -\frac{\beta}{2} C(a;d), \tag{2.55}$$

其中

$$C(a;d) = a^2 + \Big(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\Big)^{\frac{2}{d+1}} \frac{d(d+1)}{(d-1)(d+3)} - \frac{(d+1)^2}{(d-1)(d+3)}. \tag{2.56}$$

$C(a,\ d)$ 在 d 取前几个值时的取值为

$$C(a;0) = a^2 + \frac{1}{3}, \qquad C(a;1) = a^2 + \frac{\log 2}{2}, \qquad C(a;2) = a^2 + \frac{5}{9}\Big(\frac{(6\pi)^{3/2}}{6} - 1\Big). \tag{2.57}$$

注意到，在 (2.56) 中，$d = 1$处存在一个可去奇点，因为极限$\lim_{d\to 1} C(a,\ d) = C(a,\ 1)$ 存在。此外，容易验证 $C(a;\ d) > a^2$。式 (2.55) 中 $\mathbb{P}[x_0 > a]$ 的首项渐近行为，与许多采用所谓库仑气体方法的研究思路相似；例如，[63] 给出了与情形$d = 1$ 相关的此类结果；而 $a = 0$，综述 [41] 则介绍了相关的历史背景及发展。

作为一个猜想，我们提出如下结论，这一点已知于 [8,35] 对于 $d = 0,\ 1$ 的情形。

猜想 2.8. 平衡测度的支撑集是 $\mathbb{R}^d$ 当且仅当 $a \geq a_{\rm cri}$。

目前，我们尚不清楚该命题在一般情形下是否有严格证明。不过，在附录 A 中，我们证明了猜想 2.8 在特殊情形 $d = 3$ 下成立。

注 11。根据引理 4.1，猜想可归结为证明：对于 $a \geq a_{\rm cri}$，任意 $t \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$ 都有 $F(t,x) \geq F(0,0)$，其中 $F(t,x)$ 由 (4.15) 给出。此外，引理 4.2 表明，对所有 $t \geq 0$，都有 $F(t,0) \geq F(0,0)$。因此，只需证明 $F(t,x) \geq F(t,0)$。更具体地说，对于给定的 $t \geq 0$，我们引入

$$G(x) := \mathcal{G}(x) + x^2, \tag{2.58}$$

其中

$$\mathcal{G}(x) := \frac{4d}{d-1}\frac{1}{\pi}\int_0^1 \Big(t^2 + (x+r)^2\Big)^{-\frac{d-1}{2}} {}_2F_1\Big(\frac{d-1}{2}, \frac{d-1}{2}; d-1; \frac{4xr}{t^2+(x+r)^2}\Big)(1-r^2)^{\frac{1}{2}} r^{d-1}\, dr. \tag{2.59}$$

W在此记号下，只需证明对任意 $x \geq 0$，$G(x) \geq G(0)$，即可推出该猜想 .

这一性质看似简单，但直接验证起来似乎相当微妙。事实上，很容易看出，对于 $x \geq 0$，$\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(0) \leq 0$。因此，为了证明 $G(x) - G(0)$非负，必须说明二次项 x^2 能够补偿这一负贡献。图 2 展示了函数 $x \mapsto G(x) - G(0)$在 d 和 t取若干不同值时的表现。

我们还要指出，应用于二次势 $|x|^2$的定理 2.6（或等价地，定理 2.4）可推出，$t = 0$ 的情形能够显式处理。更确切地说，当 $t = 0$ 时，若 $x \leq 1$，则有 $G(x) = 0$；若 $x \geq 1$，则有 $G(x) \geq 0$；参见图 2（A）。

我们还需 注意，在特殊情形 $d = 3$ 下，函数 $G(x)$ 具有显式表示 ，

$$G(x)|_{d=3} = 3t^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{x}\,\mathrm{Re}\Big[(x+it)^2 - 1\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]; \tag{2.60}$$

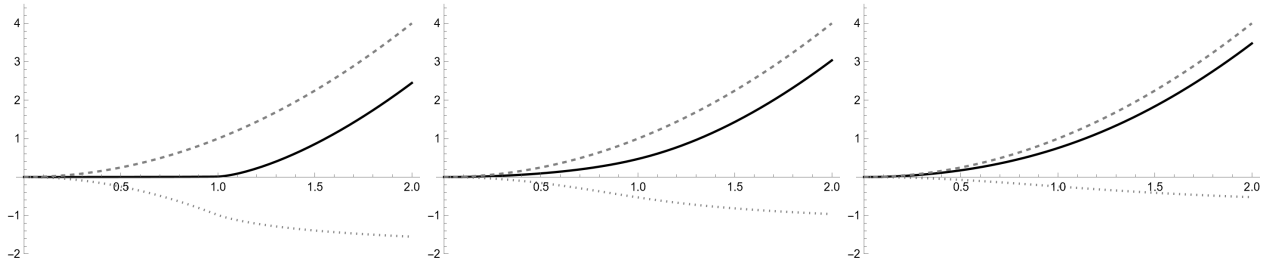
见 (A.4)。利用这一点，我们在附录 A 中证明了，当 $d = 3$ 时，$G(x)$ 是 x 的增函数。

注 12（大维数 d 的极限）。在此极限下，由 (2.52) 可得

$$a_{\rm cri}(d) = \sqrt{\frac{2d}{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\log(d)}{\sqrt{d}} + O(d^{-1/2}), \tag{2.61}$$

而由 (2.56) 可得

$$C(a,d) = a^2 + \frac{\log(d)}{d} + O(d^{-1}). \tag{2.62}$$



(A) $d = 2, t = 0$ (B) $d = 2, t = 0.3$ (C) $d = 2, t = 0.7$

FIGURE 2. 密度图 $x \mapsto G(x) - G(0)$。

致谢。 SSB 获得韩国国家研究基金会资助（RS-2023- 00301976、RS-2025-00516909）。PJF 的本项研究经费由澳大利亚研究理事会发现项目资助（DP250102552）。SNM 和 GS 感谢 ANR 资助项目 ANR-23-CE30-0020-01 EDIPS 的支撑。本次合作始于 2025 年 8 月上半月在澳大利亚维多利亚州克雷斯威克举办的 MATRIX 项目“南天中的对数气体”期间。我们感谢组织者促成此次合作，也感谢该项目带来的启发。

3. PROOFS OF THEOREMS 2.1, 2.4, AND 2.6

本节旨在证明定理2.1、2.4和2.6。下文将分别在不同的小节中给出各个证明。

3.1. 定理 2.1 的证明。

本小节证明定理 2.1。只需考虑情形$d - 2 < s \leq d$，因为库仑气体情形 $s = d - 2$ 可由泊松方程的考察得出，如前所述。

对于由 (1.8) 给出的概率测度 μ，令 f 为径向密度，即

$$f(r) = d \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k+d-1}. \tag{3.1}$$

注意，根据 (2.1)，有 $\int_0^1 f(r)\, dr = 1$。

定理 2.1 的证明总体策略概述如下。

- 在引理 3.1 中，我们利用旋转不变性，将原本表示为 d维积分的势 $\int |x - y|^{-s}\, d\mu(x)$ 改写为一个涉及径向密度 (3.1) 的一维实积分。这里的关键是 Funk-Hecke公式 (3.4)。因此，表达式中会出现某个超几何函数；见 (3.2)。

- 在引理 3.2 中，通过应用超几何函数 (2.13) 的高斯级数展开以及二次变换 (3.10)，我们将上一步中的积分表示为一个涉及径向密度各阶矩的级数。到此为止，我们排除 $d = 1$ 的情形，并假设 $d \geq 2$。

- 在命题 3.4 中，我们利用展开式 (3.1) 计算该级数。这里的关键步骤是一个代数恒等式（引理 3.3），它使我们能够大幅简化所得表达式。当 $d = 1$ 时，该命题同样适用；在这种情况下，无需经过前述约化步骤即可直接得到结果。因此，对于一般的 $d \geq 1$ 和 $s \in (d-2,\ d)$，我们可以将欧拉–拉格朗日方程显式改写为定理 2.1 中所述的形式。

我们从第一步开始。

引理 3.1。令 $d \geq 2$ 和 $s \in (d-2,\ d)$。对于 (1.8) 中的概率测度 μ，令 f 为相应的径向密度 (3.1)。令 $y \in \mathbb{R}^d$。则有

$$\int \frac{d\mu(x)}{|x-y|^s} = \int_0^1 \frac{1}{(|y|+r)^s}\, {}_2F_1\Big(\frac{s}{2}, \frac{d-1}{2}\,;\, d-1\,;\, \frac{4r|y|}{(|y|+r)^2}\Big)\, f(r)\, dr. \tag{3.2}$$

因此，欧拉-拉格朗日变分条件(1.7) 可写为

$$\frac{2}{s}\int_0^1 \frac{1}{(|y|+r)^s}\, {}_2F_1\Big(\frac{s}{2}, \frac{d-1}{2}\,;\, d-1\,;\, \frac{4r|y|}{(|y|+r)^2}\Big)\, f(r)\, dr + V(y) \begin{cases} = c & \text{if } |y| \leq 1, \\ \geq c & \text{if } |y| > 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

证明。首先，回顾 Funk-Hecke公式；例如参见 [18, 附录 A。2]。对于 $d \geq 2$，令 σ_{S_1} 为单位中心球面上的均匀概率测度 $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^d :\ |x| = 1\}$. 那么，对于 $z \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|z| = 1$的情形，我们有

$$\int_{S_1} g(z \cdot x)\, d\sigma_{S_1}(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_{-1}^1 g(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt. \tag{3.4}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu(x)}{|x-y|^s} &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}} \frac{1}{d} \int_0^1 \Big(\int_{S_1} \Big(|y|^2 + r^2 - 2|y| r \frac{y}{|y|} \cdot u \Big)^{-\frac{s}{2}}\, du \Big) f(r)\, dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^1 \Big(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} \Big(|y|^2 + r^2 - 2|y| r t \Big)^{-\frac{s}{2}}\, dt \Big) f(r)\, dr. \end{aligned} \tag{3.5}$$

这里，我们使用了 $|S_1| = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$。注意

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} \Big(|y|^2 + r^2 - 2|y| r t \Big)^{-\frac{s}{2}}\, dt = \int_0^\pi \sin^{d-2}(\theta) \Big(|y|^2 + r^2 - 2|y| r \cos(\theta) \Big)^{-\frac{s}{2}}\, d\theta \\ &= 2^{d-2} \int_0^\pi \sin^{d-2}(\theta/2) \cos^{d-2}(\theta/2) \Big((|y|+r)^2 - 4|y| r \cos^2(\theta/2) \Big)^{-\frac{s}{2}}\, d\theta \\ &= \frac{2^{d-1}}{(|y|+r)^s} \int_0^{\pi/2} \sin^{d-2}(\theta) \cos^{d-2}(\theta) \Big(1 - \frac{4|y| r}{(|y|+r)^2} \cos^2(\theta) \Big)^{-\frac{s}{2}}\, d\theta. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{4|y| r}{(|y|+r)^2} < 1, \qquad \text{for } r \in (0,1),$$

由二项式展开 (2.19) 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \sin^{d-2}(\theta) \cos^{d-2}(\theta) \Big(1 - x\cos^2(\theta) \Big)^{-\frac{s}{2}}\, d\theta = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+k)}{\Gamma(\frac{s}{2}) k!} x^k \int_0^{\pi/2} \sin^{d-2}(\theta) \cos^{2k+d-2}(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+k)}{\Gamma(\frac{s}{2}) k!} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(k + \frac{d-1}{2})}{\Gamma(k+d-1)} x^k = \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{2\Gamma(d-1)}\, {}_2F_1\Big(\frac{d-1}{2}, \frac{s}{2}; d-1; x \Big). \end{aligned}$$

这里，我们用到了

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta) \cos^m(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}) \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2}+1)}, \qquad (n, m > -1).$$

于是得到

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} \Big(|y|^2 + r^2 - 2|y| r t \Big)^{-\frac{s}{2}}\, dt = \frac{2^{d-2}}{(|y|+r)^s} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)}\, {}_2F_1\Big(\frac{d-1}{2}, \frac{s}{2}; d-1; \frac{4|y| r}{(|y|+r)^2} \Big). \tag{3.6}$$

结合 (3.5) 和 (3.6)，引理得证。 □

注 13。对于特殊情形 $d = 2,\ s = 1$，超几何函数可以用完全椭圆积分表示

$$K(z) := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - z\sin^2\theta}}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\, {}_2F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; z). \tag{3.7}$$

接下来，我们计算（3.2）中的积分。

引理 3.2。 对于 $|y|>1$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1}{(|y|+r)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4r|y|}{(|y|+r)^2}\Big)\,f(r)\,dr\\&=\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_0^1 r^{2n}f(r)\,dr\,\frac{1}{|y|^{2n+s}}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

对于 $|y|<1$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1}{(|y|+r)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4r|y|}{(|y|+r)^2}\Big)\,f(r)\,dr\\&=\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_0^{|y|} r^{2n}f(r)\,dr\,\frac{1}{|y|^{2n+s}}\\&\quad+\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_{|y|}^1 \frac{1}{r^{2n+s}}f(r)\,dr\,|y|^{2n}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

证明。 为简便起见，记 $w=|y|$. 通过变量替换 $r\mapsto wt$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1}{(w+r)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4rw}{(w+r)^2}\Big)\,f(r)\,dr\\&=\frac{1}{w^{s-1}}\int_0^{1/w}\frac{1}{(1+t)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4t}{(1+t)^2}\Big)\,f(wt)\,dt.\end{aligned}$$

我们使用二次变换：对于 $0\le z\le 1$,

$${}_2F_1\Big(a,b,2b,\frac{4z}{(1+z)^2}\Big)=(1+z)^{2a}\,{}_2F_1\Big(a,a+\frac{1}{2}-b,b+\frac{1}{2},z^2\Big);\tag{3.10}$$

见 [38, 公式 2.11(5)]。

应用 (3.10)，对于 $w>1$，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{w^{s-1}}\int_0^{1/w}\frac{1}{(1+t)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4t}{(1+t)^2}\Big)\,f(wt)\,dt\\&=\frac{1}{w^{s-1}}\int_0^{1/w}{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{s-d+2}{2}\,;\,\frac{d}{2}\,;\,t^2\Big)\,f(wt)\,dt=\frac{1}{w^s}\int_0^1{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{s-d+2}{2}\,;\,\frac{d}{2}\,;\,\frac{r^2}{w^2}\Big)\,f(r)\,dr\\&=\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_0^1 r^{2n}f(r)\,dr\,\frac{1}{w^{2n+s}}.\end{aligned}$$

这里我们用到了定义 (2.13)。

与 $w>1$ 的情形不同，对于 $w<1$，应用二次变换 (3.10) 需要将积分拆分：

$$\frac{1}{w^{s-1}}\int_0^{1/w}\frac{1}{(1+t)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4t}{(1+t)^2}\Big)\,f(wt)\,dt=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\frac{1}{w^{s-1}}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4t}{(1+t)^2}\Big)\,f(wt)\,dt,\\\mathrm{II}&=\frac{1}{w^{s-1}}\int_1^{1/w}\frac{1}{(1+t)^s}\,{}_2F_1\Big(\frac{s}{2},\frac{d-1}{2}\,;\,d-1\,;\,\frac{4t}{(1+t)^2}\Big)\,f(wt)\,dt.\end{aligned}$$

第一项可按之前的方法处理，从而得到

$$\mathrm{I} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\, n!} \int_0^w r^{2n} f(r)\, dr\, \frac{1}{w^{2n+s}}.$$

对于第二项，先作变量替换 $t \mapsto 1/u$，再利用 (3.10)，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \frac{1}{w^{s-1}} \int_w^1 \frac{u^{s-2}}{(1+u)^s}\, {}_2F_1\Big(\frac{s}{2}, \frac{d-1}{2}\,;\, d-1\,;\, \frac{4u}{(1+u)^2}\Big)\, f(w/u)\, du \\
&= \frac{1}{w^{s-1}} \int_w^1 u^{s-2} {}_2F_1\Big(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\,;\, 1\,;\, u^2\Big) f(w/u)\, du \\
&= \frac{1}{w^{s-1}} \int_1^{1/w} \frac{1}{t^s} {}_2F_1\Big(\frac{s}{2}, \frac{s-d+2}{2}\,;\, \frac{d}{2}\,;\, \frac{1}{t^2}\Big) f(wt)\, dt = \int_w^1 \frac{1}{r^s} {}_2F_1\Big(\frac{s}{2}, \frac{s-d+2}{2}\,;\, \frac{d}{2}\,;\, \frac{w^2}{r^2}\Big) f(r)\, dr.
\end{aligned}$$

因此可得

$$\mathrm{II} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\, n!} \int_w^1 \frac{1}{r^{2n+s}} f(r)\, dr\, w^{2n}.$$

综合以上结果，即得所需结论。 □

注 14。 在极限 $s \to d-2$、 $d > 2$ 下，(3.8) 的右端化简为 $|y|^{-s}$，因此这就是 $|y| > 1$ 时 (3.2) 左端的计算结果。正如上文 (1.11) 所述，这与牛顿定理一致。

接下来，我们给出一个代数恒等式。

引理 3.3。 设 $d \geq 1$ 和 $s \in (d-2, d)$。那么对于任意 $k = 0, 1, \ldots,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\, n!} \Big(\frac{1}{2n+2k+d} + \frac{1}{2n-2k+s-d}\Big) = 0. \tag{3.11}$$

证明。 对于 $k = 0, 1, \ldots,$ 我们定义

$$F(k) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\, n!} \frac{1}{n+k+\frac{d}{2}}, \tag{3.12}$$

$$G(k) := -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\, n!} \frac{1}{n+\frac{s-d}{2}-k}. \tag{3.13}$$

我们断言 $F(k) = G(k)$。

首先注意，对于 $k = 0$,

$$F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n+1)\, n!} = \frac{\Gamma(1+\frac{s-d}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(1+\frac{d}{2})} {}_2F_1(\tfrac{s}{2}, 1+\tfrac{s-d}{2}; 1+\tfrac{d}{2}; 1) = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1+\frac{s-d}{2})\Gamma(d-s)}{\Gamma(d-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s-d}{2})},$$

其中我们用到了如下事实：对于 $c-a-b > 0$,

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}; \tag{3.14}$$

例如，参见 [68,式 (15.4.20)]。类似地，我们有

$$G(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\, n!} = -\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1(\tfrac{s}{2}, \tfrac{s-d}{2}; \tfrac{d}{2}; 1) = -\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d}{2})\Gamma(d-s)}{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(d-\frac{s}{2})}.$$

由伽马函数的反射恒等式可得 $F(0) = G(0)$。

接下来，我们考虑 $k \geq 1$ 的情形。我们通过归纳法进行证明，并假设对于 $\ell = 0, 1, \ldots, k-1$, $F(\ell) = G(\ell)$ 成立。注意到

$$\frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{\ell} \binom{k}{\ell} \frac{1}{x+\ell} = \frac{1}{k!} \int_0^1 t^{x-1} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{\ell} \binom{k}{\ell} t^{\ell} \Big)\, dt = \frac{1}{k!} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^k = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+k+1)}. \tag{3.15}$$

利用这一点，注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}F(\ell) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}\frac{1}{n+\ell+\frac{d}{2}}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n+k+1)\,n!}\\ &= \frac{\Gamma(1+\frac{s-d}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(1+k+\frac{d}{2})}{}_2F_1(\tfrac{s}{2},1+\tfrac{s-d}{2};1+\tfrac{d}{2}+k;1) = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1+\frac{s-d}{2})\Gamma(k+d-s)}{\Gamma(k+d-\frac{s}{2})\Gamma(k+1-\frac{s-d}{2})}.\end{aligned}$$

类似地，由此可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}G(\ell) &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}\frac{1}{n+\frac{s-d}{2}-\ell}\right)\\ &= (-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n-k)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\\ &= (-1)^k\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d}{2}-k)}{\Gamma(\frac{d}{2})}{}_2F_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}-k;\tfrac{d}{2};1) = (-1)^k\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d}{2}-k)\Gamma(k+d-s)}{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(k+d-\frac{s}{2})}.\end{aligned}$$

因此，我们可以看出

$$\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}F(\ell) = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{k}{\ell}G(\ell). \tag{3.16}$$

由于根据归纳假设，对所有 $\ell = 0, 1, \dots, k-1$ 均有 $F(\ell) = G(\ell)$，我们得出 $F(k) = G(k)$，从而完成证明。□

注 15. 利用广义欧拉积分 [68, 式(16.5.2)]

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}{}_2F_1(a_1,a_2;b_1;tu)\,du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}{}_3F_2(a_1,a_2,\alpha;b_1,\gamma;t), \tag{3.17}$$

我们有

$$\begin{aligned}F(k) &= \frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1+\frac{s-d}{2})}{(k+\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{}_3F_2(k+\tfrac{d}{2},1+\tfrac{s-d}{2},\tfrac{s}{2};\tfrac{d}{2},\tfrac{d}{2}+k+1;1),\\ G(k) &= \frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1+\frac{s-d}{2})}{(k+\frac{d-s}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{}_3F_2(\tfrac{s-d}{2}-k,1+\tfrac{s-d}{2},\tfrac{s}{2};\tfrac{d}{2},\tfrac{s-d}{2}+1-k;1).\end{aligned}$$

因此，引理 3.3 中的恒等式可以表示为 (2.12)。

现在，我们准备证明定理 2.1。根据欧拉-拉格朗日条件 (1.7)，这可由以下命题得出。

命题 3.4。 设 $d \geq 1$ 与 $s \in (d-2, d)$。假设 μ 具有 (1.8) 的形式。对于 $|y| > 1$，我们有

$$\int_{|x|<1}\frac{d\mu(x)}{|x-y|^s} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\,a_k}{2k+d+2n}\right)\frac{1}{|y|^{2n+s}}. \tag{3.18}$$

对于 $|y| < 1$，我们有

$$\int_{|x|<1}\frac{d\mu(x)}{|x-y|^s} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\,a_k}{2k+d-2n-s}\right)|y|^{2n}. \tag{3.19}$$

此外，(1.7) 中的罗宾常数 c 为

$$c = \frac{2d}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d-s}. \tag{3.20}$$

证明。 根据假设，径向密度由 (3.1) 给出。于是，情形 $|y|>1$ 可由引理 3.1 和 3.2 立即推出。

接下来，我们考虑 $|y|\in[0,1)$. 这种情形。注意，由 (3.1) 可知，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_0^{|y|}r^{2n}f(r)\,dr\,\frac{1}{|y|^{2n+s}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\sum_{k=0}^{\infty}d\,a_k\int_0^{|y|}r^{2n+2k+d-1}\,dr\,\frac{1}{|y|^{2n+s}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\,a_k}{2n+2k+d}|y|^{2k+d-s}.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_{|y|}^{1}\frac{1}{r^{2n+s}}f(r)\,dr\,|y|^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\sum_{k=0}^{\infty}d\,a_k\int_{|y|}^{1}r^{2k+d-1-2n-s}\,dr\,|y|^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\,a_k}{2k+d-2n-s}(|y|^{2n}-|y|^{2k+d-s}).\end{aligned}$$

结合这些结果，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_0^{|y|}r^{2n}f(r)\,dr\,\frac{1}{|y|^{2n+s}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\int_{|y|}^{1}\frac{1}{r^{2n+s}}f(r)\,dr\,|y|^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\,a_k}{2k+d-2n-s}\Big)|y|^{2n}\\&\quad+d\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d+2}{2}+n)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\Big(\frac{1}{2n+2k+d}+\frac{1}{2n+s-2k-d}\Big)\Big)|y|^{2k+d-s}.\end{aligned}$$

这里，第二项因引理 3.3 而消失。随后所得公式由引理 3.1 和引理 3.2 得出。

对于 $d=1$ 这种情形，我们需要特别处理。不过，所需的修改很小，也不需要前面那一步约化。例如，当 $|y|>1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu(x)}{|x-y|^s}&=\frac{1}{2}|y|^{-s}\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{2k}}{(1-x/y)^s}\,dx=\frac{1}{2}|y|^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y^n}\frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)\,n!}\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{2k+n}\,dx\\&=\frac{1}{2}|y|^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y^{2n}}\frac{\Gamma(s+2n)}{\Gamma(s)\,(2n)!}\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{2(k+n)}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s+2n)}{\Gamma(s)\,(2n)!}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+2n+1}\Big)\frac{1}{|y|^{2n+s}}.\end{aligned}$$

对于 $|y|<1$，我们将积分分成两个区域：

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu(x)}{|x-y|^s}&=\frac{1}{2}|y|^{-s}\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{2k}}{|1-x/y|^s}\,dx\\&=\frac{1}{2}|y|^{-s}\int_{(-|y|,|y|)}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{2k}}{|1-x/y|^s}\,dx+\frac{1}{2}|y|^{-s}\int_{(-1,1)\setminus(-|y|,|y|)}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{2k}}{|1-x/y|^s}\,dx.\end{aligned}$$

其余计算按与上文相同的方式进行。

罗宾常数的计算可通过在 (3.19) 中令 $y=0$ 得到。 □

注 16. 利用引理 3.3 中的恒等式，我们可以验证，只要令 $|y|=1$，命题 3.4 中的两个积分便相等。

3.2. **定理 2.4 的证明**。 本小节旨在证明定理 2.4。我们先证明引理2.2。

引理*2.2*的证明。将 (2.15) 代入 (2.4)，即可得到第一个断言：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2n+s-2k-d} &= -\frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2})}{2\Gamma(\frac{d}{2}+1)\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 x^{\frac{d-s}{2}-n-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)k!}x^k\Big)\,dx\\ &= -\frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2}-n)}{2\,\Gamma(\frac{d-s}{2}-n+\alpha+1)},\end{aligned}\tag{3.21}$$

其中，为了得到第二个等式，对左端积分中的求和按照二项式展开公式 (2.19) 进行了计算；所得积分作为欧拉贝塔积分的一个例子求值；最后，从超几何函数 (2.13) 中识别出所得的求和。多项式势 (2.17) 则由超几何函数的多项式表达式 [68, Eq.(15.2.4)]推得。□

接下来我们证明以下引理，它将用于建立不等式 (2.7)。

L引理3.5。设 $d\geq 1$ 和 $s\in[d-2,d)$。那么对于任意 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $x\geq 1$，有

$$x^{-s}{}_2F_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d+2}{2};2m+2+\tfrac{s}{2};\tfrac{1}{x^2})-\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2m+2+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})(2m+1)!}{}_2F_1(\tfrac{s}{2},-2m-1;\tfrac{d}{2};x^2)\geq 0.\tag{3.22}$$

证明。 首先注意到，根据 (3.14)，可知当 $x=1$时等号成立。回顾正则化超几何函数的定义

$${}_2\mathbf{F}_1(a,b;c;z):=\frac{1}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b;c;z).\tag{3.23}$$

因此，所需的不等式等价于证明：对于 $x>1$,

$$x^{-s}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}+1;2m+2+\tfrac{s}{2};\tfrac{1}{x^2})-\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})}{(2m+1)!}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},-2m-1;\tfrac{d}{2};x^2)\geq 0.\tag{3.24}$$

注意，对于 $z\in(0,1)$，由 [68, 公式 (15.8.4)], 可得

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\pi(c-a-b))}{\pi}{}_2\mathbf{F}_1(a,b;c;z) &= \frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{}_2\mathbf{F}_1(a,b;a+b-c+1;1-z)\\ &\quad-\frac{(1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}{}_2\mathbf{F}_1(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z).\end{aligned}$$

利用这一点，我们得到

$$\begin{aligned}&x^{-s}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}+1;2m+2+\tfrac{s}{2};\tfrac{1}{x^2})\\ &= x^{-s}\frac{\pi}{\sin(\frac{s-d}{2}\pi)}\frac{1}{(2m+1)!\Gamma(2m+1+\frac{d}{2})}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}+1;-2m-\tfrac{d-s}{2};1-\tfrac{1}{x^2})\\ &\quad-x^{-s}\frac{\pi}{\sin(\frac{s-d}{2}\pi)}\frac{(1-\frac{1}{x^2})^{2m+1+\frac{d-s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)}{}_2\mathbf{F}_1(2m+2,2m+1+\tfrac{d}{2};2m+2+\tfrac{d-s}{2};1-\tfrac{1}{x^2}).\end{aligned}\tag{3.25}$$

接下来，我们断言

$${}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},-2m-1;\tfrac{d}{2};x^2)=x^{-s}\frac{\pi}{\sin(\frac{s-d}{2}\pi)}\frac{1}{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2m+1+\frac{d}{2})}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}+1;-2m-\tfrac{d-s}{2};1-\tfrac{1}{x^2}).\tag{3.26}$$

利用 [68,公式 (15.8.7)],可得

$${}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},-2m-1;\tfrac{d}{2};x^2)=\frac{\pi}{\sin(\frac{s-d}{2}\pi)}\frac{x^{4m+2}}{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2m+1+\frac{d}{2})}{}_2\mathbf{F}_1(-2m-1,-2m-\tfrac{d}{2};-2m+\tfrac{s-d}{2};1-\tfrac{1}{x^2}).$$

因此，该断言归结为

$$x^{-s}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}+1;-2m-\tfrac{d-s}{2};1-\tfrac{1}{x^2})=x^{4m+2}{}_2\mathbf{F}_1(-2m-1,-2m-\tfrac{d}{2};-2m+\tfrac{s-d}{2};1-\tfrac{1}{x^2}).$$

这由欧拉变换 [68, 式(15.8.1)]得到。

结合 (3.25) 与 (3.26)，我们已证明

$$\begin{aligned} &x^{-s}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}+1;2m+2+\tfrac{s}{2};\tfrac{1}{x^2})-\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})}{(2m+1)!}{}_2\mathbf{F}_1(\tfrac{s}{2},-2m-1;\tfrac{d}{2};x^2)\\ &=x^{-s}\frac{\pi}{\sin(\frac{d-s}{2}\pi)}\frac{(1-\frac{1}{x^2})^{2m+1+\frac{d-s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)}{}_2\mathbf{F}_1(2m+2,2m+1+\tfrac{d}{2};2m+2+\tfrac{d-s}{2};1-\tfrac{1}{x^2}). \end{aligned} \tag{3.27}$$

由于 $s\in(d-2,d)$，我们有 $\sin(\frac{d-s}{2}\pi)>0$。此外，由于 $x>1$，要证明 (3.24)，等价于证明对 $y\in(0,1)$，

$${}_2\mathbf{F}_1(2m+1+\tfrac{d}{2},2m+2;2m+2+\tfrac{d-s}{2};y)\geq 0. \tag{3.28}$$

我们使用积分表示：对于 $c>b>0$,

$${}_2\mathbf{F}_1(a,b;c;z)=\frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a}\,dt. \tag{3.29}$$

由此表示立即可知 (3.28) 成立，因为所得被积函数为正。 □

我们现在可以证明定理 2.4。

定理 2.4 的证明。 令 a_k 由 (2.15) 给出，其中 α 由 (2.22) 给出。由 (1.8) 和 (2.19)，相应的测度 μ 由 (2.18) 给出。结合 (3.21) 以及超几何函数的定义 (2.13)，可知不等式 (2.7) 等价于引理3.5中的不等式。至此，平衡测度的证明完成。

为证明 (2.23)，注意到在 (3.21) 中取 $n=0$，可得

$$\frac{d}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d-s}=\frac{1}{s}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+2m+2)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})}{(2m+1)!}.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}V(x)\,d\mu(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{d}{2})}\sum_{k=1}^{2m+1}b_k\int_0^1(1-r^2)^\alpha r^{2k+d-1}\,dr=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\sum_{k=1}^{2m+1}b_k\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+k)}{\Gamma(\alpha+1+\frac{d}{2}+k)}\\ &=\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(2m+2+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k!(2m+1-k)!}\frac{(s+2)(s+4)\dots(s+2k-2)}{(s+4m+4)(s+4m+6)\dots(s+4m+2k+2)}. \end{aligned}$$

由 (2.8)，可得 (2.23)。 □

3.3. 定理 2.6 的证明。 我们首先证明引理 2.5。

引理 2.5 的证明。 我们断言，对于 $t\in\in(0,1)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+t)}{(k+t-p)k!}\frac{1}{n-k-t}=-\frac{\pi}{\sin(\pi t)}\frac{1}{n-p}\Big(\frac{\Gamma(t-n)}{\Gamma(1-n)}-\frac{\Gamma(t-p)}{\Gamma(1-p)}\Big). \tag{3.30}$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+t)}{(k+t-p)k!}\frac{1}{n-k-t}&=\frac{1}{n-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+t)}{k!}\Big(\frac{1}{k+t-p}-\frac{1}{k+t-n}\Big)\\ &=\frac{1}{n-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+t)}{k!}\Big(\frac{\Gamma(k+t-p)}{\Gamma(k+t-p+1)}-\frac{\Gamma(k+t-n)}{\Gamma(k+t-n+1)}\Big). \end{aligned}$$

于是，由 (2.13)、(3.14) 以及伽马函数的反射性质，可得所需的恒等式 (3.30)。将 $t=\frac{d-s}{2}$ 代入 (3.30)，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2n+s-2k-d}=\frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{2p+s}{2d(n-p)}\Big(\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2}-n)}{\Gamma(1-n)}-\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2}-p)}{\Gamma(1-p)}\Big). \tag{3.31}$$

注意，当 $n \to p$ 时，

$$\frac{1}{n-p}\Big(\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2}-n)}{\Gamma(1-n)} - \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2}-p)}{\Gamma(1-p)}\Big) \to \Gamma(\tfrac{d-s}{2}-p)(p-1)!(-1)^p.$$

由此，表达式 (2.36) 可由 (2.4) 得出。 □

接下来我们证明以下不等式。

引理 3.6。设 $d \geq 1$ 和 $s \in [d-2, d)$。那么，对任意 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $x \geq 1$，有

$$\frac{\sin(\pi\frac{d-s}{2})}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{(n+\frac{s}{2})n!} \frac{2p}{2n+2p+s} \frac{1}{x^{2n+s}} \geq \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} - \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+p)}{\Gamma(\frac{d}{2}+p)} x^{2p}. \tag{3.32}$$

证明。我们首先考虑 $s > 0$ 的情形。由 (2.19)，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{(n+\frac{s}{2})n!} \frac{2p}{2n+2p+s} y^n &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{n!} \Big(\int_0^1 u^{2n+s-1}(1-u^{2p})\,du\Big) y^n \\ &= 2\Gamma(1+\tfrac{s-d}{2}) \int_0^1 u^{s-1}(1-u^2y)^{\frac{d-s}{2}-1}(1-u^{2p})\,du.\end{aligned}$$

这里，条件 $s > 0$ 是在 $n = 0$ 时保证可积性所必需的。因此，(3.32) 的左端可写为

$$\frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \frac{1}{x^s} \int_0^1 u^{s-1}(1-u^2/x^2)^{\frac{d-s}{2}-1}(1-u^{2p})\,du = \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \int_0^{1/x} t^{s-1}(1-t^2)^{\frac{d-s}{2}-1}(1-t^{2p}x^{2p})\,dt. \tag{3.33}$$

注意，对于 $t > 1/x$，我们有 $1 - t^{2p}x^{2p} < 0$。因此

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \int_0^{1/x} t^{s-1}(1-t^2)^{\frac{d-s}{2}-1}(1-t^{2p}x^{2p})\,dt \\ &\geq \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \int_0^1 t^{s-1}(1-t^2)^{\frac{d-s}{2}-1}(1-t^{2p}x^{2p})\,dt = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} - \frac{\Gamma(\frac{s}{2}+p)}{\Gamma(\frac{d}{2}+p)} x^{2p},\end{aligned}$$

其中等式由欧拉贝塔积分借助伽马函数的求值得出。至此完成了情形 $s > 0$ 的证明。

对于其余情形 $s \in (-1, 0]$ 当 $d = 1$ 时，需要稍作修改以确保可积性。首先，注意

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{(n+\frac{s}{2})n!} \frac{2p}{2n+2p+s} y^n = \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)}{s} \frac{4p}{2p+s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{(n+\frac{s}{2})n!} \frac{2p}{2n+2p+s} y^n \\ &= \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)}{s} \frac{4p}{2p+s} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{n!} \Big(\int_0^1 u^{2n+s-1}(1-u^{2p})\,du\Big) y^n \\ &= \frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)}{s} \frac{4p}{2p+s} + 2\Gamma(\tfrac{s-d}{2}+1) \int_0^1 u^{s-1}\Big((1-u^2y)^{\frac{d-s}{2}-1} - 1\Big)(1-u^{2p})\,du.\end{aligned}$$

于是，(3.32) 的左端可写为

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \frac{2p}{s(2p+s)} \frac{1}{x^s} + \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \frac{1}{x^s} \int_0^1 u^{s-1}\Big((1-u^2/x^2)^{\frac{d-s}{2}-1} - 1\Big)(1-u^{2p})\,du \\ &= \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \frac{2p}{s(2p+s)} \frac{1}{x^s} + \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})} \int_0^{1/x} t^{s-1}\Big((1-t^2)^{\frac{d-s}{2}-1} - 1\Big)(1-t^{2p}x^{2p})\,dt.\end{aligned} \tag{3.34}$$

这里，再次利用欧拉贝塔积分，我们得到

$$\frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})}\int_0^{1/x} t^{s-1}\Big((1-t^2)^{\frac{d-s}{2}-1}-1\Big)(1-t^{2p}x^{2p})\,dt$$
$$\geq \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})}\int_0^{1} t^{s-1}\Big((1-t^2)^{\frac{d-s}{2}-1}-1\Big)(1-t^{2p}x^{2p})\,dt = \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})}\Big(\frac{x^{2p}}{s+2p}-\frac{1}{s}\Big)+\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}-\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+p)}{\Gamma(\frac{d}{2}+p)}\,x^{2p}.$$

因此，我们已经证明

$$\frac{\sin(\pi\frac{d-s}{2})}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{(n+\frac{s}{2})n!}\frac{2p}{2n+2p+s}\,\frac{1}{x^{2n+s}}$$
$$\geq \frac{2}{\Gamma(\frac{d-s}{2})}\frac{1}{s(2p+s)}\Big(2p(x^{-s}-1)+s(x^{2p}-1)\Big)+\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}-\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+p)}{\Gamma(\frac{d}{2}+p)}\,x^{2p}.$$

由于 $s<0$ 和 $p>0$，t 右端的第一项对于 $x\geq 1$ 是非负的。因此证明完成。 □

定理 *2.6* 的证明。 我们只需验证不等式 (2.7)。注意，由 (3.30) 可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{d-s}{2})}{(k+\frac{d-s}{2}-p)k!}\frac{1}{2k+d+2n}=-\frac{\pi}{\sin(\pi\frac{d-s}{2})}\frac{1}{2n+2p+s}\frac{\Gamma(n+\frac{d}{2})}{\Gamma(n+1+\frac{s}{2})}.$$

Thus

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d+2n}=\frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}(2p+s)\,\frac{1}{2n+2p+s}\frac{\Gamma(n+\frac{d}{2})}{\Gamma(n+1+\frac{s}{2})}$$

and

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d+2n}\Big)\frac{1}{x^{2n+s}}\\ &=\frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}(2p+s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{(n+\frac{s}{2})n!}\frac{1}{2n+2p+s}\,\frac{1}{x^{2n+s}}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

另一方面，由 (3.31) 和引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+n)\Gamma(\frac{s-d}{2}+n+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+n)\,n!}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d-2n-s}\Big)x^{2n}\\ &=\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d-s}\Big)+\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+1)\Gamma(\frac{s-d}{2}+1)}{2\,\Gamma(\frac{d}{2}+1)}V(x)\\ &=\frac{\pi}{\sin(\pi\frac{d-s}{2})}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\,\frac{2p+s}{2p}-\frac{\pi}{\sin(\pi\frac{d-s}{2})}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+p)}{\Gamma(\frac{d}{2}+p)}\,\frac{d(2p+s)}{4p}|x|^{2p}.\end{aligned}\tag{3.36}$$

综合以上内容可知，不等式 (2.7) 等价于引理 3.6 中的不等式。

注意，由 (3.31) 可得

$$\frac{d}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2k+d-s}=\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\,\frac{2p+s}{4p}.\tag{3.37}$$

注意，由 (2.13),

$$\int_0^1 {}_2F_1(\tfrac{d-s}{2},\tfrac{d-s}{2}-p;\tfrac{d-s}{2}+1-p;r^2)r^{2p+d-1}\,dr$$
$$=\frac{(d-s-2p)}{\Gamma(\frac{d-s}{2})}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2}+k)}{(d-s-2p+2k)\,k!}r^{2k+2p+d-1}\,dr=\frac{2p-d+s}{2(4p+s)}\frac{\Gamma(1+\frac{s-d}{2})\Gamma(p+\frac{d}{2})}{\Gamma(p+\frac{s}{2}+1)}.$$

然后由 (2.36) 和 (2.37)，我们有

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} V(x)\,d\mu(x) = \frac{s(2p+s)}{4p(4p+s)}\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

因此，由 (2.8) 可得 (2.38)。 □

4. 定理 2.7 的证明

本节中，我们证明定理 2.7。在第 4.1 小节中，我们重新考察一维情形 $d=1$，其中所有计算都可以明确地进行。第 4.2 小节讨论一般的高维情形，我们将在此完成定理 2.7 的证明，但 (2.55) 除外。最后，关于大偏差概率 (2.55) 的论述将在第 4.3 小节中得到证明。

4.1. **重新考察二维情形**。 回顾情形 $d=1$ 中的推导 [8],很有启发性，因为猜想 2.8 在此处是一个定理，而且可以利用对数位势理论中的若干著名计算结果。

注意，变分条件由下式给出

$$2\int_{\mathbb{R}^2}\log\frac{1}{|x-y|}d\mu_V(y)+|x|^2\begin{cases}=c & \text{if } x_0\geq a=\sqrt{2},\ |x_1|<\sqrt{2},\\ \geq c & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{4.1}$$

对于 $t,x\in\mathbb{R}$，令

$$\begin{aligned} G(t,x) &:= 2\int_{\mathbb{R}^2}\log\frac{1}{|(a+t,x)-\widehat{y}|}d\mu_V(\hat{y})+(a+t)^2+x^2\\ &= 2\int_{|y|<\sqrt{2}}\log\frac{1}{|(a+t,x)-(a,y)|}\frac{\sqrt{2-y^2}}{\pi}\,dy+(a+t)^2+x^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

因此， $G(t,x)$ 表示由 (4.1) 左端所规定的势，其中 t 为水平坐标，在平面 $x_0=a$ 的位置处取值为零，而 x 为对应于 x_1 的竖直坐标。

众所周知， [71]

$$2\int_{\mathbb{R}}\log\frac{1}{|u-v|}\frac{\sqrt{2-v^2}}{\pi}\mathbb{1}_{\{|v|<\sqrt{2}\}}\,dv+u^2-1-\log 2\begin{cases}=0, & |u|\leq\sqrt{2},\\ \geq 0 & |u|>\sqrt{2},\end{cases}\qquad u\in\mathbb{R}. \tag{4.3}$$

因此，若 (4.2) 中的 $t=0$，则有

$$G(0,x)\begin{cases}=1+\log 2+a^2 & \text{if } |x|\leq\sqrt{2},\\ \geq 1+\log 2+a^2 & \text{if } |x|\geq\sqrt{2}.\end{cases}$$

为了完成验 在变分条件的.....之后，现在只需证明对于任意 $t\geq 0$ 和 $x\in$ $\mathbb{R}$,

$$G(t,x)\geq G(0,0)=1+\log 2+a^2. \tag{4.4}$$

为验证 (4.4)，我们使用复变量将其写为

$$2\int_{|y|<\sqrt{2}}\log\frac{1}{|(a+t,x)-(a,y)|}\frac{\sqrt{2-y^2}}{\pi}\,dy=2\int_{|y|<\sqrt{2}}\log\frac{1}{|t+i(x-y)|}\frac{\sqrt{2-y^2}}{\pi}\,dy. \tag{4.5}$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t,x)&=2(a+t)-2\int_{\mathbb{R}}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{t+i(x-y)}\right]\frac{\sqrt{2-y^2}}{\pi}\cdot\mathbb{1}_{\{|y|<\sqrt{2}\}}\,dy\\ &=2(a+t)-2\int_{\mathbb{R}}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{u-z}\right]\frac{\sqrt{2-u^2}}{\pi}\cdot\mathbb{1}_{\{|u|<\sqrt{2}\}}\,du,\end{aligned}$$

其中 $z=-x+it$。另 她那个与半圆律相关的著名积分恒等式就是其斯蒂尔切斯变换

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{u-z}\frac{\sqrt{2-u^2}}{\pi}\mathbb{1}_{\{|u|<\sqrt{2}\}}\,du=-z+\sqrt{z^2-2},\qquad z\in\mathbb{C}_+. \tag{4.6}$$

将此代入前一个方程可得

$$\frac{d}{dt}G(t,x) = 2(a+t) - 2\,\mathrm{Im}\left[x - it + \sqrt{(x-it)^2-2}\right] = 2(a+t) + 2\Big(t - \mathrm{Im}\,\sqrt{(x-it)^2-2}\Big). \tag{4.7}$$

注意到，阈值 $a > \sqrt{2}$ 正是在这里出现的。也就是说，为使该测度成为正确的平衡测度，需要

$$\frac{d}{dt}G(t,x)\Big|_{t=0} = 2a - 2\,\mathrm{Im}\,\sqrt{x^2-2}$$

为正。特别地，令 x^2 尽可能小，从而令 $x = 0$，该条件便给出要求 $a > \sqrt{2} = a_{\mathrm{cri}}$，此外还证明了定理 2.7 的 (i) 条。

我们将利用 (4.7) 验证 (4.4)，具体分两步进行。

- （步骤 1）。首先证明，对于任意 $t \geq 0$， $G(t,0) \geq G(0,0)$。这由以下事实推出：当 $a > \sqrt{2} = a_{\mathrm{cri}}$ 时，

$$\frac{d}{dt}G(t,0) = 2(a+t) + 2\Big(t - \sqrt{t^2+2}\Big) \geq 0.$$

- （步骤 2）。接下来证明，对于任意固定的 $t > 0$， $G(t,x) \geq G(t,0)$。这由上面的类似计算得到，其给出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(t,x) &= 2x - 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[\frac{i}{t+i(x-y)}\right]\frac{\sqrt{2-y^2}}{\pi}\cdot \mathbb{1}_{\{|y|<\sqrt{2}\}}\,dy \\ &= 2x + 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{y-(x+it)}\right]\frac{\sqrt{2-u^2}}{\pi}\cdot \mathbb{1}_{\{|y|<\sqrt{2}\}}\,du \\ &= 2x + 2\,\mathrm{Re}\Big(-(x+it) + \sqrt{(x+it)^2-2}\Big) = 2\,\mathrm{Re}\,\sqrt{(x-it)^2-2} \geq 0.\end{aligned}$$

这里我们使用了

$$\mathrm{Re}\left[\frac{i}{t+i(x-y)}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{y-(x+it)}\right] = \frac{y-x}{t^2+(x-y)^2},$$

以及（4.6），从第一个等式推导到第三个等式。最后一个不等式用到了一个关于支割线位于负实轴上的平方根函数的一般性质。

综合以上步骤可知，对于任意 $t \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$， $G(t,x) \geq G(0,0)$，由此完成证明。

注 17. 设 $x = (x_0, x_1)$。取 $\mu \in \mathbb{R}$ 个参数， $c_0^2 := 2/(1+e^{2\mu})$， $c_1^2 := 2/(1+e^{-2\mu})$，势（2.47）的一种推广为

$$V(x) = \begin{cases} (c_0 x_0)^2 + (c_1 x_1)^2, & \text{if } x_0 > a, \\ +\infty, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{4.8}$$

在 $a = -\infty$ （无硬壁）的情况下，平衡测度为椭圆形液滴 [25, 42]

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{\{(e^{-\mu}x_0)^2 + (e^{\mu}x_1)^2 < 1\}}. \tag{4.9}$$

利用 (4.3) 和 (4.6) 的缩放形式，可以直接将上述分析推广，证明平衡测度完全支撑在 $x_0 = a$ 上的阈值为 $a \geq \sqrt{2c_1/c_0^2}$，此时其在这条直线上的密度为

$$\mu(x_1) = \frac{\sqrt{2-(x_1/c_1)^2}}{\pi c_1}\mathbb{1}_{\{|x_1/c_1|<\sqrt{2}\}}. \tag{4.10}$$

请注意，这一结论独立于 c_0, c_1 的参数化。特别是，这使我们能够考虑 $c_1 \to \infty$，此时模型实际上被限制在 $\mathbb{R}$ 中。在这种一维对数气体情形下，不会发生此类相变（见 [32]），这与临界值 $\sqrt{2c_1/c_0^2} \to \infty$as $c_1 \to \infty$. 发散相一致

ˆ **4.2. 高维情形。** 我们首先确定对应于 V 的平衡测度，并假设其完全受限于 $\{a\}\times\mathbb{R}^d$。在此情形下，模型化为参数为 $s=d-1$、位于 $\mathbb{R}^d$ 中且受二次势 $W(x)=|x|^2$ 作用的里斯气体。

为方便起见，记

$$Q(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\,|x|^2. \tag{4.11}$$

于是，由定理 2.6 可知，相应的平衡测度为

$$d\mu_Q(x)\Big|_{s=d-1}=\frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\,(1-|x|^2)^{\frac12}\cdot\mathbb{1}_{\{|x|\le1\}}\,\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}}\,dx. \tag{4.12}$$

注意

$$|x|^2=R^{-(d-1)}Q(x/R)=R^{-(d+1)}Q(x),$$

w这里 R 由（2.54）给出。然后通过变量替换，平衡测度变为（2.54）中的 μ_W。由（2.26）可知，对于 $s\in[s-2,d)$，$d\ge1$ 和 $|x|<1$,

$$\int_{|y|<1}\frac{(1-|y|^2)^\alpha}{|x-y|^s}\,dx=\pi^{d/2}\frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\alpha+1+\frac{d-s}{2})}\,{}_2F_1(\tfrac{s}{2},\tfrac{s-d}{2}-\alpha;\tfrac{d}{2};|x|^2). \tag{4.13}$$

于是，作为 $s=d-1$、$\alpha=1/2$时的一个特例，可得

$$\frac{2}{d-1}\int_{|y|<R}\frac{d\mu_W(y)}{|x-y|^{d-1}}=-|x|^2+\frac{d}{d-1}R^2. \tag{4.14}$$

注意，此恒等式可推出 (4.3)，因为

$$\lim_{d\to1}\Big(\frac{d}{d-1}R^2-\frac{2}{d-1}\Big)=1+\log2.$$

回忆一下，$\hat{x}=(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_d)\in\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $x=(x_1,\ \dots,\ x_d)\in\mathbb{R}^d$. 设 $x_0=a+t$ 满足 $t\ge0$。定义

$$F(t,x):=\frac{2}{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\frac{d\mu_V(\hat{y})}{|\hat{x}-\hat{y}|^{d-1}}+|\hat{x}|^2=\frac{2}{d-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\mu_W(y)}{(t^2+|x-y|^2)^{(d-1)/2}}+(a+t)^2+|x|^2. \tag{4.15}$$

我们已经证明

$$F(0,0)=a^2+\frac{d}{d-1}R^2,\qquad F(0,x)\begin{cases}=F(0,0) & \text{if } |x|\le R,\\ \ge F(0,0) & \text{if } |x|\ge R.\end{cases} \tag{4.16}$$

这是余维一集合 $\{a\}\times\mathbb{R}^d$ 上的欧拉-拉格朗日条件。

我们首先将势的 d维积分化简为一维积分 l.

引理 4.1。 对于任意 $t\in\mathbb{R}$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}&\frac{2}{d-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\mu_W(y)}{(t^2+|x-y|^2)^{(d-1)/2}}\\&=\frac{4d}{d-1}\frac{R^{d+1}}{\pi}\int_0^1\Big(t^2+(|x|+Rr)^2\Big)^{-\frac{d-1}{2}}\,{}_2F_1\Big(\frac{d-1}{2},\frac{d-1}{2};d-1;\frac{4|x|Rr}{t^2+(|x|+Rr)^2}\Big)(1-r^2)^{\frac12}r^{d-1}\,dr.\end{aligned} \tag{4.17}$$

特别地，在此设定 $x=0$ 可得

$$\frac{2}{d-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\mu_W(y)}{(t^2+|y|^2)^{(d-1)/2}}=\frac{2}{d-1}\frac{1}{t^{d-1}}\,{}_2F_1(\tfrac{d-1}{2},\tfrac{d}{2};\tfrac{d+3}{2};-R^2/t^2). \tag{4.18}$$

证明。 应用 Funk-Hecke公式可得

$$\int \frac{d\mu_W(y)}{(t^2+|x-y|^2)^{(d-1)/2}} = \frac{2R^2}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}}\int_{|y|<1}\frac{(1-|y|^2)^{\frac{1}{2}}}{(t^2/R^2+|x/R-y|^2)^{(d-1)/2}}\,dy$$
$$= \frac{2R^2 d}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{d/2}}\int_0^1\left(\int_{S_1}\Big(\frac{t^2+|x|^2}{R^2}+r^2-2\frac{|x|}{R}r\frac{x}{|x|}\cdot u\Big)^{-\frac{d-1}{2}}du\right)(1-r^2)^{\frac{1}{2}}r^{d-1}\,dr$$
$$= \frac{2R^2 d}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}\int_0^1\left(\int_{-1}^1(1-v^2)^{\frac{d-3}{2}}\Big(\frac{t^2+|x|^2}{R^2}+r^2-2\frac{|x|}{R}rv\Big)^{-\frac{d-1}{2}}dv\right)(1-r^2)^{\frac{1}{2}}r^{d-1}\,dr.$$

因此，我们得到

$$\int \frac{d\mu_W(y)}{(t^2+|x-y|^2)^{(d-1)/2}}$$
$$= \frac{2R^{d+1}d}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}\int_0^1\left(\int_{-1}^1(1-v^2)^{\frac{d-3}{2}}\Big((|x|-Rrv)^2+t^2+R^2r^2(1-v^2)\Big)^{-\frac{d-1}{2}}dv\right)(1-r^2)^{\frac{1}{2}}r^{d-1}\,dr.$$

注意到

$$\int_{-1}^1(1-v^2)^{\frac{d-3}{2}}\Big(\frac{t^2+|x|^2}{R^2}+r^2-2\frac{|x|}{R}rv\Big)^{-\frac{d-1}{2}}dv = \int_0^\pi \sin^{d-2}(\theta)\Big(\frac{t^2+|x|^2}{R^2}+r^2-2\frac{|x|}{R}r\cos(\theta)\Big)^{-\frac{d-1}{2}}d\theta$$
$$= 2^{d-2}\int_0^\pi \sin^{d-2}(\theta/2)\cos^{d-2}(\theta/2)\Big(\frac{t^2}{R^2}+\Big(\frac{|x|}{R}+r\Big)^2-4\frac{|x|}{R}r\cos^2(\theta/2)\Big)^{-\frac{d-1}{2}}d\theta$$
$$= \left(\frac{t^2}{R^2}+\Big(\frac{|x|}{R}+r\Big)^2\right)^{-\frac{d-1}{2}}2^{d-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{d-2}(\theta)\cos^{d-2}(\theta)\Big(1-X\cos^2(\theta)\Big)^{-\frac{s}{2}}d\theta,$$

其中

$$X=\frac{4|x|Rr}{t^2+(|x|+Rr)^2}.$$

于是我们有

$$\int_{-1}^1(1-v^2)^{\frac{d-3}{2}}\Big(\frac{t^2+|x|^2}{R^2}+r^2-2\frac{|x|}{R}rv\Big)^{-\frac{d-1}{2}}dv$$
$$= \left(\frac{t^2}{R^2}+\Big(\frac{|x|}{R}+r\Big)^2\right)^{-\frac{d-1}{2}}2^{d-2}\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)}{}_2F_1\Big(\frac{d-1}{2},\frac{d-1}{2};d-1;\frac{4|x|Rr}{t^2+(|x|+Rr)^2}\Big),$$

这就完成了对 (4.17) 的证明。

在（4.17）中令 $x=0$，注意到此时被积函数中的 ${}_2F_1$ 函数为 1，并将其余项的积分表示为一个新的 ${}_2F_1$，即可得到（4.18）。□

引理4.2。 假设 $a\ge a_{\mathrm{cri}}.$。那么对于任意 $t\ge 0$，我们有 $F(t,\,0)\ge F(0,\,0)$。此外，若 $a<a_{\mathrm{cri}}$，则对于某个 $\epsilon>0.$，此不等式不适用于 $t\in(0,\,\epsilon)$

证明。 根据前一个引理，要证明所需的不等式，只需证明对于任意 $t\ge 0$,

$$\frac{2}{d-1}\frac{1}{t^{d-1}}{}_2F_1(\tfrac{d-1}{2},\tfrac{d}{2};\tfrac{d+3}{2};-R^2/t^2)+2at+t^2\ge\frac{d}{d-1}R^2. \tag{4.19}$$

注意，根据 [68,式（15.8.2）],

$${}_2F_1(\tfrac{d-1}{2},\tfrac{d}{2};\tfrac{d+3}{2};-R^2/t^2)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\Big(\frac{t}{R}\Big)^{d-1}{}_2F_1(\tfrac{d-1}{2},-1;\tfrac{1}{2};-t^2/R^2)$$
$$-(d^2-1)\Big(\frac{t}{R}\Big)^d{}_2F_1(\tfrac{d}{2},-\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-t^2/R^2).$$

于是由 [68, 式（15.2.4）] 可得

$$\frac{2}{d-1}\frac{1}{t^{d-1}}{}_2F_1(\tfrac{d-1}{2},\tfrac{d}{2};\tfrac{d+3}{2};-R^2/t^2)=d\Big(t^2+\frac{R^2}{d-1}\Big)-\frac{2(d+1)t}{R^d}{}_2F_1(\tfrac{d}{2},-\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-t^2/R^2).$$

因此，要证明所需的引理，等价于证明对于 $a \geq a_{\mathrm{cri}}$ 和 $t \geq 0$,

$$f(t) := (d+1)t + 2a - \frac{2(d+1)}{R^d} {}_2F_1(\tfrac{d}{2}, -\tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; -t^2/R^2) \geq 0. \tag{4.20}$$

注意

$$f(0) = 2(a - a_{\mathrm{cri}}) \geq 0. \tag{4.21}$$

因此，只需证明 $f'(t) \geq 0$ 对 $t \geq 0$成立。由于

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z), \tag{4.22}$$

（见 [68, 式（15.5.1）]），这等价于证明

$$1 - \frac{1}{R^{d+2}} \frac{2d}{3} t \, {}_2F_1(\tfrac{d}{2}+1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{5}{2}; -t^2/R^2) \geq 0, \tag{4.23}$$

因此，利用（2.54）后可得

$$1 - \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})} \frac{2d}{3} s \, {}_2F_1(\tfrac{d}{2}+1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{5}{2}; -s^2) \geq 0. \tag{4.24}$$

注意，再由 [68, 式（15.8.2）], 可得

$$\lim_{s \to +\infty} \left[\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})} \frac{2d}{3} s \, {}_2F_1(\tfrac{d}{2}+1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{5}{2}; -s^2) \right] = \frac{d}{d+1} < 1.$$

此外，由 [68, 式(15.5.3)],我们有

$$\frac{d}{ds} \left[s \, {}_2F_1(\tfrac{d}{2}+1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{5}{2}; -s^2) \right] = {}_2F_1(\tfrac{d}{2}+1, \tfrac{3}{2}; \tfrac{5}{2}; -s^2) = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{(1+s^2u)^{\frac{d}{2}+1}} \, du \geq 0.$$

因此，所需的不等式成立。 □

4.3. 大偏差概率。 在本小节中，我们证明定理 2.7 中的大偏差陈述。对于一般的黎曼气体模型，由 [60, 推论 1.1] 可知

$$\log Z_{N,\beta}(V) \sim -\frac{\beta}{2} N^{2-\frac{s}{d}} I_V(\mu_V), \tag{4.25}$$

当 $N \to \infty$时。根据定义，概率 $\mathbb{P}[x_0 \geq a]$ 可以用配分函数之比来表示

$$\mathbb{P}[x_0 \geq a] = \frac{Z_{N,\beta}(\hat{V})}{Z_{N,\beta}(|\hat{x}|^2)}. \tag{4.26}$$

因此，由此可得

$$\log \mathbb{P}[x_0 \geq a] \sim -\frac{\beta}{2} N^{\frac{d+3}{d+1}} \Big(I_V(\mu_V) - I_{|x|^2}(\mu_{|x|^2}) \Big), \tag{4.27}$$

作为 $N \to \infty$.

注意，根据 (2.38) 并取 $p = 1$、 $d \mapsto d+1$ 和 $s = d-1$，我们得到

$$I_{|x|^2}(\mu_{|x|^2}) = \frac{(d+1)^2}{(d-1)(d+3)}. \tag{4.28}$$

另一方面，我们有

$$I_V(\mu_V) = a^2 + I_W(\mu_W).$$

注意，根据（4.13），与 W 相关联的罗宾常数为 $\frac{d}{d-1} R^2$。因此，根据（2.8），经过直接计算，我们得到

$$I_V(\mu_V) = a^2 + \Big(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \Big)^{\frac{2}{d+1}} \frac{d(d+1)}{(d-1)(d+3)}. \tag{4.29}$$

由此可得

$$I_V(\mu_V) - I_{|x|^2}(\mu_{|x|^2}) = a^2 + \Big(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\Big)^{\frac{2}{d+1}} \frac{d(d+1)}{(d-1)(d+3)} - \frac{(d+1)^2}{(d-1)(d+3)}. \tag{4.30}$$

结合上述结果，我们得到 (2.55)。

Appendix A. Conjecture 2.8 for $d = 3$

在本附录中，我们验证 $d = 3$ 情形下的猜想 2.8。如注 11 所述，只需证明 $G(x) \geq G(0)$，其中 $G(x)$ 定义见 (2.58)。

根据 [68, 式 (15.8.10)],可得

$${}_2F_1(a, a; 2a; z) = -\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)^2}{(k!)^2} (1-z)^k \Big(\log(1-z) + 2\psi(k+a) - 2\psi(k+1) \Big), \tag{A.1}$$

其中 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 为双伽马函数。特别地，当 $a = 1$ 时，我们有

$${}_2F_1(1, 1; 2; z) = -\frac{\log(1-z)}{z}. \tag{A.2}$$

利用这一点，式 (2.58) 中的函数 $G(x)$ 对于 $d = 3$ 可简化为

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{3}{2\pi x} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \log\Big(\frac{(r-x)^2+t^2}{(r+x)^2+t^2}\Big)\, dr + x^2 \\ &= -\frac{3}{\pi x} \operatorname{Re} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \log\Big(\frac{r-x-it}{r+x-it}\Big)\, dr + x^2 \\ &= -\frac{3}{\pi x} \operatorname{Re} \int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2} \log(r-x-it)\, dr + x^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

注意，利用半圆定律的斯蒂尔切斯变换 (4.6)，我们有

$$\begin{aligned} (xG(x))' &= 3x^2 + \frac{3}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-1}^1 \frac{r}{r-x-it} \sqrt{1-r^2}\, dr = 3x^2 + \frac{3}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-1}^1 \Big(1 + \frac{x+it}{r-x-it}\Big) \sqrt{1-r^2}\, dr \\ &= 3x^2 + \frac{3}{2} + 3 \operatorname{Re}\Big[(x+it) \int_{-1}^1 \frac{1}{r-x-it} \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\, dr\Big] \\ &= 3x^2 + \frac{3}{2} + 3 \operatorname{Re}\Big[-z^2 + z\sqrt{z^2-1}\Big] = 3t^2 + \frac{3}{2} + 3 \operatorname{Re}\Big[z\sqrt{z^2-1}\Big], \end{aligned}$$

其中 $z = x + it$。因此可得

$$G(x) = 3t^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{x} \operatorname{Re}\Big[(z^2-1)^{\frac{3}{2}}\Big]. \tag{A.4}$$

Let $w = \sqrt{z^2-1} = u + iv$。于是我们有 $u^2 - v^2 = x^2 - t^2 - 1$ 和 $uv = tx$。因此我们有 e

$$x^2 G'(x) = 3x \operatorname{Re}(zw) - \operatorname{Re} w^3 = 3x^2 u - 3xtv - u^3 + 3uv^2 = u(3x^2 - u^2).$$

由于 $u > 0$，只需证明 $3x^2 - u^2 > 0$。利用 $(u^2+v^2)^2 = (x^2-t^2-1)^2 + 4t^2x^2$，我们有

$$u^2 = \frac{\sqrt{(x^2-t^2-1)^2 + 4t^2x^2} + x^2 - t^2 - 1}{2}.$$

那么，所需的不等式 $3x^2 - u^2 > 0$ 等价于

$$5x^2 + t^2 + 1 > \sqrt{(x^2-t^2-1)^2 + 4t^2x^2}.$$

这个不等式可直接由

$$(5x^2+t^2+1)^2 - \Big((x^2-t^2-1)^2 + 4t^2x^2\Big) = 4x^2(3 + 2t^2 + 6x^2) > 0.$$

因此，我们得到 $G'(x) \geq 0$。

注 18. （A.4）中的函数 $G(x)$ 可以用 x 和 t 显式表示：

$$G(x) = 3t^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{x}\Big((t^2 - x^2 + 1)^2 + 4t^2x^2\Big)^{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\arctan\Big(\frac{t^2 - x^2 + 1}{2tx}\Big)\right). \tag{A.5}$$

由该表达式，也可以直接验证 $G'(x) \geq 0$.

注 19. 本附录中用于 $d = 3$ 的方法有可能推广到奇数维 d，因为根据(A.1)，出现在(2.58)中的超几何函数 ${}_2F_1$ 再次化为对数与有理函数的组合。然而，以系统的方式完成此类计算仍然具有挑战性，我们将其留待今后的工作。

References

[1] K. Adhikari, *Hole probabilities for β-ensembles and determinantal point processes in the complex plane*,《电子概率杂志》23（2018），1。[2] K. Adhikari 和 N. K. Reddy, *Hole probabilities for finite and infinite Ginibre ensembles*, 《国际数学研究通知》2017（2017），6694。[3] S. Agarwal、A. Dhar、M. Kulkarni、A. Kundu、S. N. Majumdar、D. Mukamel 和 G. Schehr, *Harmonically confined particles with long-range repulsive interactions* **123** 2019 100603 ，《物理评论快报》（），。[4] M. Aizenman 和 P. A. Martin, *Structure of Gibbs states of one dimensional Coulomb systems*, 《数学物理通讯》78（1980），99。[5] Y. Ameur、C. Charlier、J. Cronvall 和 J. Lenells, *Disk counting statistics near hard edges of random normal matrices: the multi-component regime* **441** 2024 109549 ，《数学进展》（），。[6] Y. Ameur、N.-G. Kang 和 N. Makarov, *Rescaling Ward identities in the random normal matrix model*, 《构造逼近》50（2019），63。[7] Y. Ameur、N.-G. Kang、N. Makarov 和 A. Wennman, *Scaling limits of random normalmatrix processes at singular boundary points* **278** 2020 108340 ，《泛函分析杂志》（），。[8] S. N. Armstrong、S. Serfaty 和 O. Zeitouni, *Remarks on a constrained optimization problem for the Ginibre ensemble*, Potential Anal. 41（2014），945958。[9] R. J. Baxter, *Statistical mechanics of a one-dimensional Coulomb system with a uniform charge background*, 《剑桥哲学学会会刊》59（1963），779。[10] G. Ben Arous、A. Dembo 和 A. Guionnet, *Aging of spherical spin glasses*, 《概率论及其相关领域》120（2001），1。[11] A. A. Berezin, *The distribution of charges in classical electrostatics*, 《自然》317（1985），208。[12] S. Berezin, *Functional central limit theorems for constrained Mittag-Leffler ensemble in hard edge scaling*, 《电子概率杂志》30（2025），1。[13] J. M. Brown 和 A. Carrington, *Rotational spectroscopy of diatomic molecules*, 剑桥大学出版社，剑桥（2003）。[14] S.-S. Byun 和 P. J. Forrester, *Progress on the study of the Ginibre ensembles* **3** 2025, , 221 KIAS Springer 数学丛书，Springer，第[15]页。 *Electrostatic computations for statistical mechanics and random matrix applications* S.-S. Byun 和 P. J. Forrester，[16]，arXiv:2510.14334。 *Physics of long-range interacting systems*A. Campa、Th. Dauxois、D. Fanelli、S. Ruffo，牛津大学出版社，（牛津），（2014）。[17] Y. Castin, *Basic theory tools for degenerate Fermi gases*, 载于《恩里科·费米国际物理学暑期学校论文集》，第164卷：《超冷费米气体》，M. Inguscio、W. Ketterle 和 C. Salomon 编，恩里科·费米瓦雷纳暑期学校（IOS Press，阿姆斯特丹，2006）。[18] D. Chafa ̈ ï、E. B. Saff 和 R. S. Womersley, *On the solution of a Riesz equilibrium problem and integral identities for special functions* **515** 2022 126367 ，《数学分析及其应用杂志》（），。[19] D. Chafa ̈ ï、E. B. Saff 和 R. S. Womersley, *Threshold condensation to singular support for a Riesz equilibrium problem*, 《数学物理分析》13（2023），19。[20] L. Charles、B. Estienne, *Entanglement entropy and Berezin–Toeplitz operators*, 《数学物理通讯》376（2020），521。[21] C. Charlier, *Asymptotics of determinants with a rotation-invariant weight and discontinuities along circles*, 《数学进展》408（2022），108600。[22] C. Charlier, *Hole probabilities and balayage of measures for planar Coulomb gases*, arXiv:2311.15285。[23] C. Charlier, *Large gap asymptotics on annuli in the random normal matrix model*, 《数学年刊》388（2024），3529。[24] Ph. Choquard、H. Kunz、P. A. Martin、M. Navet, *One- Dimensional Coulomb Systems*, 载于：Bernasconi J.、Schneider T.（编） *Physics in One Dimension* 23, 1981 335 ，固态科学丛书，第卷（Springer Verlag，柏林、海德堡，），第页。Ph. Choquard、B. Piller 和 R. Rentsch, ，《统计物理学杂志》（1987），599。[26] T. Claeys、I. Krasovsky 和 O. Minakov, *Weak and strong confinement in the Freud random matrix ensemble and gap probabilities* **402** 2023 833 ，《数学物理通讯》（），。

[27] T. Claeys 和 A. B. J. Kuijlaars, *Universality in unitary random matrix ensembles when the soft edge meets the hard edge*, 《当代数学》458（2008），265。[28] N. R. Cooper, *Quantum Hall states of ultra cold atomic gases*, 载于 *Many-Body physics with ultra cold gases*, Les Houches（2010），编者：C. Salomon、G. Shlyapnikov、L. F. Cugliandolo, （2010）。[29] F. D. Cunden、P. Facchi、M. Ligab`o 和 P. Vivo, *Universality of the third-order phase transition in the constrained Coulomb gas*, 《统计力学杂志》（2017）, 053303。[30] F. D. Cunden、P. Facchi、M. Ligab`o 和 P. Vivo, *Third-order phase transition: random matrices and screened Coulomb gas with hard walls*, 《统计物理学杂志》（2019）, **175**, 1262。[31] J. Cronvall 和 A. Wennman, *A direct approach to soft and hard edge universality for random normal matrices*, arXiv:2511.18628。[32] D. S. Dean 和 S. N. Majumdar, *Large deviations of extreme eigenvalues of random matrices*, 《物理评论快报》97（2006），160201。[33] D. S. Dean 和 S. N. Majumdar, *Extreme value statistics of eigenvalues of Gaussian random matrices*, 《物理评论E》77（2008），041108。[34] D. S. Dean、P. Le Doussal、S. N. Majumdar 和 G. Schehr, *Non-interacting fermions in a trap and random matrix theory*, 《物理学杂志A》52, （2019），144006。[35] A. Dhar、A. Kundu、S. N. Majumdar、S. Sabhapandit 和 G. Schehr, *Exact extremal statistics in the classical 1D Coulomb gas*, **119** 2017 060601, 《物理评论快报》（），。[36] P. Dragnev、R. Orive、E.B. Saff 和 F. Wielonsky，带外场的黎斯能量问题及相关理论，《构造逼近》57（2023），1-43。[37] B. Dyda、A. Kuznetsov 和 M. Kwa´snicki, *Fractional Laplace operator and Meijer G-function*, 《构造逼近》45（2017），427。[38] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger、F.G. Tricomi, 《高等超越函数》，第I、II卷，部分内容依据 Harry Bateman 遗留的笔记编写，McGraw-Hill，1953。[39] P. J. Forrester, *Log-gases and random matrices*，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010。[40] P. J. Forrester, *Probability of all eigenvalues real for products of standard Gaussian matrices*, 《物理学杂志A》47（2014），065202。[41] P. J. Forrester, *Asymptotics of spacing distributions 50 years later*, 载于 *Random matrix theory, interacting particle systems and integrable systems*（P. Deift 和 P. Forrester 编），MSRI 出版物，65（2014），199–222。[42] P. J. Forrester 和 B. Jancovici, *Two-dimensional one-component plasma in a quadrupolar field*, 《国际现代物理学杂志A》11（1996），941-949。[43] P. J. Forrester 和 N. S. Witte, *Asymptotic forms for hard and soft edge general β conditional gap probabilities*, 《核物理B》859, （2012），321。[44] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions*, 论文, Meddel，隆德大学数学研讨会3（1935），1。[45] T. S. Gutleb、J. A. Carrillo 和 S. Olver, *Computing equilibrium measures with power law kernels*, 《数学与计算》91（2022），2247。[46] T. S. Gutleb、J. A. Carrillo 和 S. Olver, *Computation of power law equilibrium measures on balls of arbitrary dimension*, 《构造逼近》58（2023），75。[47] T. S. Gutlet 和 I. P. A. Papadopoulos, *Explicit fractional Laplacians and Riesz potentials of classical functions*, arXiv:2311.10896。[48] D. P. Hardin、T. Lebl´e、E. B. Saff 和 S. Serfaty, *Large deviation principles for hypersingular Riesz gases*, 《构造逼近》48（2018），61。[49] D. P. Hardin 和 E. B. Saff, *Discretizing manifolds via minimum energy points*, 《美国数学学会通报》51（2004），1186。[50] D. P. Hardin 和 E. B. Saff, *Minimal Riesz energy point configurations for rectifiable d-dimensional manifolds*, 《数学进展》193（2005），174。[51] B. Jancovici、J. L. Lebowitz、G. Manificat, *Large charge fluctuations in classical Coulomb systems*, 《统计物理学杂志》72（1993），773。[52] E. Katzav 和 I. P. Castillo, *Large deviations of the smallest eigenvalue of the Wishart–Laguerre ensemble*, 《物理评论E》82（2010），040104。[53] J. Kethepalli、M. Kulkarni、A. Kundu、S. N. Majumdar、D. Mukamel、G. Schehr, *Harmonically confined long-ranged, interacting gas in the presence of a hard wall*, 2021 103209, 《统计力学杂志》，（），。[54] J. Kethepalli、M. Kulkarni、A. Kundu、S. N. Majumdar、D. Mukamel、G. Schehr, *Edge fluctuations and third-order phase transition in harmonically confined long-range systems*, 2022 033203, 《统计力学杂志》（），。[55] C. Krattenthaler 和 K. S. Rao, *Automatic generation of hypergeometric identities by the beta integral method*, 《计算与应用数学杂志》160, （2003），159。[56] C. Krattenthaler† 和 T. Rivoal, *How can we escape Thomae's relations?*, 《日本数学会杂志》58（2006），183。[57] A. B. J. Kuijlaars 和 E. B. Saff, *Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere*, 《美国数学会汇刊》350（1998），523。[58] B. Lacroix-A-Chez-Toine、S. N. Majumdar、G. Schehr, *Rotating trapped fermions in two dimensions and the complex Ginibre ensemble: Exact results for the entanglement entropy and number variance*, **99** 2019 021602, 《物理评论A》（），。[59] P. Le Doussal 和 G. Schehr, *Cumulants and large deviations for the linear statistics of the one-dimensional trapped Riesz gas*, **192** 2025 47, 《统计物理学杂志》（），。

[60] T. Lebl´e 和 S. Serfaty, *Large deviation principle for empirical fields of log and Riesz gases*, 《数学发明》210（2017），645。[61] M. Lewin, *Coulomb and Riesz gases: The known and the unknown*, 《数学物理学杂志》63（2022），061101。[62] S. N. Majumdar、C. Nadal、A. Scardicchio、P. Vivo, *The Index Distribution of Gaussian Random Matrices*, 《物理评论快报》103（2009），220603。[63] S. N. Majumdar、C. Nadal、A. Scardicchio 和 P. Vivo, *How many eigenvalues of a Gaussian random matrix are positive?*, 《物理评论E》83（2011），041105。[64] S. N. Majumdar 和 G. Schehr, *Top eigenvalue of a random matrix: Large deviations and third order phase transition*, 《统计力学杂志》（2014），P01012。[65] S. N. Majumdar 和 M. Vergassola, *Large deviations of the maximum eigenvalue for Wishart and Gaussian random matrices*, 《物理评论快报》102（2009），060601。[66] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 爱思唯尔，（2004）。[67] B. Oblak、B. Lapierre、P. Moosavi、J.-M. St´ephan、B. Estienne, *Anisotropic quantum Hall droplets*, 《物理评论X》14（2024），011030。[68] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark 编。*NIST Handbook of Mathematical Functions*, 剑桥：剑桥大学出版社，2010。[69] H. M. Ramli、E. Katzav 和 I. P. Castillo, *Spectral properties of the Jacobi ensembles via the Coulomb gas approach*, 《物理学杂志A》45（2012），465005。[70] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*, 《塞格德学报》9（1938），1。[71] E. B. Saff 和 V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, 数学科学基础丛书，施普林格出版社，柏林，（1997）。[72] S. Serfaty, *Lectures on Coulomb and Riesz Gases*, arXiv:2407.21194。[73] N. R. Smith、P. Le Doussal、S. N. Majumdar 和 G. Schehr, *Counting statistics for noninteracting fermions in a rotating trap* **105**, 2022 043315 ,

《物理评论A》，（）。
Department of Mathematical Sciences and Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul151-747, Republic of Korea*Email address*: sungsoobyun@snu.ac.kr
School of Mathematical and Statistics, The University of Melbourne, Victoria 3010, Australia*Email address*: pjforr@unimelb.edu.auLPTMS, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*Email address*: satyanarayan.majumdar@cnrs.frSorbonne Université, Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, CNRS UMR 7589, 4 Place Jussieu,75252 Paris Cedex 05, France*Email address*: schehr@lpthe.jussieu.fr