arXiv:2602.03058v1 [math.PR] 3 Feb 2026

指数随机变量和的矩，超越 CHS

Silouanos Brazitikos[†]、Colin Tang[*]、Tomasz Tkocz[*]

[†]数学与应用数学系，克里特大学，*70013* 伊拉克利翁 - 克里特岛，希腊。

[*]数学科学系，卡内基梅隆大学，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，*PA 15213*

摘要

对于 $p \geq 2$，我们建立了具有固定方差的相互独立指数随机变量之和的 L_p-范数的精确下界，从而推广了 Hunter 正性定理（1976）关于完全齐次多项式的结论。我们确定了 p 的确切范围，在该范围内，这类和具有 Schur 单调性。

2020 Mathematics Subject Classification. 主要分类号 60E15；次要分类号 26D15。

Key words. Exponential distribution, Sums of independent random variables, Sharp moment comparison, Completely homogeneous polynomials, Majorisation, Schur convexity.

1 引言

指数分布在概率论中的重要性或许怎么强调都不为过。这一点深深植根于它的无记忆性（这是其独有的特征）。由于指数分布天然适用于描述以恒定速率发生的独立随机事件之间的等待时间，因此它与泊松过程有着内在联系，是描述事件

[*]电子邮箱：ttkocz@math.cmu.edu。研究部分由美国国家科学基金会资助项目 DMS-2246484 支持。

到达模式的重要工具，可用于生存建模、可靠性理论和排队系统等领域的分析，充分体现了它广泛的理论与实践适用性（例如参见 [2, 25]）。此外，指数分布还是构建更复杂分布（如伽马分布或威布尔分布）以及连续时间随机过程的基础。

1.1 几何动机：单纯形切片

我们的主要动机源于指数分布与单纯形上的均匀测度之间的内在联系——参见 [16] 第 5 章中的定理 2.1 和定理 2.2——更具体地说，源于对正则单纯形极值体积截面的研究。这项研究始于 [37]，随后由 [9]，推进，并在不久前由 [30, 31] 再度焕发生机。本质上，这类截面的体积可以用概率论的方式表示为独立指数随机变量之和的密度；详情参见 [37]，或 [30] 中的 (1)。这一视角自然引出了关于独立随机变量之和的尖锐 L_p 界的问题，其中奇异的极限情形 $p \downarrow -1$ 对应体积。关于这一研究范式，可参阅综述 [32]；此外，[11, 14, 30] 还介绍了相关结果，为 Ball 的立方体切片 [3]、Oleszkiewicz-Pe-lczy´nski 多圆盘切片 [33]，和 Webb 的单纯形切片[37]，分别提供了概率论上的推广。

另一方面，在经典理论中，概率论对正 p 的尖锐 L_p 界已有深入研究，这一系列结果通常称为*Khinchin* 型不等式（该术语源自 Khinchin 将其经典应用于研究迭代对数律 [24]）。Khinchin 型不等式本质上是对 Hölder 型不等式的反向估计，允许相差一个乘法常数。也就是说，对于 $p < q$，人们试图用 L_p 范数给出 L_q 范数的尖锐上 界，从而反转一般的标准 Hölder 不等式界 $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$。有趣的是，巴拿赫空间局部理论的发展（见 [22, 26, 28]）也推动了这一研究。

本文的核心是开启对独立指数随机变量之和的（正向）H¨older 不等式中最佳常数的研究。具体而言，

对于每个 $p \geq 2$，我们都求出满足以下条件的最大常数 c_p

$$\|X\|_p \geq c_p \|X\|_2 \tag{1}$$

对每个随机变量 X 都成立，其中该变量是相互独立的中心化指数随机变量之和。（最近有人在 [30], 中提出了这个问题，参见其中的第 3.2 节和第 3.3 节。）

我们采用如下标准记号：给定 $p \in \mathbb{R}$，对于随机变量 X，$\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ 是其“范数”（当然，当$p < 1$时，它并非严格意义上的范数）。

1.2 代数动机：Hunter 正性定理

指数随机变量之和的偶数阶矩也自然地与一个基本的代数对象相关联，即完全齐次对称多项式（CHS 多项式）；它们在经典对称函数理论中发挥着关键作用（例如，参见 [29]）。Hunter 在 [21] 中的一项经典结果断言，CHS 多项式是正定函数。事实上，他证明了一个定量下界；从概率角度看，该下界相当于式 (1) 在所有偶数 p 取值下的渐近紧界。这一结果在分析的若干主题中有着有趣的应用与联系，例如矩阵范数 [1], 、保正性算子 [23], 或麦克劳林不等式 [36]。另请参见近期的综述 [7]。最近， [8], 重新引起了人们对 CHS 多项式界的研究热情；其中，Hunter 定理得到了加强，成为一个非渐近紧界，此外还有许多其他有趣的结果。

1.3 具体内容与我们的结果

在本文中沿用的记号体系下，令 $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$，……，$\mathrm{E}_1'$，$\mathrm{E}_2'$，……，E，E′，E″，…… 等为相互独立且同分布（i.i.d.）的标准指数随机变量（即密度为 $e^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$ on $\mathbb{R}$），其均值和方差均为 1。

如前所述，单纯形切片与这项工作直接相关。主要

由 [30] 得出的结果确立了其概率扩展：对于每个对数凹随机变量 X （即其密度连续且具有如下形式： e^{-V}，其中 V 是凸函数： $\mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$），我们有

$$\frac{\|X - \mathbb{E}X\|_p}{\|X - \mathbb{E}X\|_1} \geq \|\mathscr{E} - \mathscr{E}'\|_p, \quad \text{for } -1 < p \leq 1 \tag{2}$$

and

$$\frac{\|X - \mathbb{E}X\|_p}{\|X - \mathbb{E}X\|_1} \leq \begin{cases} \|\mathscr{E} - \mathscr{E}'\|_p, & \text{for } 1 \leq p \leq p_\star \\ \|\frac{2}{e}(\mathscr{E} - 1)\|_p, & \text{for } p \geq p_\star, \end{cases} \tag{3}$$

其中，常数 $p_\star = 2.9414..$ 由方程 $\|\mathsf{E} - \mathsf{E}'\|_p = \|\frac{2}{e}(\mathsf{E} - 1)\|_p$ 在 $p \in (1, +\infty)$ 中的唯一解定义。我们强调， $\|\mathsf{E} - \mathsf{E}'\|_1 = \|\frac{2}{e}(\mathsf{E} - 1)\|_1 = 1$，因此这些界是锐利的。恰当地分析第一个界在 X 形如 $\sum x_j(\mathsf{E}_j - 1)$ 时的极限情形 $p \downarrow -1$，即可重新得到 [37] （详情请参见 [30], 定理 1 及其后的段落）。

次数为 ℓ 、含有 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 的完全齐次对称（CHS）多项式 $\mathsf{h}_\ell(x)$，是给定变量中所有不同的次数为 ℓ 的单项式之和，

$$\hbar_\ell(x) = \hbar_\ell(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_\ell \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_\ell} \tag{4}$$

按照通常约定， $h_0(x) \equiv 1$。等价地，利用其生成函数，CHS 多项式定义为

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - x_j t} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \hbar_\ell(x) t^\ell.$$

由于左侧是均值为 x_j 的独立指数随机变量之和的矩母函数，

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\sum x_j \mathscr{E}_j)^\ell}{\ell!} t^\ell = \mathbb{E}e^{t \sum_{j=1}^n x_j \mathscr{E}_j} = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}e^{t x_j \mathscr{E}_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - x_j t}, \qquad |t| < \min_j \left(|x_j|^{-1}\right),$$

CHS 多项式作为和的矩的自然概率表示

指数随机变量的和的矩自然呈现如下，

$$\hbar_\ell(x) = \frac{1}{\ell!}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathscr{E}_j\right)^\ell, \qquad \ell = 0, 1, \dots.$$

鉴于这个恒等式，显然，对于所有偶数 ℓ 以及所有非零实向量 x，$\mathsf{h}_\ell(x) > 0$ （注意 $\mathsf{h}_\ell(-x) = (-1)^\ell \mathsf{h}_\ell(x)$，因此当 ℓ 为奇数时，这种正性显然不成立）。另一方面，单从代数定义 (4) 出发，这一正性性质或许并不那么显然；Hunter 的 [21] 定理正是为了定量地说明这一点而提出的，它断言了如下紧界，

$$\hbar_\ell(x) \geq \frac{1}{2^{\ell/2}(\ell/2)!}, \qquad \ell = 0, 2, 4, \dots, \qquad \text{provided that} \qquad \sum_{j=1}^n x_j^2 = 1.$$

顺便一提，Tao 最近指出，通过修改 Hunter 的论证，可以得到映射 $x \mapsto \mathsf{h}_\ell(x)$（$\ell$为偶数）的 Schur 单调性结果，该结果也给出了 Hunter 正性定理：对于所有偶数 ℓ，$\mathsf{h}_\ell(x) \geq 0$，除非 $x = 0$，否则不等式严格成立，见 [35]。

等价地，将其表述为带有紧常数的正向 H¨older 型不等式，Hunter 定理断言

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n x_j \mathscr{E}_j\right|^\ell \geq (\mathbb{E}G^\ell) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\ell/2}, \qquad \ell = 0, 2, 4, \dots, \tag{5}$$

其中 G 是标准高斯随机变量，因此 $\mathbb{E}G^\ell = (\ell-1)!! = \ell!/2^{\ell/2}(\ell/2)!$，~~$\ell = 0$~~，2，4，.....。

我们的主要结果将这一界推广到 $\ell \geq 2$ 的所有取值。

定理 1. 设 $p \geq 2$。对每一个 $n \geq 1$ 以及实数 $x_1, \dots, x_n$，我们有

$$\|X\|_p \geq \|G\|_p \sqrt{\mathrm{Var}(X)}, \qquad X = \sum_{j=1}^n x_j \mathscr{E}_j, \tag{6}$$

其中 $G \sim N(0, 1)$ 是一个标准高斯随机变量。

这为针对 L_p-方差比较提供了一个精确的反向结果，该比较专门应用于

独立指数随机变量之和；当然，在中心化情形下，它便成为 (1)， $\mathbb{E}X = 0$。

注 2。 通过取 $n = 2m$,$x = x_\star$ 满足 $x_{\star,\,1} = -x_{\star,\,2} = x_{\star,\,3} = -x_{\star,\,4} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2m}}$ 并令 $m \to \infty$，可以看出此界是（渐近）尖锐的。我们猜想，对于固定的偶数 个加数 n，L_p 范数 $p \geq 2$ 的下确界（即式 (6) 左侧的下确界）在由一半加一、一半减一组成的平衡向量 $x = x_\star$ 处取得。 [8] 最近的结果有力地支持了这一猜想：该猜想已针对指数 p 的所有偶数整数值成立。

注 3。 对式 (6) 作一个自然的放宽，即在一个分布类中，将 L_p 范数（$p \geq 2$）最小化；该分布类从独立指数随机变量之和的分布类扩展到例如中心单峰（或对数凹）随机变量的分布类，同时固定其 L_2 范数。这样得到的极值函数并非高斯极值函数，而是均匀分布，参见例如 [19] 中的注 16。这与 [30], 形成鲜明对比：在更大的全体中心化对数凹随机变量分布类中，独立指数随机变量之和的原问题得以解决，从而得到 (2) 和 (3)。从这个意义上说，界 (6) 在某种程度上利用了独立指数随机变量之和的结构。

注 4. 类似地，在指数函数为一个极值问题提供答案的情形下，我们还应提及 Tang 最近关于单纯形最小体积截面的结果 [34] ，其结论是

$$f_{\sum x_j(\mathscr{E}_j - 1)} \geq f_{\mathscr{E}-1}(0) = \frac{1}{e},$$

在定理 1 的设定中， f_X 表示随机变量 X 的密度（连续版本）（另见其中的“假定理 4”）。等价地（通过密度的负矩公式，参见例如 [12]中的 (1)），

$$\lim_{p \downarrow -1} (1+p) \left\| \sum x_j(\mathscr{E}_j - 1) \right\|_p \leq \lim_{p \downarrow -1} (1+p) \left\| \mathscr{E} - 1 \right\|_p .$$

鉴于 (6)，我们猜想对每个 $-1 < p < 2$,

$$\sup \left\{ \left\| \sum x_j(\mathscr{E}_j - 1) \right\|_p ,\ n \geq 1, \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1 \right\} = \begin{cases} \|\mathscr{E} - 1\|_p, & -1 < p \leq p_0, \\ \|G\|_p, & p_0 \leq p < 2. \end{cases}$$

也就是说，在 $p_0 = -0.565..$ 处，极值分布发生相变；它被定义为使右侧两个 L_p 范数

右侧的两项相同。

对于低阶矩，我们给出了非负系数和的 Schur 单调性结果（关于主序的基础知识，参见 [6] 中的第二章）。这一设定使我们能够运用完全单调函数的技巧（背景介绍参见 [38]）。

令 $p > -1$ 并定义

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{x_j}\mathscr{E}_j\right)^p\right], \qquad x_1, \dots, x_n \geq 0. \tag{7}$$

我们完整刻画了使该函数具有 Schur 单调性的 p 取值范围。

定理 5。对于任意整数 $n \geq 2$，函数 M_p 在$-1 < p < 0$时为 ***Schur*** 凸，在 $0 \leq p \leq 4$ 时于 $\mathbb{R}_+^n$上为 ***Schur*** 凹。此外，只要 $p > 4$，该函数就不是 ***Schur*** 单调的。

情形 $-1 < p < 0$ 已在 [13] 中讨论（参见其中的定理 2）。定理 5 补充了 [8] 近期的结果；该结果针对整数值的 p给出了精确结论。此外， [35] 证明了在通常的 ℓ_1约束下，函数 $x \mapsto \mathsf{h}_\ell(x)$具有 Schur 凸性。

本文余下部分将分别在第 2 节和第 3 节证明定理 1 和定理 5。最后，我们将给出总结性评论

2 证明：超越 CHS 的 Hunter 正性（定理 1）

2.1 概述

我们以 [21] 中 Hunter 的原始策略为基础加以推进。在低分辨率下，这需要一个两步方法。

在第一步中，通过对临界点的局部分析，首先归结为情形 $2 \le p \le 4$，并利用指数随机变量所具有的某些代数恒等式。这是关于 $k = 1,2,\ldots$ 的归纳论证，其中对所有 $p \in [2k, 2k+2]$，(6) 的正确性被归结为基础情形 $k = 1$。这一想法也非常类似于 Haagerup 针对 Rademacher和所采用的归纳论证（见 [20] 中 §5的最后一段），并且在某种程度上，与最近在 [4] 第2节中提出并运用的“插值降低 p”技巧精神一致。

第二步处理范围 $2 \le p \le 4$，我们采用了傅里叶分析公式，这些公式已在许多类似情境中得到广泛研究（尤其由 Haagerup 在其著作 [20] 中率先探索），不过这里用于求上界。我们论证中一个有趣的新颖之处，是将对手——L_p–范数的下界——转化为盟友—— L_{p-2}–范数的上界。通过对极值元进行局部分析，并结合指数分布特有的代数恒等式，这一化简得以实现。

2.2 辅助引理

在本节中，始终假设 $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 C^1，且 Φ 和 Φ' 以适度速度增长，例如 $|\Phi(t)|,\ |\Phi'(t)| = O(|t|^{\beta})$，其中某个 $\beta > 0$成立。给定向量 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，我们构造如下求和式

$$S_x = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathscr{E}_j .$$

我们先给出一个关于指数分布的简单分部积分型公式。

引理6。 对于任意实数 $x_1, \ldots, x_n$ 和 u，有

$$\mathbb{E}\Phi(S_x) = \mathbb{E}\Phi(S_x + u\mathscr{E}) - u\mathbb{E}\Phi'(S_x + u\mathscr{E}).$$

证明。 分部积分确实得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Phi(S_x+u\mathscr{E}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \Phi(S_x+ut)e^{-t}\mathrm{d}t\right]\\ &= \mathbb{E}\left[-\Phi(S_x+ut)e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty}+\int_0^\infty u\Phi'(S_x+ut)e^{-t}\mathrm{d}t\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\Phi(S_x)+u\Phi'(S_x+u\mathscr{E})\right].\end{aligned}$$

重新排列即可得到结果。 □

现在我们可以推导出上述代数恒等式，这些恒等式对于对形如 $\mathbb{E}\Phi(S_x)$ 的泛函求导，以及后续的临界点分析至关重要。

引理 7。 对于任意实数 x_1、.....、 x_n 和 u、 v、 $u\neq v$，都有

$$\frac{\mathbb{E}\Phi(S_x+v\mathscr{E})-\mathbb{E}\Phi(S_x+u\mathscr{E})}{v-u}=\mathbb{E}\Phi'(S_x+u\mathscr{E}+v\mathscr{E}').$$

特别地，

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathbb{E}\Phi(S_x+u\mathscr{E})=\mathbb{E}\Phi'(S_x+u\mathscr{E}+u\mathscr{E}').$$

证明。 将引理6应用于和 $S_{(x,u)}=S_x+u\mathrm{E}$（含有 $n+1$ 项），可得，

$$\mathbb{E}\Phi(S_x+u\mathscr{E})=\mathbb{E}\Phi(S_{(x,u)})=\mathbb{E}\Phi(S_x+u\mathscr{E}+v\mathscr{E}')-v\mathbb{E}\Phi'(S_x+u\mathscr{E}+v\mathscr{E}').$$

同样地，

$$\mathbb{E}\Phi(S_x+v\mathscr{E})=\mathbb{E}\Phi(S_{(x,v)})=\mathbb{E}\Phi(S_x+v\mathscr{E}+u\mathscr{E}')-u\mathbb{E}\Phi'(S_x+v\mathscr{E}+u\mathscr{E}').$$

从中减去上一行，得到

$$\frac{\mathbb{E}\Phi(S_x+v\mathscr{E})-\mathbb{E}\Phi(S_x+u\mathscr{E})}{v-u}=\mathbb{E}\Phi'(S_x+u\mathscr{E}+v\mathscr{E}'),$$

如所愿。令 $v\to u$，即可得到

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathbb{E}\Phi(S_x+u\mathscr{E})=\mathbb{E}\Phi'(S_x+u\mathscr{E}+u\mathscr{E}').$$ □

注 8. 注意，在引理6和引理7的证明中，我们仅使用了theE与E' 服从指数分布这一事实，以及 S_x 是一个

与它们独立的随机变量，实际上服从任意分布（只要满足可积性）。

下一个引理计算了一个初等积分，该积分出现在主要论证的傅里叶分析部分中的某些界内。

引理 9。 对于 $s>0$ 和 $0<q<2$，我们有

$$\int_0^\infty \frac{1-\left(1+t^2/s\right)^{-\frac{1+s}{2}}}{t^{q+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{q}\,\Gamma\Big(1-\frac{q}{2}\Big)\,\frac{\Gamma\Big(\frac{1+q+s}{2}\Big)}{s^{q/2}\,\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big)}.$$

证明。 将左侧的积分记为 $I_{q,\ s}$。令 $\alpha=\frac{1+s}{2}$ 和 $\beta=\frac{q}{2}$。通过变量替换 $u=t^2/s$，我们有

$$I_{q,s}=\frac{1}{2}s^{-q/2}\int_0^\infty \big[1-(1+u)^{-\alpha}\big]u^{-1-\beta}\,\mathrm{d}u.$$

利用伽马函数表示

$$(1+u)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}e^{-ux}\,\mathrm{d}x,$$

我们得到

$$1-(1+u)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\big(1-e^{-ux}\big)\,\mathrm{d}x.$$

代回此式并交换积分次序，

$$\int_0^\infty \big[1-(1+u)^{-\alpha}\big]u^{-1-\beta}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\left(\int_0^\infty(1-e^{-ux})u^{-1-\beta}\,du\right)\mathrm{d}x.$$

对于 $0<\beta<1$，通过变量替换并分部积分，

$$\int_0^\infty(1-e^{-ux})u^{-1-\beta}\,\mathrm{d}u=x^\beta\int_0^\infty(1-e^{-u})u^{-1-\beta}\mathrm{d}u=x^\beta\frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta}$$

因此

$$\int_0^\infty \big[1-(1+u)^{-\alpha}\big]u^{-1-\beta}\,du=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}\,dx=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}.$$

因此，

$$I_{q,s} = \frac{1}{2} s^{-q/2} \cdot \frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{q}\,\Gamma\Big(1-\frac{q}{2}\Big)\,\frac{\Gamma\Big(\frac{1+q+s}{2}\Big)}{s^{q/2}\,\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big)}. \qquad \square$$

我们将需要一个关于上一引理中特殊函数的技术性结果。事实上，这是我们后续界的核心。其证明受到 [20] 中 Haagerup 引理 1.4 的启发。

引理 10. 对于 $\beta,\ x>0$，令

$$\Psi_\beta(x) = \frac{\Gamma\left(x+\beta+\frac{1}{2}\right)}{x^\beta \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

那么，对每个 $\beta>0$,

$$(0,+\infty) \ni x \mapsto \Psi_\beta(x) \text{ is strictly decreasing and } \Psi_\beta(x) \to 1 \text{ as } x \to \infty.$$

证明。 利用斯特林公式，当 $x\to\infty$ 时，$\overline{\Gamma(x)} \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}$，我们有

$$\Psi_\beta(x) \sim \frac{\left(x+\beta+\frac{1}{2}\right)^{x+\beta}}{x^\beta \left(x+\frac{1}{2}\right)^x} e^{-\beta} = \left(1+\frac{\beta+\frac{1}{2}}{x}\right)^\beta \left(1+\frac{\beta}{x+\frac{1}{2}}\right)^x e^{-\beta} \sim 1.$$

固定 $x>0$。注意到

$$\Psi_\beta(x+1) = \frac{\left(x+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(x+\beta+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)^\beta \left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^\beta \frac{x+\beta+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} \cdot \Psi_\beta(x).$$

改写为

$$R_\beta(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^\beta \frac{x+\frac{1}{2}}{x+\beta+\frac{1}{2}},$$

迭代 n 次后得到

$$\begin{aligned}\Psi_\beta(x) &= \Psi_\beta(x+1)R_\beta(x) = \Psi_\beta(x+2)R_\beta(x)R_\beta(x+1) \\ &= \cdots = \Psi_\beta(x+n+1)\prod_{k=0}^{n} R_\beta(x+k).\end{aligned}$$

因此，令 $n \to \infty$，我们得到

$$\Psi_\beta(x) = \prod_{k=0}^{\infty} R_\beta(x+k).$$

下面的断言完成了论证。

断言。 对于每个 $\beta > 0$，函数 $x \mapsto R_\beta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减。

事实上，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log R_\beta(x) &= \beta \frac{1}{1+1/x} \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+\beta+\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{\beta}{x(x+1)} + \frac{\beta}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\beta+\frac{1}{2}\right)} \\
&< -\frac{\beta}{x(x+1)} + \frac{\beta}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} < 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

最后，我们需要直接验证，当所有系数 x_j 都相等时，定理 1 在这一特殊情形下仍然成立。事实上，我们可以得到更强的界。

引理 11。 对于每个 $n = 1$、2、.....以及 $p \geq 2$，都有

$$\mathbb{E}\left|\frac{\mathscr{E}_1 + \cdots + \mathscr{E}_n}{\sqrt{n}}\right|^p \geq 2^{p/2}\mathbb{E}|G|^p, \qquad G \sim N(0,1).$$

证明。 对称指数分布是高斯混合，这是一个初等事实。具体来说，对于分布，我们有如下恒等式，

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}' \overset{d}{=} \sqrt{2\mathscr{E}}G,$$

其中， G 是一个与指数随机变量 E 相互独立的标准高斯随机变量。或许通过比较特征函数可以最方便地验证这一恒等式，另见 [18] 中的引理 23 及其后的注释 (i)。因此，

$$\mathscr{E}_j \overset{d}{=} |\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_j'| \overset{d}{=} \sqrt{2\mathscr{E}_j}|G_j|,$$

其中 G_1， G_2， .. . 是相互独立同分布的标准高斯随机变量，且相互独立

与 E_j 独立。因此，

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\mathscr{E}_j\right|^p = 2^{p/2}\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\mathscr{E}_j}|G_j|\right|^p.$$

注意到，粗略应用三角不等式可得：$\sum\sqrt{\mathrm{E}_j}|G_j| \geq \left|\sum\sqrt{\mathrm{E}_j}G_j\right|$，几乎处处成立。利用独立性，和式 $\sum\sqrt{\mathrm{E}_j}G_j$ 与 $\sqrt{\sum}\mathrm{E}_jG_1$ 具有相同的分布。因此，

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\mathscr{E}_j\right|^p \geq 2^{p/2}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathscr{E}_j\right)^{p/2}\cdot\mathbb{E}|G|^p.$$

对于 $p \geq 2$，由凸性可得，

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathscr{E}_j\right)^{p/2} \geq \left(\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n}\mathscr{E}_j\right)^{p/2} = n^{p/2}. \qquad \square$$

2.3 定理1的证明

整个证明通过对 $k = 1$，2，.....进行归纳，证明以下命题：对于所有 $p \in [2k, 2k+2]$ 以及任意的和式 $X = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathrm{E}j$，$n \geq 1$均成立（6）。基情形 $k = 1$ 将在步骤 II 中处理。

步骤 *I*：化归到 $2 \leq p \leq 4$，采用 *Hunter* 的局部论证。对于归纳步骤：假设对某个 $k \geq 2$，所有 $p \in [2k-2, 2k]$ 都满足 (6)，并固定 $p \in[2k, 2k+2]$，$n \geq 1$。我们考虑以下函数的临界点

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathbb{E}\Phi(S_x), \qquad \text{subject to} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1,$$

其中 $\Phi(x) = |x|^p$。设 x 为这样的一个临界点。要完成归纳步骤，只需证明 (6) 在 $X = S_x$时成立。利用临界点条件，对每个$1 \leq j \leq n$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbb{E}\Phi(S_x) + 2\lambda x_j = 0$$

对于某个拉格朗日乘子 $\lambda \in \mathbb{R}$。两边乘以 x_j 并利用 p-

Φ 的齐次性，得到

$$0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{E}\Phi(S_x) + 2\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = p\mathbb{E}\Phi(S_x) + 2\lambda,$$

也就是说，在临界点 x 处，我们有

$$-2\lambda = p\mathbb{E}\Phi(S_x).$$

另一方面，由引理 7,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{E}\Phi(S_x) = \mathbb{E}\Phi'(S_x + x_j \mathscr{E}),$$

将其与拉格朗日方程结合，得到

$$x_j p\mathbb{E}\Phi(S_x) = x_j(-2\lambda) = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{E}\Phi(S_x) = \mathbb{E}\Phi'(S_x + x_j \mathscr{E}).$$

如果所有 x_j 都相等，那么由引理 11 即得结论。否则，设 $x_1 \neq x_2$，我们继续进行归纳论证。利用上述恒等式,

$$p\mathbb{E}\Phi(S_x) = p\frac{x_1 E\Phi(S_x) - x_2 \mathbb{E}\Phi(S_x)}{x_1 - x_2} = \frac{\mathbb{E}\Phi'(S_x + x_1\mathscr{E}) - \mathbb{E}\Phi'(S_x + x_2\mathscr{E})}{x_1 - x_2}$$

再一次应用引理 7，便得到关键所在：临界点 x 处的恒等式,

$$p\mathbb{E}\Phi(S_x) = \mathbb{E}\Phi''(S_x + x_1\mathscr{E} + x_2\mathscr{E}'). \tag{8}$$

显然，$\Phi'(x) = p|x|^{p-1}\mathrm{sgn}(x)$，$\Phi''(x) = p(p-1)|x|^{p-2}$，因此归纳假设给出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Phi''(S_x + x_1\mathscr{E} + x_2\mathscr{E}') &\geq p(p-1)\mathbb{E}|G|^{p-2} \cdot (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\frac{p-2}{2}} \\ &> p(p-1)\mathbb{E}|G|^{p-2}.\end{aligned}$$

最后，通过分部积分进行直接计算可得

$$(p-1)\mathbb{E}|G|^{p-2} = \mathbb{E}|G|^p,$$

thus

$$\mathbb{E}\Phi(S_x) > \mathbb{E}|G|^p.$$

步骤 *II*：证明 (6) 对于 $2 \le p \le 4$：我们再次利用引理 11 处理所有 x_j均相等的情形。

如步骤 I 中所推导的，对于满足 $\sum x_j^2 = 1$ 的映射 $x \mapsto \mathbb{E}|S_x|^p$ 的每个临界点 x，都有 (8)，即

$$\mathbb{E}|S_x|^p = (p-1)\mathbb{E}|S_x + x_1\mathscr{E}_1' + x_2\mathscr{E}_2'|^{p-2},$$

前提是 $x_1 \neq x_2$。不失一般性，令 $x_1 = \|x\|_\infty$（必要时重新排列 x 的分量并改变 x_1 的符号）。记

$$Y = S_x + x_1\mathscr{E}_1' + x_2\mathscr{E}_2'$$

且 $q = p - 2$。我们可以假设 $0 < q < 2$。利用标准的傅里叶分析公式（例如参见 [20]，中的 (2f) 或 [10] 中的引理 4），

$$\mathbb{E}|Y|^q = c_q \int_0^\infty \frac{1 - \mathrm{Re}(\phi_Y(t))}{t^{q+1}}\mathrm{d}t, \qquad c_q = \frac{2}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi q}{2}\Big)\Gamma(q+1), \tag{9}$$

其中 $\phi_Y(t) = \mathbb{E}e^{itY}$ 是随机变量 Y 的特征函数。这里，得益于独立性，

$$\mathbb{E}e^{itY} = \mathbb{E}e^{itx_1\mathscr{E}}\mathbb{E}e^{itx_2\mathscr{E}}\mathbb{E}e^{itS_x} = \frac{1}{1-itx_1}\frac{1}{1-itx_2}\prod_{j=1}^n \frac{1}{1-itx_j}.$$

注意

$$\mathrm{Re}(\phi_Y(t)) \le |\phi_Y(t)| = (1+x_1^2t^2)^{-1}(1+x_2^2t^2)^{-1}\prod_{j=3}^n (1+x_j^2t^2)^{-1/2}.$$

函数 $u \mapsto (1+ut^2)^{1/u}$ 在 $(0,+\infty)$ 上关于 u 递减（对每个固定的 t）。

因此，对每个 $0 < b \le a$ 都有 $(1+bt^2) \ge (1+at^2)^{b/a}$，故

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\phi_Y(t)) &\le (1+x_1^2t^2)^{-1}(1+x_1^2t^2)^{-x_2^2/x_1^2}\prod_{j=3}^{n}(1+x_1^2t^2)^{-x_j^2/(2x_1^2)} \\ &= (1+x_1^2t^2)^{-\frac{x_1^2+x_2^2+1}{2x_1^2}} \\ &\le (1+x_1^2t^2)^{-\frac{x_1^2+1}{2x_1^2}}.\end{aligned}$$

令 $s = x_1^{-2}$。代回后得到该界

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y|^q &\ge c_q\int_0^\infty \frac{1-(1+t^2/s)^{-\frac{1+s}{2}}}{t^{q+1}}\mathrm{d}t \\ &= c_q\frac{1}{q}\Gamma\left(1-\frac{q}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1+q+s}{2}\right)}{s^{q/2}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)} = c_q\frac{1}{q}\Gamma\left(1-\frac{q}{2}\right)2^{-q/2}\Psi_{q/2}\left(\frac{s}{2}\right),\end{aligned}$$

其中，第一个等式是利用引理 9 推导出的涉及 Gamma 函数的初等计算；在第二个等式中，则将其改写为引理 10 中的特殊函数 $\Psi_\cdot(\cdot)$。此外，根据引理 10，通过令 $s \to \infty$ 的极限，可以得到右侧的下界，从而有

$$\mathbb{E}|Y|^q \ge c_q\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{1-(1+t^2/s)^{-\frac{1+s}{2}}}{t^{q+1}}\mathrm{d}t = c_q\int_0^\infty \frac{1-e^{-t^2/2}}{t^{q+1}}\mathrm{d}t = \mathbb{E}|G|^q.$$

因此，

$$\mathbb{E}|S_x|^p \ge (p-1)\mathbb{E}|G|^{p-2} = \mathbb{E}|G|^p,$$

这就完成了证明。 □

3 证明：低阶矩的 Schur 单调性（定理 5）

3.1 概述

我们方法的分析基础包括幂函数 $x \mapsto x^p$ 的积分表示，即以指数函数的混合来表示。这自然地利用了一个简单事实： x^p 的足够高阶导数会变成

一个具有负指数的幂函数，它是完全单调的，因而满足众所周知的初等恒等式，

$$x^{-q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty t^{q-1} e^{-tx} \mathrm{d}t, \qquad x, q > 0,$$

类似于 (9)，从而可以利用独立性。类似的想法最近已在例如 [13, 27] 中得到实现。该方法的明显限制在于，它只能处理非负随机变量。

3.2 积分表示

我们从幂函数的逐点积分公式开始。

引理 12. 设 k 为非负整数，并设 $k < p < k + 1$。定义

$$Q_k(t) = (-1)^{k+1} \left(e^{-t} - \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} t^j \right), \qquad t > 0.$$

则 $Q_k(t) > 0$，该积分

$$C_p = \int_0^\infty Q_k(t) t^{-p-1} \mathrm{d}t$$

收敛，并且对于 $x > 0$，我们有

$$x^p = C_p^{-1} \int_0^\infty Q_k(tx) t^{-p-1} \mathrm{d}t.$$

证明。 对于 $t > 0$，根据带拉格朗日余项的泰勒公式，

$$Q_k(t) = \frac{e^{-\theta} t^{k+1}}{(k+1)!}$$

对某个 $0 < \theta < t$，因此特别地，左边为正，且当$t \to 0$时为 $O(t^{k+1})$。因此，$C_p > 0$ 是良定义的，即定义 C_p 的积分收敛（它收敛当且仅当 $k + 1 - p - 1 > -1$ 且 $-p - 1 + k < -1$，即$k < p < k + 1$）。对固定的 $x > 0$，在定义 C_p 的积分中作变量替换 $t \mapsto tx$，即得 x^p的公式。

□

对非负整数 k，我们令

$$F_k(x_1,\dots,x_n)=\mathbb{E}Q_k\left(\sum_{j=1}^n\sqrt{x_j}\mathscr{E}_j\right),$$

其中 Q_k 由引理 12 定义。对独立指数随机变量之和的分布取平均，可得到所需的 M_p积分表示，参见（7）。

引理 13。设 k 为非负整数，且 $k<p<k+1$。那么

$$M_p(x_1,\dots,x_n)=C_p^{-1}\int_0^\infty F_k(t^2x_1,\dots,t^2x_n)t^{-p-1}\mathrm{d}t.$$

3.3 定理 5 的证明

鉴于引理 13，只需证明以下结果。

引理 14。当 $\ell=0$ 时，函数 F_ℓ 是 *Schur* 凸的，1、2、3。

引理 15。设 $p>4$。函数 $x\mapsto M_p(x^2,\ 1-x^2)$ 在$(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$上有一个局部最大值,因此它在 $(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$上不是单调的，故 M_p既不是 *Schur* 凸的，也不是 *Schur* 凹的。

引理 *14* 的证明。我们有，$\mathbb{E}\mathscr{E}_j^m=m!$，因此

$$\begin{aligned}
P(x)&=\mathbb{E}\exp\left(-\sum\sqrt{x_j}\mathscr{E}_j\right)=\prod\frac{1}{1+\sqrt{x_j}},\\
M_1(x)&=\mathbb{E}\left(\sum\sqrt{x_j}\mathscr{E}_j\right)=\sum\sqrt{x_j},\\
M_2(x)&=\mathbb{E}\left(\sum\sqrt{x_j}\mathscr{E}_j\right)^2=2\sum x_j+\sum_{j\neq k}\sqrt{x_jx_k},\\
M_3(x)&=\mathbb{E}\left(\sum\sqrt{x_j}\mathscr{E}_j\right)^3=6\sum x_j^{3/2}+6\sum_{j\neq k}x_j\sqrt{x_k}+\sum_{i\neq j\neq k}\sqrt{x_ix_jx_k}.
\end{aligned}$$

我们将使用奥斯特罗斯基判据，因此还需要偏导数，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x_1} &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x_1}}}{(1+\sqrt{x_1})^2}\prod_{j\neq 1}\frac{1}{1+\sqrt{x_j}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}(1+\sqrt{x_1})}P(x),\\
\frac{\partial M_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{2\sqrt{x_1}},\\
\frac{\partial M_2}{\partial x_1} &= 2+\frac{1}{\sqrt{x_1}}\sum_{j\neq 1}\sqrt{x_j} = 1+\frac{M_1(x)}{\sqrt{x_1}},\\
\frac{\partial M_3}{\partial x_1} &= 9\sqrt{x_1}+6\sum_{j\neq 1}\sqrt{x_j}+\frac{3}{\sqrt{x_1}}\sum_{j\neq 1}x_j+\frac{3}{2\sqrt{x_1}}\sum_{j\neq k\neq 1}\sqrt{x_jx_k}\\
&= 3M_1(x)+\frac{3}{\sqrt{x_1}}\sum x_j+\frac{3}{2\sqrt{x_1}}\sum_{j\neq k\neq 1}\sqrt{x_jx_k}\\
&= 3\sqrt{x_1}+\frac{3}{\sqrt{x_1}}\sum x_j+\frac{3}{2\sqrt{x_1}}\sum_{j\neq k}\sqrt{x_jx_k}
\end{aligned}$$

为方便起见，我们也使用变量 $b_j \equiv \sqrt{x_j}$。 —

情形 $\ell = 0$。我们有，$Q_0(t) = 1 - e^{-t}$，因此

$$F_0(x) = 1 - P(x),$$

因此，

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_1} - \frac{\partial F_0}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1(1+b_1)} - \frac{1}{b_2(1+b_2)}\right)P(x) = \frac{(b_2-b_1)(1+b_1+b_2)}{2b_1b_2(1+b_1)(1+b_2)}P(x).$$

当 $x_1 > x_2$ 时，等价地，当 $b_1 > b_2$ 时，这个偏导数之差为负，因此 F_0 是 Schur 凹的。

情形 $\ell = 1$。我们有，$Q_1(t) = e^{-t} - 1 + t$，因此

$$F_1(x) = P(x) - 1 + M_1(x),$$

因此，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= -\frac{(b_2-b_1)(1+b_1+b_2)}{2b_1b_2(1+b_1)(1+b_2)}P(x) + \frac{b_2-b_1}{2b_1b_2}\\
&= \left(\frac{b_2-b_1}{2b_1b_2}\right)\left(1 - \frac{1+b_1+b_2}{(1+b_1)(1+b_2)}P(x)\right).
\end{aligned}$$

显然，$\frac{1+b_1+b_2}{(1+b_1)(1+b_2)} < 1$ 且 $P(x) < 1$，所以第二个括号为正。因此，当 $x_1 > x_2$，等价地说，当 $b_1 > b_2$ 时，这个偏导数之差为负，所以 F_1 是 Schur 凹。

情形 $\ell = 2$。我们有，$Q_2(t) = -e^{-t} + 1 - t + \frac{t^2}{2}$，因此

$$F_2(x) = -P(x) + 1 - M_1(x) + \frac{1}{2}M_2(x),$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} &= \frac{(b_2-b_1)(1+b_1+b_2)}{2b_1b_2(1+b_1)(1+b_2)}P(x) - \frac{b_2-b_1}{2b_1b_2} + \frac{b_2-b_1}{2b_1b_2}M_1(x) \\ &= \left(\frac{b_2-b_1}{2b_1b_2}\right)\left(\frac{1+b_1+b_2}{(1+b_1)(1+b_2)}P(x) - 1 + M_1(x)\right).\end{aligned}$$

这或许不太显然，但第二个括号内的表达式为正。

断言。对于正数 $b_1, \ldots, b_n$，我们有

$$\frac{1+b_1+b_2}{(1+b_1)(1+b_2)} > \left(1 - \sum b_j\right)\prod(1+b_j).$$

因此，当 $x_1 > x_2$（等价地，当 $b_1 > b_2$）时，这个偏导数之差为负，所以 F_2 是 Schur 凹的。

情形 $\ell = 3$。再次计算可得

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} =$$
$$\left(\frac{b_2-b_1}{2b_1b_2}\right)\left(6\sum b_i^2 + 3\sum_{i\neq j} b_ib_j - 6b_1b_2 - \frac{1+b_1+b_2}{(1+b_1)(1+b_2)}P(x) + 1 - M_1(x)\right).$$

注意，

$$6\sum b_i^2 + 3\sum_{i\neq j} b_ib_j - 6b_1b_2 - M_1(x) = 3 + 3\left(\sum b_i\right)^2 - 6b_1b_2 - \sum b_i \geq 0,$$

由于

$$6b_1b_2 \leq \frac{3}{2}(b_1+b_2)^2 \leq \frac{3}{2}(\sum b_i)^2$$

and

$$\frac{1}{2}(\sum b_i)^2+\frac{1}{2}\geq\sum b_i.$$

□

命题证明。当 $\sum b_j\geq 1$ 时，不等式显然成立，因此设 $\sum b_j<1$。注意到

$$\Big(1-\sum b_j\Big)\prod(1+b_j)\leq e^{-\sum b_j}(1+b_1)(1+b_2)e^{\sum_{j>2}b_j}=e^{-(b_1+b_2)}(1+b_1)(1+b_2).$$

令 $s=b_1+b_2$。只需证明

$$(1+s)e^s>(1+b_1)^2(1+b_2)^2=(1+s+b_1b_2)^2$$

由于 $b_1b_2\leq(s/2)^2$, ，只需证明

$$(1+s)e^s>(1+s/2)^4,\qquad 0<s<1.$$

这由下式可得

$$(1+s)e^s-(1+s/2)^4>(1+s)(1+s+s^2/2+s^3/6)-(1+s/2)^4=s^3/6+5s^4/48>0.$$

□

引理 *15* 的证明。对于 $a,\ b>0,\ a\mathrm{E}+b\mathrm{E}'$ 在 $x\geq 0$ 处的密度为 $\frac{e^{-x/a}-e^{-x/b}}{a-b}$, 因此

$$M_p(a^2,b^2)=\mathbb{E}(a\mathscr{E}+b\mathscr{E}')^p=\Gamma(p+1)\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{b-a}.$$

我们考虑

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(p+1)}M_p(x^2,1-x^2)=\frac{(1-x^2)^{\frac{p+1}{2}}-x^{p+1}}{\sqrt{1-x^2}-x},\qquad 0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

并指出，对于固定的 $p>4,\ f(x)$ 不是单调的。我们验证

$$f'(0)=1,\qquad f'(1/\sqrt{2})=0,\qquad f''(1/\sqrt{2})=\frac{1}{3}2^{1-p/2}p(p+1)(p-4)>0.$$

这意味着 $f'(x)$ 在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 附近严格递增，因此 $f'(x_0)<0$ 对于某个 $x_0<\frac{1}{\sqrt{2}}$。由此，f' 在某个点处于 $(0,\ x_0)$ 内取值为零，并在该点达到一个

局部最大值。 □

4 总结性评论

我们希望以提出两个颇为自然的方向来结束本文，以加强我们的结果，这些方向留待未来研究。

4.1 伽马分布

定理 1 可推广至独立伽马随机变量的加权和：只要 E$_j$ 服从 $\Gamma(\gamma_j)$ 分布，(6) 仍然成立，其中 $\gamma_j > 0, j = 1,\ldots,n$ 可以任意取值（即密度为 $\Gamma(\gamma_j)^{-1}x^{\gamma_j-1}e^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$）。

在这种情形下，定理 1 的证明几乎可以原封不动地重复。当然，首先需要推广引理6和引理7中的代数恒等式：在推导出 (8) 的关键计算中处理拉格朗日方程时，我们发现，只需在上述引理中补充注8以及以下恒等式：对于伽马随机变量 $X \sim \Gamma(\gamma)$ 和与其独立的指数随机变量 E，有

$$\mathbb{E}\Big[X\Phi(X)\Big] = \gamma\mathbb{E}\Phi(X + \mathscr{E}).$$

另一个要点是，伽马分布的特征函数与指数分布的特征函数几乎形式相同：若 $X \sim \Gamma(\gamma)$，则为 $\phi_X(t) = (1 - it)^{-\gamma}$。因此，引理9和引理10中的关键技术计算与估计可以不加修改地使用。进一步细节从略。

为了更清晰、直观地阐述核心思想，我们决定将定理 1 的论述限定在指数分布这一情形。此外，我们认为证明方案足够稳健，能够适用于更一般的情形，值得在其他地方对此进行探究。

定理 5 也是如此——鉴于 [13]关于情形 $-1 < p < 0$ 的结果实际上是在其中针对独立伽马随机变量之和证明的，我们认为定理 5 在

这一情形下同样成立。此外，将 [13]以及我们的定理 5 推广到该情形之外，或许也是有意义的。

4.2 对数凸性

我们猜想，在更一般的情形下，即比较任意 L_p 范数与 L_q 范数时，只要 $p, q \geq 2$，Hunter 不等式 (5) 和我们的定理 1（6）中所述的高斯极值函数仍然成立。这里，加权和由均值为 0 的独立指数随机变量构成。也就是说，给定 $2 \leq p \leq q$，对于每个$n \geq 1$ 以及满足 $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ 的实数 $x_1, \ldots, x_n$，都有

$$\|X\|_p \leq \frac{\|G\|_p}{\|G\|_q} \|X\|_q, \qquad X = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathscr{E}_j.$$

$p \geq 2$ 的限制或许并不严格，但鉴于注 4 中的讨论，若要使此不等式成立，p 就需要与 -1 保持正距离。$\sum x_j = 0$ 的限制似乎很自然，同时，似乎也有必要施加某些条件，避免 X 接近平移指数随机变量 $\mathrm{E} + a$——可以验证，当 $a \to +\infty$ 时，不等式不成立。最后，要求 X 是指数的和也很重要，这使得该问题相当引人入胜，因为将范围明显放宽至均值为 0 的对数凹随机变量类后，就不可能出现高斯极值函数（通过局部化方法可知，极值函数属于具有分段对数仿射密度的随机变量类，参见例如 [30] 中第 3.2 节的讨论）。

有一种颇具说服力的思路：通过一个稍微更一般的命题，即对于任意实系数 $x_1, \ldots, x_n$ 且满足 $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$，函数

$$p \mapsto \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\mathbb{E}|G|^p}, \qquad X = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathscr{E}_j$$

在 $(2, +\infty)$ 上是对数凸的。特殊的对称情形支持这一点：当 n 为偶数且 $x_1 = -x_2$、$x_3 = -x_4$，.....时，我们可以像引理 11 的证明中那样，利用对称指数分布的高斯混合结构，得出 X 的分布可以表示为如下形式 $R \cdot G$，其中

一个非负随机变量 R，且与 G 相互独立。显然，$\frac{\mathbb{E}|X|^p}{\mathbb{E}|G|^p} = \mathbb{E}R^p$ 是对数凸的。

参考文献

[1] Aguilar, K., Ch´avez, ´A., Garcia, S. R., Vol˘ci˘c, J., 由完全齐次对称多项式诱导的复矩阵范数。《伦敦数学会会刊》54 (2022年)，第6期，2078–2100页。[2] Balakrishnan, K.,《指数分布：理论、方法与应用》（第1版）。Routledge，伦敦，1999年。[3] Ball, K.，$\mathbb{R}^n$中的立方体截面。美国数学会会刊 97 (1986年)，第3期，465–473页。[4] Bara´nski, A., Murawski, D., Nayar, P., Oleszkiewicz, K., 关于最优$L_p - L_4$ Khinchin不等式。预印本（2025）：arXiv:2503.11869。[5] Barthe, F., Naor, A.，ℓ_p^n单位球的超平面投影。《离散与计算几何》27 (2002年)，第2期，215–226页。[6] Bhatia, R.,《矩阵分析》。数学研究生教材，第169卷。施普林格出版社，纽约，1997年。[7] Bouthat, L., Ch´avez, ´A., Garcia, S. R., Hunter 正性定理与随机向量范数。算子理论、相关领域及其应用，149–215页，算子理论：进展与应用，第307卷，Birkh¨auser/施普林格，查姆，2025年。[8] Brazitikos, S., Pandis, C., 对称多项式的尖锐不等式、Hunter 猜想与指数随机变量的矩。预印本（2025）：arXiv:2512.12254。[9] Brzezinski, P., 某些凸体截面的体积估计。《数学通讯》286 (2013年)，第17–18期，1726–1743页。[10] Chasapis, G., Gurushankar, K., Tkocz, T., 独立均匀随机变量之和的 p-范数的精确界，$0 < p < 1$，《分析与数学杂志》149 (2023年)，第2期，529–553页。

[11] Chasapis, G., K¨onig, H., Tkocz, T., 从Ball立方体切片不等式到负矩的Khinchin 型不等式，《函数分析杂志》281 (2021年)，第9期，论文编号109185，共23页。[12] Chasapis, G., Nayar, P., Tkocz, T., ℓ_p-球切片再探：稳定性、 ℓ_1中的平面截面，《概率年刊》50 (2022年)，第6期，2344–2372页。[13]Chasapis, G., Singh, S., Tkocz, T., 独立伽马随机变量之和的熵，《理论概率杂志》36 (2023年)，第2期，1227–1242页。[14] Chasapis, G., Singh, S., Tkocz, T., 多圆盘切片中的Haagerup相变。《偏微分方程分析》17 (2024年)，第7期，2509–2539页。[15] De, A., Diakonikolas, I., Rocco A. S., 鲁棒Khinchin不等式，以及用于计算傅里叶分析和高维几何中最优常数的算法。《SIAM离散数学杂志》30 (2016年)，第2期，1058–1094页。[16] Devroye, L., 非均匀随机变量生成，载于《运筹学与管理科学手册》第13卷（2006年），83–121页。[17] Edwards, R. E., Gaudry, G. I., Littlewood-Paley理论与乘子理论，柏林、纽约：施普林格出版社，1977年。[18] Eskenazis, A., Nayar, P., Tkocz, T., 高斯混合：熵与几何不等式，《概率年刊》46(5)（2018年），2908–2945页。[19] Eskenazis, A., Nayar, P., Tkocz, T., 矩的精确比较与对数凹矩问题，《数学进展》334（2018年），389–416页。[20]Haagerup, U., Khinchin不等式中的最佳常数。《数学研究》70 (1981年)，第3期，231–283页。[21] Hunter, D. B., 偶数阶完全对称函数的正定性。《剑桥哲学学会数学会刊》82 (1977年)，第2期，255–258页。[22] Hyt¨onen, T., van Neerven, J., Veraar, M., Weis, L.,《巴拿赫空间分析》。第二卷：鞅与Littlewood-Paley理论。《现代数学综述丛书》第63卷。施普林格，查姆，2016年。[23] Khare, A., Tao, T., 固定维数下逐项正性保持算子的符号模式。《美国数学杂志》143 (2021年)，第6期，1863–1929页。

.[24] Khintchine, A.，《关于二进制分数的研究》。《数学杂志》18（1923），第1期，109–116页。[25] Kingman, J. F. C.，《泊松过程》。牛津概率论研究，第3卷。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1993年。[26] K¨onig, H.，Sch¨utt, C.，Tomczak-Jaegermann, N.，《对称空间的投影常数及欣钦不等式的变体》。《纯粹与应用数学杂志》511（1999），1–42页。[27] Lamkin, P.，Tkocz, T.，《独立同分布随机变量平均值的矩的对数凹性与对数凸性》，《加拿大数学通报》65（2022年），第2期，271–278页。[28] Ledoux, M.，Talagrand, M.，《巴拿赫空间中的概率：等周问题与随机过程》。1991年版本的重印本。数学经典丛书。施普林格出版社，柏林，2011年[29] Macdonald, I. G.，《对称函数与霍尔多项式》。第二版。牛津物理科学经典文本。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2015年。[30] Melbourne, J.，Roysdon, M.，Tang, C.，Tkocz, T.，《从单纯形切片到尖锐的反向H¨older不等式》，即将发表于《伦敦数学会杂志》，预印本（2025）：arXiv:2505.00944。[31]Myroshnychenko, S.，Tang, C.，Tatarko, K.，Tkocz, T.，即将发表于《离散与计算几何》，《单纯形切片的稳定性》。预印本（2024）：arXiv:2403.11994。[32] Nayar, P.，Tkocz, T.，《某些凸体的极值截面与投影：综述》。调和分析与凸性，343–390页，《分析与几何进展》，第9卷，De Gruyter，柏林，2023年。[33] Oleszkiewicz, K.，Pe-lczy´nski, A.，《多圆盘切片》。《数学研究》142（2000），第3期，281–294页。[34] Tang, C.，《单纯形切片：渐近尖锐的下界》。《数学进展》451（2024年），109784。[35]Tao, T.，《Schur凸性与偶数次完全齐次对称多项式的正定性》，2017年。博客文章：https: // terrytao.wordpress.com/2017/08/06/

[36] Tao, T.，《麦克劳林不等式的一个变体》。《美国数学会会刊 B 辑》12（2025），1–13页。[37] Webb, S.，《正则单纯形的中心切片》。《几何奉献》61（1996），第1期，19–28页。[38] Widder, D. V.，《拉普拉斯变换》。普林斯顿数学丛书，第6卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1941年。