arXiv:2602.03049v1 [stat.ML] 3 Feb 2026

单人和多人表演性预测的统一推断框架：方法与渐近最优性

张志贤[1], 侯晓天[2], 和张林军[1]

[1]罗格斯大学[2]宾夕法尼亚大学

2026年2月4日

摘要

表演性预测描述了这样一类环境：预测模型会改变其试图预测的数据分布，从而引发复杂的反馈循环。尽管以往研究将单智能体和多智能体表演性视为不同现象，本文提出了一个统一的统计推断框架，衔接这两种情形，并将前者视为后者的特例。我们的贡献有两方面。首先，我们提出重复风险最小化（RRM）程序来估计表演性稳定性，并建立严格的推断理论，以证明其渐近正态性并确认其渐近效率。其次，针对行为最优性，我们提出一种新颖的两步插件估计量，将重新校准的预测赋能推断（RePPI）与重要性采样相结合，并进一步对底层分布参数和插件结果的中心极限定理给出形式化推导。理论分析表明，我们的估计量达到了半参数效率界，并且在温和的分布设定错误下保持稳健性。本文为动态表演性环境中的可靠估计与决策提供了一套有原则的工具。

1 引言

行为预测指一类预测建模问题，其中预测行为本身会影响用于进行预测的数据分布 [32]。不同于数据分布保持固定的传统监督学习场景，行为预测在部署后会引发分布偏移，尤其是在支持贷款审批 [5], 刑事判决 [9],和公共政策设计 [25]等重大决策时。

设想一家银行建立了一个用于贷款审批的预测模型。如果模型预测某位申请人违约风险较高，银行可能会通过提供更高的利率作出回应。然而，这一决定会引发申请人的反向行为反应：为了获得更优惠的贷款条款，他们可能主动改变自己的财务行为，以符合模型的审批标准。因此，当银行实施决策后，相关数据分布会随当前模型而变化，银行的预测模型也就无法准确校准由此产生的结果。

假设预测模型 f_θ 由 θ 参数化。行为预测的主要目标是找到一个使表演性风险函数最小化的预测模型，

由此定义了表演性最优点。其数学描述如下：

$$\theta_{PO} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta)}\ell(\theta, Z),$$

其中，$\ell(\theta, Z)$ 是损失函数，而 $Z = (X, Y)$ 是一个输入输出对。底层分布 $\mathcal{D}(\theta)$ 并非静态，而是依赖于模型参数 $\theta \in \Theta$ 的分布映射。在贷款审批示例中，该参数代表银行提供的利率政策，申请人行为会因此发生改变。通过纳入当前预测的反馈，该映射能够体现未来观测中的分布偏移。然而，由于分布 $\mathcal{D}(\theta)$ 通常未知，表演性风险函数难以直接计算，因此该最小化问题难以求解。

除了行为最优性，我们还有表演性稳定性的概念。行为最优性对应于在所有可能的预测器中使表演性风险最小化的模型，而表演性稳定性则指这样一个不动点：作为预测依据给出的预测模型 f_θ，同时也是其部署所诱导的分布下的最优模型。表演性稳定点定义为以下不动点方程的解：

$$\theta_{PS} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{PS})}\ell(\theta, Z),$$

其中，表演性稳定模型 $f_{\theta_{PS}}$ 相对于分布 $\mathcal{D}(\theta_{PS})$ 使风险最小化，而该分布本身由模型 $f_{\theta_{PS}}$ 产生。由于该模型已考虑部署所导致的分布偏移，因此无需进一步重新训练。

在现实应用中，学习者通常与其他学习者一同部署，彼此合作或竞争。例如，多个银行同时构建贷款审批模型时，每家银行都会训练自己的模型来预测违约，但这些预测会影响未来申请者的分布。举例来说，如果一家银行提高审批阈值，更多申请者可能会转向其他银行，从而改变总体分布。因此，每家银行的预测策略不仅塑造自身的数据环境，也会影响其他银行的数据环境。这种互动自然会逐渐趋于均衡，由此产生了多人表演性预测这一概念。与行为最优性类似，纳什均衡旨在找到一组预测模型，使得对于每个参与者 i，在其他参与者策略的基础上，其表演性风险函数达到最小值。类似于行为最优性，纳什均衡对应一组预测模型，其中对于每个参与者 i，在其他参与者策略的条件下，其表演性风险达到最小值（确切定义见第 2.1 节）。此外，表演性稳定均衡刻画了这样一种情形：用于决策的预测模型相对于其所诱导的分布也是最优的。因此，当每个参与者 i 只能获取由自身产生的分布时，便没有动机偏离稳定均衡。

尽管先前研究主要聚焦于开发用于识别表演性稳定性与最优性的算法，我们的工作则致力于为单参与者和多参与者场景下的行为预测构建统计推断框架，并提供效率分析、不确定性量化与决策等关键能力。例如，我们可以为这些估计构建置信区间，以量化同时源于数据随机性以及由模型部署引起的分布反馈的变异性。这使得我们能够在其预测影响底层数据生成过程时，对模型的稳定性与可靠性进行严格评估。更重要的是，我们将表演性条件下的推断性能提升至其最优

水平，即在两种场景中寻找表演性稳定性与最优性的所有估计程序所能达到的最优水平。我们估计量的效率确保后续分析尽可能准确、可靠。通过将我们的推断框架整合进行为预测，我们不再仅仅识别目标模型，而是在可实现的最高水平上为其可靠性与互操作性提供形式保证。

1.1 我们的结果概述

在本文中，“行为预测”一词特指单人设置，即只有一位决策者与环境进行交互。由于多人表演性预测是行为预测的一般情形，而且 [30] 中所述的寻找稳定均衡和纳什均衡的方法均建立在相应的单人方法之上，因此我们系统地研究多人设置下表演性稳定均衡和纳什均衡的统计推断，并自然涵盖单智能体情形。针对这两种均衡，我们提出可行的估计程序，并证明其渐近正态性和效率。由此得到的框架提供了一种统一的统计推断方法，既适用于经典表演预测，也适用于其多人推广形式。

1.1.1 表演性稳定性

表演性稳定均衡的估计程序建立在一种称为重复再训练（*RR*）的模型更新方案之上，该方案最初发表于 [30],，其中模型参数 θ_t 通过迭代最小化在由前一模型诱导的分布上定义的风险函数来更新。受 [23]中基于重复风险最小化的表演性稳定性估计方法以及 RR 结构的启发，我们首先为 θ_t 构建一种估计程序：在每次迭代中，为每位参与者将 RR 方案中的风险函数替换为经验风险函数。我们将此方法称为经验重复再训练（*ERR*）。我们证明，在底层分布映射 $\mathcal{D}(\theta)$ 和每位参与者的损失函数 $\hat{}\ i$满足某些条件时，基于 ERR 的估计量 θ_t 服从关于 θ_t的中心极限定理；也就是说，在每个时刻 $t \in \mathbb{T}$，偏差 $\sqrt{N}(\hat{}\theta_t - \theta_t)$ 渐近服从正态分布，其累积渐近协方差与此前所有迭代中的协方差有关。

—

为确立该方法的最优性，我们针对原始行为响应问题的一系列小扰动，推导出任何旨在实现表演性稳定性的估计程序的渐近协方差下界。随后我们证明，在适当的正则条件下，我们的基于 ERR 的估计量达到了这一界限，从而展现出其渐近效率。

定理1（稳定性，非正式表述）假设对于每个参与者 i，分布映射在 *Wasserstein-1* 距离下是 ϵ_i-利普希茨的，损失函数是 β_i-联合光滑的，且梯度函数在 θ^i 上是 α_i-强单调的，并在 θ^i 上是局部利普希茨的。假设$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\beta_i \epsilon_i}{\alpha}\right)^2 < 1$ 成立，且 $\{\theta_t\}_{t=1}$ 位于 Θ 的内部，因此由 *ERR* 方法生成的估计量 $\hat{}\ \theta_t$ 在每次迭代 t时均满足关于 θ_t 的中心极限定理，其累积渐近协方差为：

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_t - \theta_t) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_t),$$

其中协方差 Σ_t 与此前所有迭代中的协方差相关。

假设 $\theta_{t-1} \neq \theta_{PS}$ 及其基于 *ERR* 的估计量 $\hat{\theta}_t$ 满足正则性条件时，基于 *ERR* 的估计量是半参数有效的。

直观而言，在多人设置中得到的统计推断结果可以无缝地简化为相应的单人结果，这体现了后者可以视为我们更一般框架的一个特例。这种统一的视角凸显了我们方法的灵活性，以及其涵盖个体式和交互式行为式学习场景的能力。在单玩家设定中，我们的 ERR 估计方法将简化为重复经验风险最小化（*RERM*）方法，该方法仅基于重复风险最小化。在所需假设的单玩家版本下，偏差仍收敛于正态分布，其协方差与先前分布中的协方差相关。类似地，我们证明了基于 RERM 的估计量具有局部渐近最优性，表明其达到了半参数效率界。

1.1.2 行为最优性

插件式参与优化 是一种有用的技术，可用于寻找文献中引入的单人行为预测的行为最优点 [24], ，其中，基于一个 β设定错误但已知的分布映射得到的最优解，有助于学习真实的行为最优点 θ_{PO}，二者的行为风险之间的误差有界。本文将该算法扩展到更一般的多人设置。在此背景下，我们首先估计每位参与者的分布参数 β_i i，然后基于估计量所诱导的分布映射计算插件最优解 β_i。

与先前工作 [24]仅依赖经验风险最小化不同，我们从拟合分布参数入手，基于重新校准的预测增强推断（RePPI）方法，通过三折交叉拟合程序对 β_i 进行估计，因为该方法在一定条件下能够保证效率。我们证明了重新校准估计 β_i的渐近正态性，并进一步通过确定此设置下的效率影响函数，证明了其效率。基于 β_i，我们可以使用经验插件优化生成纳什均衡的插件估计量。然而，由于拟合的参数模型仍与 θ相关，因此直接抽取样本仍然很困难。为解决这一问题，我们将插件优化与重要性抽样相结合，以便收集样本。令θ^{β}_{PO} 表示基于分布估计量的插件估计量；我们同样建立了中心极限定理，即其偏差服从渐近正态分布，渐近协方差与分布估计量的渐近协方差相关，并进一步证明该估计量达到了下界。

定理 2（最优性，非正式表述）假设对每位参与者而言，分布图谱是光滑的，且存在全变差距离意义下的模型设定错误；损失函数满足局部利普希茨性、可微性和凸性的条件。假设代入优化的解映射在 β 处 β^*可微。记 $s_i^*(\theta) = \mathbb{E}\big[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)|\theta\big]$。如果对 $s_i^*(\theta)$ 的估计在每个折上均一致，且样本量满足某些条件，则有：

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_i - \beta_i^*) \xrightarrow{P} N(0, \Sigma_{\beta_i}),$$

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}^{\hat{\beta}}_{PO} - \theta^{\beta^*}_{PO}) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\theta}),$$

其中，协方差 Σ_θ 与分布参数 Σ_{β_i} 的估计量的协方差相关。在满足一定正则性条件的情况下，Σ_{β_i} 和 Σ_θ 对于 β 和 θ^{β}_{PO}的所有偏差均达到下界。

与表演性稳定性的情形类似，为多人表演性预测建立的推断框架，在相应条件的单人版本下，自然简化为其单人对应形式，并基于相同的思想构建。

1.2 相关工作

行为预测行为预测最早由 [32],提出，重点关注行为稳定性和行为最优性的概念，随后一系列研究进一步完善了这些概念 [11, 18, 19, 26, 28, 29]。一些研究提出了多种算法变体，以求得表演性稳定点。例如， [32]提出了两种算法 RRM 和 RGD，用于在总体层面寻找稳定点；而[26] 则基于 RGD 算法，为行为预测开发了两种随机梯度法变体。此外， [11] 证明，在决策依赖设定中，许多基于梯度的算法都可以视为针对静态问题的标准算法，且仅存在渐消失偏差。尽管 [32]证明，在某些条件下，表演性稳定点接近表演性最优点，但若以表演性风险为评估指标，稳定性可能与最优性相去甚远。因此，涌现出大量 [18, 19, 24, 28] 旨在实现行为最优性的研究。例如， [28]提出了一种用于优化表演性风险的两阶段算法，并证明了该算法在位置族中的效率。 [18] 提出了用于计算表演性最优点的 PerfGD 算法，并证明了其收敛性；而 [24] 则提出了一种分布插件算法，可有效逼近真实的最优性。

上述所有研究都聚焦于单人自我影响场景，其中交互仅发生在单个模型与对其行为作出响应的智能体之间。然而，行为预测也可能涉及一组相互关联的模型，各模型协同实施。 [30] 将这一场景形式化为多参与者行为预测。该研究定义了表演性稳定均衡和纳什均衡，它们分别与单人设定中的表演性稳定性和行为最优性相对应，并提出了几种基于为单人设定设计的算法来求解这些均衡。

现有研究大多聚焦于寻找这两类目标均衡，只有少数研究探讨表演性条件下的统计推断。具体而言， [23] 基于 [32], 中的RRM算法，提出了针对表演性稳定点进行统计推断的框架；而 [10] 则基于随机梯度算法，提出了一个更通用的框架，用于处理决策依赖设定下的所有稳定均衡。

再校准预测驱动推断RePPI 在文献 [20], 中提出，主要基于替代结局模型和预测增强推断的概念。替代结局也称为辅助变量或代理变量，常被收集以加快数据分析并提高统计效率；替代结局模型则广泛应用于临床试验 [14, 31, 33, 34, 40] 以及营销和商业领域 [3, 7, 21, 42]。文献 [36], 给出了最优替代模型中损失函数的形式，由此确立了替代结局模型的效率性质，进而实现了 RePPI 的效率。在上述所有研究中，研究人员仍需收集替代指标，不过其成本通常低于主要关注的结局。此外，替代指标可能存在缺失，原因包括调查无应答、失访或意外的测量失败，这会带来各种问题 [6, 15, 34]。

预测增强推断（PPI） [1] 是一种半监督统计框架，与缺失数据推断和半监督推断 [4, 8, 35, 36, 37, 38, 41]有关。

与研究者手动收集的替代结局不同，PPI 利用黑箱机器学习预测作为代理变量，以提高经典推断程序的效率和有效性。在这一框架中，研究者可以获取一个小型有标签数据集、一个大型无标签数据集，以及由预训练模型生成的该无标签数据集的机器学习预测，并通过将估计误差分解为两个部分来构造目标参数的偏差校正估计量：基于模型的预测项，以及由金标准测量得出的去偏项。PPI 有许多扩展，包括 PPI++ [2]、分层预测增强推断 [13], 交叉预测增强推断 [43],等。 [16, 17, 27]

文献 [20] 将替代结局模型与预测增强推断相结合，构建了再校准预测驱动推断（RePPI），其生成的估计量比现有的预测增强推断方法更有效。为使该程序具有实用性，作者提出了 RePPI 的三折交叉拟合算法，从而能够利用灵活的机器学习方法学习难以处理的积分。具体而言，当积分被一致地估计时，该估计量将达到最小渐近方差。

1.3 符号与定义

我们在此说明本文使用的符号。全文中，我们将标准的 d 维欧几里得空间记作 $\mathbb{R}^d$，其内积为 $\langle x,\ y\rangle = x^T y$，诱导范数为$\|x\| = \sqrt{\langle x,\ x\rangle}$。对于任意集合 $\Theta \subset \mathbb{R}^d$，点 $x \in \mathbb{R}^d$ 在该集合上的投影记作 $\Pi_\Theta(x) = \arg\min_{\theta\in\Theta} \|x-\theta\|$，表示 Θ 中距离 x 最近的点。凸集 Θ 在 $\theta \in \Theta$ 处的法锥$\mathcal{N}_\Theta(x)$ 是集合 $\mathcal{N}_\Theta(x) = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle v, \theta - x\rangle \le 0$，其中对所有 $\theta \in \Theta\}$ 均成立。

2 预备知识

2.1 问题设定

多玩家表演性预测 假设我们的预测中有 m 位参与者，每位参与者 i 的模型参数记为 θ^i。固定一个索引集 $[m] =\{1, ..., m\}$，每位参与者 i 的模型参数 θ^i 的维度为 d_i，并令 $d = \sum_{i=1}^m d_i$。令 $\Theta_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ 表示每位参与者 i 的模型参数空间， $\mathcal{Z}_i$ 表示变量空间，二者均为凸闭集。总体层面的参数向量 $\theta \in \mathbb{R}^d$ 可分解为 $\theta^i \in \mathbb{R}^d$，其中 $\theta = (\theta^1,\ .....,\ \theta^m)$。对于每位参与者 i，我们将参数向量拆分为 $\theta = (\theta^i,\ \theta^{-i})$，其中 θ^{-i} 表示所有其他参与者的参数向量。根据多人表演性预测 [30],的定义，对于每位参与者 i，我们有一组函数 $\ell_i:\ \mathbb{R}^{d_i} \to \mathbb{R}$，他们试图求解彼此相互关联的决策依赖型优化问题：

$$\min_{\theta^i\in\Theta_i} \mathcal{L}_i(\theta^i, \theta^{-i}) = \min_{\theta^i\in\Theta_i} \mathbb{E}_{Z_i\sim\mathcal{D}_i(\theta)} \ell_i(\theta^i, \theta^{-i}, Z^i),$$

其中，每位参与者的随机变量 Z^i i由分布映射 $\mathcal{D}_i(\theta)$决定，该映射与所有参与者相关，表示为 $\theta = (\theta^1, ..., \theta^m)$。在我们的研究中，如果满足以下条件，则向量 $\theta_{PO} \in \mathbb{R}^d$ 被定义为纳什均衡：

$$\theta^i_{PO} = \arg\min_{\theta^i\in\Theta_i} \mathcal{L}_i(\theta^i, \theta^{-i}_{PO}) = \arg\min_{\theta^i\in\Theta_i} \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta^i,\theta^{-i}_{PO})} \ell_i(\theta^i, \theta^{-i}_{PO}, Z^i), \quad \forall i \in [m],$$

其中每个参与者 i 选择其模型参数 θ^i_{PO}，以最小化自身的表演性风险，并假设所有其他参与者在相同逻辑下同时采用各自的最佳响应策略。

记 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times .. \times \mathcal{D}_m$。我们可以将上述预测问题改写为广义一阶条件形式。将函数 $\ell(\cdot)$关于 θ^i 的梯度记为 $\nabla_i \ell(\cdot)$，则我们得到如下梯度函数向量：

$$\begin{aligned} G(\theta, Z) &= (G_1(\theta, Z^1), ..., G_m(\theta, Z^m)) \\ &= (\nabla_1 \ell_1(\theta, Z^1), ..., \nabla_m \ell_m(\theta, Z^m)). \end{aligned}$$

为简便起见，本文通篇将 $G(\theta, Z)$ 称为雅可比矩阵。将联合空间定义为 $\Theta = \Theta_1 \times ... \times \Theta_m$ 与 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times ... \times \mathcal{Z}_m$，则纳什均衡由广义一阶条件刻画：

$$0 \in G(\theta_{PO}, Z) + \mathcal{N}_\Theta(\theta_{PO}). \tag{1}$$

在纳什均衡 θ_{PO} 处，当所有其他参与者的行动保持在 θ_{PO}^{-i} 时，每个参与者 i都无意偏离 θ_{PO}^i。注意，绩效稳定均衡 θ_{PS}可视为一个静态问题集的纳什均衡，其中底层分布固定在 θ_{PS}，此处的定义对其同样适用。

值得注意的是，上文引入的记号将单人绩效预测作为特例包含在内。当 $m = 1$时，纳什均衡条件退化为绩效最优问题：

$$\theta_{\mathrm{PO}} = \arg\min_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta) = \arg\min_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{Z \sim \mathcal{D}(\theta)} \ell(\theta, Z),$$

其中，最优参数 θ_{PO} 最小化在分布 $\mathcal{D}(\theta)$下评估的期望损失，该分布由其自身部署所诱导。此外，绩效最优条件可等价地表示为与(1)中相同的广义一阶条件形式，其中算子定义为 $G(\theta, Z) = \nabla_\theta \ell(\theta, Z)$。

强单调性若对每个 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^d$，均满足以下条件，则称映射 $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 在 $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ 上是 α-强单调的：

$$\langle g(\theta_1) - g(\theta_2), \theta_1 - \theta_2 \rangle \geq \alpha \|\theta_1 - \theta_2\|^2.$$

若 $g = G(\theta, Z) = \nabla \ell(\theta, Z)$，则梯度函数 $G(\theta, Z)$ 的 α-强单调性等价于损失函数 $\ell(\theta, Z)$ 的 α-强凸性。正如文献 [30] 所指出的，只有在单调博弈中才可能找到全局纳什均衡，因此强单调性是我们分析中的一项重要假设。

概率测度为简化符号，我们假设所有关于某个测度的期望都存在，并且在需要时可以交换积分与微分的顺序。这些假设是标准的，并且在一致可积条件下可以得到严格论证。给定一个带有 Borel σ-代数的度量空间 $\mathcal{Z}$，令 $\mathbb{P}(\mathcal{Z})$ 表示 $\mathcal{Z}$ 上具有有限一阶矩的概率测度集合。我们可以用 Wasserstein-1 距离来衡量两个测度 $P, Q \in \mathbb{P}(\mathcal{Z})$ 之间的差异：

$$W_1(P, Q) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1} \left\{ \mathbb{E}_{X \sim P}[f(X)] - \mathbb{E}_{Y \sim Q}[f(Y)] \right\},$$

其中，上确界是对所有 1-利普希茨函数 $f : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ 取的。或者，也可以使用全变差距离来衡量两个测度 P，$Q \in \mathbb{P}(\mathcal{Z})$ 之间的偏差：

全变差距离：

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{TV}}(P,Q) &= \sup_{A\subset\mathcal{Z}} |P(A)-Q(A)| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathcal{Z}} |P(x)-Q(x)| \quad \text{(discrete case)} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{Z}} |p(x)-q(x)|\,dx, \quad \text{(continuous case)} \end{aligned}$$

其中， p， q 是测度 P， Q的概率密度函数。

2.2 绩效稳定均衡与重复再训练

请回顾，绩效稳定模型集会根据模型自身诱导的分布，为一个绩效问题集生成最优预测；而稳定均衡是满足以下条件的向量 $\theta_{PS}\in\mathbb{R}^d$：

$$\theta_{PS}^i = \arg\min_{\theta^i\in\Theta_i} \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta_{PS})}\ell_i(\theta^i,\theta_{PS}^{-i},Z^i), \quad \forall i\in[m]. \tag{2}$$

因此，无需重新训练绩效稳定模型。重复再训练是一种有效的算法，可根据文献 [30], 中所述的模型更新过程，求得绩效稳定均衡；该过程类似于文献 [32]中针对单玩家设定的重复风险最小化。

假设有 m 个参与者。该过程从任意选取的模型参数初始向量 $\theta_0=(\theta_0^1,\ .....,\ \theta_0^m)$ 开始。根据先前的 θ_t 所诱导的分布，按照 $t\in\mathbb{T}$ 的更新规则，通过最小化风险函数 ℓ_i（在参数为 θ_t 的先前模型所诱导的分布上进行评估），迭代更新新的参数向量 $\theta_{t+1}=(\theta_{t+1}^1,\ .....,\ \theta_{t+1}^m)$：

$$\theta_{t+1}^i = \arg\min_{\theta^i\in\Theta_i} \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta_t)}\ell_i(\theta^i,\theta_{t+1}^{-i},Z^i), \quad \forall i\in[m].$$

为确保更新序列 $\{\theta_t\}_{t=1}$ 收敛至稳定均衡，我们需要为分布映射以及每位参与者 i的损失函数定义额外的正则性假设。根据 [32]和 [30], ，以下假设应当成立。

假设*1* 令 $G_{i,\theta}(y)=\mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta)}G_i(y,Z^i)$ 对每位参与者 i 成立，并令 $G_\theta(y)=\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta)}G(y,Z)=(G_{1,\theta}(y)\ ...,\ G_{m,\theta}(y))$。为保证 θ_t收敛，需要满足以下假设：

1.（ϵ_i-敏感性）对于每位参与者 $i\in[m]$，存在一个 $\epsilon_i>0$，使得对所有 $\theta,\theta'\in\Theta$：

$$W_1(\mathcal{D}_i(\theta),\mathcal{D}_i(\theta'))\le\epsilon_i\|\theta-\theta'\|.$$

2.（α-强单调性）对于所有 $y\in\Theta$，映射 $G_\theta(y)$ 关于 y是 α-强单调的。

3.（利普希茨连续性）损失函数 $\ell(\theta,Z)$ 是 β_i-联合光滑的，也就是说，对于所有θ、 $\theta'\in\Theta$ 以及 Z、 $Z'\in\mathcal{Z}$，梯度函数 $G(\theta,Z)$ 对于每个 i，在 Z^i和 θ^i 上都是 β_i-利普希茨连续的：

$$\left\|G_i(\theta^i,\theta^{-i},Z^i)-G_i(\theta'^i,\theta^{-i},Z^i)\right\|\le\beta_i\cdot\left\|\theta^i-\theta'^i\right\|,$$

$$\left\|G_i(\theta,Z^i)-G_i(\theta,Z'^i)\right\|\le\beta_i\left\|Z^i-Z'^i\right\|.$$

4.（相容性）系数满足 $\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\beta_i \epsilon_i}{\alpha}\right)^2 < 1$。 ——

根据 [30, 定理 2], ，我们可以得出 $\{\theta_t\}_{t=1}$ 以线性速率收敛到唯一稳定均衡 θ_{PS}。我们将这一结果总结为命题1。

命题 1（存在性与收敛性 [30]） 假设*1* 对梯度函数 $G(\theta, Z)$ 和分布映射 $\mathcal{D}(\theta)$ 成立，因此存在唯一的均衡点 θ_{PS}，且我们的更新算法的迭代 θ_t 以线性速率收敛到 θ_{PS}：

$$\|\theta_t - \theta_{PS}\| \leq \delta \text{ for } t \geq (1-C)^{-1} \log\left(\frac{\|\theta_0 - \theta_{PS}\|}{\delta}\right),$$

其中 $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\beta_i \epsilon_i}{\alpha}\right)^2}$。

注记1 对于行为预测，我们设 $m = 1$，因此假设 *1* 可简化为 ϵ-敏感性、β-联合光滑性、α-强凸性和相容性 $\epsilon < \frac{\alpha}{\beta}$，这与 $\{\theta_t\}_{t=1}$ 收敛性所需的最小条件一致。此外，$C = \frac{\beta\epsilon}{\alpha}$ 命题 *1*中的 *[32]*与文献中的结果一致。 —

文献 [23], 受重复风险最小化的启发，提出了一种在单玩家设定下估计行为稳定点的有效算法。以选定的 θ_0为初始值，每次迭代 θ_t 时刻 $t \geq 0$ 的估计量由以下动态更新式给出：

$$\hat{\theta}_{t+1} = \arg\min_{\theta \in \Theta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ell(\theta, Z_{t,i}), \quad Z_{t,i} = (X_{t,i}, Y_{t,i}) \sim \mathcal{D}(\hat{\theta}_t).$$

ˆ 在某些条件下，时刻 t 的估计量 θ_t 渐近正态，其协方差与前几步的协方差相关。

2.3 纳什均衡与代入优化

如上文所述，纳什均衡是所有参与者的表演性风险函数联合最小化的点，即纳什均衡是满足以下条件的向量$\theta_{PO} \in \mathbb{R}^d$

$$\theta_{PO}^i = \arg\min_{\theta^i \in \Theta_i} \mathbb{E}_{Z^i \sim \mathcal{D}_i(\theta^i, \theta_{PO}^{-i})} \ell_i(\theta^i, \theta_{PO}^{-i}, Z^i), \quad \forall i \in [m]. \tag{3}$$

虽然分布映射 $\mathcal{D}_i(\theta)$通常是未知的，但直接且准确地找到最优点往往难以实现。

插件式参与优化是一种用于求解该研究 [24]所述单玩家情形下行为最优点的技术。研究者由此开启了对行为预测中反馈建模的益处的研究，并基于一个错设但已知的分布映射，通过代入最优点有效地学习真实的行为最优点 θ_{PO}。更具体地说，由于未知的分布映射 $\mathcal{D}(\cdot)$使得直接优化表演性风险成为一个难题，代入优化考虑使用分布图谱 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{D}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$，通过参数 β对真实分布映射$\mathcal{D}$ 进行建模。注意，不要求 $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$。基于从 $\theta_i \sim D_\theta$ 和 $Z_i \sim D(\theta_i)$ 中抽取的样本集 $(\theta_i, Z_i)_{i=1}^n$，其中 D_θ 是用户指定的分布，可以通过拟合 β 来估计最佳的 ˆ 参数模型，如下所示：

$$\hat{\beta} = \widehat{Map}\big((\theta_1, Z_1), \ldots, (\theta_n, Z_n)\big), \tag{4}$$

其中 Map 是模型拟合函数。因此，基于拟合的参数模型可得到插件式参与最优点：

$$\theta_{PO}^{\hat{\beta}} = \arg\min_{\theta} \mathbb{E}_{Z\sim D_{\hat{\beta}}(\theta)} \ell(\theta, Z).$$

真实最优点 θ_{PO} 与代入最优解 θ_{PO}^{β} 之间的超额风险 $\mathcal{D} \notin \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$来自两个误差来源：由 β 导致的 β模型误设误差，以及由 [24, 与 3], 之间的差异所导致的统计误差。根据推论1、定理 3], ，在一定条件下，还可以从全变差距离的角度进一步刻画误差界，具体见命题2。

假设 2 假设分布图谱满足：

1. *(η-模型设定错误)* 分布图谱 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ 为 η-模型设定错误：对所有 $\theta \in \Theta$，均有

$$dist(\mathcal{D}_{\beta}(\theta) - \mathcal{D}(\theta)) \leq \eta.$$

2. *(ϵ-光滑性)* 分布图谱 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ 为 ϵ-光滑：对所有 β_1、$\beta_2 \in \mathcal{B}$ 和 $\theta \in \Theta$，均有

$$dist(\mathcal{D}_{\beta_1}(\theta) - \mathcal{D}_{\beta_2}(\theta)) \leq \epsilon \|\beta_1 - \beta_2\|_2.$$

命题 2 ([24]) 记 $PR(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta)}\ell(\theta, Z)$。假设假设 *2* 在全变差距离下成立，损失函数一致有界，即 $|\ell(\theta, Z)| \leq a$，且 与 β 之间的估计差距 β 有界，即 $\|\beta - \beta^*\| \leq b$，则有

$$PR(\theta_{PO}^{\hat{\beta}}) - PR(\theta_{PO}) \leq 4a\eta + 4a\gamma b.$$

如果模型拟合过程采用经验风险最小化，且用于模型拟合的损失函数满足额外的正则条件，则超额风险可进一步表征如下：

$$PR(\theta_{PO}^{\hat{\beta}}) - PR(\theta_{PO}) \leq 4a\eta + \tilde{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

因此，只要模型设定错误足够小，代入式表征优化在渐近意义下便是有效的，能够成为真实最优解的精确估计量。

3 稳定均衡

本节聚焦于多人设定。我们利用重复再训练的内在结构，以及在单人行为预测情形下建立的推断框架，对实现稳定均衡的迭代估计程序进行形式化刻画。此外，我们提供理论保证，证明我们的估计量在一类扰动问题中达到半参数效率界，从而确保我们的方法具有渐近效率。除此之外，我们还证明了估计量的渐近正态性，以便进行有原则的不确定性量化。单人情形下相应的统计性质将在第5节中详细讨论。

3.1 经验重复再训练

在行为预测中，寻找行为稳定性是最重要的问题之一，因为根据 [32, 定理 43]，在某些条件下，它无需重新训练模型即可近似最小化表演性风险。我们已在前文介绍了重复再训练。本节首先详细描述我们的估计程序，即对迭代 θ_t 针对每个 t进行的经验性重复再训练，以及行为稳定均衡。随后，我们将建立相应的推断结果，并阐明各估计量之间的联系。

如前所述，重复再训练是一种多人更新过程，其中目标模型集是根据前序模型集诱导的分布生成的。参数向量 θ_{t+1} 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个向量，其中每个参与者$i \in [m]$ 的模型参数满足：

$$\theta_{t+1}^i = \arg\min_{\theta^i \in \Theta_i} \mathbb{E}_{Z^i \sim \mathcal{D}_i(\theta_t)} \ell_i(\theta^i, \theta_{t+1}^{-i}, Z^i), \quad \forall i \in [m],$$

其中迭代序列 θ_t 在一定条件下以线性速率收敛到稳定均衡 θ_{PS} 。因此，稳定均衡可以视为博弈的不动点。受此启发，自然的下一步是在估计框架内扩展更新算法，以构造每次迭代 θ_t的估计量。我们将此估计程序称为 经验重复再训练（*ERR*），并在算法 1中进行了总结。

算法1经验重复再训练

输入： 初始参数向量 $\theta_0 = (\theta_0^1, \ldots, \theta_0^m)$。**输出：**
迭代估计量 $\{\theta_t\}_{t=1}$，适用于 $t \in \mathbb{T}$。

步骤 1： 在初始步骤 $t = 1$，随机抽取 N_0^i 样本 $\{Z_{0,k}^i\}_{k=1}^{N^i} = \{(X_{0,k}^i, Y_{0,k}^i)\}_{k=1}^{N_0^i}$ 从每个参与者 i 的初始分布映射 $\mathcal{D}(\theta_0)$ 中。

步骤 2： 构造估计量 θ_1，使得对每个$i \in [m]$下列方程成立：

$$\hat{\theta}_1^i = \arg\min_{\theta^i \in \Theta_i} \frac{1}{N_1^i} \sum_{k=1}^{N_1^i} \ell_i(\theta^i, \hat{\theta}_1^{-i}, Z_{0,k}^i).$$

步骤 3： 对于所有 $t > 1$，我们随机抽取 N_t^i样本 $\{Z_{t,k}^i\}_{k=1}^{N_t^i} = \{(X_{t,k}^i, Y_{t,k}^i)\}_{k=1}^{N_t^i}$，这些样本来自每个参与者 i 的插件分布映射 $\mathcal{D}(\theta_{t-1})$。

步骤 4： 通过类似的重新过程，其中对每个 $i \in [m]$ 下列方程成立：

$$\hat{\theta}_t^i = \arg\min_{\theta^i \in \Theta_i} \frac{1}{N_t^i} \sum_{k=1}^{N_t^i} \ell_i(\theta^i, \hat{\theta}_t^{-i}, Z_k^i).$$

为简单起见，我们假设对于所有 $t \in \mathbb{T}$ 和 $i \in [m]$，$N_t^i = N$。我们还可以利用所有损失函数的梯度 $G(\theta, Z)$，将上述最小化问题改写为总体层面的变分不等式形式。对于 $G(\theta, Z) = (\nabla_1 \ell_1, \ldots\ldots, \nabla_m \ell_m)$，稳定均衡 θ_{PS} 满足以下一阶条件：

$$0 \in \mathbb{E}_{Z \sim \mathcal{D}(\theta_{PS})} G(\theta_{PS}, Z) + \mathcal{N}_\Theta(\theta_{PS}),$$

基于 RR 方法求解稳定均衡的迭代如下：

$$0 \in \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_t)} G(\theta_{t+1}, Z) + \mathcal{N}_\Theta(\theta_{t+1}).$$

在此问题中，我们假设稳定均衡 θ_{PS} 以及每个时刻 t 的所有模型参数迭代 $\{\theta_t\}_{t=1}$ 都位于各自行动空间的内部。因此，法锥将化为零，一阶条件可简化为

$$0 \in \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_t)} G(\theta_{t+1}, Z) + 0 \implies 0 = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_t)} G(\theta_{t+1}, Z).$$

将 RR 方法得到的参数 θ_{t+1} 在 $t \in \mathbb{T}$ 处的解映射定义为

$$\theta_{t+1} = \mathrm{sol}(\theta_t) = \Pi_\Theta\{y \mid \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_t)} G(y, Z) = 0\},$$

这是一个向量，使得方程组 $\left(\Pi_{\Theta_i}\{y \mid \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta_t)} G_i(y, \theta_{t+1}^{-i}, Z^i) = 0\}\right)_{i=1}^m$ 对每位参与者 $i \in [m]$均成立。参数估计 $\{\theta_t\}_{t=1}$的更新算法定义类似：

$$\hat{\theta}_{t+1} = \widehat{\mathrm{sol}}(\hat{\theta}_t) = \Pi_\Theta \left\{ y \mid \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N G(y, Z_k) = 0, Z_k \sim \mathcal{D}(\hat{\theta}_t) \right\}, \tag{5}$$

其中，估计量 $\hat{\theta}_{t+1}$ 是一个向量，使得方程 $\Pi_{\Theta_i}\{y \mid \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N G_i(y, \hat{\theta}_{t+1}^{-i}, Z_k^i) = 0, Z_k^i \sim \mathcal{D}_i(\hat{\theta}_t)\}$ 对每个 $i \in [m]$均成立。根据定义，我们知道 $\mathrm{sol}(\theta_t) = \theta_{t+1}\widehat{}$，且对于 $t = 0, 1, 2\ldots$，$\mathrm{sol}(\theta_t) = \theta_{t+1}$。

3.2 一致性与渐近正态性

本节的主要结果是我们基于 ERR 的估计量 $\hat{\theta}\{\theta_t\}_{t=1}$ 的渐近正态性。我们首先证明对每个 $t \in \mathbb{T}$，θ_t 趋向于 θ_t 的一致性，然后为该序列建立中心极限定理。我们首先介绍所需的附加假设。

假设3 以下是一致性和渐近正态性所需的附加假设：

1.（局部利普希茨性）假设函数 $G(\theta, Z)$ 在每次迭代 t 的每个 θ_t 处都是局部利普希茨的，即对于每次迭代 $t \in \mathbb{T}$，存在 θ_t 的邻域 U 以及 $L_U(Z) > 0$，使得对所有 $\theta, \theta' \in U$：

$$\|G(\theta, Z) - G(\theta', Z)\| \le L_U(Z)\|\theta - \theta'\|,$$

其中 $\mathbb{E}\|L_U(Z)\|^2 < \infty$。

2.（有界雅可比矩阵）雅可比矩阵具有有界的二阶矩：

$$H_{\theta_{t-1}}(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\|G(\theta, Z)\|^2 < \infty.$$

3.（可微）*Map* $G_\theta(y)$ 在 y 上可微。

4.（强光滑分布）估计量 θ_t 具有一个勒贝格可测的概率密度函数，且对于每个 $t \in \mathbb{T}$，其特征函数均绝对可积。

前三个条件是根据 [39]建立渐近正态性的标准要求。具体而言，局部利普希茨条件1 对于证明一致性和渐近正态性都至关重要。雅可比矩阵有界条件2保证了渐近协方差矩阵的良定义以及中心极限定理的适用性。此外，可微性条件3 使得能够在真实参数处对估计函数进行有效的一阶泰勒展开。遵循 [23], 的框架，我们施加最后一个条件4以控制随机波动在递归迭代中的传播。鉴于时刻 t的估计量由其前一迭代值构造，证明采用两步分解：首先建立给定前一迭代值时当前估计量的条件渐近分布，然后纳入先前估计量的随机性，以推导边际极限分布。

注 2 请注意，这里我们没有对海森矩阵的可逆性施加任何额外假设

$$V_{\theta_{t-1}}(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\left[\frac{\partial G(\theta, Z)}{\partial \theta^\top}\right] \quad is\ nonsingular,$$

尽管这是一致渐近正态性的关键假设，但梯度函数的强单调性已确保了这一点。

在这种情况下，强光滑分布条件是必要的，因为渐近正态性的证明首先要构造 θ_t的条件分布，然后需要利用 θ_{t-1} 的特征函数来恢复边缘分布。

定理 3（一致性与渐近正态性）假设条件 *1*和条件 *3* 成立。记 $J_{sol}(\theta_{t-1})$ 为映射的雅可比矩阵$\mathrm{sol}(\theta)$，则对所有 $t \in \mathbb{T}$，均有：

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_t - \theta_t) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_t),$$

其中协方差矩阵满足：

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1}\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\left(G(\theta_t, Z)G(\theta_t, Z)^\top\right)V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1} + J_{sol}(\theta_{t-1})\Sigma_{t-1}J_{sol}(\theta_{t-1})^T \\ &= \sum_{k=1}^{t}\left[\prod_{j=k}^{t-1}J_{sol}(\theta_j)\right]V_{\theta_{k-1}}(\theta_k)^{-1}\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{k-1})}\left(G(\theta_k, Z)G(\theta_k, Z)^\top\right)V_{\theta_{k-1}}(\theta_k)^{-1}\left[\prod_{j=k}^{t-1}J_{sol}(\theta_j)\right].\end{aligned}$$

定理 3 表明，时间 $t-1$的渐近分布的协方差构成了时间 t协方差结构的一部分。这是直观的，因为 ERRˆ具有递归性质，各估计量天然相互关联，因为每个 θ_t 都是基于前一个估计量所诱导的分布 θ_{t-1}计算得到的。因此， θ_t 的一致性和渐近正态性也都与先前估计量的相应性质密切相关。

3.2.1 协方差的数值估计

根据定理3，我们得到渐近协方差的结果：

$$\Sigma_t = \Sigma + J_{sol}(\theta_{t-1})\Sigma_{t-1}J_{sol}(\theta_{t-1})^T,$$

$$\Sigma = V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1}\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\left(G(\theta_t, Z)G(\theta_t, Z)^\top\right)V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1},$$

其中 $V_{\theta_{t-1}}(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\left[\frac{\partial G(\theta,Z)}{\partial\theta^\top}\right]$。由于底层分布的形式未知，基于分布映射的期望无法计算。这里我们进一步给出 Σ_t 的估计值，用于构造置信区间，并通过证明其一致性来说明这些估计值的有效性。

主要问题是构造雅可比矩阵 $J_{sol}(\theta_{t-1})$ 的估计。我们将导数表示为二元函数 $F(\theta,\ \gamma)$，根据最小化过程可知，$\mathrm{sol}(\theta)$ 是最小化点，因此得到等式：

$$F(\theta, \mathrm{sol}(\theta)) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta)} G(Z;\gamma)|_{\gamma=\mathrm{sol}(\theta)} = 0.$$

记 $p(\theta,\ Z)\ = \mathcal{D}(\theta)$ 为 $(\theta,\ Z)$ 的联合分布，根据隐函数定理，我们有：

$$\begin{aligned}
J_{sol}(\theta_{t-1}) = \frac{\partial \mathrm{sol}(\theta_{t-1})}{\partial\theta^\top} &= -\left[\frac{\partial F(\theta_{t-1},\mathrm{sol}(\theta_{t-1}))}{\partial\gamma^\top}\right]^{-1}\left[\frac{\partial F(\theta_{t-1},\mathrm{sol}(\theta_{t-1}))}{\partial\theta^\top}\right] \\
&= -\left[\frac{\partial \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})} G(Z;\gamma)}{\partial\gamma^\top}\Big|_{\gamma=\mathrm{sol}(\theta_{t-1})}\right]^{-1}\left[\frac{\partial \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})} G(Z;\gamma)}{\partial\theta^\top}\Big|_{\gamma=\mathrm{sol}(\theta_{t-1})}\right] \\
&= -\left[\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\frac{\partial G(Z;\theta_t)}{\partial\gamma^\top}\right]^{-1}\left[\frac{\partial \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})} G(Z;\theta_t)}{\partial\theta^\top}\right] \\
&= -V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1}\cdot\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\left[G(Z;\theta_t)\cdot\nabla_\theta^\top\log p(\theta_{t-1},Z)\right].
\end{aligned}$$

由于我们不知道分布映射的形式，因此无法计算$\nabla_\theta \log\ p(\theta,\ Z)|_{\theta=\theta_{t-1}}$。然而，受到最优点部分中代入法的启发，我们可以先通过分布图谱估计分布映射的形式，然后为 $\nabla_\theta^\top \mathrm{sol}(\theta_{t-1})$ 构造一个插件估计量。同样，我们使用一组参数模型 $\mathcal{D}_\mathcal{B} = \{\mathcal{D}_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ 来刻画未知的分布映射，并估计参数 β。然后，我们用代入的分布映射替代真实分布映射，此时导数函数为

$$\frac{\partial \mathrm{sol}_{\hat\beta}(\theta_{t-1})}{\partial\theta^\top} = -V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1}\cdot\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}_{\hat\beta}(\theta_{t-1})}\left[G(Z;\theta_t)\cdot\nabla_\theta^\top\log p_{\hat\beta}(\theta_{t-1},Z)\right],$$

在可以进行样本估计的情况下。如果分布图谱包含真实的分布映射，我们的估计将精确收敛到真实方差。估计方法及其一致性在定理4中给出。

定理 4 假设 $\mathbb{E}\left\|\frac{\partial G(\theta,Z)}{\partial\theta^\top}\right\|^2 \le \infty$, $\mathbb{E}\|G(\theta,Z)\|^2 \le \infty$ 成立。将经典样本估计量记为：

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_{\hat\theta_{t-1}}(\hat\theta_t) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \frac{\partial G(\hat\theta_t, Z_k)}{\partial\theta^\top}, \\
\widehat{H}(\hat\theta_t) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N (G(\hat\theta_t,Z_k)-L)(G(\hat\theta_t,Z_k)-L)^T, \\
\widehat{M}_{\hat\beta}(\hat\theta_t) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left[G(Z_j;\hat\theta_t)\cdot\nabla_\theta^\top\log p_{\hat\beta}(\hat\theta_{t-1},Z)\right],
\end{aligned}$$

其中 $L_{-} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(\hat{}\theta_t, Z_k)$ *with* $Z_k \sim D(\hat{}\theta_{t-1})$，且 $Z_j \sim D_{\hat{\beta}}(\hat{}\theta_{t-1})$。令使用拟合的 $\hat{}\ \beta$ 得到的估计$\hat{}$雅可比项为 $\hat{}J^{\beta}_{sol}(\hat{}\theta_{t-1}) = -\widehat{V}_{\hat{\theta}_{t-1}}(\hat{}\theta_t)^{-1}\widehat{M}\hat{}^{\beta}(\hat{}\theta_t)$，使用拟合的 β 得到的估计协方差$\hat{}$为：

$$\hat{\Sigma}_t^{\hat{\beta}} = \hat{\Sigma}_1 + \hat{\Sigma}_2 = \widehat{V}_{\theta_{t-1}}(\hat{\theta}_t)^{-1}\widehat{H}(\hat{\theta}_t)\widehat{V}_{\hat{\theta}_{t-1}}(\hat{\theta}_t)^{-1} + \hat{J}^{\hat{\beta}}_{sol}(\hat{\theta}_{t-1})\hat{\Sigma}_{t-1}\hat{J}^{\hat{\beta}}_{sol}(\hat{\theta}_{t-1})^{\top}.$$

我们估计的协方差具有一致性：

$$\hat{\Sigma}_t^{\hat{\beta}} \xrightarrow{P} \Sigma_t^{\hat{\beta}}.$$

如果分布图谱 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{D}_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ 包含真实分布映射，该映射由 β^*参数化，并且我们的建模过程得到的拟合参数 β 收敛到 β^*，则结果可简化为

$$\hat{\Sigma}_t^{\hat{\beta}} \xrightarrow{P} \Sigma_t.$$

3.3 效率

回顾一下，θ_t =sol(θ_{t-1})是仅基于初始点 θ_0 和映射 $\mathcal{D}_{[m]} = \{\mathcal{D}_i : i \in [m]\}$递归定义的。因此，$\theta_t$ 可视为 $\mathcal{D}_{[m]}$的泛函 θ_t =f_t($\mathcal{D}_{[m]}$)。我们将估计 θ_t 的问题称为“半参数”问题，因为我们感兴趣的不是完整映射 $\mathcal{D}_{[m]}$，而只是泛函 $\theta_t = f_t(\mathcal{D}_{[m]})$，并将 $\mathcal{D}_{[m]}$ 中的其余信息视为干扰分量。本节旨在研究递归定义参数 θ_t的半参数效率。本节的结果建立在 H´ajek 和 Le Cam [39], 的经典研究，以及 [10] 关于稳定点 θ_{PS}下界的近期研究之上。然而，我们关注的是递归定义的 θ_t，而稳定点 θ_{PS}虽然可以通过递归过程估计，却并非递归定义。由于 θ_t 是递归定义的，其效率分析比 θ_{PS}的效率分析更为复杂。

为了研究效率，重要的是明确一个能够体现我们对底层分布先验知识的分布空间。为此，我们将可容许的$\tilde{}$分布空间定义为所有满足以下条件的映射 $\mathcal{D}_{[m]}$ 所构成的集合：满足假设1 和 3。

$$\mathscr{D} = \left\{\tilde{\mathcal{D}}_{[m]} = \{\tilde{\mathcal{D}}_i : i \in [m]\} : \tilde{\mathcal{D}}_{[m]} \text{ satisfies Assumptions 1 and 3 for some } \tilde{\epsilon}_i \text{ and } \tilde{\alpha}\right\}.$$

与 [10], 类似，我们作出以下假设，以保证局部参数子模型的存在。

假设 4 设以下假设成立：

1. 空间 $\Theta \times \mathcal{Z}_1 \times \ldots \times \mathcal{Z}_m$ 是紧致的。 *2.* 损失函数 $\ell_i(\theta, Z^i)$ 关于 θ 在 $\Theta \times \mathcal{Z}_1$上二阶连续可微。 *3.* 参数 θ_{t-1} 与稳定点 θ_{PS} 不同。

第一个条件是为简化起见而施加的。在第一个条件下，许多损失函数都满足第二个条件，例如平方损失或逻辑损失。最后一个条件是为了确保 θ_t 的行为与 θ_{PS}不同。

我们记 $\boldsymbol{S}_j^i = \{Z_{j,k}^i : k \in [N_j^i]\}$为在时刻 j，第 i 个参与者在 $\mathcal{D}_i$($\hat{}\theta_{j-1}$) 下观测到的所有 N_j^i样本的集合，并令 $\boldsymbol{S}_{[t]} = \cup_{j\in[t],\ i\in[m]}\boldsymbol{S}_j^i$。我们记 $N_t =_m^1 \sum_{i\in[m]} N_t^i$为在 $\hat{}\ \theta_{t-1}$ 下最后一轮的玩家平均样本量。由于

ˆ观测样本来自估计分布 $\{\mathcal{D}_i(\theta_{j-1}):\ i\in[m],\ j\in[t]\}$，而非真实分布 $\mathcal{D}_i(\theta_{j-1})$，我们仅考虑满足以下条件的一致算法：$\hat{\theta}_j \to \theta_j$ 对 $j\in[t-1]$几乎必然成立。请注意，这一一致性约束较为宽松，ERR算法满足该约束。此外，我们施加经典的正则性ˆ条件 [39]，以确保 θ_t 的极限分布在光滑局部扰动下保持不变。

定义 1 (正则性) 记 $\mathcal{D}^u_{[m]}$ 为 $\mathscr{D}$中由 $u\in\mathbb{R}^d$索引的任意光滑参数子模型，当 $u=0$时，我们假设 $\mathcal{D}^u_{[m]}=\mathcal{D}_{[m]}$。于是，在 $\mathcal{D}^u_{[m]}$ 下，我们令由一系列算法 $\mathcal{A}_j$ 生成的估计量 $\hat{\theta}_j$ 为

$$\hat{\theta}_j=\mathcal{A}_j(\boldsymbol{S}_{[j]}),\quad \boldsymbol{S}^i_j \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{D}^u_i(\hat{\theta}_{j-1}),\quad j\in[t], i\in[m],\quad \hat{\theta}_0=\theta_0.$$

记 $P^u_t=\prod_{i\in[m]}P^u_{\boldsymbol{S}^i_1}\prod_{j=2}^t P^u_{\boldsymbol{S}^i_j|\boldsymbol{S}^i_{j-1}}=\prod_{i\in[m],\ j\in[t]}\mathcal{D}^u_i(\hat{\theta}_{j-1})^{\otimes N^i_j}$为所有样本 $\boldsymbol{S}_{[t]}$的联合分布。我们假设对于 $j\in[t-1]$，$\frac{N_t}{N^i_j}\to\mu^i_{t,\,j}$ 几乎处处成立（相对于 $\hat{\theta}_j\to\theta_j\ P_t$），且ˆ估计量 θ_t 是正则的，即

$$\sqrt{N_t}\big(\hat{\theta}_t-\theta_t^{(1/\sqrt{N_t})}\big)\overset{P_t^{1/\sqrt{N_t}}}{\rightsquigarrow} L,$$

其中，$\theta^{(1/\sqrt{N_t})}\ t$ 是局部子模型下的解，该子模型由 $u=1/\sqrt{N_t}$ 索引；$\overset{P_t^{1/\sqrt{N_t}}}{\rightsquigarrow}$ 表示沿概率测度序列 $P_t^{1/\sqrt{N_t}}$的弱收敛。极限分布 L 不依赖于参数子模型。

根据定义 1，以下定理给出了所有正则算法的半参数下界，并验证了 ERR 算法的最优性。

定理 5（卷积定理）假设条件 *1*、*3*和*4* 成立，则ˆ对于任意正则估计量 θ_t，如定义 *1*所定义，我们有

$$\sqrt{N_t}\big(\hat{\theta}_t-\theta_t\big)\overset{P_t^0}{\rightsquigarrow} W+R,$$

其中 $R\perp\!\!\!\perp W$, $W\sim N(0,\ \Sigma_t)$，并且

$$\Sigma_t=\sum_{j\in[t]}\Bigg(\prod_{k=j}^{t-1}J_{\mathrm{sol}}(\theta_l)\Bigg)\Big\{\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})}\nabla_\theta^\top G\big(\theta_j,Z\big)\Big\}^{-1}\operatorname{diag}\Big\{\mu^i_{t,j}\operatorname{Cov}_{\mathcal{D}_i(\theta_{j-1})}\big(G_i(\theta_j,Z^i)\big):i\in[m]\Big\}$$
$$\cdot\Big\{\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})}\nabla_\theta^\top G\big(\theta_j,Z\big)\Big\}^{-\top}\Bigg(\prod_{k=j}^{t-1}J_{\mathrm{sol}}(\theta_l)\Bigg)^\top.$$

注 3 注意，对于每个参与者 $i\in[m]$，数据收集过程彼此独立，因此我们有以下等价关系。

$$\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})}\Big\{G(\theta_j,Z)G(\theta_j,Z)^\top\Big\}=\operatorname{diag}\Big\{\mu^i_{t,j}\operatorname{Cov}_{\mathcal{D}_i(\theta_{j-1})}\big(G_i(\theta_j,Z^i)\big):i\in[m]\Big\}.$$

这种独立性是直观的：在竞争环境中，每个智能体都会自主制定自己的策略。因此，支持每个智能体进行决策的数据应独立收集，不与其他智能体共享。

由于我们已对所有 t 设置了 $N_t^i = N$，因此对于每个参与者 i，在所有 t 和 j 处都有 $N_t = \frac{1}{m}\sum_{i\in[m]} N_t^i = N$ 和 $\frac{N_t}{N_j^i} \to \mu_t$、$_j = \overline{1}$。根据定义 7.13]，中的勒夫纳序 [22,，我们有 Var$(W+R) \succeq \Sigma_t$，因此 $\sqrt{N}\big(\hat{}\theta_t - \theta_t\big)$ 的渐近协方差下界为极限高斯变量 W 的协方差。由定理 3 可知，如果算法序列 $\mathcal{A}_j$ ˆ 采用重复再训练，且迭代估计 θ_t 由经验重复再训练生成，那么渐近协方差 Σ_t 恰好达到这一界 Σ_t'。因此，ERR 估计程序在估计重复风险最小化器序列 $\{\theta_t\}_{t=1}$ 时具有渐近最优性。

4 纳什均衡

尽管已有若干有效方法可用于在单人和多人情形下求解行为最优性，但目前尚未开发出构造其估计量的算法。如上所述，代入优化为求得施为最优点提供了一种有效方法，因为一旦拟合出参数，底层分布便已确定。受此启发，我们提出了一种通用估计程序，称为重新校准插件估计，将代入优化框架与 RePPI 的构造思路相结合。

4.1 重新校准代入法

本节首先构造分布参数β^*的估计程序，然后基于拟合得到的分布映射 $\mathcal{D}_{\hat{\beta}}$，构造插件最优解的估计程序。我们分别给出这两个估计量的渐近性质，随后说明它们如何在最终的渐近保证中相互关联。这种两阶段分析突显了代入式行为优化的层次结构，并阐明了两种估计之间的依赖关系。

4.1.1 β 的估计：重新校准估计

我们首先介绍分布参数 β 的估计程序，其灵感来自 [20] 最近的研究。他们提出的重新校准的预测增强推断（RePPI）方法，旨在估计与我们类似的统计量，并已证明在所有可比较的算法中具有有效性。因此，我们预计，借鉴他们的见解，我们对 β 的估计能够达到下界。然而，我们的设定存在根本差异：它不涉及有标签与无标签数据，也不依赖预训练模型的预测。因此，遵循替代结局相关文献 [6, 7, 36]，的研究结果，我们使用一种专门设计的 插补损失 来构造损失函数。正如第 4.3 节所示，这种插补损失与目标分布参数的有效影响函数密切相关。

将为参与者 i 拟合 ˆ β_i 的损失函数记为 $r_i(\theta,\ Z^i;\ \beta_i)$，将 θ 与 Z^i 的联合分布记为 $p_i(\theta,\ Z^i)$。对于参与者 i，记 $r_{i,\ \theta}(\theta;\beta_i)$ 为给定 θ 时 $r_i(\theta,\ Z^i,\ \beta_i)$ 的条件期望

$$r_{i,\theta}(\theta;\beta_i) = \mathbb{E}_{Z^i|\theta\sim\mathcal{D}_i(\theta)} r_i(\theta, Z^i;\beta_i).$$

为了适配我们的问题，我们构造一个主要风险函数（6），它可以看作PPI估计量的一个修正变体，并旨在针对分布

每个 $i \in [m]$的参数:

$$\arg\min_{\beta_i \in \mathcal{B}_i} \frac{1}{N_i} \sum_{k \in [N_i]} \left\{ r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i) - \nabla_{\beta_i}^\top r_{i,\theta}(\theta_k; \beta_i^*)\beta_i \right\} + \mathbb{E}_{D_\theta} \nabla_{\beta_i}^\top r_{i,\theta}(\theta; \beta_i^*)\beta_i. \tag{6}$$

注意 t hat 的结构 (6) 确保其对原始风险的无偏性 $\mathbb{E}_{p_i(\theta}$ $_{,Z^i)} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)$.

由于联合分布 $p_i(\theta, Z^i)$ 未知，导数 $\nabla_{\beta_i}^\top r_{i,\theta}(\theta,\beta_i^*)$ 无法计算。为应对这一挑战， [20] 建议采用灵活的机器学习算法来估计条件期望

$$s_i(\theta) \triangleq \mathbb{E}_{Z^i}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \tilde{\beta}_i)|\theta\right],$$

˜其中 β_i 是目标参数的初始估计量。所得估计量记为 ˆ$s_i(\theta)$。关键洞见在于，若 ˆ$s_i(\theta)$ 能够一致地估计 $s_i(\theta)$，则最终的 ˆ 估计量 β_i 以 ˆ$s_i(\theta)$ 代替真实条件期望来构造，仍与直接使用 $s_i(\theta)$ 生成的理想估计量保持一致。此外，ˆ$s_i(\theta)$ 的一致性是在适当正则条件下实现我们估计的半参数效率的必要条件，这意味着该估计量在所有正则估计量中达到尽可能低的渐近方差。

此步骤涉及在分布 $\mathcal{D}_i(\theta)$ 下估计条件期望，这比直接估计完整分布 $\mathcal{D}_i(\theta)$本身容易得多。然而，由于计算复杂度较高，在没有额外假设的情况下，所得估计量 ˆ$s_i(\theta)$ 可能是渐近有偏的。因此，将 ˆ$s_i(\theta)$ 直接代入目标函数未必能提高估计精度。事实上，当存在此类偏差时，所得估计量的渐近方差甚至可能超过仅基于经验风险最小化的估计量。为缓解这一问题，我们借鉴了 [16] 中提出的最优控制变量思想。具体而言，我们应用一个矩阵，使损失梯度 $\nabla_{\beta_i} r_i(\theta,\ Z_i;\ \beta_i^*)$ 与估计的校正项 ˆ$s_i(\theta)$ 去相关，定义如下:

$$\hat{M}_i = \widehat{\mathrm{Cov}}\big(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \tilde{\beta}_i), \hat{s}_i(\theta)\big)\widehat{\mathrm{Cov}}\big(\hat{s}_i(\theta)\big)^{-1},$$

ˆ，其中两个协方差项均通过经验方式估计。通过在我们的估计程序中将 M_i 与所得估计量 ˆ$s_i(\theta)$ 结合，我们有效确保该估计量相较于基于经验风险的估计量具有更高的效率。

此外，由于（6）中的最后一个积分通常因其复杂性而无法直接计算，我们分别采用蒙特卡洛方法，用样本均值对其进行近似。我们稍后将证明，对该积分单独使用蒙特卡洛方法不会影响渐近方差。将最后一个˜ ˜ ˜积分的蒙特卡洛样本记为 $\{\theta_k :\ \theta_k \sim \mathcal{D}_\theta,\ k \in [\tilde{N}_i]\}$，则用于估计分布参数 β_i 的最终目标风险函数变为

$$\arg\min_{\beta_i \in \mathcal{B}_i} \mathcal{L}_i(\beta_i) = \frac{1}{N_i} \sum_{k \in [N_i]} \left\{ r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i) - \frac{\tilde{N}_i}{N_i + \tilde{N}_i} \beta_i^\top \hat{M}_i \hat{s}_i(\theta_k) \right\} + \frac{1}{N_i + \tilde{N}_i} \sum_{k \in [\tilde{N}_i]} \beta_i^\top \hat{M}_i \hat{s}_i(\tilde{\theta}_k). \tag{7}$$

注意，这里我们对每个 i设定 $N_i = N$ 。

在实践中，我们根据 [20] 中的研究，采用三折交叉拟合程序，以消除这些嵌套估计步骤之间的依赖关系。估计程序总结于算法 2中。

算法 2分布参数的重新校准估计

输入：数据 $\{(\theta_k,\ Z_k^i):\ i\in[m],\ k\in[N]\}$ 以及蒙特卡洛样本 $\{\tilde{\theta}_k:\ k\in[\tilde{N}_i]\}$。**输出：**参与者 i 的交叉拟合估计量 β_i。**步骤 1：**将数据 $\{(\theta_k,\ Z_k^i):\ i\in[m],\ k\in[N]\}$ 随机划分为三部分 $\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$ 和 $\mathcal{M}_3$。**步骤 2：**在 $\mathcal{M}_3$ 上，计算初始估计量

$$\tilde{\beta}_i^{(1)}=\arg\min_{\beta_i\in\mathcal{B}_i}\frac{1}{|\mathcal{M}_3|}\sum_{(\theta,Z^i)\in\mathcal{M}_3}r_i(\theta,Z^i;\beta_i).$$

步骤 3：在 $\mathcal{M}_2$ 上，使用任意机器学习算法估计 $\mathbb{E}[\nabla_{\beta_i}r_i(\theta,\ Z^i;\ \tilde{\beta}_i^{(1)})|\theta]$，记为 $\hat{s}_i^{(1)}(\theta)$。

步骤 4：在 $\mathcal{M}_1$上，计算

$$\hat{M}_i^{(1)}=\widehat{\mathrm{Cov}}\big(\nabla_{\beta_i}r_i(\theta,Z^i;\tilde{\beta}_i^{(1)}),\hat{s}_i^{(1)}(\theta)\big)\widehat{\mathrm{Cov}}\big(\hat{s}_i^{(1)}(\theta)\big)^{-1}.$$

其中 Cov 表示样本协方差矩阵。**步骤 5：**在 $\mathcal{M}_1$ 和蒙特卡洛数据上，求解

$$\hat{\beta}_i^{(1)}=\arg\min_{\beta_i\in\mathcal{B}_i}\frac{1}{|\mathcal{M}_1|}\sum_{(\theta,Z^i)\in\mathcal{M}_1}\left\{r_i(\theta,Z^i;\beta_i)-\frac{\tilde{N}_i}{N_i+\tilde{N}_i}\beta_i^\top\hat{M}_i^{(1)}\hat{s}_i^{(1)}(\theta)\right\}$$
$$+\frac{1}{N_i+\tilde{N}_i}\sum_{k\in[\tilde{N}_i]}\beta_i^\top\hat{M}_i^{(1)}\hat{s}_i^{(1)}(\tilde{\theta}_k).$$

步骤 6：通过折叠轮换重复步骤 2-5：$(\mathcal{M}_2,\ \mathcal{M}_3,\ \mathcal{M}_1)$ 和 $(\mathcal{M}_3,\ \mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2)$，得到 $\hat{\beta}_i^{(2)}$ 和 $\hat{\beta}_i^{(3)}$。**步骤 7：**将最终估计量计算为 $\hat{\beta}_i=\sum_{j\in[3]}\frac{|\mathcal{M}_j|}{N}\hat{\beta}_i^{(j)}$。

重新校准估计方法的好处有两方面，如注记5所示。首先，我们无需对条件期望 $s(\theta)$ 作严格的模型假设，并且可以用任意机器学习算法来估计它。无论$\hat{s}_i$表现如何，最终估计量 β_i 始终至少与 [24], 中由经典经验风险最小化得到的估计量一样好。其次，如果$\hat{s}_i(\theta)$ 确实是$\hat{}$条件期望的相合估计量，那么 β_i 可以被证明是有效的。这一性质对我们的问题至关重要，因为我们对真实分布映射 $\mathcal{D}_i$不作任何假设，从而极难准确估计条件期望。因此，在此设定下使用重新校准估计方法是合适的。

4.1.2 $\theta_{PO}^{\beta^*}$的估计：重要性采样

$\hat{}$给定拟合的分布参数 β_i，我们现在转而估计插件纳什均衡。基于插件式参与优化的形式，即以代入映射 $\mathcal{D}_\beta$替代真实分布映射 $\mathcal{D}(\theta)$，我们用同样的方法构造纳什均衡的形式。

定义 2（代入纳什均衡）如果对于行为预测集及其代入分布映射 $\mathcal{D}_\beta$，向量 $\theta_{PO}^{\beta}\in\mathbb{R}^d$ 被称为代入纳什均衡，当且仅当对每个

$i \in [m]$，以下条件成立：

$$\theta_{PO}^{\beta_i} = \arg\min_{\theta^i \in \Theta_i} \mathbb{E}_{Z^i \sim \mathcal{D}_{\beta_i}(\theta^i, \theta_{PO}^{\beta_{-i}})} \ell_i(\theta^i, \theta_{PO}^{\beta_{-i}}, Z^i), \quad \forall i \in [m].$$

ˆ 尽管有了拟合的分布参数 β，分布映射 $D_{\hat{\beta}_i}(\theta)$ 的确切形式现已已知，但其概率密度函数仍取决于未知的模型参数 θ，因此，收集样本以进行估计成了一个棘手的问题。为了解决这一问题，我们希望找到一种方法，即使可用样本是从另一个更简单且固定的分布中抽取的，也能准确估计我们关注的期望。直观上，可以用更先进的蒙特卡罗方法来解决这一问题。然而，马尔可夫链蒙特卡罗方法和序贯蒙特卡罗方法对于我们的场景而言往往过于复杂。另一方面，拒绝采样和反演法等经典蒙特卡罗方法并不实用，因为它们在执行过程中需要计算密度函数，而这在自我影响场景中是不可行的。因此，我们采用重要性采样。通过对样本进行适当的重新加权，该方法使我们能够构造目标期望的无偏估计量。

假设 $\mathcal{D}_i(\theta)\ell(\theta, Z)$ 的支撑集包含于提议分布 $q_i(z)$ 的支撑集中。由于我们已知 $\mathcal{D}_{\hat{\beta}}(\theta)$ 的概率密度函数，因此通过重要性采样，我们将每个 i 的风险函数改写为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{PR}^{\hat{\beta}_i}(\theta) = \mathbb{E}_{D_{\hat{\beta}_i}(\theta)} \ell_i(Z^i; \theta) &= \int_{\mathbb{Z}_i} D_{\hat{\beta}_i}(z^i; \theta) \cdot \ell_i(z^i; \theta) dz^i \\
&= \int_{\mathbb{Z}_i} q_i(z) \cdot \frac{D_{\hat{\beta}_i}(z^i; \theta)}{q_i(z^i)} \ell_i(z^i; \theta) dz^i \\
&= \mathbb{E}_{Z^i \sim q_i(z)} \left[\frac{D_{\hat{\beta}_i}(Z^i; \theta)}{q_i(Z^i)} \ell_i(Z^i; \theta) \right].
\end{aligned}$$

此时，底层分布不再依赖于 θ，而是一个固定且已知的分布 $q_i(\cdot)$。于是，我们可以将估计简化如下：

$$\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}_i} = \arg\min_{\theta^i \in \Theta_i} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathcal{D}_{\hat{\beta}_i}(\theta^i, \hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}_{-i}}, Z_k^i)}{q_i(Z_k^i)} \ell_i(\theta^i, \hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}_{-i}}, Z_k^i) \right), \quad \forall i \in [m],$$

其中 $Z_k^i \sim q_i(z)$。为简单起见，我们令所有 $n_i = n$。注意，由于提议分布 $q_i(\cdot)$ 已知，我们总能令蒙特卡洛样本数 $n_i = O(N^\alpha)$ 满足 $\alpha > 1$，其中 N 是用于拟合分布映射的样本量。样本量之间的这一关系对于后续定理中的渐近正态性至关重要。

值得注意的是，重要性采样仅适用于插件设定，而不适用于原始的自我影响场景，因为真实分布映射 $\mathcal{D}_i$ 的概率密度函数未知。相比之下，在插件框架下，分布 $\mathcal{D}^{\hat{}\beta_i}$ 已知且完全确定。由于 $\mathcal{D}_{\hat{\beta}_i}$ 通常是决策参数 θ的函数，因此我们可以明确表示数据分布对参数的依赖关系。这一结构促使我们进行重要性采样；采样后，依赖于参数的分布将作为损失函数的一部分出现，而参数 θ 则从数据生成过程中转移到目标损失函数中，使问题更易处理。

类似地，我们将问题改写为一阶条件形式。将经过重要性采样后的损失函数记为：

$$g(\theta, Z, \beta) = (g_1(\theta, Z^1, \beta_1), ..., g_m(\theta, Z^m, \beta_m)) = \left(\frac{\mathcal{D}_{\beta_1}(\theta, Z^1)}{q_1(Z^1)} \ell_1(\theta, Z^1), ..., \frac{\mathcal{D}_{\beta_m}(\theta, Z^m)}{q_m(Z^m)} \ell_m(\theta, Z^m) \right),$$

并将梯度函数向量表示为 $G(\theta, Z, \beta) = (\nabla_1 g_1, ..., \nabla_m g_m)$。假设代入纳什均衡 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 的相应分量位于 Θ的内部，则此处的法锥同样退化为零。因此，基于真实分布参数 β^* 和拟合得到的分布参数 β 的插件最优性解映射为

$$\begin{aligned}
\theta_{PO}^{\beta^*} &= \mathrm{sol}(\beta^*) = \Pi_\Theta\{\theta \mid \mathbb{E}_{Z\sim q(Z)} G(\theta, Z, \beta^*) = 0\} = \left[\Pi_{\Theta_i}\{\theta \mid \mathbb{E}_{Z^i\sim q_i(Z^i)} G_i(\theta, \theta_{PO}^{\beta^*_{-i}}, Z^i, \beta_i^*) = 0\}\right]_{i=1}^m, \\
\theta_{PO}^{\hat{\beta}} &= \mathrm{sol}(\hat{\beta}) = \Pi_\Theta\{\theta \mid \mathbb{E}_{Z\sim q(Z)} G(\theta, Z, \hat{\beta}) = 0\} = \left[\Pi_{\Theta_i}\{\theta \mid \mathbb{E}_{Z^i\sim q_i(Z^i)} G_i(\theta, \theta_{PO}^{\hat{\beta}_{-i}}, Z^i, \hat{\beta}_i) = 0\}\right]_{i=1}^m,
\end{aligned} \tag{8}$$

我们的估计代入最优性解映射为

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} = \widehat{\mathrm{sol}}(\hat{\beta}) &= \Pi_\Theta \left\{ \theta \mid \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n G(\theta, Z_k, \hat{\beta}) = 0, Z_k \sim q(z) \right\} \\
&= \left[\Pi_\Theta \left\{ \theta \mid \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n G_i(\theta, \hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}_{-i}}, Z_k^i, \hat{\beta}_i) = 0, Z_k^i \sim q_i(z) \right\} \right]_{i=1}^m .
\end{aligned} \tag{9}$$

4.2 一致性与渐近正态性

本节重点建立分布参数和插件表现最优点估计的中心极限定理。请注意，我们的结果并非直接针对真实纳什均衡 θ_{PO}，而是针对最佳代入纳什均衡 $\theta_{PO}^{\beta^*}$，因为此处每次最小化所依据的底层分布都是错设分布映射 $\mathcal{D}_\beta(\theta)$。不过，在4.4 节中，我们将证明，在满足某些条件时，对代入最优点 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 的推断研究对于真实最优性是有效的。

我们首先建立 β_i 对每个参与者的渐近正态性。为得到渐近正态性，目标函数（7）需要满足以下假设，这些假设与 [3]中给出的假设类似。

假设 5 假设对于每个参与者 i，损失函数 $r_i(\theta, Z^i; \beta_i)$、其梯度$\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i)$ 以及用于拟合分布映射的插补损失函数 $h_i(\theta, Z^i, \beta_i) = \beta_i^\top \hat{} M_i \hat{} s_i(\theta)$ 满足：

1.（局部利普希茨） $r_i(\theta, Z^i; \beta_i)$ 、 $\nabla r_i(\theta, Z^i; \beta_i)$ 以及 $h_i(\theta, Z^i, \beta_i)$ 在 β_i^*附近均为局部利普希茨函数，也就是说，对于 $\beta_i \in \mathcal{B}_i$，存在 β_i^* 的一个邻域 U_i 以及常数$L_{U_1}^i > 0$、$L_{U_2}^i > 0$ 和 $L_{U_3}^i > 0$，使得对于所有 β_1、$\beta_2 \in U_i$:

$$\|r_i(\theta, Z^i; \beta_1) - r_i(\theta, Z^i; \beta_2)\| \le L_{U_1}^i(\theta, Z^i)\|\beta_1 - \beta_2\|,$$

$$\|\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_1) - \nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_2)\| \le L_{U_2}^i(\theta, Z^i)\|\beta_1 - \beta_2\|,$$

$$\|h_i(\theta, Z^i; \beta_1) - h_i(\theta, Z^i; \beta_2)\| \le \|\hat{M}_i \hat{s}_i(\theta)\|\|\beta_1 - \beta_2\|,$$

with $\mathbb{E}(L_{U_1}^i(\theta, Z^i) + L_{U_2}^i(\theta, Z^i) + \|\hat{M}_i \hat{s}_i(\theta)\|) < \infty$.

2.（可微）函数 $r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)$ 、 $\nabla r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)$ 以及 $h_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)$ 在β_i^*处关于 β_i 可微。

3.（可逆性与正定性）海森矩阵 $H_i(\beta_i^*) = \mathbb{E}[\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)]$是非奇异的，且两个协方差矩阵协方差 $\nabla_{\beta_i}(r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*))$ 与协方差$(\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} \nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*))$是正定的。

4.（凸性）损失函数 $r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)$ 在 β_i 上以参数 γ_i强凸，且函数 $h_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)$ 关于 β_i是凸的。

在关于目标函数（7）的必要假设下，我们可以为我们的估计量建立中心极限定理，如定理 6。

定理 6 假定假设 *5* 成立。若样本量满足 $\frac{N}{\tilde{N}_i} \to 0$，且$\mathbb{E}\|\hat{s}_i(\theta) - s_i(\theta)\|^2 \xrightarrow{p} 0$ 对某个 $s(\theta)$，我们有如下中心极限定理：

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_i - \beta_i^*) \xrightarrow{P} N(0, \Sigma_{\beta_i}).$$

此外，如果 $s_i(\theta) = s_i^*(\theta) = \mathbb{E}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)|\theta\right]$，则渐近协方差为

$$\Sigma_{\beta_i} = H_i(\beta_i^*)^{-1} V_i(\beta_i^*) H_i(\beta_i^*)^{-1},$$
$$V_i(\beta_i^*) = \mathrm{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\right) - \mathrm{Cov}\left(\mathbb{E}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)|\theta\right]\right).$$

注释 4 注意，当 $\frac{N}{\tilde{N}_i} \to r_i$成立时，渐近协方差有一个更一般的结果：

$$\Sigma'_{\beta_i} = H_i(\beta_i^*)^{-1} \left(\mathrm{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\right) - \frac{1}{1+r_i} \mathrm{Cov}\left(\mathbb{E}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)|\theta\right]\right)\right) H_i(\beta_i^*)^{-1}.$$

由于用于蒙特卡洛的样本 θ 取自已知分布 $\mathcal{D}_\theta$，蒙特卡洛样本的数量可以由我们独立于样本数量N进行指定。因此，我们始终可以令 $\tilde{N}_i = O(N^\alpha)$满足 $\alpha > 1$，所以 $\frac{N}{\tilde{N}_i} \to 0$始终成立，且协方差矩阵 Σ'_{β_i} 可化简为 Σ_{β_i}。

备注*5* 定理 *6* 突出说明了在此设定下采用再校准估计方法的两个重要优势。如果 $\hat{s}_i(\theta)$ 与真实条件期望 $\hat{s}_i(\theta)$ 一致，则 β_i 是最优估计。如果 $\hat{s}_i$ 是渐近有偏的，即 $\hat{s}_i$ 在某个其他 $\tilde{s}_i$附近一致，则条件期望的协方差仍为正，从而确保不等式 $V_i(\beta_i^*) \leq$协方差 $\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\right)$。

注释 6 该研究 *[24]* 将经验风险最小化作为拟合的主要选择β_i

$$\hat{\beta}_i \triangleq \arg\min_{\beta_i \in \mathcal{B}_i} \frac{1}{N} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i),$$

其中 $(\theta_k, Z_k^i) \sim p_i(\theta, Z^i)$。通过类似的证明过程，我们知道$\hat{}\ \beta_i$的一致性成立，且渐近协方差为

$$\Sigma_{\beta_i} = H_i(\beta_i^*)^{-1} \mathrm{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\right) H_i(\beta_i^*)^{-1}.$$

由于 $V_i(\beta_i^*) \leq$协方差 $\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta,\ Z^i;\ \beta_i^*)\right)$ 始终由备注*5*得出，我们证明了我们的估计量至少与由方法生成的分布参数估计量一样好，该方法见 *[24]*。

现在，我们为插件纳什均衡 θ_{PO}^{β}建立中心极限定理。除了假设5中所述的假设外，我们还需要对梯度函数 $G(\theta, Z; \beta)$作出若干额外假设，具体见假设6。

假设6 假设修正后的梯度函数 $G(\theta, Z; \beta)$ 满足：

1.（可微）*Map* $\mathrm{sol}(\beta)$ 关于 β 在 β^*处可微。

2.（局部利普希茨）函数 $G(\theta, Z, \beta)$ 在 θ_{PO}^{β} 上局部利普希茨。

3.（有界雅可比矩阵）雅可比矩阵具有有界的二阶矩 $\theta_{PO}^{\beta^*}$：

$$\mathbb{E}_{Z\sim q(z)}\|G(\theta_{PO}^{\beta^*}, Z, \beta)\|^2 < \infty.$$

4.（正定）海森矩阵的期望存在，并且在$\theta_{PO}^{\beta^*}$处具有满秩：

$$V_\beta(\theta_{PO}^{\beta^*}) = \mathbb{E}_{Z\sim q(z)}\left[\frac{\partial G(\theta_{PO}^{\beta^*}, Z, \beta)}{\partial \theta^T}\right] \quad is\ nonsingular.$$

5.（强光滑分布）估计量 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta}$ 和 β 具有勒贝格可测概率密度函数，且其特征函数绝对可积。

前四个假设遵循 M 估计量渐近正态性的经典框架：可微性和局部利普希茨性确保一阶线性化有效，极限雅可比矩阵的非奇异性保证识别，而有限二阶矩条件则允许根据 [39, 定理 5.21]应用中心极限定理。同样，行为最优性的估计量是基于拟合的分布参数通过代入方法构造的。因此，代入估计量的渐近分析自然分为两个阶段：首先，我们证明给定分布参数时，代入估计量具有条件渐近正态性；随后，将这一结果与分布参数自身的渐近正态性结合起来，推导出行为最优性估计量的边际渐近分布。最后一个条件 5 确保这第二步有效。

如估计方程（9）所示，代入估计量与分布映射参数的估计量密切相关。这种联系表明，估计量的渐近结果 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta_i}$ 应受到 $\hat{\beta}_i$渐近结果的影响。下面的定理 7 证实了这一点，表明协方差矩阵 $\hat{\Sigma}_\beta$ 对于 β 构成了代入估计量渐近协方差结构的关键组成部分。

定理7 设假设*5*与假设*6*成立。记 $s_i^*(\theta) = \mathbb{E}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)|\theta\right]$以及雅可比矩阵 $J_{sol}(\beta)$（即 *Map* $\mathrm{sol}(\beta)$的雅可比矩阵），若样本量满足$\frac{N}{n} \to 0$ 与$\frac{N}{\tilde{N}_i} \to 0$，且 $\mathbb{E}\|\hat{s}_i^{(j)} - s_i^*\|^2 \xrightarrow{P} 0$对 $j = 1$、2、3成立，则最优解满足$\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} \xrightarrow{p} \theta_{PO}^{\beta^*}$，且我们有

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\beta^*}) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

其中

$$\Sigma = (J_{sol}(\beta^*))\Sigma_\beta(J_{sol}(\beta^*))^T,$$

$$\Sigma_\beta = \mathrm{diag}\{H_i(\beta_i^*)^{-1}\left(\mathrm{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*)\right) - \mathrm{Cov}\left(s_i^*(\theta_k)\right)\right) H_i(\beta_i^*)^{-1}\}.$$

注 7 这里，估计插件最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 所需的样本量 n 由我们独立于估计最佳分布参数 β^*所需的样本量 N 来选取，因为重要性采样中的提议分布我们完全已知，因此同样可以始终有 $n = O(N^{\alpha})$ ，且 $\alpha > 1$。因此，样本量之比始终可以满足 $\frac{N}{n} \to 0$。

—

ˆ需要注意的是，尽管估计重要性抽样中的 $\hat{}\theta_{PO}^{\beta}$ 所需的直接样本量为 n，但我们的定理中真正的尺度与联合数据的样本量 N 有关。回想一下，我们有 $\theta_{PO}^{\beta} = \text{sol}(\beta)$，因此它是参数 β 的确定性函数。根据定义，由于 β 本身是 (θ, Z) 的联合分布的泛函，因此 θ_{PO}^{β} 也是该联合分布的泛函。因此，我们估计的不确定性应按 $o(N)$ 的尺度进行量化，而非 $o(n)$；其中， N 表示联合数据对 (θ_k, Z_k^i) 的样本量，而 n 表示估计代入纳什均衡的样本量。

4.2.1 协方差的数值估计

对于分布图谱参数 β，其渐近协方差为

$$\Sigma_\beta = \text{diag}\{H_i(\beta_i^*)^{-1} V_i(\beta_i^*) H_i(\beta_i^*)^{-1}\},$$

其中， $H_i(\beta_i^*) = \mathbb{E}[\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)]$，且 $V_i(\beta_i^*) =$协方差 $\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\right)$–协方差 $\left(\mathbb{E}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)|\theta\right]\right)$。由于这些闭式表达式难以直接计算，我们同样采用经典的样本估计作为替代，并通过其一致性性质说明这些估计的有效性。

定理 8 假设条件 $\mathbb{E}\|\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\|^2 \le \infty$, $\mathbb{E}\|\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\|^2 \le \infty$ 以及 $\sup_\theta \mathbb{E}\left[\|\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\|^2|\theta\right] \le \infty$ 成立。将经典样本估计量记为：

$$\hat{H}_i(\beta_i^*) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*)\right],$$

$$\hat{V}_a(\beta_i^*) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\nabla r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - L_i^*\right)\left(\nabla r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - L_i^*\right)^T,$$

$$\hat{V}_b(\beta_i^*) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\nabla r_i(\theta_k, Z_{k,j}^i; \beta_i^*) - W_i^*\right)\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\nabla r_i(\theta_k, Z_{k,j}^i; \beta_i^*) - W_i^*\right)^T,$$

其中，样本 (θ_k, Z_k^i) 和 $(\theta_k, Z_{k,j}^i)$ 独立同分布于 $D_\theta \times D_i(\theta_k)$，并且

$$L_i^* = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\nabla r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*),$$

$$W_i^* = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\nabla r_i(\theta_k, Z_{k,j}^i; \beta_i^*).$$

设我们对分布参数 $\hat{}\,\Sigma_\beta = \text{diag}\{\,\hat{}H_i(\beta_i^*)^{-1}(\hat{}V_a(\beta_i^*) - \hat{}V_b(\beta_i^*))\,\hat{}H_i(\beta_i^*)^{-1}\}$ 的协方差估计为，则可得其一致性：

$$\hat{\Sigma}_\beta \xrightarrow{P} \Sigma_\beta.$$

对于代入最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$，其渐近协方差为

$$\Sigma = (J_{sol}(\beta^*))\Sigma_\beta(J_{sol}(\beta^*))^T.$$

我们同样使用隐函数定理。首先记满足以下条件的二元函数的导数为

$$F(\beta, \mathrm{sol}(\beta)) = \mathbb{E}_{Z\sim q(z)} G(Z, \theta; \beta)|_{\theta=\mathrm{sol}(\beta)} = 0.$$

对 β_i 求导，得到：

$$\begin{aligned} J_{sol}(\beta) = \frac{\partial \mathrm{sol}(\beta^*)}{\partial \beta^\top} &= -\left[\frac{\partial F(\beta^*, \mathrm{sol}(\beta^*))}{\partial \theta^\top}\right]^{-1}\left[\frac{\partial F(\beta^*, \mathrm{sol}(\beta^*))}{\partial \beta^\top}\right] \\ &= -\left[\frac{\partial \mathbb{E}_{Z\sim q(z)} G(Z, \theta; \beta^*)}{\partial \theta^\top}|_{\theta=\mathrm{sol}(\beta^*)}\right]^{-1}\left[\frac{\partial \mathbb{E}_{Z\sim q(z)} G(Z, \theta; \beta^*)}{\partial \beta^\top}|_{\theta=\mathrm{sol}(\beta^*)}\right] \\ &= -\left[\mathbb{E}_{Z\sim q(z)} \frac{\partial G(Z, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \theta^\top}\right]^{-1}\left[\mathbb{E}_{Z\sim q(z)} \frac{\partial G(Z, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \beta^\top}\right]. \end{aligned}$$

根据分布图谱的定义，我们知道分布映射 $\mathcal{D}_{\beta_i^*}(\cdot)$ 的分布密度函数形式，因此可以计算损失函数的导数，进而同样可以为每一项构造样本估计，而大数定律保证了其一致性

定理9 假设 $\mathbb{E}_{Z\sim q(z)}\left\|\frac{\partial G(Z,\theta_{PO}^{\beta^*};\beta^*}{\partial \theta^\top}\right\|^2 \leq \infty)$ 和 $\mathbb{E}_{Z\sim q(z)}\left\|\frac{\partial G(Z,\theta_{PO}^{\beta^*};\beta^*}{\partial \beta^\top}\right\|^2 \leq \infty)$ 成立。将经典样本估计量记为：

$$\hat{J}_1(\beta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial G(Z_k, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \theta^\top}\right],$$

$$\hat{J}_2(\beta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial G(Z_k, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \beta^\top}\right],$$

其中样本为 $Z_k \overset{i.i.d.}{\sim} q(z)$。令 $\hat{J}_{sol}(\beta) = -\hat{J}_1(\beta)^{-1}\hat{J}_2(\beta)$，并将插件最优解的协方差估计记为 $\hat{\Sigma} = \hat{J}_{sol}(\beta)^{-1}\hat{\Sigma}_\beta\hat{J}_{sol}(\beta)^{-1}$，则可以得到一致性结果：

$$\hat{\Sigma} \xrightarrow{P} \Sigma.$$

4.3 效率

风险函数中的插补损失（6）并非随机选择的。相反，它是根据目标参数的有效影响函数（EIF）构造的。这种校准确保所得估计量达到渐近协方差的下界。本节将通过推导 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 的有效影响函数，研究其估计的半参数效率，分别针对 $\beta^* = (\beta_1^{*\top}、\ldots\ldots、\beta_m^{*\top})^\top$ 和 $\theta_{PO}^{\beta^*}$。

回想一下，$\theta_{PO}^{\beta^*} = \mathrm{sol}(\beta^*)$ 是 β^* 的函数，而 β_i^* 是联合分布 $\mathcal{D}_i(\theta) \times \mathcal{D}_\theta$ 的泛函，因此 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 也是联合分布 $\mathcal{D}_\theta \times \prod_{i\in[m]} \mathcal{D}_i(\theta)$ 的泛函。注意，一旦指定了 β，映射 $\mathrm{sol}(\beta)$ 就完全确定了，因为此时 θ 的目标函数 $\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}_\beta(\theta)} G(\theta, Z)$ 已知，无需进一步估计。因此，当 $\theta_{PO}^{\beta} = \mathrm{sol}(\beta)$ 在 β^* 处关于 β 可微时，定理25.47 中

[39] 意味着只需研究估计 β^*的效率。随后，通过 Delta 方法即可直接得到 $\theta_{PO}^{\beta^*}$的效率。

令 $P_{\theta,Z}$ 表示 $(\theta, Z^1, \ldots, Z^m)$ 的联合分布。我们假设 θ 的边缘分布（记为 $P_\theta = \mathcal{D}_\theta$）是已知的。然而，我们并不了解条件分布 $P_{Z|\theta} = \mathcal{D}(\theta)$ 的结构；其形式未知，且可能具有很强的灵活性。为将其形式化，我们考虑如下定义的分布类

$$\mathscr{P}_{\theta,Z} = \{Q_{\theta,Z} : Q_\theta = \mathcal{D}_\theta, Q_{Z|\theta} = \tilde{\mathcal{D}}(\theta) = \prod_{i\in[m]} \tilde{\mathcal{D}}_i(\theta),\ \tilde{\mathcal{D}} \text{ satisfies Assumptions 5 and 6}\}.$$

分布类 $\mathscr{P}_{\theta,Z}$ 由所有在 θ 上具有固定边缘分布、但在其他方面未作规定的条件分布 Z 给定 θ 的分布组成，前提是满足假设5 和 6。

与稳定点类似，为简便起见，我们作出以下假设，以保证局部参数子模型的存在。

假设7 我们假设 $r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)$、$\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)$ 和 $\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)$ 在 $\Theta \times \mathcal{Z}_i$ 上有界，其中 $i \in [m]$。

记 $G_r(\theta, Z; \beta) = (\nabla_{\beta_1}^\top r_1(\theta, Z^1; \beta_1)\ldots\ldots, \nabla_{\beta_m}^\top r_m(\theta, Z^m; \beta_m))^\top$。下面的引理1刻画了分布类 $\mathcal{P}_{\theta,Z}$中目标分布映射 β^*和插件最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$的有效影响函数。

引理1 在假设7下，β^*和 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 在分布空间$\mathscr{P}_{\theta,Z}$ 中的有效影响函数为

$$\Psi_{\beta^*}(\theta, Z) = -\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \nabla_\beta^\top G_r(\theta, Z; \beta^*)\}^{-1}\{G_r(\theta, Z; \beta^*) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)} G_r(\theta, Z; \beta^*)\},$$

$$\Psi_{\theta_{PO}^{\beta^*}}(\theta, Z) = \nabla_\beta^\top \mathrm{sol}(\beta^*) \Psi_{\beta^*}(\theta, Z).$$

在建立分布估计量和插件估计量的效率下界之前，我们首先介绍估计量的正则性概念。

定义3（正则性）记 $P_{\theta,Z}^u$ 为分布类$\mathscr{P}_{\theta,Z}$中的任意子模型，其得分函数为 $s(\theta, Z)$，满足 $P_{\theta,Z}^0 = P_{\theta,Z}$。若存在 ……，则我们称基于 N 个样本对 $\{(\theta_i, Z_i) : i \in [N]\}$ 的估计量 $\hat{}$ β和$\hat{}$ θ_{PO}在 $P_{\theta,Z}$处分别关于 β^*和 $\theta_{PO}^{\beta^*}$是正则估计量

$$\sqrt{N}\big(\hat{\beta} - \beta^{*(1/\sqrt{N})}\big) \overset{P_{\theta,Z}^{1/\sqrt{N}}}{\rightsquigarrow} L_\beta, \quad \sqrt{N}\big(\hat{\theta}_{PO} - \theta_{PO}^{\beta^{*(1/\sqrt{N})}}\big) \overset{P_{\theta,Z}^{1/\sqrt{N}}}{\rightsquigarrow} L_\theta.$$

其中，$\beta^{*(1/\sqrt{N})}$ 和 $\theta_{PO}^{\beta^{*(1/\sqrt{N})}}$ 是在由 $u = 1/\sqrt{N}$t索引的局部子模型下的解，$P_\theta^{1/\sqrt{N}}$ ，$\overset{Z}{\rightsquigarrow}$ 表示沿概率测度序列$P_{\theta Z}^{1/\sqrt{N}}$ ，的弱收敛。极限分布L_β 和 L_θ 是与 u无关的概率测度。

—

定理 10（卷积定理）假设 5、6 和7 成立，则$\hat{}$ $\hat{}$对于任意正则估计量 β 和 θ_{PO} （定义3 中定义），有

$$\sqrt{N}\big(\hat{\beta} - \beta^*\big) \overset{P_{\theta,Z}}{\rightsquigarrow} W_\beta + R_\beta, \quad \sqrt{N}\big(\hat{\theta}_{PO} - \theta_{PO}^{\beta^*}\big) \overset{P_{\theta,Z}}{\rightsquigarrow} W_\theta + R_\theta,$$

其中 $R_\beta \perp\!\!\!\perp W_\beta$、$R_\theta \perp\!\!\!\perp W_\theta$ 和 $W_\beta \sim N\big(0,$ 协方差$_{P_{\theta,Z}}(\Psi_{\beta^*})\big)$、$W_\theta \sim N\big(0,$ 协方差$_{P_{\theta,Z}}(\Psi_{\theta_{PO}^{\beta^*}})\big)$。

根据定理10，我们可以看出，$\sqrt{N}(\hat{\beta}-\beta^*)$ 的渐近协方差下界为 W_β 的协方差，而 $\sqrt{N}(\hat{\theta}_{PO}-\theta_{PO}^{\beta^*})$ 的渐近协方差下界为 W_θ 的协方差。因此，结合 β^* 和 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 的有效影响函数，我们得到分布估计量的渐近协方差下界

$$\Sigma_1 = \left\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}}\nabla_\beta^2 r(\theta,Z;\beta^*)\right\}^{-1}\mathrm{Cov}\left\{\nabla_\beta r(\theta,Z;\beta^*)-\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)}\nabla_\beta r(\theta,Z;\beta^*)\right\}\left\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}}\nabla_\beta^2 r(\theta,Z;\beta^*)\right\}^{-1},$$

以及插件估计量的渐近协方差下界

$$\Sigma_2 = \nabla f(\beta^*)\Sigma_1\nabla^\top f(\beta^*). \tag{10}$$

注意，由于 $s^*(\theta) = \mathbb{E}[\nabla_\beta r(\theta,Z;\beta) \mid \theta]$，因此 $\mathrm{Cov}\left(\nabla r(\theta,Z;\beta^*)\ s^*(\theta)\right) = \mathrm{Cov}(s^*(\theta))$ 成立，故分布估计量的渐近协方差下界可改写为

$$\Sigma_1 = \left\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}}\nabla_\beta^2 r(\theta,Z;\beta^*)\right\}^{-1}\left\{\mathrm{Cov}(\nabla_\beta r(\theta,Z;\beta^*))-\mathrm{Cov}(\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)}\nabla_\beta r(\theta,Z;\beta^*))\right\}\left\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}}\nabla_\beta^2 r(\theta,Z;\beta^*)\right\}^{-1}. \tag{11}$$

正如我们在定理6中所证明的，Σ_β 通过重新校准推断方法获得的估计量 β 的渐近协方差矩阵恰好达到下界 Σ_1（11）。这一结果表明，我们用于估计分布参数 β^* 的程序具有统计效率和最优性。此外，定理 7 表明，Σ_θ 使用重要性抽样构造的插件估计量的渐近协方差矩阵也达到下界 Σ_2（10）。这凸显了我们的方法在估计插件最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 方面的最优性。综上，这些结果表明，我们的两阶段估计程序先估计最优分布参数，再估计相应的插件决策，并且在每个阶段都能达到半参数效率。这为我们的方法奠定了理论基础，也彰显了其在给定模型类中实现最低渐近方差的优势。

4.4 真实纳什均衡与代入纳什均衡之间的误差差距

此前所有推断研究都不是直接针对纳什均衡的。由于原始预测所依据的分布映射不必属于分布图谱，因此无法保证代入纳什均衡就是真实纳什均衡，所以我们提出的推断研究可能不适用于真实纳什均衡。然而，本节将分析并量化代入纳什均衡 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 与真实纳什均衡 θ_{PO} 之间的误差，并指出在表演性风险函数和插件风险函数满足某些条件时，该误差取决于模型设定错误程度。

定理 11（误差差距）假设对于每位参与者 i，分布图谱 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_i}$ 存在 η_i 模型设定错误，且在全变差距离下为 γ_i-光滑，并且损失函数一致有界。此外，假设至少有一个风险函数

$$\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta^i) = \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_{\beta_i^*}(\theta)}\ell_i(\theta^i,\theta_{PO}^{\beta_{-i}^*},Z^i) \quad and \quad \mathbf{PR}^i(\theta^i) = \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta)}\ell_i(\theta^i,\theta_{PO}^{-i},Z^i)$$

在 θ^i 上具有强凸性，凸性参数为 λ_i。那么，真实施为最优点与代入施为最优点之间的差距有如下界：

$$\|\theta_{PO}-\theta_{PO}^{\beta^*}\|_2^2 \le \sum_{i=1}^m \frac{8M_i\cdot\eta_i}{\lambda_i}.$$

注 8 由于真实分布映射 $\mathcal{D}(\theta)$ 通常未知，因此基于分布图谱假设目标函数 $\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta)$ 具有强凸性更为合理。

因此，定理5 对分布图谱的选择提出了额外要求，具体来说，要求风险函数满足凸性条件。满足该条件时，真实纳什均衡与插件纳什均衡之间的差距可以用两个分布映射之间的距离明确量化。结果表明，当指定的分布图谱恰好包含真实分布映射时，模型错设参数 η_i对每个 i都趋于零。在这一理想情形下，插件最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$与真实行为最优解 θ_{PO}一致。这一观察表明，我们针对插件最优解的推断框架不仅能在插件设定下产生统计有效估计量，而且在模型设定正确时，也能用于近似真实行为最优解。

5 特殊情形：单人行为预测 n

虽然我们的估计程序和分析是在一般的多参与者行为预测框架下建立的，但需要指出的是，正如我们在2.1节中提到的，单人设定是一个自然的特殊情形。当智能体数量减少到 $m = 1$时，行为稳定解和纳什均衡分别与 [32]中引入的行为稳定性和行为最优性这两个经典概念相一致。在这一简化情形下，我们的推断框架仍然完全适用。具体而言，基于经验重复再训练的估计方法简化为标准的重复经验风险最小化（RERM）程序，相应的渐近正态性和渐近最优性结果仍然成立。同样，结合插件最小化、重新校准的预测驱动推断和重要性采样的插件推断程序也可直接应用于单智能体情形，从而对拟合分布参数和插件最优解进行渐近有效估计。

因此，在多人框架下推导出的理论保证自然延伸至单玩家设定。这表明，所提出的推断框架不仅足够通用，能够捕捉多智能体交互，而且与基础性的单智能体行为预测相一致。在本节中，我们在单智能体行为预测的自我影响场景下明确了推断框架，确认了我们方法的统一性与有效性。

5.1 表演性稳定性

当 $m = 1$时，在多人设定下用于求解稳定均衡（2）的方程可化为以下形式：

$$\theta_{PS} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{PS})}\ell(\theta, Z),$$

这与文献[32]中单玩家设定下的表演性稳定性完全一致。他们还提出了一种用于寻找行为稳定点的模型更新算法，称为重复风险最小化（*RRM*）。同样，该过程从随机选择的模型参数 θ_0 开始，并通过最小化在前一模型 f_{θ_t} 所诱导的分布上评估的风险函数，迭代更新模型 $f_{\theta_{t+1}}$ ，

根据以下更新规则：

$$\theta_{t+1} = f(\theta_t) \triangleq \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}_{Z\sim D(\theta_t)}\ell(\theta, Z), \tag{12}$$

对于 $t \in \mathbb{T}$。如备注1所述，1 一般设定中的假设可简化为单人情形下对应的条件。我们将其总结为以下假设。

假设8（假设1的单人版本）假设以下条件成立：

1. （ϵ-敏感性）分布映射 $D(\cdot)$ 是 ϵ-敏感的，即，对于所有 $\theta, \theta' \in \Theta$ ：

$$W_1\big(D(\theta), D(\theta')\big) \le \epsilon\|\theta - \theta'\|_2,$$

其中，W_1 表示*Wasserstein-1* 距离。

2. （β-联合光滑性）损失函数 $\ell(\theta, Z)$ 是 β-联合光滑的，即，其梯度 $\nabla_\theta\ell(\theta, Z)$ 关于 θ 和 Z 均为 β-*Lipschitz*连续，即，

$$\left\|\nabla_\theta\ell(\theta, Z) - \nabla_\theta\ell(\theta', Z)\right\| \le \beta\left\|\theta - \theta'\right\|,$$

$$\left\|\nabla_\theta\ell(\theta, Z) - \nabla_\theta\ell(\theta, Z')\right\| \le \beta\left\|Z - Z'\right\|,$$

对于所有 $\theta, \theta' \in \Theta$ 和 $Z, Z' \in \mathcal{Z}$。

3. （α-强凸性）损失函数 $\ell(\theta, Z)$ 是 α-强凸的，即

$$\ell(\theta, Z) \ge \ell(\theta', Z) + \nabla_\theta\ell(\theta', Z)^\top(\theta - \theta') + \frac{\alpha}{2}\left\|\theta - \theta'\right\|_2^2,$$

对所有 θ、$\theta' \in \Theta$ 和 $Z \in \mathcal{Z}$ 均成立。

4. （相容性）系数满足以下不等式：$\epsilon < \frac{\alpha}{\beta}$。

值得注意的是，α-强凸条件确保更新过程将收敛到唯一稳定点，而损失函数的梯度 $G(\theta, Z) = \nabla_\theta\ell(\theta, Z)$ 对应于 α-强单调性。此外，相容性条件保证分布映射关于 θ 的变化是平滑的，从而确保由未知分布映射诱导的动力学保持可控。根据 [32, 定理 3。5], 更新迭代 θ_t 只有在假设 8 中的所有条件均成立时，才会以线性速率收敛到唯一稳定点。

5.1.1 渐近正态性

基于 RRM 算法，文献 [23] 针对单玩家设定提出了重复经验风险最小化（RERM）算法，用于估计迭代 θ_t。在时刻 $t = 1$，我们选择初始模型参数 θ_0，并从初始分布 $D(\theta_0)$ 中抽取样本 $\{Z_{0,i}\}_{i=1}^N \triangleq \{(X_{0,i}, Y_{0,i})\}_{i=1}^N$。因此，为 θ_1 构造估计量：

$$\hat{\theta}_1 = \arg\min_{\theta\in\Theta} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \ell(\theta, Z_{0,i}), \quad Z_{0,i} \sim \mathcal{D}(\theta_0).$$

那么，对于所有 $t>1$，估计量均通过类似的更新过程构造：

$$\hat{\theta}_t = \arg\min_{\theta\in\Theta} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ell(\theta, Z_{t-1,i}), \quad Z_{t-1,i} \sim \mathcal{D}(\hat{\theta}_{t-1}).$$

基于RERM的估计量的中心极限定理如下，其中时刻 t 的协方差是此前所有协方差的加权累积：

推论1（ [23]中的定理3.4）假设对于每个 $t\in\mathbb{T}$，假设8和假设3以及 $m=1$ 均成立。记雅可比矩阵 $H_{\theta_{t-1}}(\theta)=\mathbb{E}_{Z\sim D(\theta_{t-1})}[\nabla_\theta G(\theta,Z)]$ 以及协方差矩阵 $V_{\theta_{t-1}}(\theta)=\mathbb{E}_{Z\sim D(\theta_{t-1})}[G(\theta,Z)G(\theta,Z)^\top]$，则有

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_t-\theta_t)\xrightarrow{d} N(0,\Sigma_t),$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= H_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1}V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)H_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1} + (\nabla G(\theta_{t-1}))\Sigma_{t-1}(\nabla G(\theta_{t-1}))^T \\ &= \sum_{i=1}^{t}\left[\prod_{k=i}^{t-1}\nabla f(\theta_k)\right] H_{\theta_{i-1}}(\theta_i)^{-1}V_{\theta_{i-1}}(\theta_i)H_{\theta_{i-1}}(\theta_i)^{-1}\left[\prod_{k=i}^{t-1}\nabla f(\theta_k)\right]^T.\end{aligned}$$

5.1.2 效率

除了渐近正态性之外，还可以在每个时刻 $t\in\mathbb{T}$建立基于RERM的估计量的局部渐近最优性，其论证类似于基于 ERR 的估计量所采用的论证。由于固定任意初始点 θ_0后，基于 RRM 的 θ_t 也只是分布映射 $\mathcal{D}$ 的一个泛函。为确保估计程序在扰动后的分布下仍然有效，分布空间中的子模型 $\mathcal{D}^u$ 同样应满足可容许性，即假设8和假设3 以及 $m=1$ 应当对 $\mathcal{D}^u$ 成立。

记 $\boldsymbol{S}_j=\{Z_{j,i}:\ i\in[N_j]\}$，$\boldsymbol{S}_{[t]}=\cup_{j\in[t]}\boldsymbol{S}_j$，我们还需要对所考虑的算法施加如下正则性约束。

ˆ定义4（单玩家设定中的正则性）将由算法序列 $\mathcal{A}_j$ 在 $\mathcal{D}^u$ 下生成的估计量 θ_j 记为

$$\hat{\theta}_j=\mathcal{A}_j(\boldsymbol{S}_{[j]}),\quad \boldsymbol{S}_j\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathcal{D}^u(\hat{\theta}_{j-1}),\quad j\in[t],\quad \hat{\theta}_0=\theta_0.$$

记 $P_t^u=\prod_{j\in[t]}\mathcal{D}^u(\hat{}\theta_{j-1})^{\otimes N_j}$ 为所有样本的联合分布。我们假设$\frac{N_t}{N_j}\to\mu_{t,j}$，$\hat{}\theta_j\overset{P_t^0}{\rightsquigarrow}\theta_j$ 对于 $j\in[t-1]$，且估计量 $\hat{}\theta_t$ 是正则的，即，

$$\sqrt{N_t}\big(\hat{\theta}_t-\theta_t^{(1/\sqrt{N_t})}\big)\overset{P_t^{1/\sqrt{N_t}}}{\rightsquigarrow}L,$$

其中 $\theta^{(1/\sqrt{N_t})}t$ 是由 $u=\frac{1}{\sqrt{N_t}}$ 索引的子模型下的解，$\overset{P_t^{1/\sqrt{N_t}}}{\rightsquigarrow}$ 表示沿概率测度序列 $P_t^{1/\sqrt{N_t}}$ 的弱收敛，且极限分布L 不依赖于参数子模型。

推论2（单玩家设定下的效率）假设条件 *8* 以及假设条件 *3* 的单玩家版本均成立。假设 $\theta_{t-1} \neq \theta_{PS}$，那么对于任意正则的ˆ估计量 θ_t （定义 *4*中所定义），有

$$\sqrt{N_t}\big(\hat{\theta}_t - \theta_t\big) \overset{P_t^0}{\rightsquigarrow} W + R,$$

其中 $R \perp\!\!\!\perp W$, $W \sim N(0, \Sigma_t)$，并且

$$\Sigma_t = \sum_{j=0}^{t} \mu_{t,j} \Big(\prod_{k=j}^{t-1} \nabla_\theta^\top G(\theta_k) \Big) \tilde{\Sigma}_j \Big(\prod_{k=j}^{t-1} \nabla_\theta^\top G(\theta_k) \Big)^\top,$$

$$\tilde{\Sigma}_j = \big\{ \mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})} \nabla^2 \ell(\theta_j, Z) \big\}^{-1} \mathrm{Cov}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})}(\nabla \ell(\theta_j, Z)) \{ \mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})} \nabla^2 \ell(\theta_j, Z) \}^{-1}.$$

由于 [23] 具有集合 $N_t = N$ 对所有~~t~~, $\frac{N_t}{N_j} \to \mu_{t,\ j} = 1$ 对所有 t 以及 j，按照勒夫纳序 [22, 定义 7，13], 的渐近协方差 $\sqrt{N}\big(\hat{\theta}_t - \theta_t\big)$ 以下界为极限高斯变量 W的协方差。由定理 1可知，迭代估计 θ_t的渐近协方差（对应于基于RRM的迭代 θ_t）恰好达到此下界。因此，RERM估计程序在估计重复风险最小化器序列 $\{\theta_t\}_{t=1}$时是渐近有效的。

5.2 行为最优性

行为最优性更直接地定义为使表演性风险函数最小化的点。在单玩家设定（$\mathrm{m} = 1$）中，（3）中的纳什均衡方程自然化简为表演性预测框架中的相应方程：

$$\theta_{PO} = \arg\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{PR}(\theta) = \arg\min_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{Z \sim \mathcal{D}(\theta)} \ell(\theta, Z).$$

根据第2.3节提到的插件最小化方法，我们构建分布图谱 $\mathcal{D}_\mathcal{B} = \{\mathcal{D}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$，并抽取样本集 $(\theta_i,\ Z_i)_{i=1}^N$，其中 $\theta_i \sim \mathcal{D}_\theta$，且 ˆ$Z_i \sim \mathcal{D}(\theta_i)$ 具有指定的 $\mathcal{D}_\theta$。因此，通过某些映射函数，我们得到拟合的分布参数 βˆ，进而得到插件最优解 θ_{PO}^{β} 及其插件分布映射 $\mathcal{D}_{\hat{\beta}}$。

在 [24], 中，分布参数 β 的映射函数选为经验风险函数。虽然这种选择具有典型性，但并非最优。其局限性在于，这种方法仅通过 N 个采样观测值利用 D_θ，因而忽略了已知分布 D_θ 中的全部信息。我们在多玩家表述下提出的推断框架自然地解决了这一问题，并且仍适用于单玩家行为预测设置。

5.2.1 渐近正态性

将参与者数量设为 $m = 1$，则（6）中的目标风险函数可具体化为以下风险最小化问题：

$$\arg\min_{\beta}\ \mathcal{L}(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i \in [N]} \Big\{ r(\theta_i, Z_i; \beta) - \frac{\tilde{N}}{N + \tilde{N}} \beta^\top \hat{M} \hat{s}(\theta_i) \Big\} + \frac{1}{N + \tilde{N}} \sum_{i \in [\tilde{N}]} \beta^\top \hat{M} \hat{s}(\tilde{\theta}_i). \quad (13)$$

其中，第一项的样本集为$\{(\theta_i,\ Z_i) : (\theta_i,\ Z_i)\ \sim \mathcal{D}_\theta \times \mathcal{D}(\theta_i)\ i \in [N]\}$，第二个蒙特卡洛项的样本集为$\tilde{}\quad\tilde{}\quad\tilde{}: \{\theta_i,\ i \in [N]\}$。类似地，$\hat{}s(\theta)$ 是对条件期望 $s(\theta)$ $= \mathbb{E}\big[\nabla_\beta r(\theta,\ Z;\ \tilde{\beta})|\theta\big]$ 的机器学习估计，而去相关矩阵为

$$\hat{M} = \widehat{\mathrm{Cov}}\big(\nabla_\beta r(\theta, Z; \tilde{\beta}), \hat{s}(\theta)\big)\widehat{\mathrm{Cov}}\big(\hat{s}(\theta)\big)^{-1}.$$

$\hat{}$ 为了得到估计量 β 以用于分布参数，我们遵循算法3，即算法2的单玩家版本。

算法3分布参数的重新校准估计，单人 r

$\tilde{}\quad\tilde{}$**输入：**数据 $\{(\theta_i,\ Z_i):\ i \in [N]\}$ 以及蒙特卡洛样本 $\{\theta_i :\ i \in [N]\}$。$\hat{}$**输出：**交叉拟合估计量 β。**步骤1：**将数据 $\{(\theta_i,\ Z_i):\ i \in [N]\}$ 随机划分为三部分 $\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$ 和 $\mathcal{M}_3$。**步骤2：**在 $\mathcal{M}_3$上，计算初始估计量

$$\tilde{\beta}^{(1)} = \arg\min_\beta \frac{1}{|\mathcal{M}_3|} \sum_{(\theta,Z)\in\mathcal{M}_3} r(\theta, Z; \beta).$$

步骤3：在 $\mathcal{M}_2$ 上，使用任意机器学习算法将 $\mathbb{E}[\nabla_\beta r(\theta,\ Z;\ \tilde{\beta}^{(1)})|\theta]$估计为 $\hat{}s^{(1)}(\theta)$。

步骤4：在 $\mathcal{M}_1$上，计算

$$\hat{M}^{(1)} = \widehat{\mathrm{Cov}}\big(\nabla_\beta r(\theta, Z; \tilde{\beta}^{(1)}), \hat{s}^{(1)}(\theta)\big)\widehat{\mathrm{Cov}}\big(\hat{s}^{(1)}(\theta)\big)^{-1}.$$

$\widehat{\ }$其中协方差表示样本协方差矩阵。

步骤 5：在 $\mathcal{M}_1$ 和蒙特卡洛数据上，求解

$$\hat{\beta}^{(1)} = \arg\min_\beta \frac{1}{|\mathcal{M}_1|} \sum_{(\theta,Z)\in\mathcal{M}_1} \left\{ r(\theta, Z; \beta) - \frac{\tilde{N}}{N+\tilde{N}} \beta^\top \hat{M}^{(1)} \hat{s}^{(1)}(\theta) \right\} + \frac{1}{N+\tilde{N}} \sum_{i\in[\tilde{N}]} \beta^\top \hat{M}^{(1)} \hat{s}^{(1)}(\tilde{\theta}_i).$$

步骤 6：使用折叠轮换：$(\mathcal{M}_2,\ \mathcal{M}_3,\ \mathcal{M}_1)$ 和 $(\mathcal{M}_3,\ \mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2)$ 重复步骤 2–5，以得到 $\hat{}\beta^{(2)}$ 和 $\hat{}\beta^{(3)}$。

步骤 7：将最终估计量计算为 $\hat{}\beta = \sum_{j\in[3]} \frac{|\mathcal{M}_j|}{N} \hat{}\beta^{(j)}$。——

然后，插件式参与最优点如下：

$$\theta_{PO}^{\hat{\beta}} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbf{PR}^{\hat{\beta}}(\theta) = \arg\min_\theta \mathbb{E}_{Z\sim D_{\hat{\beta}}(\theta)} \ell(\theta, Z).$$

类似地，我们可以通过重要性采样改写风险最小化形式，并生成估计的插件最优解：

$$\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} = \arg\min_\theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{D_{\hat{\beta}}(Z_i;\theta)}{q(Z_i)} \ell(Z_i;\theta) \right] \triangleq \arg\min_\theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta, Z_i; \hat{\beta}),$$

其中，$Z_i \sim q(Z)$，而 $q(Z)$ 是已知且固定的分布。

记 $f(\beta) = \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbf{PR}^\beta(\theta)$，并将 β 的海森矩阵记为 $H(\beta) = \mathbb{E}[\nabla_\beta^2 r(\theta,\ Z;\ \beta)]$,，我们可以为分布参数估计量和插件估计量构造中心极限定理。

推论 3（单人设定下的渐近正态性）假设当 $m = 1$ 时，假设 5 和假设 6 成立。记 $s^*(\theta) = \mathbb{E}\big[\nabla_\beta r(\theta, Z; \beta^*)|\theta\big]$。若样本量满足 $\frac{N}{n} \to 0$ 且 $\frac{N}{\tilde{N}} \to 0$，并且 $\mathbb{E}\|\hat{s} - s\|^2 \xrightarrow{P} 0$ 对某个 s成立，则分布参数和插件最优解估计均具有渐近正态性：

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta^*) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_\beta),$$
$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\beta^*}) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_\theta).$$

此外，若 $s(\theta) = s^*(\theta)$，则渐近协方差为

$$\Sigma_\beta = H(\beta^*)^{-1}(\mathrm{Cov}\left(\nabla_\beta r(\theta, Z; \beta^*)\right) - \mathrm{Cov}\left(\mathbb{E}\big[\nabla_\beta r(\theta, Z; \beta^*)|\theta\big]\right))H(\beta^*)^{-1},$$
$$\Sigma_\theta = (\nabla f(\beta^*))\Sigma_\beta(\nabla f(\beta^*))^T.$$

注意，由于提议分布 $q(\cdot)$ 和分布 $\mathcal{D}_\theta$ 已知，我们同样总能获得蒙特卡洛样本数 $n = O(N^{\alpha_1})$ 和 $N = O(N^{\alpha_2})$，其中 $\alpha_1 > 1$ 和 $\alpha_2 > 1$，且 N 为拟合分布映射的样本量。因此，样本量总能满足 $\frac{N}{n} \to 0$ 和 $\frac{N}{\tilde{N}} \to 0$。与多玩家情形相同，这种样本量的定量关系对于实现效率至关重要。

5.2.2 效率

即使框架退化为单玩家设定，最小化问题（13）中的风险函数仍与有效影响函数存在内在联系。这种结构性联系确保我们的估计程序在单玩家行为预测中仍保持有效性。

令 $m = 1$，我们将联合分布 $P_{\theta, Z}$ 记为 (θ, Z)，并将梯度 $G_r(\theta, Z; \beta) = \nabla_\beta r(\theta, Z, \beta)$。同样，我们需要假设 7 在 $m = 1$ 下成立，以保证单玩家设定中局部参数子模型的存在：

假设9我们假设 $r(\theta, Z; \beta^*)$、$\nabla_\beta r(\theta, Z; \beta^*)$ 和 $\nabla_\beta^2 r(\theta, Z; \beta^*)$ 在$\Theta \times \mathcal{Z}$上有界。

在假设9下，β^* 和 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 在分布空间$\mathscr{P}_{\theta, Z}$ 中的有效影响函数与一般情形下形式相同，具体如下：

$$\Psi_{\beta^*}(\theta, Z) = -\big\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \nabla_\beta^\top G_r(\theta, Z; \beta^*)\big\}^{-1}\big\{G_r(\theta, Z; \beta^*) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)} G_r(\theta, Z; \beta^*)\big\},$$
$$\Psi_{\theta_{PO}^{\beta^*}}(\theta, Z) = \nabla_\beta^\top \mathrm{sol}(\beta^*)\Psi_{\beta^*}(\theta, Z).$$

根据定理10，我们同样可以得到单玩家代入估计的卷积定理。

推论4（单玩家设定下的效率）假设当5、6和7 成立时$\hat{}$ $\hat{}$$m = 1$。对于任意正则估计量 β 和 θ_{PO}，我们有

$$\sqrt{N}\big(\hat{\beta} - \beta^*\big) \overset{P_{\theta,Z}}{\rightsquigarrow} W_\beta + R_\beta, \quad \sqrt{N}\big(\hat{\theta}_{PO} - \theta_{PO}^{\beta^*}\big) \overset{P_{\theta,Z}}{\rightsquigarrow} W_\theta + R_\theta,$$

其中$R_\beta \perp\!\!\!\perp W_\beta$、$R_\theta \perp\!\!\!\perp W_\theta$以及 $W_\beta \sim N\big(0、\ \Sigma_\beta\big)$、$W_\theta \sim N\big(0、\ \Sigma_\theta\big)$。
$\Sigma_\beta = \big\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \nabla_\beta^2 r(\theta,\ Z;\ \beta^*)\big\}^{-1}\big\{$协方差$(\nabla_\beta r(\theta,\ Z;\ \beta^*))$−协方差$(\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)} \nabla_\beta r(\theta,\ Z;\ \beta^*))\big\}\big\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \nabla_\beta^2 r(\theta,\ Z;\ \beta^*)\big\}^{-1}$,

$$\Sigma_\theta = \nabla f(\beta^*)\Sigma_1 \nabla f(\beta^*)^\top.$$

因此，如推论3所示，单玩家设定下插件估计量的渐近协方差达到了半参数效率界。这一结果证实，我们的推断框架在行为预测中实现了渐近效率，确保在真实参数的局部邻域内，没有任何正则估计量能在方差方面渐近地优于它。

5.2.3 误差差距

同样，在表演性风险函数和插件风险函数满足某些条件时，我们可以量化插件最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 与真实施为最优点 θ_{PO}之间的误差，并指出该误差对模型设定错误的依赖关系。

推论 5（单玩家设定下的误差差距）假设分布图谱 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$存在 η_{TV}模型设定错误，且在全变差距离下是 γ-光滑的，并且损失函数一致有界。此外，假设至少有一个风险函数

$$\mathbf{PR}^{\beta^*}(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}_{\beta^*}(\theta)}\ell(Z;\theta) \quad and \quad \mathbf{PR}(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta)}\ell(Z;\theta)$$

在 θ 上是强凸的，凸性参数为 λ。那么，真实施为最优点与插件表现最优点之间的差距有如下界:

$$\|\theta_{PO} - \theta_{PO}^{\beta^*}\|_2^2 \leq \frac{8M\cdot\eta_{TV}}{\lambda}.$$

注 9由于真实分布映射 $\mathcal{D}(\theta)$ 通常未知，因此，基于分布图谱假设目标函数 $\mathbf{PR}^{\beta^*}(\theta)$具有强凸性更为合理。

例 *1* 我们通过一个位置族的例子说明，$PR^{\beta^*}(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}_{\beta^*}(\theta)}\ell(Z;\theta)$可以是强凸的。假设 $\mathcal{D}_\theta = U(-1,1)$，真实分布映射为$Z \sim \mathcal{N}(b+\beta_1\theta+\epsilon\beta_2\theta^2, \sigma^2)$，分布图谱为 $Z\sim\mathcal{N}(b+\beta\theta,\sigma^2)$。损失函数为 $r(\theta,Z;\beta) = (Z-\beta\theta)^2$ 和 $\ell(\theta,Z,\beta) = (Z-\theta)^2$。通过直接计算，我们得到 $\beta^* = \beta_1 \neq 1$。因此，我们有

$$\mathbf{PR}^{\beta^*}(\theta) = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}_{\beta^*}(\theta)}\ell(Z;\theta) = \sigma^2 + (b-\beta_1\theta)^2 - 2\theta(b+\beta_1\theta) + \theta^2,$$

它关于 θ是强凸的。

当真实分布映射包含在分布图谱中时，模型设定误差参数 η_{TV}趋于零，且插件最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$变为真实行为最优解 θ_{PO}。因此，在单参与者参与性下，满足某些条件时，我们可以预期插件估计方法能够很好地体现真实行为最优解的统计性质。

6 数值模拟

在本节中，我们通过在单玩家绩效预测框架内给出数值实验，对理论分析加以补充。具体而言，我们在高斯族模型下开展模拟研究，以实证方式验证并阐明我们的理论结果。

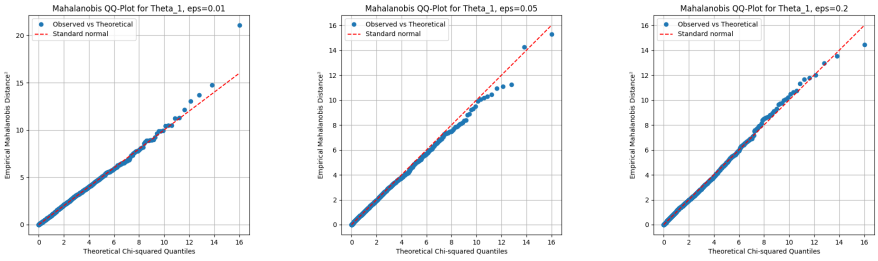
6.1 表演性稳定性

给定 $\theta \in \mathbb{R}^d$，将分布映射定义为

$$\mathcal{D}(\theta) = N(\epsilon\theta, \Sigma), \quad \Sigma = diag(\sigma_1^2, ..., \sigma_d^2),$$

其中 ϵ，σ_1^2，...，$\sigma_d^2 \in \mathbb{R}$。因此，分布映射 $\mathcal{D}(\theta)$ 是 ϵ-敏感的。在每一步，我们希望基于平方误差损失函数 $\ell(\theta, Z) = \frac{1}{2}\|Z - \theta\|^2$ 执行更新过程，该损失函数是 1-光滑且 1-强凸的。根据收敛要求 $\epsilon < \frac{\gamma}{\beta}$，敏感参数应满足 $\epsilon < 1$。在以下模拟中，我们设定 $d = 2$、$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.25$，以及初始点 $\theta_0 = (1.0, 2.0)^T$。我们将样本数量设为 $N = 10000$。

从图1，我们验证了我们的估计量在不同取值下的渐近正态性，取值为 $\epsilon = 0.01$、0.05、以及 0.2，并通过基于马氏距离的多元 Q-Q 图加以展示。



(a) ε=0.01　　(b) ε=0.05　　(c) ε=0.2

图1：不同敏感性下的马氏 QQ 图

此外，在图2中，我们观察到，对于两个条目以及 ϵ =0.01、0.05、和 0.2 这几个取值，基于 RRM 的 θ_t 和稳定点 θ_{PS}（使用我们的理论协方差计算得出）的覆盖率始终接近名义水平 $\alpha = 0.95$。这表明，我们的理论构造在不同模型错设程度下都能实现准确覆盖。此外，当 ϵ 较小时，例如 0.01 或 0.05，基于 RRM 的 θ_t 和稳定点 θ_{PS} 的覆盖率曲线会更早地基本重合，这表明在低敏感性情形下，这两个估计量的表现几乎相同。当分布偏移程度较小时，敏感性的影响会减弱。附录B.1.2中对这一现象作了更详细的解释。

6.2 行为最优性

我们在此遵循 [24] 中的位置族设定来构造行为最优性问题。假设真实分布映射是一个带二次项的线性模型

$$Z = b + \beta_1 * \theta + \epsilon\beta_2 * \theta^2 + Z_0, \quad Z_0 \sim N(0, \sigma^2 I_d),$$

其中 $\epsilon \geq 0$ 量化了模型设定错误的严重程度，$b, \theta \in \mathbb{R}^d$。更具体地说，我们从 $b \sim N(0, \sigma_b^2)$生成真实模型参数，$\beta_1 = \frac{\beta_1'}{\|\beta_1'\|_{OP}}$和$\beta_2 = \frac{\beta_2'}{\|\beta_2'\|_{OP}}$，其中 $\beta_1, \beta_2 \sim N(0, \sigma_\beta^2)$是逐元素独立同分布的。我们用更简单的线性模型构建分布图谱

$$\mathcal{D}_\beta(\theta) = b + \beta * \theta + Z_0, \quad Z_0 \sim N(0, \sigma^2 I_d).$$

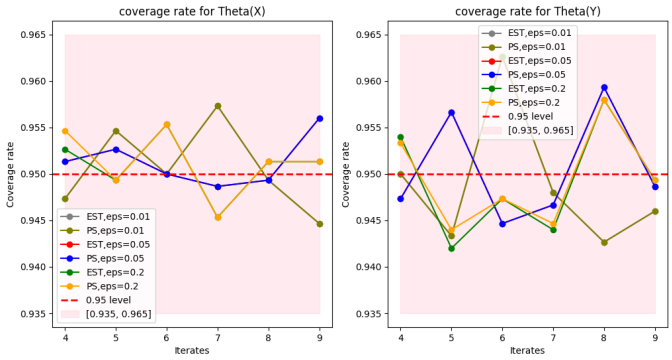
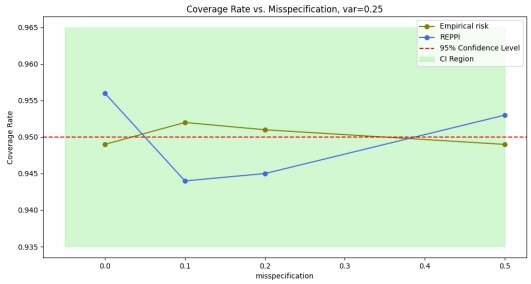
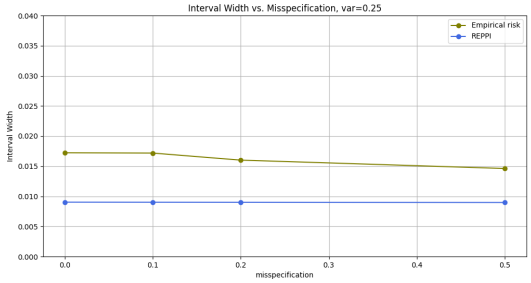


图2： θ_t 与敏感性的覆盖率

因此， ϵ 是错设程度，并且如果 $\epsilon = 0$，则真实分布映射包含在分布图谱中。为了拟合分布参数 β，我们定义损失函数$r(\theta, Z; \beta) = \|Z - \beta\theta\|_2^2$，其中 $\theta_i = \{\theta : \|\theta\| \leq 1\}$。在此设定下，我们可以计算出目标分布参数满足$\beta^* = \beta_1$，并且插件最优解具有闭式形式 $\theta_{PO}^{\beta^*} = \frac{-b}{\beta^* - 1}$。估计程序基于平方误差损失函数$\ell(\theta, Z) = \|Z - \theta\|^2$。在以下模拟中，我们设定 $d = 1$, $\theta_i \sim U(-1, 1)$, $\sigma_b = 1$,$\sigma_\beta = 1$ 和 $\sigma = 0.5$。



(a) 覆盖率



(b) 区间宽度

图3： $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 在不同模型设定错误下的推断结果

图3 展示了在不同程度的模型错设下，基于经验风险函数和重新校准推断方法得到的估计量在覆盖率和区间宽度方面的模拟结果。如图所示，无论错设程度如何，两种方法均达到名义覆盖率 $\alpha = 0.95$ 。

然而，在所有测试的错设程度下，通过重新校准推断得到的估计量，其置信区间始终比基于经验风险得到的估计量更窄，展现了我们所提出的估计程序的效率。

参考文献

[1] Anastasios N Angelopoulos、Stephen Bates、Clara Fannjiang、Michael I Jordan和Tijana Zrnic。预测增强推断。《科学》，382(6671):669–674，2023。[2] Anastasios N Angelopoulos、John C Duchi和Tijana Zrnic。Ppi++：有效预测增强推断。*arXiv*预印本 *arXiv:2311.01453*，2023。[3] Susan Athey、Raj Chetty、Guido W Imbens和Hyunseung Kang。替代指标：结合短期代理指标，以更快速、更精确地估计长期处理效应。技术报告，美国国家经济研究局，2019。[4] David Azriel、Lawrence D Brown、Michael Sklar、Richard Berk、Andreas Buja和Linda Zhao。半监督线性回归。《美国统计学会杂志》，117(540):2238–2251，2022。[5] Robert Bartlett、Adair Morse、Richard Stanton和Nancy Wallace。金融科技时代的消费贷款歧视。《金融经济学杂志》，143(1):30– 56，2022。[6] Hua Chen、Zhi Geng和Jinzhu Jia。替代终点的准则。《英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学》，69(5):919–932，2007。[7] Xiaohong Chen、Han Hong和Elie Tamer。含辅助数据的测量误差模型。《经济研究评论》，72(2):343–366，2005。[8]Victor Chernozhukov、Denis Chetverikov、Mert Demirer、Esther Duflo、Christian Hansen、Whitney Newey和James Robins。面向处理参数与结构参数的双重/去偏机器学习，2018。[9] Rachel Courtland。偏差侦探。《自然》，558(7710):357–360，2018。[10] Joshua Cutler、Mateo D´ıaz和Dmitriy Drusvyatskiy。含决策依赖分布的随机逼近：渐近正态性与最优性，2024。[11] Dmitriy Drusvyatskiy和Lin Xiao。含决策依赖分布的随机优化，2020。[12] Zachary Feinstein。参数化纳什博弈的连续性与敏感性分析。《经济理论公报》，10(2):233–249，2022。[13]Adam Fisch、Joshua Maynez、R Hofer、Bhuwan Dhingra、Amir Globerson和William W Cohen。面向语言模型有效混合评估的分层预测赋能推断。《神经信息处理系统进展》，37:111489–111514，2024。[14] Thomas R Fleming、Ross L Prentice、Margaret S Pepe和David Glidden。临床试验中的替代终点与辅助终点及其在癌症和艾滋病研究中的潜在应用。《医学统计学》，13(9):955–968，1994。[15] Constantine E Frangakis和Donald B Rubin。因果推断中的主分层。《生物统计学》，58(1):21–29，2002。[16] Feng Gan、Wanfeng Liang和Changliang Zou。预测去相关推断。*arXiv*预印本 *arXiv:2312.06478*，2023。

[17] Jessica Gronsbell、Jianhui Gao、Yaqi Shi、Zachary R McCaw和David Cheng。再论预测后的推断。*arXiv*预印本 *arXiv:2411.19908*，2024。[18]Zachary Izzo、Lexing Ying和James Zou。当数据对你的模型作出反应时如何学习：表演性梯度下降。见国际机器学习会议，第4641–4650页。PMLR，2021。[19] Meena Jagadeesan、Tijana Zrnic和Celestine Mendler-D¨unner。含表演性反馈的遗憾最小化，2022。[20] Wenlong Ji、Lihua Lei和Tijana Zrnic。预测作为替代指标：人工智能时代对替代结局的再审视。*arXiv*预印本 *arXiv:2501.09731*，2025。[21] Nathan Kallus和Xiaojie Mao。论替代指标在有限结局数据下有效估计治疗效应中的作用。《英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学》，87(2):480–509，2025。[22] Bing Li和Gutti Jogesh Babu。统计推断研究生课程。施普林格，2019。[23] Xiang Li、Yunai Li、Huiying Zhong、Lihua Lei和Zhun Deng。表演性条件下的统计推断，2025。[24] Licong Lin和Tijana Zrnic。插件式参与优化。*arXiv*预印本 *arXiv:2305.18728*，2023。[25] Kristian Lum和William Isaac。预测并服务？*Significance*，13(5):14–19，2016。[26] Celestine Mendler-D¨unner、Juan Perdomo、Tijana Zrnic和Moritz Hardt。面向行为预测的随机优化。《神经信息处理系统进展》，33:4929–4939，2020。[27] Jiacheng Miao、Xinran Miao、Yixuan Wu、Jiwei Zhao和Qiongshi Lu。弱假设且数据自适应的预测后推断。*arXiv*预印本 *arXiv:2311.14220*，2023。[28] John P Miller、Juan C Perdomo和Tijana Zrnic。走出回音室：优化表演性风险。见国际机器学习会议，第7710–7720页。PMLR，2021。[29] Mehrnaz Mofakhami、Ioannis Mitliagkas和Gauthier Gidel。基于神经网络的行为预测。见国际人工智能与统计会议，第11079–11093页。PMLR，2023。[30] Adhyyan Narang、Evan Faulkner、Dmitriy Drusvyatskiy、Maryam Fazel和Lillian J Ratliff。多人表演性预测：决策依赖博弈中的学习。机器学习研究杂志，24(202):1–56，2023。[31] Margaret Sullivan Pepe。使用替代结局数据与验证样本进行推断。*Biometrika*，79(2):355–365，1992。[32] Juan Perdomo、Tijana Zrnic、Celestine Mendler-D¨unner和Moritz Hardt。行为预测。见国际机器学习会议，第7599–7609页。PMLR，2020。

[33] Wendy J Post、Ciska Buijs、Ronald P Stolk、Elisabeth GE de Vries 和 Saskia Le Cessie。采用模式混合方法分析存在信息性脱落的纵向生活质量测量。生活质量研究，19:137–148，2010。[34] Ross L Prentice。临床试验中的替代终点：定义和操作标准。《医学统计学》，8(4):431–440，1989。[35] James M Robins 和 Andrea Rotnitzky。缺失数据下多元回归模型的半参数效率。《美国统计学会杂志》，90(429):122–129，1995。[36] James M Robins、Andrea Rotnitzky 和 Lue Ping Zhao。部分回归变量并非始终可观测时的回归系数估计。《美国统计学会杂志》，89(427):846–866，1994。[37] Donald B Rubin。推断与缺失数据。*Biometrika*，63(3):581–592，1976。[38] Shanshan Song、Yuanyuan Lin 和 Yong Zhou。半监督框架下的一般m估计理论。《美国统计学会杂志》，119(546):1065–1075，2024。[39] Aad W Van der Vaart。渐近统计学，第3卷。剑桥大学出版社，2000。[40] Janet Wittes、Edward Lakatos 和 Jeffrey Probstfield。临床试验中的替代终点：心血管疾病。《医学统计学》，8(4):415–425，1989。[41] Anru Zhang、Lawrence D Brown 和 T Tony Cai。半监督推断：一般理论与均值估计。2019。[42] Vickie Zhang、Michael Zhao、Anh Le、Nathan Kallus 等。使用 Netflix 的 200 项 A/B测试评估替代指数作为决策工具。*arXiv*预印本 *arXiv:2311.11922*，2023。[43] Tijana Zrnic 和 Emmanuel J Cand`es。交叉预测驱动推断。《美国国家科学院院刊》，121(15):e2322083121，2024。

A 理论证明

A.1 稳定均衡

A.1.1 命题 1 的证明

证明 1（命题 1 的证明）我们首先证明，解映射 $\mathrm{sol}(\theta)$ 是 C- 利普希茨连续的，关于 θ。记函数 $f_i(Z) = \langle G_i(y, Z^i)\ v^i\rangle$ 对应参与者 i，其中向量 v^i 满足 $\|v^i\| \le 1$，我们可以证明它是 β_i-利普希茨连续的：

$$\begin{aligned}\|f_i(Z) - f_i(Z')\| &= \|\langle G_i(y, Z^i), v^i\rangle - \langle G_i(y, Z'^i), v^i\rangle\| \\ &= \|\langle G_i(y, Z^i) - G_i(y, Z'^i), v^i\rangle\| \\ &\le \|G_i(y, Z^i) - G_i(y, Z'^i)\|\|v^i\| \\ &\le \beta_i\|Z^i - Z'^i\|,\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由柯西-施瓦茨不等式得出。对于任意 θ、θ'、$y \in \Theta$，根据范数的对偶性质，即 $\|u\| = \sup_{\|v\|\le 1}\langle u、\ v\rangle$，以及引理 2 中的最优传输对偶定理，我们可以证明 $G_{i,\theta}(y)$ 关于 θ 是 $\beta_i\epsilon_i$-利普希茨连续的：

$$\begin{aligned}\|G_{i,\theta}(y) - G_{i,\theta'}(y)\| &= \|\mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta)}G_i(y, Z^i) - \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta')}G_i(y, Z^i)\| \\ &= \beta_i \cdot \sup_{\|v^i\|\le 1}\left\{\mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta)}\frac{1}{\beta_i}\langle G_i(y, Z^i), v^i\rangle - \mathbb{E}_{Z^i\sim\mathcal{D}_i(\theta')}\frac{1}{\beta_i}\langle G_i(y, Z^i), v^i\rangle\right\} \\ &= \beta_i \cdot W_1(\mathcal{D}_i(\theta), \mathcal{D}_i(\theta')) \\ &\le \beta_i\epsilon_i \cdot \|\theta - \theta'\|.\end{aligned}$$

因此，我们推得

$$\|G_\theta(y) - G_{\theta'}(y)\|^2 = \sum_{k=1}^{m}\|G_{i,\theta}(y) - G_{i,\theta'}(y)\|^2 \le \sum_{k=1}^{m}(\beta_i\epsilon_i)^2\|\theta - \theta'\|^2.$$

根据 $\mathrm{sol}(\theta)$ 和 $\mathrm{sol}(\theta')$ 的定义，以及映射 $G_\theta(\cdot)$的强单调性，我们有如下不等式：

$$\begin{aligned}\alpha\|\mathrm{sol}(\theta) - \mathrm{sol}(\theta')\|^2 &\le \langle G_\theta(\mathrm{sol}(\theta)) - G_\theta(\mathrm{sol}(\theta')), \mathrm{sol}(\theta) - \mathrm{sol}(\theta')\rangle \\ &= \langle G_{\theta'}(\mathrm{sol}(\theta')) - G_\theta(\mathrm{sol}(\theta')), \mathrm{sol}(\theta) - \mathrm{sol}(\theta')\rangle \\ &\le \|G_{\theta'}(\mathrm{sol}(\theta')) - G_\theta(\mathrm{sol}(\theta'))\|\|\mathrm{sol}(\theta) - \mathrm{sol}(\theta')\| \\ &\le \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(\beta_i\epsilon_i)^2}\|\theta - \theta'\|\|\mathrm{sol}(\theta) - \mathrm{sol}(\theta')\|.\end{aligned}$$

因此，我们得出结论：$\mathrm{sol}(\theta)$ 关于 θ是 C-利普希茨的：

$$\|\mathrm{sol}(\theta) - \mathrm{sol}(\theta')\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(\frac{\beta_i\epsilon_i}{\alpha})^2}\|\theta - \theta'\|. \tag{14}$$

根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的不动点满足$\mathrm{sol}(\theta) = \theta$，这与我们定义的稳定性概念相对应。

然后，我们证明通过我们的更新算法，迭代 θ_t 收敛。注意$\theta_t = \mathrm{sol}(\theta_{t-1})$ 和 $\theta_{PS} = \mathrm{sol}(\theta_{PS})$ 根据我们算法和稳定性的定义，因此结合（14）的结果，我们得到

$$\|\theta_t - \theta_{PS}\| = \|\mathrm{sol}(\theta_{t-1}) - \mathrm{sol}(\theta_{PS})\| \le C\|\theta_{t-1} - \theta_{PS}\| \le C^t\|\theta_0 - \theta_{PS}\|.$$

因此，如果 $t \geq (1-C)^{-1}\log(\frac{\|\theta_0-\theta_{PS}\|}{\delta})$，则有 $\|\theta_t-\theta_{PS}\| \leq \delta$。迭代 θ_t 以线性速率收敛到唯一的均衡点。

引理 2（康托罗维奇-鲁宾斯坦对偶定理）设 P 和 Q 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度，且具有有限一阶矩。它们之间的 *1*-沃瑟斯坦距离可由以下对偶关系给出：

$$W_1(P,Q) = \sup_{f\in \mathrm{Lip}_1} \{\mathbb{E}_{X\sim P}[f(X)] - \mathbb{E}_{Y\sim Q}[f(Y)]\},$$

其中，上确界取遍所有满足 f： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 的 *1*-利普希茨函数。

A.1.2 定理3的证明

引理 3 假设*1* 成立，则一致性如下：

$$\hat{\theta}_{t+1} = \widehat{\mathrm{sol}}(\hat{\theta}_t) \xrightarrow{p} \tilde{\theta}_{t+1} \triangleq \mathrm{sol}(\hat{\theta}_t).$$

证明 2（引理3的证明）记映射为 $\widehat{M}_t(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(\theta, Z_k)$ $M_t(\theta) = \hat{}$ $\tilde{}\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\hat{\theta}_t)}G(\theta, Z)$ 其中 $Z_k \sim \mathcal{D}(\theta_t)$。由于中间点 θ_{t+1} 位于内部，根据柯尔莫哥洛夫强大数定律和局部利普希茨性，对于任意 $\epsilon > 0$、$\tilde{}$，存在紧集 $\Theta' = \{\theta:$ $\|\theta - \theta_{t+1}\| \leq \epsilon\} \subseteq \Theta$。因此，我们有如下的一致收敛：

$$\sup_{\theta\in\Theta'} \|\widehat{M}_t(\theta) - M_t(\theta)\| \xrightarrow{P} 0.$$

$\tilde{}$由于映射 $G_\theta(y)$ 是强单调的， $G_{\hat{\theta}_t}(y)$ 的最小化点 θ_{t+1} 是唯一的。因此，$\tilde{}$令 $\eta = \alpha\epsilon > 0$，对于每个 $\epsilon > 0$，只要每个 θ 满足 $\{\theta: \|\theta - \theta_{t+1}\| \geq \epsilon\}$，我们就有：

$$\|M_t(\theta) - M_t(\tilde{\theta}_{t+1})\| \geq \alpha\|\theta - \tilde{\theta}_{t+1}\| \geq \eta.$$

$\tilde{}$将 Θ' 的边界记为 $\partial\Theta' = \{\theta: \|\theta-\theta_{t+1}\| = \epsilon\}$。因此，对于 $\theta \in \partial\Theta'$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
&\inf_{\theta\in\partial\Theta'} \|\widehat{M}_t(\theta) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1})\| \\
&= \inf_{\theta\in\partial\Theta'} \|(\widehat{M}_t(\theta) - M_t(\theta)) + (M_t(\theta) - M_t(\tilde{\theta}_{t+1})) + (M_t(\tilde{\theta}_{t+1}) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1}))\| \\
&\geq \eta - 2\sup_{\theta\in\partial\Theta'} \|\widehat{M}_t(\theta) - M_t(\theta)\| \\
&= \eta - o_p(1).
\end{aligned}$$

$\tilde{}$对于 $\theta \in (\Theta')^c$，取边界 $\partial\Theta'$ 上的一点 $\theta_1 = \tilde{\theta}_{t+1} + \frac{\theta-\theta_{t+1}}{\|\theta-\tilde{\theta}_{t+1}\|}\epsilon$，于是有 $\tilde{}$ $\theta = \tilde{\theta}_{t+1} + \lambda(\theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1})$，其中 $\lambda = \frac{\|\theta-\theta_{t+1}\|}{\epsilon} > 1$。根据 $G_\theta(\cdot)$ 的强单调性，我们知道

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{M}_t(\theta) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1}), \theta - \tilde{\theta}_{t+1}\rangle \geq \alpha\|\theta - \tilde{\theta}_{t+1}\|^2, \\
\langle \widehat{M}_t(\theta_1) - \widehat{M}_t(\theta), \theta_1 - \theta\rangle \geq \alpha\|\theta_1 - \theta\|^2.
\end{aligned}$$

我们可以将两个不等式简化如下：

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{M}_t(\theta) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1}), \theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\rangle \geq \lambda\alpha\|\theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\|^2, \\
\langle \widehat{M}_t(\theta_1) - \widehat{M}_t(\theta), \theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\rangle \geq (1-\lambda)\alpha\|\theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\|^2.
\end{aligned}$$

将两个不等式相加，得到

$$\langle \widehat{M}_t(\theta_1) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1}), \theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1} \rangle \geq \alpha \|\theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\|^2.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，我们可以得到基于范数的不等式

$$\begin{aligned} \|\widehat{M}_t(\theta_1) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1})\| &\geq \alpha \|\theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\|, \\ \|\widehat{M}_t(\theta) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1})\| &\geq \lambda\alpha \|\theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\|. \end{aligned} \tag{15}$$

记作 $\beta = \min_{1 \leq i \leq m} \beta_i$。由函数 G_i 的利普希茨连续性可得

$$\begin{aligned} \|\widehat{M}_t(\theta_1) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1})\| &= \|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(\theta_1, Z_k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(\tilde{\theta}_{t+1}, Z_k)\| \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \|G(\theta_1, Z_k) - G(\tilde{\theta}_{t+1}, Z_k)\| \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} \|G_i(\theta_1^i, \hat{\theta}_{t+1}^{-i}, Z_k^i) - G_i(\tilde{\theta}_{t+1}^i, \hat{\theta}_{t+1}^{-i}, Z_k^i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \beta_i \|\theta_1^i - \tilde{\theta}_{t+1}^i\| \\ &\leq \beta \sum_{i=1}^{m} \|\theta_1^i - \tilde{\theta}_{t+1}^i\| \\ &\leq \beta \|\theta_1 - \tilde{\theta}_{t+1}\|. \end{aligned} \tag{16}$$

因此，根据 *(15)* 和 *(16)*，我们可以推导出以下不等式：

$$\|\widehat{M}_t(\theta) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1})\| \geq \frac{\lambda\alpha}{\beta} \|\widehat{M}_t(\theta_1) - \widehat{M}_t(\tilde{\theta}_{t+1})\| \geq \frac{\lambda\alpha}{\beta}\eta - o_p(1).$$

因此，在集合 $\{\theta : \|\theta - \theta_{t+1}\| \geq \epsilon\}$ 中，$M_t(\theta)$ 不存在最小化点，所以对于时刻 t *that* 的迭代，估计量的一致性成立

$$\mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{t+1} - \tilde{\theta}_{t+1}\| \geq \epsilon) = 0.$$

证明 3（定理 3的证明） 我们首先通过归纳法证明估计量序列 $\{\theta_t\}_{t=1}$ 的一致性。对于 $t = 0$，初始点固定为 $\theta_0 = \theta_0$，因此根据引理*3*，可得

$$\hat{\theta}_1 = \widehat{\mathrm{sol}}(\hat{\theta}_0) \xrightarrow{P} \mathrm{sol}(\hat{\theta}_0) = \mathrm{sol}(\theta_0) = \theta_1.$$

因此，θ_1 的一致性成立。假设在迭代 t时，我们已证明 $\hat{\theta}_t \xrightarrow{P} \theta_t$，那么对于迭代 $t+1$，根据引理 *3*，可得

$$\hat{\theta}_{t+1} = \widehat{\mathrm{sol}}(\hat{\theta}_t) \xrightarrow{P} \tilde{\theta}_{t+1} = \mathrm{sol}(\hat{\theta}_t).$$

正如我们在命题 *1* 中所证明的，我们知道 $\mathrm{sol}(\theta)$ 是 C-利普希茨的，关于 θ 的连续性由此得到保证。根据连续映射定理，我们有

$$\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t) \xrightarrow{P} \mathrm{sol}(\theta_t).$$

根据三角不等式，我们有以下不等式：

$$\begin{aligned}\|\hat{\theta}_{t+1}-\theta_{t+1}\| &= \|\hat{\theta}_{t+1}-\mathrm{sol}(\theta_t)\| \\ &= \|\hat{\theta}_{t+1}-\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)+\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)-\mathrm{sol}(\theta_t)\| \\ &\le \|\hat{\theta}_{t+1}-\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)\|+\|\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)-\mathrm{sol}(\theta_t)\|.\end{aligned}$$

然后对两边取概率：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{t+1}-\theta_{t+1}\|\ge\epsilon) &= \mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{t+1}-\mathrm{sol}(\theta_t)\|\ge\epsilon) \\ &= \mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{t+1}-\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)+\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)-\mathrm{sol}(\theta_t)\|\ge\epsilon) \\ &\le \mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{t+1}-\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)\|\ge\frac{\epsilon}{2})+\mathbb{P}(\|\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)-\mathrm{sol}(\theta_t)\|\ge\frac{\epsilon}{2}).\end{aligned}$$

对两边取极限，可得估计量序列ˆ$\{\theta_t\}_{t=1}$的一致性：

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{t+1}-\theta_{t+1}\|\ge\epsilon) \\ \le&\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{t+1}-\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)\|\ge\frac{\epsilon}{2})+\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\|\mathrm{sol}(\hat{\theta}_t)-\mathrm{sol}(\theta_t)\|\ge\frac{\epsilon}{2})=0.\end{aligned}$$

ˆ现在我们通过归纳法证明 θ_t 与 θ_t 之间的渐近正态性。由于$\sqrt{N}(\hat{\theta}_t-\theta_t)=\sqrt{N}(\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t)+\sqrt{N}(\tilde{\theta}_t-\theta_t)$，我们将证明分为两部分。

对于$t=1$，我们选择一个初始参数θ_1，根据参数展开，我们在第$\tilde{\theta}_1$次迭代时得到以下方程：

$$0=\sum_{k=1}^{N}G(\hat{\theta}_1,Z_k)=\sum_{k=1}^{N}G(\theta_1,Z_k)+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial G(\theta_1,Z_k)}{\partial\theta^\top}(\hat{\theta}_1-\theta_1),$$

其中 $Z_k\sim\mathcal{D}(\theta_0)$。根据大数定律，我们得到以下结果：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}G(\theta_1,Z_k)\xrightarrow{P}0,$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial G(\theta_1,Z_k)}{\partial\theta^\top}\xrightarrow{P}V_{\theta_0}(\tilde{\theta}_1)=V_{\theta_0}(\theta_1)=\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_0)}\left[\frac{\partial G(\theta_1,Z)}{\partial\theta^\top}\right].$$

因此，根据中心极限定理，我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\hat{\theta}_1-\theta_1) &= -\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial G(\theta_1,Z_k)}{\partial\theta^\top}\right)^{-1}\left(\sqrt{N}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}G(\theta_1,Z_k)\right) \\ &= -V_{\theta_0}(\theta_1)^{-1}\left(\sqrt{N}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}G(\theta_1,Z_k)\right)+O_P\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \\ &\xrightarrow{d}N(0,\Sigma_1),\end{aligned}$$

其中协方差矩阵为

$$\Sigma_1=V_{\theta_0}(\theta_1)^{-1}\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_0)}\left(G(\theta_1,Z)G(\theta_1,Z)^\top\right)V_{\theta_0}(\theta_1)^{-1}.$$

假设对于迭代 $t-1$，我们已经证明了 $\sqrt{N}(\hat{\theta}_{t-1}-\theta_{t-1}) \xrightarrow{d} N(\overline{0}, \Sigma_{t-1})$，那么在迭代 t 时，记

$$\mathbb{G}_t G(\theta, Z)=\sqrt{N}(\widehat{M}_t(\theta)-M_t(\theta))=\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G(\theta, Z_k)-\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\hat{\theta}_{t-1})} G(\theta, Z)\right),$$

其中 $Z_k \sim \mathcal{D}(\theta_{t-1})$。根据 *[39, 定理 5。12]*, 基于的一致性和 θ_t 的局部利普希茨性，我们得到以下收敛结果。

$$\mathbb{G}_t G(\hat{\theta}_t, Z)-\mathbb{G}_t G(\tilde{\theta}_t, Z) \xrightarrow{P} 0. \tag{17}$$

由于 $\hat{\theta}_t$ 是 $M_t(\theta)$ 的零点，而 $\tilde{\theta}_t$ 是 $M_t(\theta)$的零点，我们可以将 $\mathbb{G}_t G(\theta_t, Z)$ 改写如下

$$\mathbb{G}_t G(\hat{\theta}_t, Z)=\sqrt{N}(\widehat{M}_t(\hat{\theta}_t)-M_t(\hat{\theta}_t))=\sqrt{N}(M_t(\tilde{\theta}_t)-M_t(\hat{\theta}_t)).$$

根据一阶泰勒展开，我们有

$$M_t(\hat{\theta}_t)=M_t(\tilde{\theta}_t)+V_t(\tilde{\theta}_t)(\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t)+o(\|\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t\|),$$

其中 $V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)=\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\hat{\theta}_{t-1})}\left[\frac{\partial G(\tilde{\theta}_t, Z)}{\partial \theta^\top}\right]$。因此，由方程（*17*），我们得到

$$\mathbb{G}_t G(\tilde{\theta}_t, Z)+o_P(1)=\mathbb{G}_t G(\hat{\theta}_t, Z)=-\sqrt{N} V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)(\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t)+\sqrt{N} o_P(\|\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t\|).$$

根据上述等式，我们可以得到其范数表达式的不等式

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\|V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)(\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t)\| &\le \|\mathbb{G}_t G(\tilde{\theta}_t, Z)\|+o_P(1)+o_P(\sqrt{N}\|\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t\|)\\ &= O_P(1)+o_P(\sqrt{N}\|\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t\|).\end{aligned}$$

S 由于 $V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\theta_t)$ 是正定的，因此它可逆，从而得到以下不等式

$$\sqrt{N}\|\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t\| \le \|V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)^{-1}\|\sqrt{N}\|V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)(\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t)\|=O_P(1)+o_P(\sqrt{N}\|\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t\|).$$

我们可以得到该结果

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t) &= -V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)^{-1}\mathbb{G}_t G(\tilde{\theta}_t, Z)+o_P(1)\\ &= -V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} G(\tilde{\theta}_t, Z_k)\right)+o_P(1).\end{aligned}$$

根据中心极限定理，我们基于前述估计得到条件渐近正态性：

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_t-\tilde{\theta}_t) \mid \hat{\theta}_{t-1} \xrightarrow{d} N(0, \hat{\Sigma}),$$

其中协方差矩阵为

$$\hat{\Sigma}=V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)^{-1}\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\hat{\theta}_{t-1})}\left(G(\tilde{\theta}_t, Z)G(\tilde{\theta}_t, Z)^\top\right)V_{\hat{\theta}_{t-1}}(\tilde{\theta}_t)^{-1}.$$

因此，估计量$\theta_t-\theta_t$ 在每个 t 处的条件分布为

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_t-\theta_t) \mid \hat{\theta}_{t-1} \xrightarrow{d} N(\sqrt{N}(\tilde{\theta}_t-\theta_t), \hat{\Sigma}) \triangleq N(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}).$$

现在我们用特征函数证明 $\sqrt{N}(\hat{\theta}_t - \overline{\theta_t})$ 的分布。我们将$X_t = \sqrt{N}(\hat{\theta}_t - \theta_t)$记为，并将方差记为

$$\Sigma = V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1}\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\left(G(\theta_t, Z)G(\theta_t, Z)^\top\right)V_{\theta_{t-1}}(\theta_t)^{-1}.$$

条件分布的特征函数为： $\phi_{X_t|X_{t-1}}(z) \xrightarrow{P} \exp\left\{iz^T\hat{}\mu - \frac{1}{2}z^T\hat{}\Sigma z\right\}$，而 $t-1$ 处的分布可用特征函数表示为：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int \phi_{X_{t-1}}(s)\cdot e^{-is^TX_{t-1}}ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int \exp\left\{-\frac{1}{2}s^T\Sigma_{t-1}s - is^TX_{t-1}\right\}ds.\end{aligned}$$

于是我们得到特征函数

$$\begin{aligned}\phi_{X_t}(z) &= \mathbb{E}(e^{iz^TX_t}) = \mathbb{E}_{X_{t-1}}\left(\mathbb{E}(e^{iz^TX_t}\mid X_{t-1})\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\int \exp\left\{iz^T\hat{\mu} - \frac{1}{2}z^T\hat{\Sigma}z\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}s^T\Sigma_{t-1}s - is^TX_{t-1}\right\}dsdX_{t-1}.\end{aligned}$$

为简化表达，令 $-\frac{1}{2}s^T\Sigma_{t-1}s - is^TX_{t-1} = -\frac{1}{2}(s-A_1)^TM_1(s-A_1) + B_1$，通过比较各项可得：

$$\begin{aligned}M_1 &= \Sigma_{t-1}, \\ A_1 &= M_1^{-1}iX_{t-1} = \Sigma_{t-1}^{-1}iX_{t-1}, \\ B_1 &= \frac{1}{2}A_1^TM_1A_1 = -\frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}.\end{aligned}$$

因此，特征函数可改写为

$$\begin{aligned}\phi_{X_t}(z) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\int \exp\left\{iz^T\hat{\mu} - \frac{1}{2}z^T\hat{\Sigma}z\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(s-A_1)^TM_1(s-A_1) + B_1\right\}dsdX_{t-1} \\ &= \frac{\det|\Sigma_{t-1}|}{(2\pi)^{d/2}}\int \exp\left\{iz^T\hat{\mu} - \frac{1}{2}z^T\hat{\Sigma}z - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}dX_{t-1}.\end{aligned}$$

由于我们有

$$\left|\exp\left\{iz^T\hat{\mu} - \frac{1}{2}z^T\hat{\Sigma}z - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}\right| = \exp\left\{-\frac{1}{2}z^T\hat{\Sigma}z - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}$$

且对所有 $z\in\mathcal{Z}$， $z^T\hat{}\Sigma z > 0$，因此对所有 $z\in\mathcal{Z}$， $-\frac{1}{2}z^T\hat{}\Sigma z < 0$，指数项有界：

$$\left|\exp\left\{iz^T\hat{\mu} - \frac{1}{2}z^T\hat{\Sigma}z - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}\right| \le \left|\exp\left\{-\frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}\right|.$$

此外，根据命题 *1* 的证明中的 ***(14)***，$\mathrm{sol}(\theta)$ 在 C上是利普希茨连续的。记 θ 为映射 $J_{sol}(\theta)$***sol(***θ)的雅可比矩阵，因此通过泰勒展开可得以下收敛关系：

$$\sqrt{N}(\tilde{\theta}_t - \theta_t) = \sqrt{N}\left(\mathrm{sol}(\hat{\theta}_{t-1}) - \mathrm{sol}(\theta_{t-1})\right) \to J_{sol}(\theta_{t-1})X_{t-1},$$

当 $N \to \infty$ 时。因此，由控制收敛定理可得：

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\phi_{X_t}(z) &= \frac{\det|\Sigma_{t-1}|}{(2\pi)^{d/2}}\int \lim_{N\to\infty}\exp\left\{iz^T\hat{\mu} - \frac{1}{2}z^T\hat{\Sigma}z - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}dX_{t-1} \\ &= \frac{\det|\Sigma_{t-1}|}{(2\pi)^{d/2}}\int \exp\left\{iz^T J_{sol}(\theta_{t-1})X_{t-1} - \frac{1}{2}z^T\Sigma z - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}dX_{t-1}.\end{aligned}$$

类似地，令 $iz^T J_{sol}(\theta_{t-1})X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1} = -\frac{1}{2}(X_{t-1} - A_2)^T M_2(X_{t-1} - A_2) + B_2$，比较各项可得：

$$\begin{aligned}M_2 &= \Sigma_{t-1}^{-1}, \\ A_2 &= iM_2^{-1}J_{sol}(\theta_{t-1})^T z = i\Sigma_{t-1}J_{sol}(\theta_{t-1})^T z, \\ B_2 &= \frac{1}{2}A_2^T M_2 A_2 = -\frac{1}{2}z^T J_{sol}(\theta_{t-1})\Sigma_{t-1}J_{sol}(\theta_{t-1})^T z.\end{aligned}$$

那么，特征函数的极限为

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\phi_{X_t}(z) &= \frac{\det|\Sigma_{t-1}|}{(2\pi)^{d/2}}\int \exp\left\{iz^T J_{sol}(\theta_{t-1})X_{t-1} - \frac{1}{2}z^T\Sigma z - \frac{1}{2}X_{t-1}^T\Sigma_{t-1}^{-1}X_{t-1}\right\}dX_{t-1} \\ &= \frac{\det|\Sigma_{t-1}|}{(2\pi)^{d/2}}\int \exp\left\{-\frac{1}{2}z^T\Sigma z - \frac{1}{2}(X_{t-1} - A_2)^T M_2(X_{t-1} - A_2) + B_2\right\}dX_{t-1} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}z^T(\Sigma + J_{sol}(\theta_{t-1})\Sigma_{t-1}J_{sol}(\theta_{t-1})^T)z\right\},\end{aligned}$$

这意味着 $X_t = \sqrt{N}(\hat{\theta}_t - \theta_t)$ 的分布函数是均值为零、方差为 $\Sigma_t = \Sigma + J_{sol}(\theta_{t-1})\Sigma_{t-1}J_{sol}(\theta_{t-1})^T$ 的正态分布。

A.1.3 定理4的证明

证明 4（定理4的证明） 证明过程与定理3 的证明相同。由于 Z_k 是来自 $\mathcal{D}(\theta_{t-1})$ 的独立同分布样本，且 Z_j 是来自 $\mathcal{D}_{\hat{\beta}}(\theta_{t-1})$ 的独立同分布样本，大数定律与建立的边际渐近分布的第二步结合起来，直接得到 θ_t

$$\widehat{\Sigma}_t^{\hat{\beta}} \xrightarrow{P} \Sigma_t^{\hat{\beta}}.$$

此外，若分布图谱 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{D}_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ 包含可由某个 β^*参数化的真实分布映射，且拟合的 β 收敛到 β^*，则将相同的大数定律论证与边际渐近分析的第二步相结合，即可得到一致性 $\widehat{\Sigma}_t^{\hat{\beta}} \xrightarrow{P} \Sigma_t$。

A.1.4 定理的证明5

为了推导 θ_t 的半参数下界，关键在于找出 $\mathscr{D}$ 中最难的参数子模型。然而，观测数据由来自不同来源的样本组成，并且不同参与者在每一轮次的样本量可能不同。为考虑不同的样本量，受缺失数据文献的启发，我们引入另一个独立索引变量 $R \in [t] \times [m]$，其取值为 $\mathbb{P}(R = (j,i)) = q_{j,i} \approx \frac{N_j^i}{\sum_{j\in[t],i\in[m]} N_j^i}$ 和 $P_{W|R=(j,i)} = \mathcal{D}_i(\theta_{j-1})$。当观测样本 $Z_{j,k}^i$ 来自 $\mathcal{D}_i(\theta_j)$ 时，我们将观测数据 $\{(Z_{j,k}^i, (j,i)) : j \in [t], i \in [m], k \in [N_j^i]\}$ 表述为来自 $P_{W,R}$ 的 $\sum_{j\in[t],i\in[m]} N_j^i$ 个独立同分布样本。此时，参数 θ_t 可视为泛函 $P_{W,R}$。请注意，

观测数据并非以独立同分布的方式生成，因为在 θ_j 下的样本总是在 θ_{j-1}下的样本之后生成。然而，表述方式 $P_{W,R}$ 有助于确定最难的参数子模型。值得一提的是，引入 $P_{W,R}$ 仅仅是为了说明最难的子模型，而我们对定理 5 的证明并不依赖于这一数据生成过程。

~我们将分布空间 $\mathscr{P}$ 视为满足以下条件的分布集合 $P_{W,\ R}$ 即

~ ~ ~ ~ ~ ~
$P_{W|R=(j,i)} = \mathcal{D}_i(\theta_j)$，其中存在某个 $\mathcal{D}_{[m]}$ 满足假设 1 和 3的 θ_j基于.....定义~..... $\mathcal{D}_{[m]}$,

$$\mathscr{P} = \big\{\tilde{P}_{W,R} : P_R((j,i)) = q_{j,i}, \tilde{P}_{W|R=(j,i)} = \tilde{\mathcal{D}}_i(\tilde{\theta}_j),\ \tilde{\mathcal{D}}_{[m]} \text{ satisfies Assumptions 1 and 3 for some } \tilde{\theta}_i \text{ and } \tilde{\alpha}, \text{ and } \tilde{\theta}_j\text{'s are defined recursively based on } \tilde{\mathcal{D}}_{[m]}\big\}. \tag{18}$$

下面的引理刻画了分布空间 $\mathscr{P}$ 中 $P_{W,\ R}$ 对应的 θ_t 有效影响函数（EIF）。

引理 4 *(有效影响函数)* 在假设 4 下，分布空间$\mathscr{P}$ 中 θ_t 在 $P_{W,\ R}$ 处的有效影响函数为

$$\Psi_t(W,R) = -\sum_{j\in[t]}\left(\prod_{l=j}^{t-1}\nabla_\theta^\top \mathrm{sol}(\theta_l)\right)\left\{\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{j-1})}\nabla_\theta^\top G(\theta_j,Z)\right\}^{-1}\tilde{G}_j(\theta_j,W,R),$$

其中，$\mathcal{D}(\theta_{j-1}) = \prod_{i\in[m]}\mathcal{D}_i(\theta_{j-1}) = \prod_{i\in[m]}P_{W|R=(j,i)}$ 是乘积分布，且

$$\tilde{G}_j(\theta,W,R) = \left(\frac{\mathbf{1}\{R=(j,1)\}}{q_{j,1}}G_1^\top(\theta,W),\ldots,\frac{\mathbf{1}\{R=(j,m)\}}{q_{j,m}}G_m^\top(\theta,W)\right)^\top$$

是加权梯度的拼接。

证明 5（定理 5 的证明） 受引理 4 启发，我们选择得分函数$s_{j,\ i}(Z^i)$ 为

$$s_{j,i}(Z^i) = -\left(\prod_{l=j}^{t-1}\nabla_\theta^\top \mathrm{sol}(\theta_l)\right)\left\{\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_{j-1})}\nabla_\theta^\top G(\theta_j,Z)\right\}^{-1}\tilde{G}_j\big(\theta_j,Z^i,(j,i)\big),\quad j\in[t],i\in[m],$$

其中，$\tilde{G}$ 在引理 4 中定义，并满足 $q_{j,\ i} = \frac{1/\mu_t^i}{\sum_{\tilde{j}\in[t],\ \tilde{i}\in[m]}1/\mu_t^{\tilde{j}}}$。由引理 4 的证明可知，存在函数 $s_i(\theta, Z^i)$，使其满足 $s_i(\theta_{j-1}, Z^i) = s_{j,\ i}(Z^i)$。

将子模型 $\{\mathcal{D}_i^u :\ u\in\mathbb{R}^d, \|u\|_2\le 1\}$ 定义为

$$\frac{d\mathcal{D}_i^u(\theta)}{d\mathcal{D}_i(\theta)}(Z^i) = \frac{K(\frac{1}{\sqrt{N_t}}u^\top s_i(\theta,Z^i))}{C_i^u(\theta)},\quad K(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}},\quad C_i^u(\theta) = \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)}K\left(\frac{1}{\sqrt{N_t}}u^\top s_i(\theta,Z)\right).$$

引理 4 的证明$\mathcal{D}_{[m]}^u$ 属于可容许空间 $\mathscr{D}$ 当 N_t 足够大时。^对于任意正则估计量 $\{\theta_{j-1}:\ j\in[t]\}$ 在定义 1中定义，回顾一下，P_t^u是所有数据的联合分布 $\boldsymbol{S}_{[t]}$。与 [10, 引理 22], 的证明类似，我们可以证明

$$\log\frac{dP_t^u}{dP_t}(\boldsymbol{S}_{[t]}) = \frac{1}{\sqrt{N_t}}\sum_{j\in[t],i\in[m],k\in[N_j^i]}u^\top s_i(\hat{\theta}_{j-1},Z_{j,k}^i) - \frac{1}{2}\sum_{j\in[t],i\in[m]}\frac{1}{\mu_{t,j}^i}u^\top \mathrm{Cov}_{\mathcal{D}_i(\theta_{j-1})}\big(s_i(\theta_{j-1},Z^i)\big)u + o_{P_t}(1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{N_t}}\sum_{j\in[t],i\in[m],k\in[N_j^i]}s_i(\hat{\theta}_{j-1},Z_{j,k}^i)\overset{P_t}{\rightsquigarrow}N(0,\Sigma_t),$$

协方差矩阵

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \sum_{j\in[t],i\in[m]} \frac{1}{\mu_{t,j}^i} \operatorname{Cov}_{\mathcal{D}_i(\theta_{j-1})}\left(s_i(\theta_{j-1}, Z^i)\right) \\ &= \sum_{j\in[t]} \left(\prod_{k=j}^{t-1} \nabla_\theta^\top \operatorname{sol}(\theta_l)\right) \left\{\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})} \nabla_\theta^\top G(\theta_j, Z)\right\}^{-1} \operatorname{diag}\left\{\mu_{t,j}^i \operatorname{Cov}_{\mathcal{D}_i(\theta_{j-1})}\left(G_i(\theta_j, Z^i)\right) : i \in [m]\right\} \\ &\quad \cdot \left\{\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})} \nabla_\theta^\top G(\theta_j, Z)\right\}^{-\top} \left(\prod_{k=j}^{t-1} \nabla_\theta^\top \operatorname{sol}(\theta_l)\right)^\top.\end{aligned}$$

在正则条件与局部渐近正态性下，我们可以应用卷积定理 *[例如 22，定理10。3]* 从而得出这些结果。

引理 5 在假设4下，我们假设$\{\theta_j^i : j \in [t]\}$ 位于 Θ_i 的内部，对于$i \in [m]$。对于某个参数子模型$P_{W,R}^u$属于 $\mathscr{P}$，且具有$P_{W,R}^0 = P_{W,R}$，我们假设$P_{W|R=(j,i)}^u = \mathcal{D}_i^u(\theta_{j-1}^{(u)})$以及$P_{W,R}^u$对所有足够小的 $\|u\|_2 \le \delta$ 均为二次均值可微（*DQM*）。则 $\{\theta_j^{(u),i} : j \in [t]\}$ 对足够小的 $\|u\|_2$ 也位于 Θ_i 的内部。

证明 6（引理 5的证明） 我们用归纳法证明。

在博弈的第一轮次中，第 i个参与者的目标函数对 $\|u_1\|_2 \vee \|u_2\|_2 \le \delta$满足，

$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_1}(\theta_0)} \ell_i(\theta, Z^i) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_2}(\theta_0)} \ell_i(\theta, Z^i)| \\ =&\left|\int \left(p_i^{u_1}(\theta_0, Z^1) - p_i^{u_2}(\theta_0, Z^1)\right) \ell_i(\theta, Z^1)\right| \\ \le&\left|\int \left(\sqrt{p_i^{u_1}(\theta_0, Z^1)} - \sqrt{p_i^{u_2}(\theta_0, Z^1)}\right)^2 d\mu(Z^1) \int \left(\sqrt{p_i^{u_1}(\theta_0, Z^1)} + \sqrt{p_i^{u_2}(\theta_0, Z^1)}\right)^2 \left(\ell_i(\theta, Z^1)\right)^2 d\mu(Z^1)\right|^{\frac{1}{2}} \\ \lesssim&\|u_1 - u_2\|_2 (1 + o(1)),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式源于子模型的二次均值可微性以及连续损失函数 ℓ_i 在紧集 $\Theta \times \mathcal{Z}_i$上的有界性。此外，$\ell_i(\theta, Z^i)$ 关于 θ 的有界性和连续性连同控制收敛定理表明，目标函数在 θ上也连续。因此，第一轮次的目标函数在 u 和 θ上连续。然后 *[12]* 中的推论 *3.6* 连同命题1 中的唯一性表明 $\theta_1^{(u)}$ 在 u 上对于 $\|u\|_2 < \delta$连续。

对于第 t轮次，我们假设 $\theta_{t-1}^{(u)}$ 在 u 上对 $\|u\|_2 < \delta$连续，则

$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_1}(\theta_{t-1}^{(u_1)})} \ell_i(\theta, Z^i) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_2}(\theta_{t-1}^{(u_2)})} \ell_i(\theta, Z^i)| \\ \le&|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_1}(\theta_{t-1}^{(u_1)})} \ell_i(\theta, Z^i) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_1}(\theta_{t-1}^{(u_2)})} \ell_i(\theta, Z^i)| + |\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_1}(\theta_{t-1}^{(u_2)})} \ell_i(\theta, Z^i) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^{u_2}(\theta_{t-1}^{(u_2)})} \ell_i(\theta, Z^i)| \\ \lesssim&\|\theta_{t-1}^{(u_1)} - \theta_{t-1}^{(u_2)}\|_2 + \|u_1 - u_2\|_2 (1 + o(1)),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式源于*1*） $\mathcal{D}_i^u$ 在假设1中的敏感性（由于 $\mathscr{P}$ 在(18)中的定义），以及*2*）连续损失函数 ℓ_i 关于 Z 在$\Theta \times \mathcal{Z}_i$上的利普希茨性质。因此，第 t轮次的目标函数是连续的。类似地，我们有 $\theta_t^{(u)}$ 在 u上连续。

由于 θ_t 位于 Θ的内部，$\theta_t^{(u)}$ 的连续性意味着，当 $\|u\|$足够小时，$\theta_t^{(u)}$ 位于 Θ的内部。

证明 7（引理 4的证明）证明分为两部分。首先，我们证明 Ψ_t 是一个影响函数。然后，我们证明 Ψ_t 属于 $\mathscr{P}$的切空间。

我们首先证明 Ψ_t 是一个影响函数。对于引理5中所述的任意参数子模型$P^u_{W,R}$，由于$P^u_R((j,i))= q_{j,i}$是固定的，我们知道$u=0$ 处的得分函数必定具有如下形式

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{dP^u_{W,R}}{dP_{W,R}}(W,R)\bigg|_{u=0} = s(W,R) = \sum_{j\in[t],i\in[m]} \mathbf{1}(R=(j,i))s_{j,i}(W), \tag{19}$$

其中 $s_{j,i}$是 $P^u_{W|R=(j,i)} = \mathcal{D}^u_i(\theta^{(u)}_{j-1})$ 的得分函数。由的定义以及引理5 可得

$$\mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}^u(\theta^{(u)}_{t-1})} G(\theta^{(u)}_t, Z) = 0,$$

其中 $\mathcal{D}^u(\theta^{(u)}_{t-1}) = \prod_{i\in[m]}\mathcal{D}^u_i(\theta^{(u)}_{t-1})$ 是 $Z=(Z^{1\top},\ldots,Z^{m\top})^\top$ 在$Z^i\sim\mathcal{D}^u_i(\theta^{(u)}_{t-1})$下的乘积测度。对等式两边求导可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta^{(u)}_t}{\partial u^\top}\bigg|_{u=0} &= -\left\{\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{t-1})}\nabla^\top_\theta G(\theta_t,Z)\right\}^{-1}\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{t-1})}G(\theta_t,Z)\left\{\sum_{i\in[m]}s_{t,i}(Z^i)+\nabla^\top_\theta p(\theta_{t-1},Z)\frac{\partial\theta^{(u)}_{t-1}}{\partial u^\top}\bigg|_{u=0}\right\}\\
&= -\sum_{j\in[m]}\left(\prod_{l=j}^{t-1}\nabla^\top_\theta \mathrm{sol}(\theta_l)\right)\left\{\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})}\nabla^\top_\theta G(\theta_j,Z)\right\}^{-1}\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})}G(\theta_j,Z)\sum_{i\in[m]}s^\top_{j,i}(Z^i)\\
&= -\mathbb{E}_{P_{W,R}}\sum_{j\in[m]}\left(\prod_{l=j}^{t-1}\nabla^\top_\theta \mathrm{sol}(\theta_l)\right)\left\{\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta_{j-1})}\nabla^\top_\theta G(\theta_j,Z)\right\}^{-1}\tilde{G}_j(\theta_j,W,R)s^\top(W,R).
\end{aligned}$$

因此， Ψ_t 是一个影响函数。

接下来，我们证明 Ψ_t 中的元素属于 $\mathscr{P}$ 在 $P_{W,R}$ 处的切空间。显然， Ψ_t 具有(19)的形式。定义 $\mathcal{D}^u_i$ 为

$$\frac{d\mathcal{D}^u_i(\theta)}{d\mathcal{D}_i(\theta)}(Z^i) = \frac{K(u^\top s_i(\theta,Z^i))}{C^u(\theta)},\quad K(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}},\quad C^u_i(\theta)=\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)}K(u^\top s_i(\theta,Z^i)),$$

对于满足条件的某个 $s_i(\theta,Z^i)$

$$s_i(\theta_{j-1},Z^i)=\Psi_t(Z^i,(j,i)).$$

只需证明 $\mathcal{D}^u_{[m]}$ 满足假设 *1* 和 *3* ， 当 $\|u\|_2$ 足够小时。

首先，我们证明 $\theta_0,\ldots,\theta_{t-1}$在 $\theta_{t-1}\neq\theta_{PS}$时两两不同。为此，若 $\theta_l=\theta_k$对某个 $l<k<t$成立，则 θ_l 的值会在序列 $\{\theta_j: j\geq 0\}$中出现无穷多次。由于 $\theta_j\to\theta_{PS}$由命题 *1* 可知，我们知道 $\theta_l=\theta_{PS}$，因此 $\theta_k=\theta_{PS}$对所有 $k\geq l$都成立。这意味着 $\theta_{t-1}=\theta_{PS}$，与假设 $\theta_{t-1}\neq\theta_{PS}$矛盾。因此， $\theta_0,\ldots,\theta_{t-1}$两两不同。

然后我们构造分数 $s_i(\theta,Z^i)$。对于线性张成 $\{\theta_0,\ldots,\theta_{t-1}\}$ 中的 $\theta=\sum_{j\in[t]}\lambda_j\theta_{j-1}$，我们令 $s_i(\theta,Z^i)=\sum_{j\in[t]}\lambda_j s_i(\theta_{j-1},Z^i)$，它是线性空间内关于 θ 的线性函数。因此， $s_i(\theta,Z^i)$ 沿线性空间内任意方向对 θ 可微，且其梯度由 $s_i(\theta_j,Z^i)$ 张成。由于 ℓ_i 在紧集 $\Theta\times\mathcal{Z}_i$ 上关于 θ 二阶连续可微，我们知道 $s_i(\theta_{j-1},Z^i)$ 有界。因此， $s_i(\theta,Z^i)$ 是利普希茨的。最后，我们可以将 $s_i(\theta,Z^i)$ 扩展到 Θ ，方法是

定义 $s_i(\theta, Z^i) = s_i(\tilde{\theta}, Z^i)$，其中令 $\tilde{\theta}$ 为 θ 到由 $\{\theta_0, \ldots, \theta_{t-1}\}$ 张成的线性空间上的线性投影。于是，$s_i(\theta, Z)$ 关于 $\theta \in \Theta$ 是线性的且利普希茨可微。

接下来，我们分别验证假设1 和3 。

假设*1.1*：$\tilde{\epsilon}_i$-敏感性

注意到 上确界$_{x\in\mathbb{R}} |\nabla K(x)| = 1$，于是

$$|C_i^u(\theta) - 1| = \left|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} K(u^\top s_i(\theta, Z^i)) - 1\right| \le \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} |u^\top s_i(\theta, Z)| = O(\|u\|_2).$$

根据假设*1*，$\nabla_i \ell(\theta, Z^i)$ 关于 Z^i 是利普希茨连续的，因此我们知道 $s_i(\theta, Z^i)$ 关于 Z^i 也是利普希茨连续的。因此，$K(u^\top s_i(\theta, Z^i))$ 关于 Z 是 $O(\|u\|_2)$-利普希茨连续的。根据假设*1*，对于任意 *1*-利普希茨函数 f，$\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z)$ 关于 θ 是ϵ_i-利普希茨连续的，因此我们知道

$$\|\nabla_\theta \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z^i)\|_2 = \|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z^i) \nabla_\theta \log p_i(\theta, Z^i)\|_2 \le \epsilon_i, \tag{20}$$

其中，$p_i(\theta, Z^i)$ 是 $\mathcal{D}_i(\theta)$ 的密度。于是我们有

$$\begin{aligned}
\|\nabla_\theta C_i^u(\theta)\|_2 \le & \|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} \nabla_\theta K(u^\top s_i(\theta, Z^i))\|_2 + \|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} K(u^\top s_i(\theta, Z^i)) \nabla_\theta \log p_i(\theta, Z)\|_2 \\
\le & \|u\|_2 \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} \|\nabla_\theta s_i(\theta, Z^i)\|_2 + O(\|u\|_2) \\
= & O(\|u\|_2).
\end{aligned}$$

对于任意 *1*-利普希茨函数 f，我们知道 f 在 $\mathcal{Z}_1$ 上有界，并且

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla_{Z^i} f(Z^i) \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} \right\|_2 \\
\le & \left\| \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} \nabla_{Z^i} f(Z^i) \right\|_2 + \left\| f(Z^i) \frac{\nabla_{Z^i} K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} \right\|_2 \\
\le & 1 + O(\|u\|_2).
\end{aligned}$$

那么，当 $\|u\|_2$ 足够小时，我们有

$$\begin{aligned}
& \|\nabla_\theta \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^u(\theta)} f(Z^i)\|_2 \\
= & \left\| \nabla_\theta \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z^i) \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} \right\|_2 \\
\le & \left\| \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z^i) \frac{\nabla_\theta K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} \right\|_2 + \left\| \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z^i) \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i)) \nabla_\theta C_i^u(\theta)}{(C_i^u(\theta))^2} \right\|_2 \\
& + \left\| \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z^i) \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} \nabla_\theta \log p_t(\theta, Z) \right\|_2 \\
\le & \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1} \|\nabla_\theta \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} f(Z^i)\|_2 + O(\|u\|_2) \\
\le & \epsilon_i + O(\|u\|_2).
\end{aligned}$$

假设*1.2*：$\tilde{\alpha}$-强单调性

对于每个 $\theta, \theta', \theta'' \in \Theta$，我们有

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbb{E}_{\mathcal{D}^u(\theta)} G(\theta', Z) - G(\theta'', Z), \theta' - \theta'' \rangle \\
= & \mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)} \prod_{i\in[m]} \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} \langle G(\theta', Z) - G(\theta'', Z), \theta' - \theta'' \rangle \\
\ge & \mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)} \langle G(\theta', Z) - G(\theta'', Z), \theta' - \theta'' \rangle - \mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)} \left| \prod_{i\in[m]} \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} - 1 \right| \|G(\theta', Z) - G(\theta'', Z)\|_2 \|\theta' - \theta''\|_2.
\end{aligned}$$

由于 $\Theta \times \mathcal{Z}_1 \times \ldots \times \mathcal{Z}_m$ 是紧致的，且 ℓ_i 均为二阶连续可微函数，我们知道 $\|\nabla_\theta \ell_i(\theta, Z^i)\|_2$ 和 $\|\nabla^2_\theta \ell_i(\theta, Z^i)\|_{\text{sp}}$ 在 $\Theta \times \mathcal{Z}_i$ 上有界。因此，$|K(u^\top s_i(\theta, Z^i)) - 1| \preceq u^\top s_i(\theta, Z^i)| \lesssim \|u\|_2$，

$$\|G(\theta', Z) - G(\theta'', Z)\|_2^2 = \sum_{i\in[m]} \|\nabla_i \ell_i(\theta', Z^i) - \nabla_i \ell_i(\theta'', Z^i)\|_2^2 \lesssim \|\theta' - \theta''\|_2^2, \tag{21}$$

因此，

$$\mathbb{E}_{\mathcal{D}(\theta)} \left| \prod_{i\in[m]} \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)} - 1 \right| \|G(\theta', Z) - G(\theta'', Z)\|_2 \|\theta' - \theta''\|_2 = O(\|u\|_2)\|\theta' - \theta''\|_2^2.$$

因此，当 $\|u\|_2$ 足够小时，我们得到 α-强单调性

$$\langle \mathbb{E}_{\mathcal{D}^u(\theta)} G(\theta', Z) - G(\theta'', Z), \theta' - \theta'' \rangle > (\alpha - O(\|u\|_2))\|\theta' - \theta''\|_2^2.$$

假设 ***1.4***：相容性

由于 $\sum_{i\in[m]} \left(\frac{\epsilon_i \beta_i}{\alpha}\right)^2 < 1$，我们知道 $\sum_{i\in[m]} \left(\frac{(\epsilon_i + O(\|u\|_2 \ \beta_i))(\|u\|_2)}{\alpha - O}\right)^2 < 1$ 当 $\|u\|_2$ 足够小时。 假设 ***3.1***：局部利普希茨性

这可由 (21) 得出。

假设 ***3.2***：有界雅可比矩阵

由于 $\Theta \times \mathcal{Z}_1 \times \ldots \times \mathcal{Z}_m$ 是紧致的，且 ℓ_i' 二阶连续可微，因此我们知道 $\|\nabla_\theta \ell_i(\theta, Z^i)\|_2$ 在 $\Theta \times \mathcal{Z}_i$上有界。因此，$\|G(\theta, Z)\|_2$ 在 $\Theta \times \mathcal{Z}_1 \times \ldots \times \mathcal{Z}_m$上也有界。

假设***3.3***：可微

注意

$$\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^u(\theta)} G_i(\theta', Z^i) = \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} G_i(\theta', Z^i) \frac{K(u^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^u(\theta)}.$$

由于 $G_i(\theta', Z^i)$ 关于 θ' 可微，且 $K_{(u^\top s_i(\theta, Z^i))\, C_i^u(\theta) \nabla_\theta} G_i(\theta', Z^i)$ 在 $\Theta \times \Theta \times \mathcal{Z}_i$上有界，由控制收敛定理可知，$\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i^u(\theta)} G_i(\theta', Z_i)$ 关于 θ'可微。

A.2 纳什均衡

A.2.1 定理6的证明

证明 8（定理6的证明）我们首先证明估计量的一致性 β_i。根据引理*6*，每个交叉拟合估计量 $\hat{}\beta_i^{(j)}$ 都是一致的，因此最终估计量也一致

$$\hat{\beta}_i = \sum_{j\in[3]} \frac{|\mathcal{M}_j|}{N} \hat{\beta}_i^{(j)} \xrightarrow{P} \beta_i^*.$$

现在我们转而证明渐近正态性。根据引理 *6*，对于每个数据集 $\mathcal{M}_j$ ，我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt{|\mathcal{M}_j|}(\hat{\beta}_i^{(j)} - \beta_i^*) &= \sqrt{|\mathcal{M}_j|} H_i(\beta_i^*)^{-1} (\mathcal{G}_i(\hat{\beta}_i^{(j)}) - \mathcal{G}_i(\beta_i^*)) + o_p(\sqrt{|\mathcal{M}_j|}\|\hat{\beta}_i^{(j)} - \beta_i^*\|) \\
&= -H_i(\beta_i^*)^{-1} \left[\mathbb{G}_{N_j}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N + \tilde{N}_i} M_i \left(\mathbb{G}_{N_j}(s_i^*(\theta)) - \sqrt{\frac{|\mathcal{M}_j|}{\tilde{N}_i}} \mathbb{G}_{\tilde{N}}(s_i^*(\tilde{\theta})) \right) \right] \\
&\quad + o_p(1),
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{G}_{N_j}$ 定义在分离数据集 $\mathcal{M}_j$上。因此，最终估计量具有如下渐近正态性：

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\hat{\beta}_i - \beta_i^*) &= \sum_{j=[3]} \sqrt{\frac{|\mathcal{M}_j|}{N}} \sqrt{|\mathcal{M}_j|}(\hat{\beta}_i^{(j)} - \beta_i^*) \\ &= \sum_{j=[3]} \sqrt{\frac{|\mathcal{M}_j|}{N}} \sqrt{|\mathcal{M}_j|} H_i(\beta_i^*)^{-1}(\mathcal{G}_i(\hat{\beta}_i^{(j)}) - \mathcal{G}_i(\beta_i^*)) + o_p(\sqrt{|\mathcal{M}_j|}\|\hat{\beta}_i^{(j)} - \beta_i^*\|) \\ &= -H_i(\beta_i^*)^{-1}\left[\mathbb{G}_N(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} M_i \left(\mathbb{G}_N(s_i^*(\theta)) - \sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}}\mathbb{G}_{\tilde{N}}(s_i^*(\tilde{\theta}))\right)\right] + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, H_i(\beta_i^*)^{-1}\left(\mathrm{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\right) - \mathrm{Cov}\left(\mathbb{E}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)|\theta\right]\right)\right) H_i(\beta_i^*)^{-1}\right).\end{aligned}$$

引理 6 假设满足假设 5，且 $\mathbb{E}\|\hat{s}_i(\theta) - s_i^*(\theta)\|^2 \to 0$成立。记 $\hat{\beta}_{\hat{M}_i}$为目标函数 (7) 的结果，则有 $\hat{\beta}_{\hat{M}_i} \xrightarrow{P} \beta_i^*$，且 $\sqrt{N}(\hat{\beta}_{\hat{M}_i} - \beta_i^*) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{\beta_i})$，其中 Σ_{β_i}见定理 6。

证明 9（引理 6的证明）根据大数定律，用于 M_i 去相关的估计矩阵与总体最优矩阵 M 一致：

$$\hat{M}_i = \widehat{\text{协方差}}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \tilde{\beta}_i), \hat{s}_i(\theta))\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{s}_i(\theta))^{-1} \xrightarrow{P} \mathrm{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*), s_i^*(\theta)\right)\mathrm{Cov}\left(s_i^*(\theta)\right)^{-1} = M_i.$$

首先，我们证明对每个 i，$\beta_{\hat{M}_i}$ 的一致性。由于目标函数 $\mathcal{L}_i(\beta_i)$ 是 $R_i(\beta_i)$的无偏估计，根据柯尔莫哥洛夫强大数定律以及 β_i^*的局部利普希茨性，我们知道存在 $\epsilon_i > 0$，使得 $\{\beta_i : \|\beta_i - \beta_i^*\| \le \epsilon_i\} \subseteq \mathcal{B}_i$ 且

$$\sup_{\beta_i : \|\beta_i - \beta_i^*\| \le \epsilon_i} |\mathcal{L}_i(\beta_i) - R_i(\beta_i)| \xrightarrow{P} 0.$$

由于损失函数 $r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)$ 关于 β_i 是 γ_i-强凸的，因此最小化点 β_i^* 唯一。因此，对于每个 $\epsilon_i > 0$，都存在一个 $\eta_i = \frac{\gamma_i}{2}\epsilon_i^2 > 0$，使得对于每个满足 $\|\beta_i - \beta_i^*\| \ge \epsilon_i$ 的 $\beta_i \in \mathcal{B}_i$，我们有 $R_i(\beta_i) \ge R_i(\beta_i^*) + \frac{\gamma_i}{2}\|\beta_i - \beta_i^*\|^2 \ge R_i(\beta_i^*) + \eta_i$。对于 ϵ_i-壳层 $\{\beta_i :\ \|\beta_i - \beta_i^*\| = \epsilon_i\}$，我们有：

$$\begin{aligned}&\inf_{\|\beta_i - \beta_i^*\| = \epsilon_i} \mathcal{L}_i(\beta_i) - \mathcal{L}_i(\beta_i^*) \\ =& \inf_{\|\beta_i - \beta_i^*\| = \epsilon_i} ((\mathcal{L}_i(\beta_i) - R_i(\beta_i)) + (R_i(\beta_i) - R_i(\beta_i^*)) + (R_i(\beta_i^*) - \mathcal{L}_i(\beta_i^*))) \\ \ge& \eta_i - 2\sup_{\|\beta_i - \beta_i^*\| \le \epsilon} |\mathcal{L}_i(\beta_i) - R_i(\beta_i)| \\ =& \eta_i - o_p(1).\end{aligned}$$

接下来，对于任意满足 $\|\beta_i - \beta_i^*\| \ge \epsilon_i$ 的 β_i，固定一个位于 ϵ_i-壳层上的点 $\beta_i^1 = \beta_i^* + \frac{\beta_i - \beta_i^*}{\|\beta_i - \beta_i^*\|}\epsilon_i$，我们有 $\beta_i = \beta_i^* + \lambda_i(\beta_i^1 - \beta_i^*)$，其中 $\lambda_i = \frac{\|\beta_i - \beta_i^*\|}{\epsilon_i} \ge 1$。因此，由于 $\mathcal{L}_i(\beta_i)$ 由凸函数构成，具有凸性，以下不等式成立：

$$\mathcal{L}_i(\beta_i) - \mathcal{L}_i(\beta_i^*) \ge \lambda_i\left(\mathcal{L}_i(\beta_i^1) - \mathcal{L}_i(\beta_i^*)\right) \ge \eta_i - o_p(1).$$

这个不等式意味着 $\{\beta_i :\ \|\beta_i - \beta_i^*\| \ge \epsilon_i\}$ 在 $\mathcal{L}_i(\beta_i)$ 上没有最小化点，因此一致性成立：

$$\mathbb{P}(\|\hat{\beta}_{\hat{M}_i} - \beta_i^*\| \ge \epsilon_i) = 0.$$

现在我们证明渐近正态性。由于 $\mathbb{E}\|\hat{s}_i(\theta) - s_i^*(\theta)\|^2 \to 0$ 成立，根据 *[39,*引理*19*。*24]*:

$$\mathbb{G}_N\left[\hat{s}_i(\theta) - s_i^*(\theta)\right] \xrightarrow{P} 0 \quad and \quad \mathbb{G}_{\tilde{N}}\left[\hat{s}_i(\theta) - s_i^*(\theta)\right] \xrightarrow{P} 0.$$

根据局部利普希茨性和可微性，以及 *[39,* 引理*19*，*24],* 我们还有 :

$$\mathbb{G}_N\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \hat{\beta}_{\hat{M}_i}) - \nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\right] \xrightarrow{P} 0.$$

记为 $\mathcal{G}_i(\beta_i) = \mathbb{E}[\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i)]$。由于损失函数 $r_i(\theta, Z^i; \beta_i)$ 是强凸的，$\hat{\beta}_{\hat{M}_i}$ 是方程的唯一解:

$$\mathcal{F}_i(\beta_i) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[N_i]}\left\{\nabla_i r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}\hat{M}_i\hat{s}_i(\theta_k)\right\} + \frac{1}{N+\tilde{N}_i}\sum_{k\in[\tilde{N}_i]}\hat{M}_i\hat{s}_i(\tilde{\theta}_k) = 0$$

且还有 $\mathcal{G}_i(\beta_i^*) = \mathcal{F}_i(\hat{\beta}_{M_i}) = 0$。因此，其泰勒展开为

$$\sqrt{N}(\mathcal{G}_i(\hat{\beta}_{\hat{M}_i}) - \mathcal{G}_i(\beta_i^*)) = \sqrt{N}H_i(\beta_i^*)(\hat{\beta}_{\hat{M}_i} - \beta_i^*) + o_p(\sqrt{N}\|\hat{\beta}_{\hat{M}_i} - \beta_i^*\|).$$

注意到， $\mathcal{G}_i(\beta_{\hat{M}_i})$ 可改写为

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_i(\hat{\beta}_{\hat{M}_i}) &= \mathbb{E}[\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \hat{\beta}_{\hat{M}_i})] \\
&= \mathbb{E}[\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \hat{\beta}_{\hat{M}_i})] - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}\hat{M}_i\mathbb{E}[\hat{s}_i] + \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}\hat{M}_i\mathbb{E}[\hat{s}_i] \\
&= \mathbb{E}\left[\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \hat{\beta}_{\hat{M}_i})\right] - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}\hat{M}_i\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{k\in[N_i]}\hat{s}_i(\theta_k)\right] + \frac{1}{N+\tilde{N}_i}\hat{M}_i\mathbb{E}\left[\sum_{k\in[\tilde{N}_i]}\hat{s}_i(\theta_k)\right].
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}(\mathcal{G}_i(\hat{\beta}_{\hat{M}_i}) - \mathcal{G}_i(\beta_i^*)) &= \sqrt{N}(\mathcal{G}_i(\hat{\beta}_{\hat{M}_i}) - \mathcal{F}_i(\hat{\beta}_{\hat{M}_i})) \\
&= -\left[\mathbb{G}_N(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \hat{\beta}_{\hat{M}_i})) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}\hat{M}_i\left(\mathbb{G}_N(\hat{s}_i(\theta)) - \sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}}\mathbb{G}_{\tilde{N}}(\hat{s}_i(\tilde{\theta}))\right)\right] \\
&= -\left[\mathbb{G}_N(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i\left(\mathbb{G}_N(s_i^*(\theta)) - \sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}}\mathbb{G}_{\tilde{N}}(s_i^*(\tilde{\theta}))\right)\right] + o_p(1),
\end{aligned}$$

其中第三个等式由上述收敛结果保证。我们对右端应用中心极限定理，得到其渐近正态性如下:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{G}_N(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i\left(\mathbb{G}_N(s_i^*(\theta)) - \sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}}\mathbb{G}_{\tilde{N}}(s_i^*(\tilde{\theta}))\right) \\
&= \mathbb{G}_N\left(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i s_i^*(\theta)\right) + \sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}}\mathbb{G}_{\tilde{N}}\left(\frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i s_i^*(\tilde{\theta})\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_i),
\end{aligned}$$

其中

$$\Sigma_i = \mathrm{Cov}\left(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i s_i^*(\theta)\right) + \frac{N}{\tilde{N}_i}\mathrm{Cov}\left(\frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i s_i^*(\tilde{\theta})\right).$$

由于 $M_i = \text{协方差}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\ s_i^*(\theta)\right) \text{协方差}\left(s_i^*(\theta)\right)^{-1}$，我们可以进一步将协方差简化如下，并发现 $\Sigma_i = \Sigma_{\beta_i}$:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} M_i s_i^*(\theta)\right) + \frac{N}{\tilde{N}_i} \operatorname{Cov}\left(\frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} M s^*(\tilde{\theta})\right) \\
&= \operatorname{Cov}(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) + \left(1 + \frac{N}{\tilde{N}_i}\right) \operatorname{Cov}\left(\frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} M_i s_i^*(\tilde{\theta})\right) - 2 \operatorname{Cov}\left(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*), \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} M_i s_i^*(\theta)\right) \\
&= \operatorname{Cov}(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} \operatorname{Cov}(M_i s_i^*(\theta)) \\
&= \operatorname{Cov}(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} \operatorname{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*), s_i^*(\theta)\right) \operatorname{Cov}\left(s_i^*(\theta)\right)^{-1} \operatorname{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*), s_i^*(\theta)\right) \\
&= \operatorname{Cov}(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i} \operatorname{Cov}\left(s_i^*(\theta)\right),
\end{aligned}
$$

其中第二个等式成立为协方差 $\left(\nabla_i r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\ s_i^*(\theta)\right) = \text{协方差}(s_i^*(\theta)) \text{且} s_i^*(\theta) = \mathbb{E}[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i)\ \mid\ \theta]$。基于上述分析，我们得到渐近正态性结果:

$$
\sqrt{N}(\hat{\beta}_{\hat{M}_i} - \beta_i^*) = \sqrt{N} H_i(\beta_i^*)^{-1}(\mathcal{G}_i(\hat{\beta}_{\hat{M}_i}) - \mathcal{G}_i(\beta_i^*)) + o_p(\sqrt{N}\|\hat{\beta}_{\hat{M}_i} - \beta_i^*\|) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\beta_i}),
$$

由于 协方差$(\nabla_i r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)) - \frac{N_i}{N+\tilde{N}_i}$ 协方差 $\left(s_i^*(\theta)\right) \to$ 协方差$(\nabla_i r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*))$ − 协方差 $\left(s_i^*(\theta)\right)$ 当 $\frac{N}{\tilde{N}_i} \to 0$。

A.2.2 定理的证明7

证明10（定理7） 注意到 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta} - \theta_{PO}^{\beta^*} = (\hat{\theta}_{PO}^{\beta} - \theta_{PO}^{\beta}) + (\theta_{PO}^{\beta} - \theta_{PO}^{\beta^*})$成立，我们对一致性和渐近正态性的证明将同样分为两部分。

首先，我们证明 θ_{PO}^{β} 的一致性 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta}$ 与 θ_{PO}^{β} 部分，由于引理 3 的证明中相同的论证得出 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta}$ 至于 θ_{PO}^{β} 到 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 部分，由于映射 $\text{sol}(\beta)$ 在 β^*处可微，因此它在β^*处也是连续函数。于是，根据连续映射定理，我们有:

$$
\theta_{PO}^{\hat{\beta}} = \text{sol}(\hat{\beta}) \xrightarrow{P} \theta_{PO}^{\beta^*} = \text{sol}(\beta^*).
$$

结合以上结果，我们可以证明 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta}$ 向 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ *tha*的一致性 t

$$
\mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\beta^*}\| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(\|\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\hat{\beta}}\| \geq \epsilon/2) + \mathbb{P}(\|\theta_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\beta^*}\| \geq \epsilon/2) = 0.
$$

现在我们证明估计量的渐近正态性。 的渐近正态性 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta}$ 趋向于 θ_{PO}^{β} 的证明与定理 3 的证明类似，并且我们可以通过中心极限定理和 *Slutsky*引理得到如下结果:

$$
\sqrt{n}(\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\beta^*}) \mid \hat{\beta} \xrightarrow{d} N(\sqrt{n}(\theta_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\beta^*}), \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}) \triangleq N(\hat{\mu}_{\hat{\theta}}, \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}),
$$

其中

$$
\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}} = V_{\hat{\beta}}(\theta_{PO}^{\hat{\beta}})^{-1} \mathbb{E}_{Z \sim q(z)}\left(G(\theta_{PO}^{\hat{\beta}}, Z, \hat{\beta}) G(\theta_{PO}^{\hat{\beta}}, Z, \hat{\beta})^T\right) V_{\hat{\beta}}(\theta_{PO}^{\hat{\beta}})^{-1}.
$$

ˆ我们通过特征函数证明 $\sqrt{n}(\hat{\theta}^{\beta}_{PO} - \theta^{\beta^*}_{PO})$ 的分布。同样，我们ˆ记 $X = \sqrt{n}(\hat{\theta}^{\beta}_{PO} - \theta^{\beta^*}_{PO})$ 和−$Z = \sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta^*)$，其方差为

$$\Sigma_\theta = V_\beta(\theta^{\beta}_{PO})^{-1}\mathbb{E}_{Z\sim q(z)}\left(G(\theta^{\beta}_{PO}, Z, \beta)G(\theta^{\beta}_{PO}, Z, \beta)^T\right)V_\beta(\theta^{\beta}_{PO})^{-1}.$$

条件分布的特征函数为： $\phi_{X|Z}(t) \xrightarrow{P} \exp\left\{it^T\hat{\mu}_{\hat{\theta}} - \frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t\right\}$，而 Z 的分布可以用特征函数描述为：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int \phi_Z(s)\cdot e^{-is^TZ}ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int \exp\left\{-\frac{1}{2}s^T\Sigma_\beta s - is^TZ\right\}ds,\end{aligned}$$

其中协方差 Σ_β 由引理7给出。于是我们得到特征函数：

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{it^TX}) = \mathbb{E}_Z\left(\mathbb{E}(e^{it^TX} \mid Z)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\int \exp\left\{it^T\hat{\mu}_{\hat{\theta}} - \frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}s^T\Sigma_\beta s - is^TZ\right\}dsdZ.\end{aligned}$$

为简化表达式，令 $-\frac{1}{2}s^T\Sigma_\beta s - is^TZ = -\frac{1}{2}(s-A_1)^TM_1(s-A_1) + B_1$，比较各项可得：

$$\begin{aligned}M_1 &= \Sigma_\beta, \\ A_1 &= iM_1^{-1}Z = i\Sigma_\beta^{-1}Z, \\ B_1 &= \frac{1}{2}A_1^TM_1A_1 = -\frac{1}{2}Z^T\Sigma_\beta^{-1}Z.\end{aligned}$$

于是特征函数可以改写为

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\int \exp\left\{it^T\hat{\mu}_{\hat{\theta}} - \frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(s-A_1)^TM_1(s-A_1) + B_1\right\}dsdZ \\ &= \frac{\det|\Sigma_\beta|}{(2\pi)^{d/2}}\int \exp\left\{it^T\hat{\mu}_{\hat{\theta}} - \frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t - \frac{1}{2}Z^T\Sigma_\beta^{-1}Z\right\}dZ.\end{aligned}$$

由于我们有

$$\left|\exp\left\{it^T\hat{\mu}_{\hat{\theta}} - \frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t - \frac{1}{2}Z^T\Sigma_\beta^{-1}Z\right\}\right| = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t - \frac{1}{2}Z^T\Sigma_\beta^{-1}Z\right\}$$

并且对所有 $t \in \mathcal{T}$， $t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t > 0$，因此对所有 $t \in \mathcal{T}$， $-\frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t < 0$，指数项有界：

$$\left|\exp\left\{it^T\hat{\mu}_{\hat{\theta}} - \frac{1}{2}t^T\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}}t - \frac{1}{2}Z^T\Sigma_\beta^{-1}Z\right\}\right| \le \left|\exp\left\{-\frac{1}{2}Z^T\Sigma_\beta^{-1}Z\right\}\right|.$$

记 $J_{sol}(\beta)$ 为求最优性时映射 sol (β) 的雅可比矩阵，因此根据一阶泰勒展开，可得：

$$\sqrt{n}(\theta^{\hat{\beta}}_{PO} - \theta^{\beta^*}_{PO}) = \sqrt{n}(\mathrm{sol}(\hat{\beta}) - \mathrm{sol}(\beta^*)) \to \sqrt{\frac{n}{N}}J_{sol}(\beta^*)Z,$$

由于 $N \to \infty$。因此，根据控制收敛定理，可得：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \phi_X(t) &= \frac{\det|\Sigma_\beta|}{(2\pi)^{d/2}} \int \lim_{n\to\infty} \exp\left\{ it^T \hat{\mu}_{\hat{\theta}} - \frac{1}{2} t^T \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}} t - \frac{1}{2} Z^T \Sigma_\beta^{-1} Z \right\} dZ \\ &= \frac{\det|\Sigma_\beta|}{(2\pi)^{d/2}} \int \exp\left\{ it^T \sqrt{\frac{n}{N}} J_{sol}(\beta^*) Z - \frac{1}{2} t^T \Sigma_\theta t - \frac{1}{2} Z^T \Sigma_\beta^{-1} Z \right\} dZ.\end{aligned}$$

类似地，令 $it^T \sqrt{\frac{n}{N}} J_{sol}(\beta^*) Z - \frac{1}{2} Z^T \Sigma_\beta^{-1} Z = -\frac{1}{2}(Z - A_2)^T M_2 (Z - A_2) + B_2$，通过比较各项可得：

$$\begin{aligned} M_2 &= \Sigma_\beta^{-1}, \\ A_2 &= \sqrt{\frac{n}{N}} i M_2^{-1} J_{sol}(\beta^*)^T t = \sqrt{\frac{n}{N}} i \Sigma_\beta J_{sol}(\beta^*)^T t, \\ B_2 &= \frac{1}{2} A_2^T M_2 A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{N} t^T J_{sol}(\beta^*) \Sigma_\beta J_{sol}(\beta^*)^T t. \end{aligned}$$

那么，特征函数的极限为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \phi_X(t) &= \frac{\det|\Sigma_\beta|}{(2\pi)^{d/2}} \int \exp\left\{ it^T \sqrt{\frac{n}{N}} J_{sol}(\beta^*) Z - \frac{1}{2} t^T \Sigma_\theta t - \frac{1}{2} Z^T \Sigma_\beta^{-1} Z \right\} dZ \\ &= \frac{\det|\Sigma_\beta|}{(2\pi)^{d/2}} \int \exp\left\{ -\frac{1}{2} t^T \Sigma_\theta t - \frac{1}{2}(Z - A_2)^T M_2 (Z - A_2) + B_2 \right\} dZ \\ &= \exp\left\{ -\frac{1}{2} t^T (\Sigma_\theta + \frac{n}{N} J_{sol}(\beta^*) \Sigma_\beta J_{sol}(\beta^*)^T) t \right\},\end{aligned}$$

这意味着，$X = \sqrt{n}(\hat{\theta}_{PO}^{\beta} - \theta_{PO}^{\beta^*})$ 的分布函数服从均值为零、方差为 $\Sigma_\theta + \frac{n}{N} J_{sol}(\beta^*) \Sigma_\beta J_{sol}(\beta^*)^T$ 的正态分布，其中 n 是通过重要性采样估计 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 的样本量，N 是通过重新校准方法估计分布参数 β^* 的样本量。因此，根据斯卢茨基引理，我们有如下渐近正态性：

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} - \theta_{PO}^{\beta^*}) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

其中

$$\Sigma = J_{sol}(\beta^*) \Sigma_\beta J_{sol}(\beta^*)^T,$$

因为 $\frac{N}{n} \Sigma_\theta + J_{sol}(\beta^*) \Sigma_\beta J_{sol}(\beta^*)^T \to J_{sol}(\beta^*) \Sigma_\beta J_{sol}(\beta^*)^T$，当 $\frac{N}{n} \to 0$ 时。

引理 7 假设假设 5 成立。设样本量满足 $\frac{N}{\tilde{N}_i} \to 0$，且 $\mathbb{E}\|\hat{s}_i(\theta) - s_i(\theta)\|^2 \xrightarrow{P} 0$ 对某个 $s_i(\theta)$ 对每个参与者 i，基于定理 6的分析，我们得到 β的渐近正态性：

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta^*) \xrightarrow{P} N(0, \Sigma_\beta).$$

令 $s_i(\theta) = s_i^*(\theta)$，则其渐近协方差为

$$\Sigma_\beta = \mathrm{diag}\{H_i(\beta_i^*)^{-1} \left(\mathrm{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) \right) - \mathrm{Cov}\left(s_i^*(\theta_k) \right) \right) H_i(\beta_i^*)^{-1} \}.$$

证明11 由定理的证明 6，我们知道

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\hat{\beta}_i - \beta_i^*) = &- H_i(\beta_i^*)^{-1} \left[\mathbb{G}_N(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) - \frac{\tilde{N}_i}{N + \tilde{N}_i} M_i \left(\mathbb{G}_N(s_i^*(\theta)) - \sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}} \mathbb{G}_{\tilde{N}}(s_i^*(\tilde{\theta})) \right) \right] \\ &+ O_P\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right).\end{aligned}$$

对于第一项，我们有 $\mathbb{G}_N$：

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_N(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)) &= \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\nabla_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - \mathbb{E}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*))\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - \mathbb{E}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*))\right).\end{aligned}$$

因此，对于非零向量 $\mathbf{c} = (c_1, ...c_m)^T \in \mathbb{R}^d$，有

$$\begin{aligned}L_1 &= \sum_{i=1}^{m} c_i\left(H_i(\beta_i^*)^{-1}\mathbb{G}_N(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*))\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{m} c_i\left(H_i(\beta_i^*)^{-1}\sum_{k=1}^{N}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - \mathbb{E}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)))\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i H_i(\beta_i^*)^{-1}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - \mathbb{E}(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*))\right) \\ &\triangleq \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i^1(Z_k^i)\right) \\ &\triangleq \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\psi_1(Z_k).\end{aligned}$$

注意，这里均值为零 $E[\psi_1(Z)] = 0$，方差如下：

$$\mathrm{Cov}(\psi(Z)) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i(Z^i)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_i c_j \cdot \mathrm{Cov}(\phi_i^1(Z^i), \phi_j^1(Z^j)) = \mathbf{c}^T\Sigma_1\mathbf{c}.$$

根据中心极限定理和 *Slutsky*引理，我们得到渐近正态性：

$$L_1 \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{c}^T\Sigma_1\mathbf{c}),$$

其中，协方差 $\Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\mathrm{Cov}(\phi_i^1(Z^i))\ i \in [m]\}$ 中， Z^i 相互独立。对于第二项和第三项，我们进行类似的处理，并得到类似的项

$$\begin{aligned}L_2 &= \sum_{i=1}^{m} c_i\left(\frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i \cdot H_i(\beta_i^*)^{-1}\mathbb{G}_N(s_i^*(\theta))\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i \cdot H_i(\beta_i^*)^{-1} \cdot (s_i^*(\theta_k) - \mathbb{E}(s_i^*(\theta_k)))\right) \\ &\triangleq \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i^2(\theta_k)\right), \\ L_3 &= \sum_{i=1}^{m} c_i\left(\sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}}\frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i \cdot H_i(\beta_i^*)^{-1}\mathbb{G}_{\tilde{N}}(s_i^*(\tilde{\theta}))\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{N}}}\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\sqrt{\frac{N}{\tilde{N}_i}}\frac{\tilde{N}_i}{N+\tilde{N}_i}M_i \cdot H_i(\beta_i^*)^{-1} \cdot (s_i^*(\theta_k) - \mathbb{E}(s_i^*(\theta_k)))\right) \\ &\triangleq \frac{1}{\sqrt{\tilde{N}}}\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i^3(\theta_k)\right),\end{aligned}$$

以及渐近协方差 $\Sigma_2 = \{\phi_i^2\ Z^i \quad i \in [m]\}$ $\Sigma_3 = \{\phi_i^3\ Z^i \quad i \in [m]\}$ $\sqrt{N}\ \hat{\beta}_i -$ diagCov(())和 diagCov(())。因此，我们得到($\hat{}\beta_i^*$) 的线性组合的渐近正态性，如下所示：

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{m} c_i \sqrt{N}(\hat{\beta}_i - \beta_i^*) \\ &= -(L_1 - L_2 + L_3) \\ &\xrightarrow{d} N(0, \Sigma_\beta), \end{aligned}$$

其中协方差矩阵为

$$\Sigma_\beta = \text{diag}\{H_i(\beta_i^*)^{-1} \left(\text{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*)\right) - \text{Cov}\left(s_i^*(\theta_k)\right)\right) H_i(\beta_i^*)^{-1}\},$$

由于 $\frac{N}{\tilde{N}_i} \to 0$ 且协方差$(M_i s_i^*(\theta))$ $=$协方差$(s_i^*(\theta))$ 正如我们在证明 *9*中所证明的那样。根据克拉默–沃尔德定理（引理 *8*），我们可以推得估计量$\hat{}\beta$的渐近正态性：

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta^*) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_\beta).$$

引理 8（克拉默–沃尔德定理）设 $\{X_n\}$ 是$\mathbb{R}^d$中的一列随机向量，且设 X 是 $\mathbb{R}^d$中的一个随机向量。那么：

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \Longleftrightarrow \quad a^\top X_n \xrightarrow{d} a^\top X \quad \textit{for all } a \in \mathbb{R}^d.$$

A.2.3 估计协方差的一致性证明

证明 12（定理 8 的证明）由于样本 (θ_k, Z_k^i) 独立同分布地来自联合分布 $D_\theta \times D_i(\theta_k)$，且满足有限期望条件 $\mathbb{E}\|\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\|^2 \le \infty$，$\mathbb{E}\|\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\|^2 \le \infty$，根据大数定律，我们可以直接得到一致性：

$$\hat{H}_i(\beta_i^*) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*)\right] \xrightarrow{P} H_i(\beta_i^*),$$

$$\hat{V}_a(\beta_i^*) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\nabla r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - L_i^*\right)\left(\nabla r_i(\theta_k, Z_k^i; \beta_i^*) - L_i^*\right)^T \xrightarrow{P} \text{Cov}\left(\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\right).$$

此外，由于 θ_k 是来自分布 D_θ 的独立同分布样本，并且$Z^i_{k,\ j}$ 在给定 θ_k的条件下也来自 D_i（θ_k）且独立同分布，根据大数定律，我们得到以下结果：

$$\hat{V}_b(\beta_i^*) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\nabla r_i(\theta_k, Z_{k,j}^i; \beta_i^*) - W_i^*\right)\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\nabla r_i(\theta_k, Z_{k,j}^i; \beta_i^*) - W_i^*\right)^T \xrightarrow{P} \text{Cov}\left(\mathbb{E}\left[\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)|\theta\right]\right).$$

根据前面的分析， $H_i(\beta_i^*)$ 是非奇异的，且三个分量$\hat{}$各自具有一致性，因此根据连续映射定理， Σ_β 的一致性可直接得出：

$$\hat{\Sigma}_\beta = \hat{H}_i(\beta_i^*)^{-1}\hat{V}_i(\beta_i^*)\hat{H}_i(\beta_i^*)^{-1} \xrightarrow{P} \Sigma_\beta.$$

证明 13（定理 9的证明）证明过程与定理 8的证明相同。由于 Z_k 是来自 $q(z)$的独立同分布样本，根据大数定律，我们得到一致性：

$$\hat{J}_1(\beta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial G(Z_k, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \theta^\top}\right] \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{Z\sim q(z)}\left[\frac{\partial G(Z, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \theta^\top}\right],$$
$$\hat{J}_2(\beta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial G(Z_k, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \beta^\top}\right] \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{Z\sim q(z)}\left[\frac{\partial G(Z, \theta_{PO}^{\beta^*}; \beta^*)}{\partial \beta^\top}\right].$$

同样地，根据非奇异性和连续映射定理，我们得到一致性结果：

$$\hat{\Sigma} = \hat{J}_{sol}(\beta)^{-1}\hat{\Sigma}_\beta \hat{J}_{sol}(\beta)^{-1} \xrightarrow{P} \Sigma.$$

A.2.4 引理 1的证明

证明 14（引理 1的证明）证明分为两部分。首先，我们证明 Ψ_{β^*}是一个影响函数。然后，我们证明 Ψ_{β^*} 属于 $\mathscr{P}_{\theta,\ Z}$的切空间。对于 $\Psi_{\theta_{PO}^{\beta^*}}$ 的结果则由 *Delta* 方法 *[39]*得到。

我们首先证明 Ψ_{β^*} 是一个影响函数。对于任意光滑的一维参数子模型 $\{P_{\theta,Z}^u:\ u\in\mathbb{R}、|u|\le\delta\}\subset\mathscr{P}_{\theta,\ Z}$，满足 $P_{\theta,\ Z}^0 = P_{\theta,\ Z}$且得分函数为$s$，由于 P_θ^u的边缘分布 θ 是固定的，我们知道

$$s(\theta, Z) = \frac{d}{du}\log\frac{dP_{\theta,Z}^u}{dP_{\theta,Z}}\bigg|_{u=0} = \frac{d}{du}\log\frac{dP_{Z|\theta}^u}{dP_{Z|\theta}}\bigg|_{u=0}.$$

因此，s（θ、Z）是条件子模型的得分，因此满足 $\mathbb{E}_{P_{Z|\theta}}s$（$\theta$、$Z$）$=0P_\theta$-几乎处处成立。记

$$\beta_i^{*(u)} = \arg\min_{\beta_i}\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}^u} r_i(\theta, Z^i; \beta_i), \quad i\in[m].$$

于是可得

$$\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}^u} G_r(\theta, Z; \beta^{*u}) = 0, \quad with \quad G_r(\theta, Z; \beta) = (\nabla_{\beta_1}^\top r_1(\theta, Z^1; \beta_1), \ldots, \nabla_{\beta_m}^\top r_m(\theta, Z^m; \beta_m))^\top.$$

对两边求导，得到

$$\frac{d\beta^{*(u)}}{du}\bigg|_{u=0} = -\left\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}}\nabla_\beta^\top G_r(\theta, Z; \beta^*)\right\}^{-1}\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} G_r(\theta, Z; \beta^*)s(\theta, Z).$$

注意到

$$\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} s(\theta, Z)\mathbb{E}_{P_{Z|\theta}} G_r(\theta, Z; \beta^*) = \mathbb{E}_{P_Z}\mathbb{E}_{P_{Z|\theta}} s(\theta, Z)\mathbb{E}_{P_{Z|\theta}} G_r(\theta, Z; \beta^*) = 0,$$

因此 Ψ_{β^*} 是一个影响函数，即

$$\frac{d\beta^{*(u)}}{du}\bigg|_{u=0} = \mathbb{E}_{P_{\theta,Z}}\Psi_{\beta^*}(\theta, Z)s(\theta, Z).$$

接下来，我们证明 Ψ_{β^*}中的元素属于$\mathscr{P}_{\theta,Z}$的切空间。对于 $u=(u_1^\top,\ldots,u_m^\top)^\top$，我们将 $P_{\theta,Z}^u$ 定义为

$$\frac{dP_{\theta,Z}^u}{dP_{\theta,Z}}(\theta, Z) = \prod_{i\in[m]}\frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)}, \quad K(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}, \quad C_i^{u_i}(\theta) = \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)}K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i)),$$

$$s_i(\theta, Z^i) = -\{\mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\}^{-1} \{\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) - \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} \nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*)\},$$

我们知道得分为 $\Psi_{\beta^*} = (s_1^\top, \ldots, s_m^\top)^\top$，并且

$$P_\theta^u(A) = \mathbb{E}_{P^u_{\theta,Z}} \mathbf{1}(\theta \in A) = \mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \prod_{i\in[m]} \frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)} \mathbf{1}(\theta \in A) = \mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \mathbf{1}(\theta \in A) = P_\theta(A).$$

记 $\mathcal{D}_i^u(\theta) = P^u_{Z^i|\theta}$，我们知道

$$\frac{d\mathcal{D}_i^u(\theta)}{d\mathcal{D}_i(\theta)}(Z^i) = \frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)}.$$

因此，只需证明 $\mathcal{D}^u_{[m]}$ 满足假设5 和 6。

假设 ***5.1***：局部利普希茨

注意，$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\nabla K(x)| = 1$、$\sup_{x\in\mathbb{R}} |K(x)| = 2$以及$\sup_{\theta\in\Theta,\ Z^i\in\mathcal{Z}_i} \|\nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i;\ \beta_i^*)\|_2 < \infty$，那么

$$|C_i^{u_i}(\theta) - 1| = \left|\mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i)) - 1\right| \le \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} |u_i^\top s_i(\theta, Z)| = O(\|u\|_2),$$

$$\mathbb{E}_{P^u_{\theta,Z}} \left(L^i_{U_i}(\theta, Z^i)\right)^2 = \mathbb{E}_{P^u_{\theta,Z}} \frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)} \left(L^i_{U_i}(\theta, Z^i)\right)^2 \le (2 + O(\|u\|_2) \mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \left(L^i_{U_i}(\theta, Z^i)\right)^2 < \infty.$$

假设 ***5.3***：正定

由于 $\nabla_{\beta_i} r_i(\theta,\ Z^i;\ \beta_i^*)$ 和 $\nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta,\ Z^i;\ \beta_i^*)$ 在 $\Theta \times \mathcal{Z}_i$ 上有界，这是由假设 7得出的，因此

$$\left\| \mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \left\{ \frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)} - 1 \right\} \nabla^2_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) \right\|_{\text{sp}} = O(\|u\|_2),$$

$$\left\| \mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \left\{ \frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)} - 1 \right\} \nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) \nabla^\top_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) \right\|_{\text{sp}} = O(\|u\|_2),$$

$$\left\| \mathbb{E}_{P_{\theta,Z}} \left\{ \frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)} - 1 \right\} \nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) \right\|_2 = O(\|u\|_2),$$

$$\left\| \mathbb{E}_{\mathcal{D}_i(\theta)} \left\{ \frac{K(u_i^\top s_i(\theta, Z^i))}{C_i^{u_i}(\theta)} - 1 \right\} \nabla_{\beta_i} r_i(\theta, Z^i; \beta_i^*) \right\|_2 = O(\|u\|_2),$$

那么假设成立。

A.2.5 定理证明5

证明 15（定理 5的证明）这里以 $\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta^i)$ 的凸性为例，基于 $\mathbf{PR}^i(\theta^i)$ 凸性的证明也相同。

我们首先证明，对于每个 $\theta^i \in \Theta_i$，两个风险函数之间的距离都有界。注意，$\left|\ell_i(\theta^i, \theta^{-i}, Z^i)\right| \le M_i$，因此，对于每个 $\theta^i \in \Theta_i$，两个风险函数之间的距离有如下界：

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta^i) - \mathbf{PR}^i(\theta^i)\right| &= \left| \int \ell_i(\theta^i, \theta^{-i}, Z^i)(p_{\beta_i^*}(z;\theta) - p_i(z;\theta)) dz \right| \\
&\le M_i \cdot \int \left| p_{\beta_i^*}(z;\theta) - p_i(z;\theta) \right| dz \\
&= 2M_i \cdot TV(D_{\beta_i^*}(\theta), D_i(\theta)) \\
&= 2M_i \cdot \sup_{\theta^i\in\Theta_i} TV(D_{\beta_i^*}(\theta), D_i(\theta)) \\
&= 2M_i \cdot \eta_i.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$-2M_i \cdot \eta_i \leq \mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta_{PO}^i) - \mathbf{PR}^i(\theta_{PO}^i) \leq 2M_i \cdot \eta_i,$$
$$-2M_i \cdot \eta_i \leq \mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta_{PO}^{\beta_i^*}) - \mathbf{PR}^i(\theta_{PO}^{\beta_i^*}) \leq 2M_i \cdot \eta_i.$$

由于 $\theta_{PO}^{\beta_i^*}$ 是风险函数 $\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta)$ 的最小化点，强凸性不等式的形式为

$$\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta^i) \geq \mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta_{PO}^{\beta_i^*}) + \frac{\lambda_i}{2}\|\theta^i - \theta_{PO}^{\beta_i^*}\|^2.$$

结合强凸性与上述不等式，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta_{PO}^{\beta_i^*}) &\leq \mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta_{PO}^i) - \frac{\lambda_i}{2}\|\theta_{PO}^i - \theta_{PO}^{\beta_i^*}\|^2 \\ &\leq \mathbf{PR}^i(\theta_{PO}^i) + 2M_i \cdot \eta_i - \frac{\lambda_i}{2}\|\theta_{PO}^i - \theta_{PO}^{\beta_i^*}\|^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{PR}^{\beta_i^*}(\theta_{PO}^{\beta_i^*}) &\geq \mathbf{PR}^i(\theta_{PO}^{\beta_i^*}) - 2M_i \cdot \eta_i \\ &\geq \mathbf{PR}^i(\theta_{PO}^i) - 2M_i \cdot \eta_i,\end{aligned}$$

其中 θ_{PO}^i 是风险函数 $\mathbf{PR}^i(\theta^i)$ 的最小化点。因此，可得

$$\mathbf{PR}^i(\theta_{PO}^i) - 2M_i \cdot \eta_i \leq \mathbf{PR}^i(\theta_{PO}^i) + 2M_i \cdot \eta_i - \frac{\lambda_i}{2}\|\theta_{PO}^i - \theta_{PO}^{\beta_i^*}\|^2.$$

这意味着，对于每个参与者 i，都有

$$\|\theta_{PO}^i - \theta_{PO}^{\beta_i^*}\|_2^2 \leq \frac{8M_i \cdot \eta_i}{\lambda_i}.$$

因此，从总体层面来看，可得

$$\|\theta_{PO} - \theta_{PO}^{\beta^*}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \|\theta_{PO}^i - \theta_{PO}^{\beta_i^*}\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^m \frac{8M_i \cdot \eta_i}{\lambda_i}.$$

B 更多实验的详细信息和结果

B.1 稳定点

B.1.1 实验细节

验证联合光滑性和强凸性我们在此处使用损失函数 $\ell(\theta, Z) = \frac{1}{2}\|Z - \theta\|_2^2$，其中 $Z, \theta \in \mathbb{R}^d$。损失函数相对于 θ 的梯度为$\nabla_\theta \ell(\theta, Z) = \theta - Z$，因此我们有

$$\|\nabla \ell(\theta_1, Z) - \nabla \ell(\theta_2, Z)\|_2 = \|\theta_1 - \theta_2\|_2 \leq \beta \cdot \|\theta_1 - \theta_2\|_2,$$

且当 $\beta = 1$ 时等号成立。因此，光滑性参数为 $\beta = 1$。此外，损失函数的海森矩阵为 $\nabla_\theta^2 \ell(\theta, Z) = I_d$，其特征值均为 1，因此强单调性的参数为 $\alpha = \lambda_{min} = 1$。

验证敏感性 在模拟中，分布映射构造为

$$\mathcal{D}(\theta) = N(\epsilon\theta, \Sigma), \quad \Sigma = diag(\sigma_1^2, ..., \sigma_d^2),$$

其中 ϵ，σ_1^2，……，$\sigma_d^2 \in \mathbb{R}$。现在我们验证，$\epsilon$ 是 $\mathcal{D}(\theta)$ 的敏感参数。对于任意 θ_1，$\theta_2 \in \Theta$，将随机变量设定如下：

$$X \sim \mathcal{D}(\theta_1) = N(\epsilon\theta_1, \Sigma),$$

$$Y = X + \epsilon(\theta_2 - \theta_1) \sim \mathcal{D}(\theta_2) = N(\epsilon\theta_2, \Sigma),$$

这意味着 $\mathbb{E}\|X - Y\|_1 = \|\epsilon\theta_1 - \epsilon\theta_2\|_1$。由于 Wasserstein-1 距离定义为

$$W_1(\mathcal{D}(\theta_1), \mathcal{D}(\theta_2)) = \inf_{P \in \Gamma(\mathcal{D}(\theta_1), \mathcal{D}(\theta_1))} \mathbb{E}_{(X,Y)\sim P}\|X - Y\|_1,$$

它是所有耦合上的下确界，因此我们有

$$W_1(\mathcal{D}(\theta_1), \mathcal{D}(\theta_2)) \leq \mathbb{E}\|X - Y\|_1 = \epsilon\|\theta_1 - \theta_2\|_1.$$

因此，分布映射是 ϵ-敏感的。

优化细节 如 [32], 所示，重复风险最小化的定义要求在每次迭代中对目标函数进行精确最小化，作者使用带容差的梯度下降 10^{-8} 以及回溯线搜索来确定每次迭代的步长。在这里，经验重复风险最小化的定义同样要求在每次迭代中精确求得估计量。然而，我们不需要在这里使用优化算法，因为我们的问题可以简化为如下的均值估计：

$$\theta_{t+1} = \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_t)} \frac{1}{2}\|Z - \theta\|_2 = \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{D}(\theta_t)} Z = \epsilon \cdot \theta_t.$$

覆盖率 根据更新过程，很容易看出，在这个行为响应问题中，稳定点为 $\theta_{PS} = (0, 0)^T$。首先，我们计算每个 θ_t 的置信区间覆盖率；在每次实验中使用 $N = 5000$ 个样本进行 1000 次独立实验。在每次实验中，我们利用估计量 θ_t 和数值估计的协方差 Σ_t，为 θ_t 构造置信区间，其形式为

$$\left[\hat{\theta}_{t,(i)} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_{t,(ii)}}{N}}, \hat{\theta}_{t,(i)} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_{t,(ii)}}{N}}\right], \quad z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(0.975),$$

其中，$i = [d]$ 表示 θ 的各个条目，N 表示样本数量，Φ 表示标准正态分布的分位数函数。此外，我们还可以利用估计量 θ_t 和估计的协方差 Σ_t，计算稳定点 θ_{PS} 的同一置信区间的覆盖率。

B.1.2 其他结果

根据文献 [23], 分布映射引起的分布偏移幅度 $D(\theta$会影响我们的估计达到有效水平所需的迭代次数。这里，我们进一步通过考察敏感性 ϵ对真实稳定点 θ_{PS} 随时间变化的推断性能的影响来探究这一问题。在图 4中，我们比较了在敏感性水平 θ_{PS}、$\epsilon = 0.01$、0.05 和 0.2 下，各坐标在时间步 $t = 0$、……、10 时的覆盖率。无论 ϵ取何值，两个坐标的覆盖率都会随着时间推移收敛至目标水平 $\alpha = 0.95$。然而，随着 ϵ增大，覆盖率达到目标水平所需的迭代次数也随之增加。

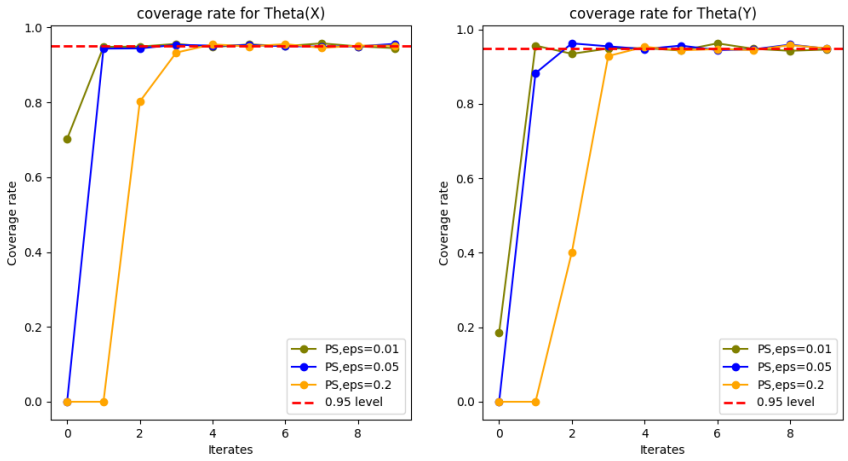


图 4: θ_{PS} 两个条目的覆盖率与模型设定错误的关系

B.2 最优点

B.2.1 实验细节

验证模型设定错误与光滑性 真实分布映射为

$$\mathcal{D}(\theta) : b + M_1 * \theta + \epsilon M_2 * \theta^2 + Z_0, \quad Z_0 \sim N(0, \sigma^2 I_d),$$

且分布图谱为

$$\mathcal{D}_M(\theta) : b + M * \theta + Z_0, \quad Z_0 \sim N(0, \sigma^2 I_d).$$

我们首先证明其在全变差距离下的模型设定错误。我们可以直接计算得出 $M^* = M_1$，并且由于 $\mathcal{D}(\theta) \triangleq N(\mu_1, \sigma^2 I_d)$ 和 $\mathcal{D}_{M^*}(\theta) \triangleq N(\mu_2, \sigma^2 I_d)$ 是具有相同协方差的高斯分布，因此其全变差距离满足以下不等式:

$$TV(\mathcal{D}_{M^*}(\theta), \mathcal{D}(\theta)) \leq \frac{1}{2}\|\Sigma^{-1/2}(\mu_1 - \mu_2)\|_2 = \frac{1}{2\sigma}\|\mu_1 - \mu_2\|_2.$$

由于 $\mu_1 - \mu_2 = (M_1 - M^*)\theta + \epsilon M_2\theta^2 = \epsilon M_2\theta^2$，在本实验中，该距离的上界为

$$TV(\mathcal{D}_{M^*}(\theta), \mathcal{D}(\theta)) \leq \frac{\epsilon M_2\theta^2}{2\sigma}.$$

因此，该分布映射存在 $\frac{\epsilon M_2\theta^2}{2\sigma}$ 错设。至于全变差距离下的光滑性，我们有以下不等式:

$$TV(\mathcal{D}_M(\theta), \mathcal{D}_{M'}(\theta)) \leq \frac{1}{2\sigma}\|\mu - \mu'\|_2 = \frac{\theta}{2\sigma}\|M - M'\|_2.$$

因此，该分布图谱具有 $\frac{\theta}{2\sigma}$ 光滑性。

优化细节 根据我们的模拟设定，我们可以计算出目标分布参数和目标代入最优解的闭式形式，即 $\beta^* = \beta_1$和 $\theta_{PO}^{\beta^*} = \frac{-b}{\beta^* - 1}$。我们将详细说明它们。在我们的行为响应问题中，用于拟合真实映射的真实分布映射 $\mathcal{D}$和分布图谱 $\mathcal{D}_\beta$ 为

$$Z \sim \mathcal{D}(\theta) = N(b + \beta_1\theta + \epsilon\beta_2\theta^2, \sigma^2) \triangleq N(\mu(\theta), \sigma^2),$$

$$Z \sim \mathcal{D}_\beta(\theta) = N(b + \beta\theta, \sigma^2),$$

并且，用于拟合分布映射的 θ 的分布为均匀分布 $\theta \sim U$（-1，1）。真实分布参数为 $\beta^* = \arg\min_{\beta \in \mathcal{B}} \mathbb{E}_{\theta,\ Z}(Z - \beta\theta)^2,,$ 我们可以将期望展开如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta,Z}(Z - \beta\theta)^2 &= \mathbb{E}_{\theta,Z}(Z^2 - 2Z\beta\theta + \beta^2\theta^2) \\
&= \mathbb{E}_\theta \left\{ \mathbb{E}_{Z|\theta}(Z^2 - 2Z\beta\theta + \beta^2\theta^2) \right\} \\
&= \mathbb{E}_\theta \left\{ \sigma^2 + \mu(\theta)^2 - 2\beta\theta\mu(\theta) + \beta^2\theta^2 \right\} \\
&= \sigma^2 + b^2 + \frac{2}{3}b\epsilon\beta_2 + \frac{1}{3}(\beta_1 - \beta)^2 + \frac{1}{5}\epsilon^2\beta_2^2.
\end{aligned}$$

因此，对期望关于 β 求导并令其等于零，可得到真实分布参数 $\beta^* = \beta_1$。此外，代入最优解为 $\theta_{PO}^{\beta^*} = \arg\min_{\beta \in \mathcal{B}} \mathbb{E}_{Z \sim \mathcal{D}_{\beta^*}(\theta)}(Z - \theta)^2,,$ 类似地，我们可以将期望展开如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Z \sim \mathcal{D}_{\beta^*}(\theta)}(Z - \theta)^2 &= \mathbb{E}_{Z \sim \mathcal{D}_{\beta^*}(\theta)}(Z^2 - 2Z\theta + \theta^2) \\
&= \sigma^2 + (b + \beta^*\theta)^2 - 2\theta(b + \beta^*\theta) + \theta^2.
\end{aligned}$$

然后，我们对其关于 θ 求一阶导数并令其等于零

$$\begin{aligned}
& 2\beta^*(b + \beta^*\theta) - 2b - 4\beta^*\theta + 2\theta \\
&= 2[(\beta^*)^2 - 2\beta^* + 1]\theta + 2(\beta^* - 1)b \\
&= 2(\beta^* - 1)^2\theta + 2(\beta^* - 1)b \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，真实的代入最优解为 $\theta_{PO}^{\beta^*} = \frac{-b}{\beta^* - 1}$。——

覆盖率 我们通过 1000 次独立实验计算代入最优解 $\theta_{PO}^{\beta^*}$ 的置信区间覆盖率。在每次实验中，我们使用 $N = 15000$ 个样本估计 β，使用 $N = 1000000$ 个蒙特卡洛样本估计积分，并使用 $n = 1000000$ 个蒙特卡洛样本生成 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta}$。$\theta_{PO}^{\beta^*}$ 的置信区间是利用估计量 $\hat{\theta}_{PO}^{\beta}$ 和数值估计的协方差矩阵 $\hat{\Sigma}_\theta$ 构造的，如下所示：

$$\left[\hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_\theta}{N}}, \hat{\theta}_{PO}^{\hat{\beta}} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_\theta}{N}} \right], \quad z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(0.975),$$

其中，N 是用于模拟插件估计量的样本量，$\Phi(\cdot)$表示标准正态分布的分位数函数。请注意，在每次实验中，$N = 15000$ 个样本均匀分配到三个步骤中，每个步骤分配 $N/3 = 5000$ 个样本，这足以确保估计的可靠性。此外，样本量比率 $\frac{N}{\tilde{N}} = \frac{N}{n} = 0.015$ 足够小，满足理论协方差的要求。