arXiv:2602.03072v1 [cs.LO] 3 Feb 2026

定义逻辑的弱分层

Nathan Guermond

4月17日， 2025*

摘要

定义逻辑是一个用于对判断进行编码和推理的逻辑族；判断是由推理规则规定的原子谓词。定义将一个原子谓词与一个逻辑公式相关联，而该公式本身可能依赖于正在被定义的谓词。这会导致表面上的循环性；通过将定义解释为项上的单调不动点算子可以解决这一循环性，并通过在定义上施加分层条件来加以强制。在许多实例中，考虑被定义谓词在其定义体中以否定位置出现的定义是有用的。在作为Abella证明助手基础的逻辑 $\mathcal{G}$中，由于分层条件，这是不允许的。违反该条件的一个此类应用是定义逻辑关系，这是一种常用于证明编程语言相关性质的技术。Tiu已经展示了如何放宽这一分层条件，以允许更广泛的定义体，其中包括逻辑关系所需的定义。然而，他仅展示了如何用弱分层条件扩展 $\mathcal{G}$ 的一个核心片段，从而得到他称为LD的逻辑。在本工作中，我们证明弱分层条件也与广义（nabla）量化和一般归纳相容。本工作的最终目标是为允许此类定义的Abella证明助手扩展提供理据。

1 引言

定义逻辑是一类用于编码和推理判断的逻辑，这些判断是由推理规则指定的原子谓词。定义将原子谓词与逻辑公式关联起来，而该公式本身也可能依赖于正在定义的谓词。

例如，考虑以下用于构造列表并将其追加起来的规范：

$$\frac{}{list\ nil}\ \textsc{nil} \qquad \frac{list\ L}{list\ (X :: L)}\ \textsc{cons}$$

$$\frac{}{append\ nil\ K\ K}\ \textsc{AppNil} \qquad \frac{append\ L\ K\ M}{append\ (X :: L)\ K\ (X :: M)}\ \textsc{AppCons}$$

这些推理规则可以用定义逻辑来建模，其中 $list$ 和$append$ 的定义由图 1中的子句给出。每个子句都将一条推理规则建模为：结论作为原子公式出现在左侧（头部），前提作为公式出现在右侧（主体）。变量（首字母大写）可以同时出现在头部和主体中，用来建模规则模式；这些模式中的变量可以实例化为同一类型的任意项。

*最后修改时间：2026年2月4日

$$list\ nil \triangleq \top \qquad\qquad list\ (X :: L) \triangleq list\ L$$

$$append\ nil\ K\ K \triangleq \top \qquad\qquad append\ (X :: L)\ K\ (X :: M) \triangleq append\ L\ K\ M$$

图1： $list$和 $append$的定义

于是，某些假设下一个判断的可推导性，可以建模为一个公式的可证性，如以下示例所示

$$\forall X, Y, L, K, M.append\ L\ K\ M \supset append\ (X :: Y :: L)\ K\ (X :: Y :: M),$$

因此，该逻辑中的可证性是这样定义的：证明上述公式，就相当于对闭项 x， y， ℓ， k， m 推导判断 $append\,(x ::\ y ::\ \ell)\ k\,(x ::\ y ::\ m)$，其中已知 $append\,\ell\,k\,m$。反过来，判断不可推导可以通过证明相应公式的否定来建模。例如，证明

$$\forall X.append\ nil\ (X :: nil)\ nil \supset \bot$$

意味着对于任意闭项 x，判断 $append\ nil\ (x ::\ nil)\ nil$ 都不可推导。确实，理应如此，因为没有任何推理规则的结论与该判断相匹配。

在编程语言研究中，人们常常希望讨论并推理基于规则的规范，例如编程语言的类型系统、逻辑或操作语义（例如参见 [8, 9]）。与上述示例类似，定义逻辑可用于对此类规范进行建模和推理。

在指定定义时，我们会注意到，定义的主体可以依赖于正在定义的谓词，这可能会导致表面上的循环性。事实上，如果不对我们允许构造的定义类型施加限制，就可能导致不一致性。例如，允许定义 $p \triangleq p \supset \bot$ 会导致逻辑不一致，正如我们将在第 2.4 节中看到的。因此，定义逻辑对定义施加了分层条件，以防止正在定义的谓词在其定义的主体中出现在否定位置（即蕴含的左侧）。另外，也可以将定义视为项上的算子的不动点，其中分层条件对应于确保这些算子是单调的。例如，图 $list$ 中谓词的对应不动点算子1 为

$$B \equiv \lambda p.\lambda L.(L = nil) \vee (\exists X, L'.(L = X :: L') \wedge (p\ L') \tag{1}$$

此处，我们不必用一组子句来指定定义，而可以将定义指定为上述某个算子的不动点。这是我们稍后处理归纳定义时将采用的方法，它将使我们能够把归纳定义视为最小不动点。

然而，在许多实例中，考虑这样的定义是很有用的：被定义的谓词在其定义的主体中出现在否定位置。定义逻辑关系就是这样一种应用；逻辑关系是证明有关编程语言性质的一种常用技术（例如，见 [8, 9, 20]）。例如，简单类型 λ 演算中程序的逻辑等价[1] 在图 2 中通过对类型递归来定义，其中我们假设 $\rightarrow^*$ 被定义为 λ 项上的归约关系，并且 nat被定义为在自然数上成立。这个定义

[1]与程序的计算等价不同，计算等价以内涵（即语法）方式关联程序，而逻辑等价则以外延（即语义）方式关联程序，因此， $\lambda x.\lambda y.x + y$和 $\lambda x\lambda y.y + x$ 在逻辑上等价，但在计算上并不等价。

$$s \sim_{nat} t \triangleq \exists n.(s \to^* n) \wedge (t \to^* n) \wedge (nat\ n)$$
$$s \sim_{\sigma\to\tau} t \triangleq \forall u_1, u_2.(u_1 \sim_\sigma u_2) \supset (app\ s\ u_1 \sim_\tau app\ t\ u_2)$$

图 2：简单类型 λ 演算中的逻辑等价

并不是分层的，因为 $u_1 \sim_\sigma u_2$ 在定义的主体中出现在否定位置。然而，如果我们认为对于每个基类型 τ固定一个谓词 $\sim_\tau$，并且认为 $\sim_{\sigma\to\tau}$ 仅在 $\sim_\sigma$ 定义之后才被定义，那么我们就会看到，这族谓词仍然可以是分层的。

在 [19], Tiu 通过允许分层依赖于基参数，展示了如何通过弱化分层条件来精确表达这一直觉。随后，Tiu 证明了他的分层条件与逻辑弱分层的核心片段 $\mathcal{G}$相容；我们将这种逻辑称为 LD。该逻辑由扩展了一阶逻辑的弱分层定义和自然数归纳组成。

在本文中，我们进一步推进这一思想，证明弱化后的分层条件也与我们称为 LD$^{\mu\nabla}$ 的逻辑中的 nabla量词和归纳定义相容。本文的最终目标是为扩展 Abella证明助手 [2] 、使其支持弱分层定义提供理论依据。由于 Abella 基于逻辑 $\mathcal{G}$，该逻辑 [7], 在$^{\mu\nabla}$ 中被引入，要完全论证这一扩展的合理性，还需要进一步将 LD$^{\mu\nabla}$ 扩展为包含余归纳和名义抽象。

nabla量词（∇）最初由 Miller 和 Tiu 在 [14]中提出，并在 [18], 中加以完善，旨在对名称进行推理。名称由名义常量建模，而新鲜性则由 nabla 量词建模。判断 $\nabla x.J$ 可推导，意味着 $J[n/x]$存在一个推导 $\Pi[n/x]$，其中使用了一个通用名义常量 n，且该常量未出现在 J中。特别是，这使我们能够得出结论：对于任意项 t， $J[t/x]$ 都可以通过推导 $\Pi[t/x]$ 一致地推导出来。这不同于全称量化判断 $\forall x.J$的含义；后者断言，对于每个项 t， $J[t/x]$都有一个推导 Π_t，但无法保证这些推导具有一致性。

类似地，Momigliano 和 Tiu 提出了归纳定义，见 [15]，以便我们能够对定义的最小不动点进行推理。例如，为了对算子的最小不动点进行建模p，其中算子为 B （例如， $list$中用于1的算子），对于任何谓词 S，只要满足

$$\forall X.B\ S\ X \supset S\ X$$

是可证明的（即 S 是 B的前不动点），且 $S\ t \supset C$ 是可证明的，那么 $p\ t \supset C$ 也应当是可证明的。在 LD$^{\mu\nabla}$ 中，我们将引入一条概括这一思想的一般规则。这与 Tiu 的 LD 形成对比：后者支持自然数归纳，但不支持这种一般意义上的归纳。

为了使一种逻辑具有实用价值，我们必须首先证明它是一致的，也就是说，并非所有公式都可证。为了证明 LD 的一致性，Tiu 首先构造了该逻辑的一个基版本 LD$_\infty$，这意味着推导中不会出现特征变量（自由变量）。随后，他定义了从 LD 到 LD$_\infty$的一个解释，这表明若 LD$_\infty$ 是不一致的，那么 LD 也必然如此。这样一来，问题就归结为证明 LD$_\infty$ 的一致性，而他通过使用切割消去技术证明了这一点。该方法旨在证明，任何使用切规则的推导，都可以转换为无切推导，从而使我们能够局部判定某些公式的可证性，包括 $\bot$。为此，我们定义了一个切割归约关系，并可以证明该关系是良基的。实现这一点的技术称为 Tait-Martin-L¨可约性技术 [10, 16], ， McDowell 和 Miller 将其改编用于定义逻辑 [11]。遵循 Tiu 的工作，我们定义了 LD$^{\mu\nabla}$ 的一个基版本，称为 LD$^{\mu\nabla}_\infty$，并证明后者满足切割消去，从而得出 LD$^{\mu\nabla}$ 是一致的。

我们的主要贡献是证明，扩展了 nabla 量化和归纳定义的 LD 是一致的。我们通过改编 Tiu 在基逻辑中消除切的方法来证明这一点。为此，我们需要解决归纳定义下的弱分层问题，采用 Momigliano 和 Tiu 的思路 [15], ；他们要求泛型定义和归纳定义都满足严格分层。我们的结果表明，只要归纳定义维持严格分层条件，这一点就能做到。我们通过一个反例表明，允许弱分层的归纳定义可能导致不一致。

本文其余部分安排如下。在第2节，我们介绍逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$，并希望证明其具有一致性。在第3节，我们给出一些需要弱分层的定义示例，以及一个反例，说明归纳定义必须限制为严格分层。在第 4 节，我们介绍该逻辑的基版本 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$。我们在第4.1节证明，$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 可以在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中解释，从而得出 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 的一致性可归约为 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$的一致性。在第5节，我们定义基推导上的切割归约关系；在第 6 节，我们引入可约性的中间概念，并证明所有基推导都是可约的。我们综合这些结果，在6.3节证明切消去定理。在第7 节，我们展示如何应用这一结果来获得 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$的一致性，并将其应用于证明搜索。最后，我们在第8 节讨论相关工作和未来方向。

2 逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$

本节定义逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$。该逻辑是一阶序列演算的扩展，并由一个定义集隐式参数化 $\mathcal{D}$ 以及一个归纳定义集 $\mathcal{I}$。首先，我们定义该逻辑中项和公式的语法，以及有效序列式的构成。其次，我们描述该逻辑的一个核心片段，其中包括逻辑推理规则，以及结构规则、公理和多重切规则。然后，我们规定有效定义集 $\mathcal{D}$的构成，以及与 $\mathcal{D}$相关联的推理规则。最后，我们规定有效归纳定义集 $\mathcal{I}$ 的构成及其相关推理规则。逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$由定义集 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{I}$隐式参数化，本节末尾将对其进行完整总结。我们注意到，$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 是 Tiu 的 LD 的扩展，加入了 nabla 量化和归纳定义。它也可以视为逻辑 $\mathcal{G}$ [7]的一个核心片段；该逻辑是 Abella 所基于的逻辑，并扩展了更宽松的定义。

2.1 语法

如同 Church 的简单类型论 [4], ，我们假定有限个基类型 ι_1，.....，ι_n，箭头类型 $\alpha \to \beta$，以及一个专设的命题类型 o。我们假定给定一个签名 Σ，它是形如 $\kappa : \tau$ 的带类型标注的常量的集合。按照 [6, 18], 中的表述，我们假定每个类型 τ 中都有可数无穷多个全局名义常量 n^{τ}_1、n^{τ}_2、.....，但为简便起见，我们将省略类型标注。于是，我们逻辑中的项是简单类型 λ 演算中模 α、β、η-相等的良类型项，由签名 Σ 中的常量、名义常量以及来自变量上下文 $\mathcal{X}$ 的变量构造而成；变量上下文是由互不相同的带类型标注的变量 $x : \tau$ 构成的有限集合。由于项 t 仅相对于签名 Σ、名义常量和变量上下文 $\mathcal{X}$ 而存在，且由于 Σ 与名义常量集合是固定的，我们将说 t 相对于 $\mathcal{X}$ 是良构的，或者说 t 位于 $\mathcal{X}$ 之上。特别地，这意味着 $\mathcal{X}$ 必须包含 t 中的所有自由变量，但可以包含更多。此外，我们指出，t 的类型完全由 Σ、$\mathcal{X}$ 以及名义常量决定，因此每当 t 位于 $\mathcal{X}$ 之上时，我们记作 $\mathcal{X} \vdash_{\Sigma} t : \tau$。

如果某个类型不包含 o，我们就称它为一阶 类型；如果它是 o 或具有形式 $\tau \to \omega$ （其中 τ 是一阶类型， ω是命题类型），则称它为命题 类型。公式 是类型为 o的项。我们

假设我们的签名 Σ 包含以下逻辑构造子

$$\bot, \top : o \qquad \wedge, \vee, \supset : o \to o \to o \qquad \forall_\alpha, \exists_\alpha, \nabla_\alpha : (\alpha \to o) \to o$$

对于每个一阶类型 α都成立。原子 公式具有形式 $p\ \vec{t}$，其中 p是某个常量谓词符号： ω在 Σ中；一般而言， $u\ \vec{t}$是应用 $(\ldots(u\ t_1)\ \ldots\ t_n)$ 的缩写。我们将 $Q_\alpha(\lambda x.C)$（其中 $Q_\alpha = \exists_\alpha, \forall_\alpha, \nabla_\alpha$）简写为 $Q_\alpha x.C$。

我们将公式 F 的支撑集 定义为出现在 F 中的名义项集合，记作 supp(F)。注意，公式的支撑集必然是有限的。给定有限名义项集合 $\mathcal{N}$，我们可以考虑由这些名义项的所有保类型置换构成的集合 Perm($\mathcal{N}$)。给定置换 $\pi \in$Perm($\mathcal{N}$)，且 supp(F) $\subseteq \mathcal{N}$，令 $F[\pi]$ 表示将其中每个名义项都替换为 π后得到的公式F 。

序列式是一个判断 $\mathcal{X}; \Gamma \vdash C$，其中 Γ 是由有限多个公式构成的多重集，称为上下文；而公式 C 属于变量上下文 $\mathcal{X}$。我们称 $\mathcal{X}$ 中的变量为特征变量，并假设 $\mathcal{X}$ 中的所有类型都是一阶的。当类型注释可由上下文推断时，我们将省略它们。若项属于空变量上下文$\emptyset$，则称该项为基项。我们用 ground(α) 表示类型为 α 的基项集合。给定变量上下文 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，类型为 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 的同时代换 $\theta = [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ 是一项指派，它将属于 $\mathcal{Y}$ 的项t_1： $\tau_1, \ldots, t_n$： τ_n 指派给每个变量 x_1： $\tau_1, \ldots, x_n$： τ_n $= \mathcal{X}$。因此，给定属于 $\mathcal{X}$ 的项 t， $t\theta :=$ $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.t)$ $\vec{t}$ 是一个属于 $\mathcal{Y}$ 的项。此外，我们用 $[t/x]$ 表示同时代换 $[x_1/x_1, \ldots, x_n/x_n, t/x]$: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}, x$，并用 $\epsilon_\mathcal{X}$: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 表示平凡代换。最后，代换的值域（记作 range(θ) ）是包含其中所有自由变量的最小变量上下文。

2.2 逻辑规则

现在，我们给出 LD 的核心左、右引入规则，见图$^{\mu\nabla}$ 3。如果存在一条规则，其结论与序列式 $\mathcal{X}; \Gamma \vdash C$相匹配，且该规则的每个前提都可推导，则称该序列式可推导。

特别注意右全称（分别地，左存在）引入规则，其中$C[y\ \vec{n}/x]$ 对于 $\vec{n} =$ supp(C)。这与一阶逻辑的通常表述不同，并确保以下序列式不可推导

$$\mathcal{X}; \forall y.\nabla x.p\ x\ y \vdash \nabla x.\forall y.p\ x\ y$$

对于给定的谓词常量 p。应用（$y\ \vec{n}$）会记录 y 被引入时所在的作用域，这种技术称为提升（见 [12]）。特别注意，上文 y 的类型是 $\tau_1 \to \ldots \to \tau_n \to \tau$，只要 n_i： τ_i。

2.3 结构规则、公理规则与多重切规则

然后我们给出结构收缩与弱化（分别为 c$\mathcal{L}$ 与 w$\mathcal{L}$）、公理（Ax）以及多重切（多重割）规则，见图 4。收缩规则之所以必要，是因为上下文是多重集；削弱规则之所以必要，是因为公理规则不允许有多个前提。最后，切规则被表述为多重切规则，这一想法源自 Gentzen，它将使我们能够在第5节中更轻松地归约涉及收缩规则的切。我们还允许多重切规则为零元（即 $n \geq 0$ 见图 4）。

请注意，公理规则仅限于原子公式。下面的引理表明，这并非一项根本性限制，但使用该规则将使涉及归纳定义的技术性推导更加容易。

$$\frac{}{\mathcal{X};\Gamma,\bot\vdash B}\ \bot\mathcal{L} \qquad \frac{}{\mathcal{X};\Gamma\vdash\top}\ \top\mathcal{R}$$

$$\frac{\mathcal{X};\Gamma\vdash B \quad \mathcal{X};\Gamma,C\vdash D}{\mathcal{X};\Gamma,B\supset C\vdash D}\ \supset\mathcal{L} \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma,B\vdash C}{\mathcal{X};\Gamma\vdash B\supset C}\ \supset\mathcal{R}$$

$$\frac{\mathcal{X};\Gamma,B\vdash D}{\mathcal{X};\Gamma,B\wedge C\vdash D}\ \wedge\mathcal{L}1 \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma,C\vdash D}{\mathcal{X};\Gamma,B\wedge C\vdash D}\ \wedge\mathcal{L}2 \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma\vdash B \quad \mathcal{X};\Gamma\vdash C}{\mathcal{X};\Gamma\vdash B\wedge C}\ \wedge\mathcal{R}$$

$$\frac{\mathcal{X};\Gamma,B\vdash D \quad \mathcal{X};\Gamma,C\vdash D}{\mathcal{X};\Gamma,B\vee C\vdash D}\ \vee\mathcal{L} \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma\vdash B}{\mathcal{X};\Gamma\vdash B\vee C}\ \vee\mathcal{R}1 \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma\vdash C}{\mathcal{X};\Gamma\vdash B\vee C}\ \vee\mathcal{R}2$$

$$\frac{\mathcal{X};\Gamma,C[t/x]\vdash D \qquad \mathcal{X}\vdash_\Sigma t:\tau}{\mathcal{X};\Gamma,\forall_\tau x.C\vdash D}\ \forall\mathcal{L} \qquad \frac{\mathcal{X},y;\Gamma\vdash C[y\ \vec{n}/x]}{\mathcal{X};\Gamma\vdash\forall_\tau x.C}\ \forall\mathcal{R}\quad \begin{array}{l}\mathrm{supp}(C)=\vec{n}\\ y\notin\mathcal{X}\end{array}$$

$$\frac{\mathcal{X},y;\Gamma,C[y\ \vec{n}/x]\vdash D}{\mathcal{X};\Gamma,\exists_\tau x.C\vdash D}\ \exists\mathcal{L}\quad \begin{array}{l}\mathrm{supp}(C)=\vec{n}\\ y\notin\mathcal{X}\end{array} \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma\vdash C[t/x] \qquad \mathcal{X}\vdash_\Sigma t:\tau}{\mathcal{X};\Gamma\vdash\exists_\tau x.C}\ \exists\mathcal{R}$$

$$\frac{\mathcal{X};\Gamma,C[n/x]\vdash D}{\mathcal{X};\Gamma,\nabla_\tau x.C\vdash D}\ \nabla\mathcal{L}\quad n\notin\mathrm{supp}(C) \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma\vdash C[n/x]}{\mathcal{X};\Gamma\vdash\nabla_\tau x.C}\ \nabla\mathcal{R}\quad n\notin\mathrm{supp}(C)$$

图3：LD$^{\mu\nabla}$的核心推理规则

$$\frac{\mathcal{X};\Gamma,B,B\vdash C}{\mathcal{X};\Gamma,B\vdash C}\ \mathrm{c}\mathcal{L} \qquad \frac{\mathcal{X};\Gamma\vdash C}{\mathcal{X};\Gamma,B\vdash C}\ \mathrm{w}\mathcal{L}$$

$$\frac{}{\mathcal{X};A\vdash A[\pi]}\ \textsc{Ax}\quad \pi\in\mathrm{Perm}(\mathrm{supp}(A))\text{ and }A\text{ atomic}$$

$$\frac{\mathcal{X};\Delta_1\vdash A_1 \qquad \ldots \qquad \mathcal{X};\Delta_n\vdash A_n \qquad \mathcal{X};\Gamma,A_1,\ldots,A_n\vdash C}{\mathcal{X};\Gamma,\Delta_1,\ldots,\Delta_n\vdash C}\ mc$$

图4：LD$^{\mu\nabla}$的结构规则、公理规则和多重切规则

引理1。对于任意置换 $\pi\in\mathrm{supp}(B)$，以下 INIT 规则无需切即可导出：

$$\frac{}{\mathcal{X};B\vdash B[\pi]}\ \textsc{Init}\quad \pi\in\mathrm{Perm}(\mathrm{supp}(B))$$

证明。对公式 B 的结构进行归纳。我们只展示 $B=B_1\wedge B_2$ 的情形。在这种情况下，根据归纳假设，我们知道 $\mathcal{X};\ B_1\vdash B_1[\pi]$ 和 $\mathcal{X};\ B_2\vdash B_2[\pi]$，据此我们可以构造出推导

$$\frac{\dfrac{\mathcal{X};B_1\vdash B_1[\pi]}{\mathcal{X};B_1\wedge B_2\vdash B_1[\pi]}\ \wedge\mathcal{L}1 \qquad \dfrac{\mathcal{X};B_2\vdash B_2[\pi]}{\mathcal{X};B_1\wedge B_2\vdash B_2[\pi]}\ \wedge\mathcal{L}2}{\mathcal{X};B_1\wedge B_2\vdash(B_1\wedge B_2)[\pi]}\ \wedge\mathcal{R}$$

□

2.4 定义与分层

有效定义集 $\mathcal{D}$ 由如下形式的子句组成：对于某个命题常量 p， $p\ \vec{t} \triangleq_{\mathcal{X}} B \in \mathcal{D}$：在签名 Σ 中的 ω，以及一个公式 B，其中 $\vec{t}$ 和 B 均位于 $\mathcal{X}$ 之上且具有空支撑集。对于给定子句 $H \triangleq_{\mathcal{X}} B \in \mathcal{D}$，我们称 H 为该子句的头部，称 B 为主体。此外，我们要求，对于任意子句 $H \triangleq_{\mathcal{X}} B \in \mathcal{D}$， $\mathcal{X}$ 中的每个变量都出现在H中，并且 H 属于 L_λ 模式片段（例如参见 [13]）。对于给定的谓词常量 p，与 p 相关联的定义是 $\mathcal{D}$ 中以 p 为头部的子句集合。现在假设对于每个基原子公式 A，我们都有一个到某个序数的层级赋值 $\mathrm{lvl}(A)$，并定义

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{lvl}(\bot) := \mathrm{lvl}(\top) := 0\\
&\mathrm{lvl}(A \wedge B) := \mathrm{lvl}(A \vee B) := \max(\mathrm{lvl}(A), \mathrm{lvl}(B))\\
&\mathrm{lvl}(A \supset B) := \max(\mathrm{lvl}(A) + 1, \mathrm{lvl}(B))\\
&\mathrm{lvl}(\forall_\alpha x.C) := \mathrm{lvl}(\exists_\alpha x.C) := \sup\{\mathrm{lvl}(C[t/x]) \mid t \in \mathrm{ground}(\alpha)\}\\
&\mathrm{lvl}(\nabla_\alpha x.C) := \mathrm{lvl}(C[n/x]) \qquad\qquad n \notin \text{的支持}\ (C)
\end{aligned}
$$

如果对于每个子句 $H \triangleq_{\mathcal{X}} B \in \mathcal{D}$ 和每个$\mathcal{X}$-基化替换 ρ（即 $\rho\colon \emptyset \to \mathcal{X}$），定义集 $\mathcal{D}$ 都满足以下条件，我们就称其为弱分层：

$$\mathrm{lvl}(H\rho) \geq \mathrm{lvl}(B\rho). \tag{2}$$

除（2）之外，如果我们还要求对于任意原子谓词 $A = p\ \vec{x}$以及任意 $\vec{x}$-基化替换 ρ_1， ρ_2，

$$\mathrm{lvl}(A\rho_1) = \mathrm{lvl}(A\rho_2) \tag{3}$$

也就是说，基原子谓词 $p\ \vec{t}$ 的层级不依赖于其参数，那么我们称 $\mathcal{D}$ 是（严格）分层的。（严格）分层条件禁止 p 在 B中出现在否定位置（即位于蕴含的左侧）。例如，定义 $p \triangleq p \supset \bot$不是分层的。弱分层条件放宽了这一条件，允许 $A = p\ \vec{u}$ 在 B 中出现在否定位置，前提是对于任意基替换 ρ，$\mathrm{lvl}(H\rho) > \mathrm{lvl}(A\rho)$。示例将在第3节给出。

给定一个子句 $H \triangleq_{\mathcal{X}} B \in \mathcal{D}$、公式 A， B' 和一个代换 $\theta\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$，我们称 $\mathrm{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B, A, \theta, B')$，如果存在一个代换 $\rho\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$，使得 $H\rho = A\theta$ 且 $B' = B\rho$。此外，我们要求 $\mathrm{supp}(\theta) = \emptyset$，尽管 ρ 的支撑集可能非空。注意，B' 总是 B 的一个实例，但 A 未必是 H 的实例。例如，对于由以下内容给出的子句 $H \triangleq B$

$$append\ (X :: L)\ K\ (X :: M) \triangleq append\ L\ K\ M$$

对于公式 $A = append\ V\ nil\ W$，以下结论成立

$$\mathrm{defn}(H \triangleq B, append\ V\ nil\ W, [(X :: L)/V, (X :: M)/W], append\ L\ nil\ M)$$

对于代换 $\rho = [nil/K]$.

定义的引入规则见图 5。从概念上讲， $\Delta\mathcal{R}$ 对应于展开某个特定实例 A的定义，其中该实例属于头部 H；而 $\Delta\mathcal{L}$ 对应于对与头部匹配的 A所有可能实例进行分类讨论 H。

如果不强制满足分层条件（2），就可能产生不一致性。事实上，定义$p \triangleq p \supset \bot$ 无法（弱分层或严格分层），若允许它作为定义，我们就会得到 $\vdash \bot$ 的推导，如图6所示。爆炸原理由 $\bot\mathcal{L}$ 规则体现，借此我们可以得到任意公式的证明，从而使逻辑变得不一致。我们将在第3 节看到一些允许的定义示例，它们是弱分层的，但并非严格分层。

$$\frac{\{\mathcal{Z}; \Gamma\theta, B' \vdash C\theta \mid \text{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B, A, \theta, B') \text{ and } \mathcal{Z} = \text{range}(\theta)\}}{\mathcal{Y}; \Gamma, A \vdash C}\ \Delta\mathcal{L}$$

$$\frac{\mathcal{Y}; \Gamma \vdash B'}{\mathcal{Y}; \Gamma \vdash A}\ \Delta\mathcal{R} \quad \text{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B, A, \epsilon_{\mathcal{Y}}, B')$$

图 5：谓词 p 的定义规则，由 $A = p\ \vec{t}$ 提供

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\ \text{Ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \bot}\ \bot\mathcal{L}}{p, \bot \vdash \bot}\ \text{w}\mathcal{L}}{p, p \supset \bot \vdash \bot}\ \supset\mathcal{L}}{p, p \vdash \bot}\ \Delta\mathcal{L}}{p \vdash \bot}\ \text{c}\mathcal{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{p \vdash \bot}}{\vdash p \supset \bot}\ \supset\mathcal{R}}{\vdash p}\ \Delta\mathcal{R} \quad \dfrac{\vdots}{p \vdash \bot}}{\vdash \bot}\ mc$$

图 6：定义 $p \triangleq p \supset \bot$ 的不一致性

2.5 定义的不动点形式和子句形式

上一节中，我们将定义表示为由以下形式的子句组成的集合 $p\ \vec{t} \stackrel{*}{=}_{\mathcal{X}} B$，并称之为子句表示法（其中 $\stackrel{*}{=}$ 要么是 $\triangleq$，要么是 $\stackrel{\mu}{=}$，我们将在下一节中对其进行定义）。现在我们讨论表示定义的另一种方法。定义的不动点表示法是一个形如 $p\ \vec{x} \stackrel{*}{=}_{\vec{x}} B'\ p\ \vec{x}$ 的单一子句，其中 $\vec{x}$ 中的每个变量都是唯一的，并且B' 是一个不包含 p的闭项。请注意，以不动点形式表示的定义 $p\ \vec{x} \stackrel{*}{=}_{\vec{x}} B'\ p\ \vec{x}$ 已经是子句形式。反过来，以子句形式表示的定义

$$p\ \vec{t}_1 \stackrel{*}{=}_{\mathcal{X}_1} B_1 \quad \ldots \quad p\ \vec{t}_n \stackrel{*}{=}_{\mathcal{X}_n} B_n$$

可以编码为如下不动点形式

$$\begin{aligned} &eq\ x\ x \triangleq_{\{x\}} \top \\ &\quad p\ \vec{x} \stackrel{*}{=}_{\vec{x}} (\exists \mathcal{X}_1.(eq\ x_1\ t_1^1) \wedge \ldots \wedge (eq\ x_k\ t_1^k) \wedge B_1) \vee \ldots \vee \\ &\qquad (\exists \mathcal{X}_n.(eq\ x_1\ t_n^1) \wedge \ldots \wedge (eq\ x_k\ t_n^k) \wedge B_n) \end{aligned}$$

其中 $\vec{t_i} = t_i^1, \ldots, t_i^k$对于每个 i，其 t_i^j位于 $\mathcal{X}_i$。例如，$list$和 $append$来自图1可以按如下方式指定为不动点形式

$$\begin{aligned} list\ L &\stackrel{\mu}{=} (eq\ L\ nil) \vee (\exists X, L'.(eq\ L\ (X :: L')) \wedge (list\ L')) \\ append\ L\ K\ M &\triangleq (eq\ L\ nil \wedge eq\ K\ M) \vee \\ &\qquad (\exists X, L', M'.(eq\ L\ (X :: L')) \wedge (eq\ M\ (X :: M')) \wedge (append\ L'\ K\ M')) \end{aligned} \tag{4}$$

然而，尽管这两种表述看似可以互换，子句形式的弱分层定义在转换为其不动点形式后可能不再是弱分层的，因此我们要求定义必须以子句形式给出。例如，如果我们以层级 $\text{lvl}(list\ L) := |L|$ 对 $list$ 进行分层，其中对于闭项 X 和 L，

$$|nil| := 0 \qquad |X :: L| := 1 + |L|$$

那么尽管其图1 中的子句形式是弱分层的，但其图4 中的不动点形式则不是，因为对于任意基项 L，该基公式的层级

$$\exists X, L'.(eq\ L\ (X :: L')) \wedge (list\ L')$$

是无穷序数 ω，它大于 $\mathrm{lvl}(list\ L) = |L|$。不过，这并不排除存在另一种层次指派，使两种 $list$ 表示都是分层的。

下一节中，我们将使用不动点表示介绍归纳定义。由于归纳定义必须是（严格）分层的，我们将以不动点形式呈现它们，这样可以简化归纳定义的规则。

2.6 归纳定义

$$\frac{\vec{x}; B\ S\ \vec{x} \vdash S\ \vec{x} \qquad \mathcal{X}; \Gamma, S\ \vec{t} \vdash C}{\mathcal{X}; \Gamma, p\ \vec{t} \vdash C}\ \mu\mathcal{L} \qquad\qquad \frac{\mathcal{X}; \Gamma \vdash B\ p\ \vec{t}}{\mathcal{X}; \Gamma \vdash p\ \vec{t}}\ \mu\mathcal{R}$$

图 7： $p\ \vec{x} \stackrel{\mu}{=}_{\vec{x}} B\ p\ \vec{x} \in \mathcal{I}$ 的归纳定义规则和归纳不变量 S

有效归纳定义集 $\mathcal{I}$ 由形如 $p\ \vec{x} \stackrel{\mu}{=}_{\vec{x}} B\ p\ \vec{x} \in \mathcal{I}$ 的子句组成，其中某个谓词常量 $p : \omega$ 属于签名 Σ，且有一个类型为 $\omega \to \omega$ 、不含p的闭项 B 。我们假设 $\vec{x}$ 中的所有变量都互不相同，这使我们能够根据公式 $B\ p\ \vec{x}$ 唯一确定 B 。我们假设 p 至多出现在 $\mathcal{I}$ 中的一个子句的头部中，并且尚未在 $\mathcal{D}$中定义。与 p 关联的归纳定义，是 $\mathcal{I}$ 中唯一一个以 p为头部的子句。归纳定义的归纳不变量是一个类型为 ω 的闭项 S 。我们要求归纳定义集是（严格）分层的，并在图 7 中给出归纳定义的引入规则。例如，第 4 节中定义的 $list$ 谓词的 $\mu\mathcal{L}$规则如下

$$\frac{L; eq\ L\ nil \vee (\exists X, L'.(eq\ L\ (X :: L')) \wedge (S\ L')) \vdash S\ L \qquad \mathcal{X}; \Gamma, S\ \ell \vdash C}{\mathcal{X}; \Gamma, list\ \ell \vdash C}\ \mu\mathcal{L}$$

对于任意归纳不变量 S。

在第 3.3 节中，我们将看到一个例子，表明对归纳定义的弱分层条件不足以确保一致性。

2.7 逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$

现在，我们已经定义了逻辑的每个组成部分，终于可以定义

定义 1（逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$）。 给定一个有效定义集 $\mathcal{D}$ 和一个有效归纳定义集 $\mathcal{I}$，满足

1. $\mathcal{D}$ 是弱分层的，并且
2. $\mathcal{I}$ 是（严格）分层的

逻辑 LD 中的可推导性$^{\mu\nabla}(\mathcal{D},\ \mathcal{I})$ 由图 3、4、5和 7中的规则组合归纳定义。当 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{I}$ 可从上下文中明确得知时，我们简写为 $LD^{\mu\nabla}$。

给定一条推理规则，若它是右引入规则，则其所有前提都称为主要前提。若它是左引入规则或多重切，则只有那些与其结论具有相同后件的前提才是主要前提。其他所有前提都是次要前提。特别地，我们注意到，只有 $\supset\mathcal{L}$、 $\mu\mathcal{L}$ 和多重割这几条规则具有次要前提。

3 示例

我们已经看到，只要被定义的谓词在其定义的主体中出现在否定位置，定义逻辑中就可能出现不一致性。防止这种情况的一项充分条件是分层条件（3），但本文旨在将其弱化为弱分层条件（2），从而允许更广泛的定义体。本节将介绍一些定义示例，它们是弱分层的，但并非严格分层，以此展示此类定义的用途。第一个示例（引自 [19]）以一个简单而有代表性的例子说明如何定义偶数。第二个示例则说明，弱分层可用于编码逻辑等价；逻辑等价是证明程序性质的一种更一般方法（称为逻辑关系）中的一个特例 [9]。最后，我们给出一个反例，说明弱分层并不足以保证归纳定义的一致性，从而证明我们对归纳定义所作的限制是合理的。

除本节给出的示例之外，我们指出，弱分层定义可用于编码 G¨odel-Gentzen 翻译，以及如 [19] 所述的、将经典逻辑嵌入直觉主义逻辑的柯尔莫哥洛夫双重否定翻译。正如 [3], 所指出的，此类定义的另一项有用应用是对 Tait 风格的 [8,16] 强正规化论证进行形式化。一个更为详尽的逻辑关系论证应用示例可见于 [20], ，其中隐式地使用弱分层来定义步索引逻辑等价关系，以证明函数式程序编译器变换的正确性。

3.1 偶数

我们考虑如下定义，它通过首先指定基类型 tm 上的如下签名来识别所有偶自然数:

$$z : \mathrm{tm} \qquad s : \mathrm{tm} \to \mathrm{tm} \qquad ev : \mathrm{tm} \to o$$

然后我们如下指定定义子句

$$ev\ z \triangleq \top \qquad ev\ (s\ X) \triangleq (ev\ X) \supset \bot$$

该定义不能被分层，因为 $ev\ X$ 在其自身定义的主体中以否定位置出现。然而，通过对任意基项 t（其中 $|z| := 0$ 且 $|s\ X| := |X| + 1$）赋予层级 $\mathsf{lvl}(ev\ t) := |t|$ ，它可以是弱分层的。人们或许希望将其与一种更标准的归纳定义偶数的方式进行比较，即

$$ev'\ X \overset{\mu}{=} (X = z) \vee (\exists Y.eq\ X\ (s\ (s\ Y)) \wedge (ev'\ Y))$$

因此，可以在 $\mathsf{LD}^{\mu\nabla}$ 中证明 $\forall x.ev'\ x \supset ev\ x$。不过请注意，由于 ev 无法分层，其定义不能构造成归纳式，因此逆命题未必可证。

3.2 逻辑等价

为了展示一个更有趣的例子，我们说明如何使用弱分层，对图 2 中给出的程序的逻辑等价关系进行编码（例如参见 Harper [9]）。具体来说，我们对以下常量所描述的简单类型 λ 演算中的类型和项进行编码:

$$z : \mathrm{tm} \qquad s : \mathrm{tm} \to \mathrm{tm} \qquad app : \mathrm{tm} \to \mathrm{tm} \to \mathrm{tm} \qquad lam : (\mathrm{tm} \to \mathrm{tm}) \to \mathrm{tm}$$

$$nt : \mathrm{ty} \qquad arr : \mathrm{ty} \to \mathrm{ty} \to \mathrm{ty}$$

接着，我们定义谓词 $nat : \mathsf{tm} \to o$，用于指定自然数值；还定义谓词$step : \mathsf{tm} \to \mathsf{tm} \to o$，用于指定单个计算步骤：

$$nat\ z \triangleq \top \qquad nat\ (s\ X) \triangleq nat\ X$$

$$step\ (s\ X)\ (s\ X') \triangleq step\ X\ X' \qquad step\ (app\ (lam\ S)\ U)\ (S\ U) \triangleq \top$$

$$step\ (app\ S\ T)\ (app\ S'\ T) \triangleq step\ S\ S' \qquad step\ (app\ S\ T)\ (app\ S\ T') \triangleq step\ T\ T'$$

并且我们定义关系 $steps : \mathsf{tm} \to \mathsf{tm} \to o$ 为 $step$ 的自反传递闭包：

$$steps\ T\ T \triangleq \top \qquad steps\ S\ T \triangleq \exists y.step\ S\ y \wedge steps\ y\ T$$

最后，逻辑等价由关系 $logeq : \mathsf{ty} \to \mathsf{tm} \to \mathsf{tm} \to o$ 编码如下：

$$logeq\ nt\ S\ T \triangleq (\exists n.(steps\ S\ n) \wedge (steps\ T\ n) \wedge (nat\ n))$$

$$logeq\ (arr\ A\ B)\ S\ T \triangleq (\forall u_1, u_2.(logeq\ A\ u_1\ u_2) \supset (logeq\ B\ (app\ S\ u_1)\ (app\ T\ u_2)))$$

该示例无法进行分层，因为 $logeq$ 在其主体中出现在否定位置。然而，对于任意基项 A，B，S，T，以及 N，我们可以为每个所定义的谓词分配以下层级：

$$\mathrm{lvl}(steps\ S\ T) := 0 \qquad \mathrm{lvl}(step\ S\ T) := 0$$

$$\mathrm{lvl}(nat\ N) := 0 \qquad \mathrm{lvl}(logeq\ A\ S\ T) := |A|$$

其中我们定义 $|nt| := 0$ 和 $|arr\ A\ B| := \max(|A| + 1,\ |B|)$。我们可以验证，按照这个层级赋值，这些定义是弱分层的。唯一需要检查的非平凡条件是，对于任意基项 A，B，S和 T，

$$\begin{aligned}
\mathrm{lvl}(logeq\ (arr\ A\ B)\ S\ T) &= \max(|A| + 1, |B|) \\
&= \sup_{u_1,u_2} \{\max(\mathrm{lvl}(logeq\ A\ u_1\ u_2) + 1, \mathrm{lvl}(logeq\ B\ (app\ S\ u_1)\ (app\ T\ u_2)))\} \\
&= \sup_{u_1,u_2} \{\mathrm{lvl}((logeq\ A\ u_1\ u_2) \supset (logeq\ B\ (app\ S\ u_1)\ (app\ T\ u_2)))\} \\
&\geq \mathrm{lvl}(\forall u_1, u_2.(logeq\ A\ u_1\ u_2) \supset (logeq\ B\ (app\ S\ u_1)\ (app\ T\ u_2)))
\end{aligned}$$

因此 $logeq$ 是弱分层的，因而是有效定义。

3.3 弱分层不足以用于归纳定义

回顾一下，我们要求归纳定义是（严格）分层的。现在我们举例说明，如果不对归纳定义强制施加严格分层条件，逻辑可能会变得不一致。具体而言，考虑这样一个签名：它包含基类型 tm，以及第 $ev : \mathrm{tm} \to o$ 节3.1中的定义。我们还假设允许按如下方式归纳定义谓词 $odd : \mathrm{tm} \to o$

$$odd\ (s\ X) \overset{\mu}{=} (odd\ X) \supset \bot$$

这对应于带有算子的 不动点表示 $odd\ X \overset{\mu}{=} B\ odd\ X$ with operator

$$B \equiv \lambda S.\lambda x.\exists y.(eq\ x\ (s\ y) \wedge (S\ y \supset \bot)).$$

首先注意，使用归纳不变量 $S = \lambda x.ev\ x$ 对 odd with the inductive invariant $S = \lambda x.ev\ x$ 进行归纳，我们推导出序列式 $X; odd\ X \vdash ev\ X$，如下所示：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Y; ev\ Y \supset \bot \vdash ev\ Y \supset \bot}\ \textsc{Init}}{Y; ev\ Y \supset \bot \vdash ev\ (s\ Y)}\ \Delta\mathcal{R}}{X, Y; eq\ X\ (s\ Y), ev\ Y \supset \bot \vdash ev\ X}\ \Delta\mathcal{L}}{X; \exists y.eq\ X\ (s\ y) \wedge ev\ y \supset \bot \vdash ev\ X}\ \exists\mathcal{L};\wedge\mathcal{L}* \qquad \dfrac{}{X; ev\ X \vdash ev\ X}\ \textsc{Ax}}{X; odd\ X \vdash ev\ X}\ \mu\mathcal{L} \tag{5}$$

其次，我们使用归纳法对 odd 进行归纳，不变量为 $S = \lambda x.(ev\ x \supset \bot)$，从而推导出序列式 $X; odd\ X \vdash ev\ X \supset \bot$，如下所示：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Y; ev\ Y \supset \bot \vdash ev\ Y \supset \bot}\ \textsc{Init} \qquad \dfrac{}{Y; \bot, ev\ Y \supset \bot \vdash \bot}\ \textsc{Ax};\mathrm{w}\mathcal{L}}{Y; (ev\ Y \supset \bot) \supset \bot, ev\ Y \supset \bot \vdash \bot}\ \supset\mathcal{L}}{Y; (ev\ Y \supset \bot) \supset \bot, ev\ (s\ Y) \vdash \bot}\ \Delta\mathcal{L}}{Y; (ev\ Y \supset \bot) \supset \bot \vdash ev\ (s\ Y) \supset \bot}\ \supset\mathcal{R}}{X, Y; eq\ X\ (s\ Y), (ev\ Y \supset \bot) \supset \bot \vdash ev\ X \supset \bot}\ \Delta\mathcal{L}}{X; \exists y.eq\ X\ (s\ y) \wedge (ev\ Y \supset \bot) \supset \bot \vdash ev\ X \supset \bot}\ \exists\mathcal{L};\wedge\mathcal{L}* \qquad \dfrac{}{X; ev\ X \supset \bot \vdash ev\ X \supset \bot}\ \textsc{Init}}{X; odd\ X \vdash ev\ X \supset \bot}\ \mu\mathcal{L} \tag{6}$$

对上文 5 和 6 中推导出的序列式应用一次多重切规则，我们得到

$$X; odd\ X \vdash \bot \tag{7}$$

将 X 特化为 z，在 7 中，我们得到 $odd\ z \vdash \bot$ 的推导，因而通过 $\vdash odd\ (s\ z)$ 规则以及 $\Delta\mathcal{R}$ 和 $\supset\mathcal{R}$ 规则得到 $\vdash odd\ (s\ z)$ 的推导。最后，将 X 特化为 $s\ z$，在 7 中，我们得到 $odd\ (s\ z) \vdash \bot$，将其与前一个结果进行切后，即得到 $\vdash \bot$ 的推导。

4 基逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$

现在我们定义 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 的一个基版本，并将其称为 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$。随后，我们将在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中定义 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 的一个解释，并证明切规则在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中是可容许的。这将意味着 $\vdash \bot$ 的任何基项推导都有一个无切推导，而我们将看到这是不可能的。由于该解释保持可推导性，我们可以据此得出，$\vdash \bot$ 在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 中不可推导，因此 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 是一致的。

LD 中的公式$^{\mu\nabla}_{\infty}$是$^{\mu\nabla}$ 在空变量上下文上良构的 LD 公式。由于所有公式都是基项，我们将序列式 $\mathcal{X}; \Gamma \vdash C$限制为不含特征变量，这相当于要求 $\mathcal{X} = \emptyset$。因此，我们将基项序列式记作 $\Gamma \vdash C$。$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$的规则与 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 相同，除了 $\forall\mathcal{R}$、$\exists\mathcal{L}$和 $\mu\mathcal{L}$。我们将 $\forall\mathcal{R}$ 和$\exists\mathcal{L}$ 规则替换为图8中的以下无穷规则。

$$\dfrac{\{\Gamma \vdash C[t/x]\}_{t \in \mathrm{ground}(\alpha)}}{\Gamma \vdash \forall_\alpha x.C}\ \forall\mathcal{R} \qquad \dfrac{\{\Gamma, B[t/x] \vdash C\}_{t \in \mathrm{ground}(\alpha)}}{\Gamma, \exists_\alpha x.B \vdash C}\ \exists\mathcal{L}$$

图 8：$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中的 $\forall\mathcal{R}$和 $\exists\mathcal{L}$ 规则

$$\frac{\{\Gamma, B' \vdash C \mid \mathrm{defn}(H \triangleq B, A, \epsilon_\emptyset, B')\}}{\Gamma, A \vdash C}\,\Delta\mathcal{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash B'}{\Gamma \vdash A}\,\Delta\mathcal{R} \quad \mathrm{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B, A, \epsilon_\emptyset, B')$$

图9：$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中的定义规则，适用于谓词 p，条件为 $A = p\ \vec{t}$

$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中的定义 $\Delta\mathcal{L}$ 和规则 $\Delta\mathcal{R}$ 与$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$中的相同。将结论限制为基结论后，我们便可以像图9中那样写出这些规则。不过，我们必须检查这些规则是否良构；这相当于检查其前提是否在空变量上下文上良构。等价地，我们必须检查每个前提中的所有公式是否都是基公式。假设给定一个基上下文 Γ、一个基公式 A和一个子句 $H \triangleq_{\mathcal{X}} B$ ，使得$\mathrm{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B, A, \epsilon_\emptyset, B')$成立，那么存在 $\rho\colon\ \mathcal{Z} \to X$，使得 $A = A\epsilon_\emptyset = H\rho$和 $B\rho = B'$成立。由于H 属于模式片段 L_λ ，且 A 是基项，这意味着 ρ是唯一的，而且还必须是基项。由于 B 属于 $\mathcal{X}$，而后者是 ρ的定义域，因此 B' 必定是基项，正如所需。

$$\frac{\{B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\}_{\vec{t} \in \mathrm{ground}(\vec{\alpha})} \qquad \Gamma, S\ \vec{u} \vdash C}{\Gamma, p\ \vec{u} \vdash C}\,\mu\mathcal{L}$$

图10：$\mu\mathcal{L}$ 在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中适用于 $p\ \vec{x} \stackrel{\mu}{=}_{\vec{x}} B\ p\ \vec{x} \in \mathcal{I}$ 和归纳不变量 S 的规则

最后，对于任意归纳定义 $p\ \vec{x} \stackrel{\mu}{=}_{\vec{x}} B\ p\ \vec{x} \in \mathcal{I}$ 和归纳不变量 S，我们引入图 $\mu\mathcal{L}$10 所示规则的新基版本10。

定义2 (逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$)。 给定一个有效定义集 $\mathcal{D}$ 和一个有效归纳定义集 $\mathcal{I}$ ，使得

1. $\mathcal{D}$ 是弱分层的，且
2. $\mathcal{I}$ 是（严格）分层的

逻辑 $LD^{\mu\nabla}_{\infty}(\mathcal{D},\ \mathcal{I})$ 中的可推导性由图3、4、5和7中的规则组合归纳定义，其中 $\forall\mathcal{R}$ 和 $\exists\mathcal{L}$分别替换为图8中的规则，而 $\mu\mathcal{L}$规则替换为图10中的规则。当 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{I}$ 可从上下文中明确时，我们简单地记作 $LD^{\mu\nabla}_{\infty}$。

4.1 在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中解释 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$

现在的目标是定义 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中的解释，该解释将 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 中一个序列式的可推导性与 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中一个 ground 序列的可推导性联系起来。这将使我们能够把前者的一致性归约为后者的一致性。我们首先定义带有前提推导 $\{\Pi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 的推导 Π 的高度：

$$\mathrm{ht}(\Pi) = \sup_{i\in\mathcal{I}}\{\mathrm{ht}(\Pi_i) + 1\}.$$

特别地，如果 Π 没有前提推导，则 $\mathrm{ht}(\Pi) = 0$，此外，对于每个 $i \in \mathcal{I}$，都有 $\mathrm{ht}(\Pi_i) < \mathrm{ht}(\Pi)$。注意， $\mathcal{I}$ 可能是无限的，因此高度是一个序数。

该解释由以下引理给出。

引理 2 (Grounding 引理)。 如果 $\mathcal{Y};\Gamma \vdash C$ 可在 $LD^{\mu\nabla}$中推导出来，那么对于任意 $\mathcal{Y}$-基化替换 $\delta\colon \emptyset \to \mathcal{Y}$，*ground* 序列 $\Gamma\delta \vdash C\delta$ 可在 $LD^{\mu\nabla}_{\infty}$中推导出来。

证明。 证明通过对 $\mathcal{Y};\Gamma \vdash C$的推导高度进行归纳得出。注意，我们不要求 supp(δ) 为空。下面只证明 $\forall\mathcal{R}$ 和 $\Delta\mathcal{L}$ 的情形。

$\forall\mathcal{R}$：假设该推导以 $\forall\mathcal{R}$ with $C = \forall_\alpha x.D$ 结束。给定 $y \notin \mathcal{Y}$ and $\vec{n} = \text{supp}(D)$，假设 δ 是一个 $\mathcal{Y}$-基化替换。由于可以在 $\forall_\alpha x.D$ 中重命名 x，我们假设$x \notin \mathcal{Y}$。现在，对于每个 $t \in \text{ground}(\alpha)$，注意到

$$(D[y\ \vec{n}/x])[\delta, (\lambda\vec{x}.t)/y] = (D[\delta, y\ \vec{n}/x])[\lambda\vec{x}.t/y] = (D\delta)[t/x].$$

由于 $\delta' = [\delta, (\lambda\vec{x}.t)/y]$ 是一个 $\mathcal{Y}$，y-基化替换，我们可以将其应用于前提 $\mathcal{Y}$，y；根据归纳假设，$\Gamma \vdash D[y\ \vec{n}/x]$ 可得出 $\Gamma\delta' \vdash (D\delta)[t/x]$ 的基项推导，如下所示

$$\frac{\mathcal{Y}, y; \Gamma \vdash D[y\ \vec{n}/x]}{\mathcal{Y}; \Gamma \vdash \forall_\alpha x.D}\ \forall\mathcal{R} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\{\Gamma\delta' \vdash (D\delta)[t/x])\}_{t\in\text{ground}(\alpha)}}{\Gamma\delta \vdash \forall_\alpha x.(D\delta)}\ \forall\mathcal{R}$$

$\Delta\mathcal{L}$：假设该推导以原子 A 上的 $\Delta\mathcal{L}$ 结束，其中 $\Gamma = \Gamma'$，A。显然，若 defn($H \triangleq_{\mathcal{X}} B$，$A\delta$，$\epsilon_\emptyset$，$B'$)，则 defn($H \triangleq_{\mathcal{X}} B$，$A$，$\delta$，$B'$)；此外，由于 δ 是一个基替换，range(δ) $= \emptyset$。因此，将归纳假设应用于基项前提 $\emptyset$，即可得到下方前提 $\Gamma'\delta$，$B' \vdash C\delta$ 的一个 $\text{LD}^{\mu\nabla}_\infty$ 推导；$\Gamma'\delta$，$B' \vdash C\delta$ 使用空 grounding 代换。

$$\frac{\{\mathcal{Z}; \Gamma'\theta, B' \vdash C\theta \mid \text{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B, A, \theta, B') \text{ and } \mathcal{Z} = \text{range}(\theta)\}}{\mathcal{Y}; \Gamma', A \vdash C}\ \Delta\mathcal{L} \quad \rightsquigarrow$$

$$\frac{\{\Gamma'\delta, B' \vdash C\delta \mid \text{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B, A\delta, \epsilon_\emptyset, B')\}}{\Gamma'\delta, A\delta \vdash C\delta}\ \Delta\mathcal{L}$$

最后要指出，尽管基化替换 δ 可能具有非空支撑集，但这并不影响 $\nabla\mathcal{L}$ 和 $\nabla\mathcal{R}$ 两种情况，因为我们总能在保持可推导性的同时，对序列式中的名义项重新命名。

□

该引理的详细证明可见附录A.2。

4.2 $\text{LD}^{\mu\nabla}_\infty$ 的一致性蕴含$\text{LD}^{\mu\nabla}$的一致性

根据基化引理，我们得到如下结果

引理 3 （解释引理）。 如果 $LD^{\mu\nabla}_\infty$一致，那么 $LD^{\mu\nabla}$也一致。

证明。 根据基化引理，如果 $\vdash \bot$ 在 $\text{LD}^{\mu\nabla}$中可推导，那么它在 $\text{LD}^{\mu\nabla}_\infty$中也可推导。因此，逆否命题也成立：如果 $\vdash \bot$ 在 $\text{LD}^{\mu\nabla}_\infty$中不可推导，那么它在 $\text{LD}^{\mu\nabla}$中也不可推导。 □

5 $\text{LD}^{\mu\nabla}_\infty$ 的切归约

现在我们定义 LD 中推导上的切割归约关系μ^∇_∞。这规定了切规则如何在推导树中向上传播。在第6节中，我们将看到如何利用这一关系获得无切推导。

具体而言，我们定义推导之间的归约关系，并严格遵循 [11]中的归约关系。该可归约表达式，即将要进行归约的推导，总是一个 Ξ 以多重切规则结尾的推导

$$\frac{\begin{array}{ccccc}\Pi_1 & & \Pi_n & & \Pi \\ \Delta_1 \vdash B_1 & \cdots & \Delta_n \vdash B_n & & B_1, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\, mc$$

我们将多重切中的公式 $B_1, \ldots, B_n$ 称为切公式。如果左规则或右规则引入了切公式，我们就称该规则为主规则。如果 Π归约为 Π'，我们就称 Π' 是 Π的约化式，并可记作 $\Pi \to \Pi'$。

具体而言，归约关系将以多重切规则 mc结尾的推导 Ξ，关联到一个新的推导 Ξ'。我们稍后将看到，新推导也可能以多重切结尾，但其复杂度总是更小。对于选定的切公式 B_i，归约关系通过对 Π和 Π_i 的最后规则进行分类讨论来定义。主要思路是将各种情形划分为互斥的关键情形、归纳情形、左／右交换情形、结构情形、左／右多重切情形以及左／右公理情形。下面总结这些情形。完整的归约关系详见附录B。

关键情形：关键情形是指 Π_i 以右引入规则结尾，而 Π以左引入规则结尾的情形。例如，下面给出这样的情形： Ξ是一个切， Π_1 以$\wedge\mathcal{R}$结尾，而 Π以 $\wedge\mathcal{L}i$结尾：

如果 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{cc}\Pi_1^1 & \Pi_1^2 \\ \Delta_1 \vdash B_1^1 & \Delta_1 \vdash B_1^2\end{array}}{\Delta_1 \vdash B_1^1 \wedge B_1^2}\, \wedge\mathcal{R} \qquad \frac{\Pi'}{B_1^i, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\, \wedge\mathcal{L}i$$

那么 Ξ 可约化为推导

$$\frac{\begin{array}{ccc}\Pi_1^i & & \Pi' \\ \Delta_1 \vdash B_1^i & \cdots & B_1^i, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\, mc$$

我们将其记为 $mc(\Pi_1^i,\ \Pi_2,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi')$。请注意，在这里（与其他本质情形一样），切现在发生在公式 B_1^i 上，其复杂度不超过 $B_1^1 \wedge B_1^2$。在这种情形下，复杂度的降低由切公式的层级体现。

归纳情形：当 Π 以引入归纳定义 $p\ \vec{x} \stackrel{\mu}{=}_{\vec{x}} B\ p\ \vec{x}$的切公式 $p\ \vec{t}$ 的 $\mu\mathcal{L}$ 结束时，就会出现归纳情形。假设引入的切公式是 $B_1 = p\ \vec{t}$。在这种情形下， Π_1 是序列式 $\Delta_1 \vdash p\ \vec{t}$ 的一个推导，而 Π 是以下推导，其中 S是某个归纳不变量

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^{\vec{u}} \\ B\ S\ \vec{u} \vdash S\ \vec{u}\end{array}\right\}_{\vec{u} \in \mathrm{ground}(\vec{\alpha})} \qquad \begin{array}{c}\Pi' \\ S\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{p\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\, \mu\mathcal{L}$$

关键思想是，既然我们知道 S 是 p的前不动点，那么每当 $p\,\vec{t}$ 成立时，我们就应该能够得到 $S\ \vec{t}$。更具体地说，推导族 $\{\Pi_S^{\vec{u}}\}_{\vec{u}}$（我们将其简记为 Π_S）可用于推导出 $\Delta_1 \vdash S\ \vec{t}$。我们将这一推导称为

相对于 Π_S 的推导 Π_1 的展开，记作 $\mu(\Pi_1, \Pi_S)$。我们注意到，推导展开在很大程度上依赖于归纳定义 p 是严格分层的。

现在我们可以将 Ξ 约化为如下形式

$$\frac{\begin{array}{cc}\mu(\Pi_1,\Pi_S) & \\ \Delta_1 \vdash S\ \vec{t} & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi' \\ S\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\ mc$$

左交换情形：当 Π_i 以一个作用于非切公式的公式上的规则结束时，就会出现左交换情形。其思路是将切推到 Π_i的最后一条规则之上。例如，考虑 Π_i 以 $\vee\mathcal{L}$ 结束，而 Π 以某个左引入规则结束，且该规则不是作用于 $\mathsf{c}\mathcal{L}$ 或 $\mathsf{w}\mathcal{L}$ 的规则；也就是说，假设 Π_1 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1^1 \\ \Delta_1', C_1 \vdash B_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1^2 \\ \Delta_1', C_2 \vdash B_1\end{array}}{\Delta_1', C_1 \vee C_2 \vdash B_1}\ \vee\mathcal{L}$$

那么令 $\Xi^i = mc(\Pi_1^i,\ \Pi_2,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi)$，则 Ξ约化为

$$\frac{\begin{array}{c}\Xi^1 \\ \Delta_1', C_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Xi^2 \\ \Delta_1', C_2, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\Delta_1', C_1 \vee C_2, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\ \vee\mathcal{L}$$

右交换情形：与左交换情形类似，当 Π 以一个作用于非切公式的公式上的规则结束时，就会出现右交换情形。在这种情况下，多重切被推到 Π中的最后一条规则之上，从而降低约化式中主要前提的高度。

结构情形：当 Π 以作用于切公式的结构收缩规则或弱化规则（$\mathsf{c}\mathcal{L}$ 或 $\mathsf{w}\mathcal{L}$）结束时，就属于这种情形。在这种情况下，多重切被推到 Π中的结构规则之上。例如，如果 Π以对切公式 A_1 的收缩结束，且其前提推导为 Π'，那么多重切 $mc(\Pi_1,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi)$约化为多重切 $mc(\Pi_1,\ \Pi_1,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi')$，随后再应用若干收缩规则。

左多重切情形：这是 Π_i 以多重切结尾的情形。在此情形下，如果 Π_i 约化为Π_i'，则通过将 Π_i 约化为 Π_i'来约化 Ξ。

右多重切情形：这是 Π以多重切结尾的情形；在此情形下，将 Π 中的多重切与 Ξ中的多重切合并，从而降低约化式中主要前提的高度。

左公理情形：左公理情形发生在 Π_i 以公理规则结尾时。在此情形下，多重切 $mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi)$约化为 $mc(\Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi)$，从而减少约化式中的切公式数量。

右公理情形：当 Π 以公理规则结尾时，就出现右公理情形。此时必有 $n = 1$，而多重切 $mc(\Pi_1,\ \Pi)$ 简单归约为 Π_1，其中名义项可能已被重命名。

6 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 的切消去

我们的目标现在是说明如何利用切割归约关系从推导中消去切。要做到这一点，关键在于证明切割归约关系在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$推导上是良基的。我们用一个中间概念来表达这一想法，即可正规化推导。证明每个推导都是可正规化的，就能使我们在本节末得出结论：可从 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中消去（多重）切规则。证明可正规化性的主要方法是运用可约推导这一概念；该方法受到 Tait 和 Martin-L¨of 的启发（见 [10, 16]），并由 McDowell 和 Miller 在 [11]中调整以适用于当前上下文。我们的证明主要遵循 [19] 和 [11], 中的论述，并结合 [15, 17]中对归纳的处理。

6.1 可正规化性

我们从以下归纳定义开始。这里请注意，所谓归纳定义，是指在指定操作下封闭的最小推导集（关于精确定义，见 [1] 中的定义 1.1.1）。

定义 3 （可正规化性）。 *$LD^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中可正规化推导的集合按如下方式归纳定义：*

1. 如果 Π 以多重切结尾，那么当每个约化式 Π' 都是可正规化的时， Π 就是可正规化的

2. 否则，当 Π 的每个前提推导都是可正规化的时， Π 就是可正规化的。

目标是证明 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中的每个推导都是可正规化的。为此，我们需要引入 γ-可约性这一中间概念，它通过对推导的层级 γ 进行超限递归来定义，其中该层级是一个序数。一个（基项）序列式 $\Gamma \vdash C$ 的推导的层级 定义为 $\mathrm{lvl}(C)$。因此请注意，如果 Π 归约为 Π'，那么 $\mathrm{lvl}(\Pi)$ $=\mathrm{lvl}(\Pi')$。此外，请注意，对层级的定义使得每条规则在其每个主要前提中的后件都是非递增的。对于 $\Delta\mathcal{R}$ 规则和 $\mu\mathcal{R}$ 规则，这一条件分别关键地依赖于弱分层条件和严格分层条件。最后，我们注意到，在下文中，以 $\supset\mathcal{R}$ 规则结束的推导的 γ-可约性，依赖于 α-可约性已经针对某个 $\alpha < \gamma$定义。这些观察保证了下面的定义是良定义的。

定义 4 (可约性)。 将推导 γ的可约性 Π 归纳地[2] 定义如下：

1. 如果 Π以多重切结尾，那么对于每个约化式 Π'，若 Π' 是 γ-可约的，则 Π 是 γ-可约的。

2. 如果 Π是

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi'\\ \Gamma, A \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \supset B}\,\supset\mathcal{R}\ ,$$

那么，如果$\mathrm{lvl}(\Pi) \leq \gamma$， Π' 是 γ-可约的，并且对于每个 α-可约的 $\dfrac{\begin{array}{c}\Upsilon\\ \Delta \vdash A\end{array}}{}$，其中$\alpha = \mathrm{lvl}(A)$，推导 $mc(\Upsilon, \Pi')$ 是 γ-可约的，则 Π 是 γ-可约的。

[2]按照 [1], 的记号，我们递归地定义一族算子 Φ_γ，其规则为 (1) $\{\Pi' \mid \Pi \to \Pi'\} \twoheadrightarrow \Pi$、(2) $\{\Pi'\} \cup \{mc(\Upsilon, \Pi') \mid \mathscr{R}_\alpha(\Upsilon)\} \twoheadrightarrow \Pi$，其中 $\mathscr{R}_\alpha(\Upsilon)$ 表示 Υ 是 α-可约的；以及 (3-5) $\{\Pi' \mid \Pi' \triangleright \Pi\} \twoheadrightarrow \Pi$，其中 $\Pi' \triangleright \Pi$ 表示 Π' 是 Π的主要前提推导，且 Π的所有次要前提推导都是可正规化的。 γ-可约推导的集合是对 Φ_γ封闭的最小集合。

3. 如果 Π是

$$\frac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ \Gamma\vdash A & \Gamma, B\vdash C\end{array}}{\Gamma, A\supset B\vdash C}\supset\mathcal{L},$$

那么，如果 Π_2 是 γ-可约的，且 Π_1 可正规化，则 Π 是 γ-可约的。

4. 如果 Π是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_{\vec{u}}\\ B\ S\ \vec{u}\vdash S\ \vec{u}\end{array}\right\}_{\text{ground}(\vec{u})}\qquad\begin{array}{c}\Pi'\\ \Gamma, S\ \vec{t}\vdash C\end{array}}{\Gamma, p\ \vec{t}\vdash C}\ \mu\mathcal{L}$$

那么，如果 Π' 是 γ-可约的，且每个 $\Pi_{\vec{u}}$ 都可正规化，则 Π 是 γ-可约的。

5. 如果 Π以任何其他规则结尾，那么，当其每个前提推导 Π' 都是 γ-可约的时， Π 是 γ-可约的。

如果存在某个 γ ，使得 Π 是 γ-可约的，我们就称推导 Π 是可约的 。下面的引理断言，可约性意味着可正规化性。由于可约性是对可正规化性的加强，因此通过对推导的 γ-可约性作直接归纳即可证明。

引理 4 (正规化引理)。 如果 Ξ 是 γ-可约的，那么 Ξ 可正规化。

6.2 可约性引理

现在我们陈述并概述一个证明，该引理是证明 $\mathbf{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 中推导可正规化性所必需的。我们首先为推导定义一种新的度量，它对于处理该引理的归纳情形至关重要。带有前提推导 $\{\Pi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 的推导 Π的指标 定义为

$$\text{Ind}(\Pi)=\begin{cases}\sup_{i\in\mathcal{I}}\{\text{Ind}(\Pi_i)\}+1 & \text{if } \Pi \text{ ends with } \mu\mathcal{L}\\ \sup_{i\in\mathcal{I}}\{\text{Ind}(\Pi_i)\} & \text{otherwise}\end{cases}$$

这表示 $\mu\mathcal{L}$ 在推导的一个分支中出现的最大次数。主要引理如下，其详细证明见附录 C。

引理 5 (可约性引理)。 给定 n 个推导 Π_1、.....、Π_n，使得 Π_i 是 α_i-可约的，并且任意一个推导 Π 的多重切

$$\frac{\begin{array}{ccccc}\Pi_1 & & \Pi_n & & \Pi\\ \Delta_1\vdash B_1 & \cdots & \Delta_n\vdash B_n & & \Gamma, B_1,\ldots,B_n\vdash C\end{array}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C}\ mc$$

我们将其记为 Ξ，它是$\text{lvl}(C)$-可约的。

证明。 我们首先对 (1)指标 Ind(Π)进行归纳，然后对 (2) 高度 ht(Π)进行归纳，最后对 (3) 切公式的数量 n进行从属归纳。

情形 $n=0$: 在此情形下， Ξ 归约为 Π，因此只需证明 Π 是可约的。我们使用以下技巧：对于任意高度小于 ht(Π) 的推导 Ψ ，归纳假设 2 适用于零元多重切 $mc(\Psi)$，由于它归约为 Ψ ，因此必有 Ψ 是可约的。随后，通过对 Π 的最后规则 Π进行分类讨论，证明其是可约的。

情形 $n > 0$：我们对 (4) α_i可约性进行从属归纳，Π_i针对 $i = 1 \ldots n$，并对 Ξ的归约进行分类讨论。我们将论证，这适用于第 5 节中所述的每一种情形。

本质情形：在这些情形中的每一种情形里，归约都会降低主要前提推导的高度 Π，从而可以应用归纳假设 2。下面以 $\wedge\mathcal{R}/\wedge\mathcal{L}i$ 情形为例进行说明：

如果 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{cc}\Pi_1^1 & \Pi_1^2 \\ \Delta_1 \vdash B_1^1 & \Delta_1 \vdash B_1^2\end{array}}{\Delta_1 \vdash B_1^1 \wedge B_1^2}\wedge\mathcal{R} \qquad \frac{\Pi'}{B_1^i, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\wedge\mathcal{L}i$$

那么，根据归纳假设 $mc(\Pi_1^i,\ \Pi_2,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi')$ 是可约的 2，因为 Π_1^i是可约的，且 $\mathsf{ht}(\Pi') < \mathrm{ht}(\Pi)$。

归纳情形：为了使该情形成立，我们首先注意到，归约会降低主要前提推导的高度 Π，因此根据归纳假设 2，只需证明：只要 $\mu(\Pi_i,\ \Pi_S)$ 是可约的，展开推导 Π_i 便是可约的。该步骤取决于证明：对于任意可约推导 Υ，$mc(\Upsilon,\ \textsc{Init})$ 是可约的，而这又关键取决于归纳假设 1。

左交换情形：在左交换归约的情形中，多重切被推到次前提 Π_i的最后规则之上。特别地，新的多重切涉及一个主要前提Π_i'，它属于 Π_i，并且由于 Π_i是可约的，该主要前提是可约的。因此，根据归纳假设 $mc(\Pi_1,\ \ldots\ldots,\ \Pi_i',\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi)$ 新的多重切是可约的 4。

右交换情形：在右交换归约的情形中，多重切被移到主要前提的最后规则之上 Π，因此主要前提的高度降低。于是，根据归纳假设 $\mathsf{多重割}(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi')$ 中的新多重切是可约的 2。

结构情形：在结构归约的情形中，主要前提的高度降低。因此，即使当 Π以收缩结束时，切公式的数量可能增加，我们仍可使用归纳假设2。

左多重切情形：与左交换情形类似，次前提 Π_i 归约为一个可约推导 Π_i'，因此，根据归纳假设 $\mathsf{多重割}(\Pi_1, \ldots, \Pi_i', \ldots, \Pi_n, \Pi)$ 中的约化式是可约的 4。

右多重切情形：在此情形中，主要前提 Π 中的多重切与 Ξ中的多重切合并，但由于主要前提推导的高度降低，可以应用归纳假设2，从而得到约化式的可约性。

左公理情形：在这种情形下，切公式的数量减少，从而我们可以应用归纳假设3。

右公理情形：在这种情形下，多重切 $\mathsf{多重割}(\Pi_1,\ \Pi)$ 会约化为对 Π_1 的名义重命名 Π_1'。由于重命名保留可约性，且 Π_1 可约，因此约化式也是可约的。

□

6.3 切割消去

现在我们继续　以说明如何从任意 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 推导中消去多重切规则。

推论 1. *LD* 中的每个推导 Π都可约。

证明. 考虑零元多重切 $mc(\Pi)$，由引理5可知它是可约的。由于 $mc(\Pi)$ 归约为 Π，因此 Π 是可约的。 □

引理 6 (范式引理)。 如果序列式 $\Gamma \vdash C$ 的推导 Π 可正规化，那么就$\hat{}$存在一个 $\Gamma \vdash C$的无切推导 Π，我们称之为 Π的范式。

证明。 根据可正规化性进行归纳。如果 Π 以一个切结束，首先注意，必然存在一个归约 $\Pi \to \Pi'$，而且 Π' 可正规化。根据归纳假设， Π' 有一个无切范式 $\hat{}\Pi'$，它也是 Π的无切范式。

如果 Π 以任何其他规则 $\circ$结束，那么它的每个前提推导

$$\left\{ \begin{array}{c} \Pi_i \\ \Gamma_i \vdash C_i \end{array} \right\}_{i \in \mathcal{I}}$$

$\hat{}$ 都是可规范化的，因此具有一个相同序列式的无切范式 $\{\Pi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$。由此可得，存在一个无切推导 Π，它由对前提推导 $\{\Pi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$应用 $\circ$ 得到。 □

由于 LD 中的每个推导μ^{∇}_{∞}根据推论1都是可约的，由引理 4可知，可约性蕴含可规范化性；而可规范化推导根据前一个引理具有无切范式，因此我们得到主定理

定理 1 （LD 的切可容许性μ^{∇}_{∞}）。 *LD*μ^{∇}_{∞} 中每个 *ground* 序列式 $\Gamma \vdash C$ 的推导，都存在一个相同序列式的无切推导。

证明。 根据前述观察，任何使用切的推导都是可规范化的，因此根据引理 6，它具有无切范式。 □

7 应用

现在，我们得到了切消去定理的以下重要推论。

7.1 一致性

推论 2 ($\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$ 的一致性)。 $LD^{\mu\nabla}_{\infty}$是一致的。

证明。 只需通过分类讨论注意到，不存在 $\vdash \bot$的无切推导。由于根据定理 1， $\vdash \bot$ 在 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中不可推导。 □

推论 3 ($\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 的一致性)。 $LD^{\mu\nabla}$ 是一致的。

证明。这由解释引理（引理3）以及 LD 的一致性μ^{∇}_{∞}。 □

7.2 证明搜索

切可容许性定理的一个重要推论如下。若一条规则的结论无切割可导性蕴含其各前提均具有无切割可导性，则称该规则为可逆的（或异步的）。此外，如果子句 $H \triangleq B$ 的子句头 H 无法与任何其他子句头 H'合一，则称该子句为可逆的。以下推论为 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$中的证明搜索过程提供完备性保证。

推论 4 (LD 的反演定理$^{\mu\nabla}_{\infty}$)。 逻辑 $LD^{\mu\nabla}_{\infty}$满足以下元理论性质：

1。规则 $\wedge\mathcal{R}$、 $\wedge\mathcal{L}*$、 $\vee\mathcal{L}$、$\supset\mathcal{R}$、$\forall\mathcal{R}$、 $\exists\mathcal{L}$、$\nabla\mathcal{R}$、$\nabla\mathcal{L}$、 $\Delta\mathcal{L}$和 $\mu\mathcal{R}$ 均可逆。

2. 如果子句$H \triangleq B$ 可逆，那么相应的 $\Delta\mathcal{R}$ 规则也可逆。

3. 当上下文为空时，我们可以得到规则$\vee\mathcal{R}$、 $\exists\mathcal{R}$和 $\Delta\mathcal{R}$的以下部分可逆性结果：

> ***(a)*** 如果 $\vdash A \vee B$ 有无切推导，那么 $\vdash A$ 或 $\vdash B$ 有无切推导。***(b)*** 如果 $\vdash \exists_\alpha x.C$ 有无切推导，那么对于某个$t \in$基项(α)， $\vdash C[t/x]$ 有无切推导。***(c)*** 如果定义 p有 $\vdash p\ \vec{t}$ 的无切推导，那么存在一个子句 $H \triangleq B$和一个公式 B'，使得定义$(H \triangleq B、\ p\ \vec{t}、\ \epsilon_\emptyset、\ B')$，且 $\vdash B'$有无切推导。

证明。 这实质上运用了切割可容许性。

对于（1），我们只证明 $\wedge\mathcal{R}$ 这一情形，因为其他情形都类似（除了 $\mu\mathcal{R}$，它需要借助中间定理 $\Gamma,\ B\ p\ \vec{t} \vdash C$蕴含 $\Gamma,\ p\ \vec{t} \vdash C$，见引理 12）。假设 $\Gamma \vdash A \wedge B$ 可导，则可得到以下推导：

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ \textsc{Init}}{A \wedge B \vdash A}\ \wedge\mathcal{L}1}{\Gamma \vdash A}\ mc \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\ \textsc{Init}}{A \wedge B \vdash B}\ \wedge\mathcal{L}2}{\Gamma \vdash B}\ mc$$

由于多重割 可以消去，存在 $\Gamma \vdash A$ 和 $\Gamma \vdash B$ 的无切割证明。

对于（2），首先假设 $A = H\rho$，且 $\Gamma \vdash A$ 可导。我们注意到，$\mathrm{defn}(H' \triangleq B', A, \theta, B_0)$ 成立的唯一可能是 $A\theta = H'\rho'$，其中某个 ρ' 满足条件，且 $B_0 = B'\rho'$。然而，这意味着$H'\rho' = A\theta = (H\rho)\theta$；由于 $H \triangleq B$ 可逆，除非 $H = H'$（且 $B = B'$），否则不可能成立。由引理 14， H 上的 L_λ 模式条件确保 ρ' 唯一，因此 $\rho' = \theta \circ \rho$，由此可得 $B_0 = (B'\rho') = (B\rho)\theta$，进而得到以下推导

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \dfrac{\left\{ \dfrac{}{B_0 \vdash (B\rho)\theta}\ \textsc{Init} \;\middle|\; \mathrm{defn}(H' \triangleq B', A, \theta, B_0) \right\}}{A \vdash B\rho}\ \Delta\mathcal{L}}{\Gamma \vdash B\rho}\ mc$$

由于切可被消去，因此 $\Gamma \vdash B\rho$ 具有无切推导。

对于（3），这可由对推导的最后规则进行分类讨论得出，而该规则只能是右引入规则。这并不需要切割可容许性，因此在$\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$中也同样成立。

□

我们注意到，该定理仅适用于无穷逻辑 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$，而不适用于 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$。要将该定理推广到 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$，需要先证明 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$ 的切消去定理，而这目前尚无法实现。

8 相关工作与未来工作

在这项工作中，我们展示了如何将逻辑 LD 扩展为一种包含归纳定义和 nabla 量化的新逻辑 LD $^{\mu\nabla}$，并证明了它的一致性。加入弱分层后，我们便能够使用常见的定义来推理计算机程序，例如逻辑关系。这项工作的最终目标是扩展作为 Abella 基础的逻辑 $\mathcal{G}$，使其支持范围更广的定义体。

朝着这一目标开展的另一项研究中，Baelde 和 Nadathur 开发了 μNJ 演算[3]，，它是模推演的扩展（例如参见 Dowek [5]），包含归纳定义和余归纳定义。他们的工作同样表明，这类定义是允许的，但采用的技术涉及在命题上定义重写系统。通过证明 μNJ 的强正规化，可以获得一致性。

然而，从 LD 的角度来看，这项工作还有若干更有前景的未来扩展。首先，尽管 μNJ 包含余归纳，但目前还不清楚如何在自然演绎的上下文中定义名义抽象；而我们认为，在 LD$^{\mu\nabla}$ 中加入余归纳和名义抽象，不会显著增加当前工作的复杂度。将这些特性加入逻辑，是充分证明扩展 Abella 证明助手合理性的必要步骤。

其次，我们希望针对目标扩展 $\mathcal{G}$证明一个切消去定理。由推论4 可知，切消去定理能让我们获得逻辑的一些理想性质。然而，目前我们只能为基逻辑 LD$^{\mu\nabla}_{\infty}$证明切消去，而无法为逻辑 LD$^{\mu\nabla}$证明。类似地，μNJ 在这方面也无济于事，因为自然演绎推导的结构与序列演算大不相同。

第三，我们设想扩展该逻辑，以允许高阶量化。一方面，这将使定理与定义的陈述具有大得多的一般性；另一方面，逻辑强度的提升将使我们能够证明高阶逻辑的一致性定理。就此而言，μNJ演算将重写引入系统，会影响对语法的内涵处理，而这种处理对于保持我们所期望的相等解释至关重要。在重写仅限于命题的一阶系统中，这并非迫在眉睫的问题。然而，对于高阶系统，这会带来进一步的复杂情况。

除这些关键研究方向之外，我们还设想未来工作的另外两种可能。首先，逻辑LD与LD$^{\mu\nabla}$ 都要求将定义子句$H \triangleq_{\mathcal{X}} B$ 限制为其中H 必须位于 L_λ 模式片段中的那些子句。我们认为这并非本质性限制，并且通过对基项 $\Delta\mathcal{L}$ 规则稍作修改，即可改写我们当前的证明以去除该限制。最后，我们希望最终将这项工作形式化。可以设想在我们正在定义的逻辑本身之中将这项工作形式化；而为了按我们所使用的方式定义可约性，这将需要一种与弱分层相容的归纳概念。请注意，`先验地，这不会造成G¨德尔式循环，因为定义逻辑并非单一逻辑，而是以一组定义为指标的逻辑族，其分层必须在元理论层面加以证明。

9 致谢

扩展 Tiu 工作的构想由我的导师 Gopalan Nadathur 提出并倡议。导师通过耐心讲解和多次讨论给予的指导，对本工作的开展至关重要。此外，本文件经导师全面审阅，导师提出的许多建议大大改进了本工作。最后，第 3.3 节中的这个反例出自 Nadathur；他找到了一种方法，消除了先前示例中关于不动点的一项假设。

参考文献

[1] P. Aczel。《归纳定义导论》。载于 J. Barwise 编，《数学逻辑手册》，《逻辑与数学基础研究》第 90 卷，第 739–782 页。爱思唯尔，1977 年。[2] D. Baelde、K. Chaudhuri、A. Gacek、D. Miller、G. Nadathur、A. Tiu 和 Y. Wang。Abella：一个用于关系规范推理的系统。《形式化推理杂志》，7(2):1–89，2014 年 1 月。[3] D. Baelde 和 G. Nadathur。结合模推演与不动点定义逻辑。载于*2012*年 *IEEE* 第 *27* 届年度计算机科学逻辑研讨会，第 105–114 页，2012年。[4] A. Church。简单类型论的一种表述。《符号逻辑杂志》，5(2):56–68，1940 年。[5] G. Dowek。模理论推演。载于《关于证明的一切：为所有人而作的证明》，奥地利维也纳，2014 年 7 月。[6] A. Gacek、D. Miller 和 G. Nadathur。结合泛型判断与递归定义。载于计算机科学逻辑会议，第 33–44 页。IEEE 计算机学会，2008 年。[7] A. Gacek、D. Miller 和 G. Nadathur。名义抽象。《信息与计算》，209(1):48–73，2011 年 1 月。[8] J.-Y. Girard、P. Taylor 和 Y. Lafont。《证明与类型》。剑桥大学出版社，1989 年。[9] R. Harper。《编程语言实用基础》。剑桥大学出版社，美国，第 2 版，2016年。[10] P. Martin-L¨of。迭代归纳定义直觉主义理论的主定理。载于第二届斯堪的纳维亚逻辑研讨会论文集，《逻辑与数学基础研究》第 63 卷，第 179–216 页。北荷兰出版社，1971 年。[11] R. McDowell 和 D. Miller。带定义与归纳的逻辑的切消去。《理论计算机科学》，232:91–119，2000 年。[12] D. Miller。混合前缀下的合一。《符号计算杂志》，14(4):321–358，1992 年。[13] D. Miller 和 G. Nadathur。《高阶逻辑编程》。剑桥大学出版社，2012年。[14] D. Miller 和 A. Tiu。泛型判断的证明论。《ACM 计算逻辑汇刊》，6(4):749–783，2005 年。[15] A. Momigliano 和 A. Tiu。序列演算中的归纳与余归纳。载于《类型会议》，《计算机科学讲义》第 3085 卷，第 293–308 页。施普林格，2004 年。[16] W. W. Tait。有限类型泛函的内涵解释 I。《符号逻辑杂志》，32(2):198–212，1967 年。[17] A. Tiu。《用于逻辑规范推理的逻辑框架》。博士论文，宾夕法尼亚州立大学，2004 年 5 月。

[18] A. Tiu. 关于泛型判断推理的逻辑. 理论计算机科学电子笔记, 174(5):3–18, 2007年6月.[19] A. Tiu. 定义逻辑中的分层. 载于 B. Gramlich、D. Miller 与 U. Sattler 编,自动推理, 第544–558页, 柏林, 海德堡, 2012年. Springer Berlin Heidelberg.[20] Y. Wang 与 G. Nadathur. 一种面向函数式程序经验证变换的高阶抽象语法方法. 载于 P. Thiemann 编, 编程语言与系统, 第752–779页, 柏林, 海德堡, 2016年. Springer Berlin Heidelberg.

A 引理的证明

A.1 重命名引理

记 $A \approx A'$，如果存在置换 $\pi \in$Perm 使得 $A' = A[\pi]$。注意这是一个等价关系。更一般地，称 $A_1, \ldots, A_n \approx A'_1, \ldots, A'_n$，如果对每个 i 都有 $A_i \approx A'_i$。我们现在定义 $\Pi \sim \Pi'$，如果以下两个条件均成立

1. Π 和 Π' 分别以序列式 $\Gamma \vdash C$ 和 $\Gamma' \vdash C'$ 结束，且 $\Gamma \approx \Gamma'$ 和 $C \approx C'$。
2. Π 和 Π' 以相同的规则结束，并且对 Π的所有前提推导 $\{\Pi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 以及 $\{\Pi'_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 的 Π'，$\Pi_i \sim \Pi'_i$ 。

特别地，我们注意到，如果 $\Pi \sim \Pi'$，那么 ht(Π) = ht(Π')。此外，$\sim$ 是一个等价关系。

引理 7 (重命名引理)。 设 Π 是 $B_1, \ldots, B_n \vdash C$的一个推导，并假设 $B_i \approx B'_i$和 $C \approx C'$，那么存在一个 $B'_1, \ldots, B'_n \vdash C'$ 的推导 Π'，使得 $\Pi \sim \Pi'$。

证明。 对推导 Π进行归纳。我们只讨论多重割、 Ax和 $\nabla\mathcal{R}$这几种情况。

Ax：假设 Π 以 Ax结尾，特别地，对某个 i有 $C \approx B_i$ 。则由传递性， $C' \approx C \approx B_i \approx B'_i$，因此 Π' 仍为 Ax。

多重割：假设 Π 以多重割结尾，其切公式为 B_1，……， B_n，前提推导为 Π_1，……， Π_n 和Π。则由归纳假设，存在 $\Delta' \vdash B_i$的推导 Π'_i 以及 Γ'， B_1，……， $B_n \vdash$的推导 $\Pi' C'$ ，因为 $\approx$ 是自反的。因此 Π' 是多重割 ，具有那些前提推导以及相同的切公式。

$\nabla\mathcal{R}$：假设 Π以 $\nabla\mathcal{R}$结尾，引入公式 $\nabla x.C$。则前提推导 Π_1是 $\Gamma \vdash C[n/x]$ 的一个推导，其中 $n \notin$ supp(C)。假设 $n' \notin$ supp(C')，则由归纳假设，存在 $\Gamma' \vdash C'[n'/x]$的推导 Π'_1 ，因此 Π' 仍为 $\nabla\mathcal{R}$。 □

下一个引理表明，重命名关系对于高度、层级、归约、可正规化性和可约性具有同余性。

引理8 (重命名同余引理)。 我们对重命名关系 $\Xi \sim \Xi'$ 作如下观察：

1. 若 $\Pi \sim \Pi'$，则 ht(Π) =ht(Π') 且 lvl(Π) = lvl(Π')。

2. 若 $\Pi \to \Xi$，则对于任意满足 $\Pi \sim \Pi'$ 的 Π'，存在满足 $\Pi' \to \Xi'$ 且 $\Xi \sim \Xi'$ 的 Ξ' 。

3. 如果 Π 可正规化且 $\Pi \sim \Pi'$，那么 Π' 可正规化。

4. 如果 Π 是 γ-可约的且 $\Pi \sim \Pi'$，那么 Π' 是 γ-可约的。

证明。 我们省略此证明的细节。(1) 由对推导高度的归纳可知显然成立。(2) 通过对推导高度进行归纳，并对归约关系进行分类讨论得证。(3) 通过对可正规化性进行归纳，并结合第 (2) 部分的结果得证。(4) 先对层级 γ 进行超限归纳，再对 γ-可约性进行从属归纳，并结合第 (2) 和第 (3) 部分的结果得证。 □

A.2 基化引理

引理 2 (Grounding 引理)。 若 $\mathcal{Y}; \Gamma \vdash C$ 可在 $LD^{\mu\nabla}$中推出，则对任意 $\mathcal{Y}$-基化替换 $\delta : \emptyset \to \mathcal{Y}$，*ground* 序列 $\Gamma\delta \vdash C\delta$ 可在 $LD^{\mu\nabla}_{\infty}$中推出。

证明。 证明通过对 $\mathcal{X}; \Gamma \vdash C$ 的推导高度进行归纳完成。注意，我们不要求 $\mathsf{supp}(\delta)$ 为空。除以下规则外，对所有规则而言证明都很直接（我们省略对称情形 $\exists\mathcal{L}$、 $\exists\mathcal{R}$和 $\nabla\mathcal{L}$）：

$\forall\mathcal{R}$: 假设该推导以 $\forall\mathcal{R}$ with $C = \forall_\alpha x.D$ 结束。给定 $y \notin \mathcal{Y}$ and $\vec{n} = \mathsf{supp}(D)$，假设 δ 是一个 $\mathcal{Y}$-基化替换。由于可以在 $\forall_\alpha x.D$ 中重命名 x，我们假定$x \notin \mathcal{Y}$。现在，对每个 $t \in \mathsf{ground}(\alpha)$，注意到

$$(D[y\ \vec{n}/x])[\delta, (\lambda\vec{x}.t)/y] = (D[\delta, y\ \vec{n}/x])[\lambda\vec{x}.t/y] = (D[\delta, x/x])[t/x].$$

由于 $\delta' = [\delta,(\lambda\vec{x}.t)/y]$ 是一个 $\mathcal{Y},\ y$-基化替换，我们可以将其应用于前提$\mathcal{Y},\ y$；根据归纳假设，$\Gamma \vdash D[y\ \vec{n}/x]$ 可得到 $\Gamma\delta' \vdash (D[\delta, x/x])[t/x]$ 的基项推导，如下所示

$$\frac{\mathcal{Y}, y; \Gamma \vdash D[y\ \vec{n}/x]}{\mathcal{Y}; \Gamma \vdash \forall_\alpha x.D}\ \forall\mathcal{R} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\{\Gamma\delta' \vdash (D[\delta, x/x])[t/x])\}_{t\in\mathsf{ground}(\alpha)}}{\Gamma\delta \vdash (\forall_\alpha x.D)\delta}\ \forall\mathcal{R}$$

这里注意到 $(\forall_\alpha x.D)\delta = \forall_\alpha x.(D[\delta, x/x])$。

$\forall\mathcal{L}$: 假设该推导以 $\forall\mathcal{L}$ with $\Gamma = \Gamma',\ \forall_\alpha x.B$ 结束，并假设 $t : \alpha$ 是上下文 $\mathcal{Y}$ 中的项。由于可以在 $\forall x.B$ 中重命名 x，我们假定 $x \notin \mathcal{Y}$。我们将基替换 δ应用于前提，并对其使用归纳假设，而且由于

$$(B[t/x])\delta = B[\delta, t\delta/x] = (B[\delta, x/x])[t\delta/x],$$

我们得到 $\Gamma\delta,(\forall_\alpha x.B)\delta \vdash C\delta$ 的基项推导如下:

$$\frac{\mathcal{Y}; \Gamma', B[t/x] \vdash C \qquad \mathcal{Y} \vdash t : \alpha}{\mathcal{Y}; \Gamma', \forall_\alpha x.B \vdash C}\ \forall\mathcal{L} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma'\delta, (B[\delta, x/x])[t\delta/x] \vdash C\delta \qquad \vdash t\delta : \alpha}{\Gamma'\delta, (\forall_\alpha x.B)\delta \vdash C\delta}\ \forall\mathcal{L}$$

其中我们注意到$(\forall_\alpha x.B)\delta = \forall_\alpha x.(B[\delta, x/x])$。

$\Delta\mathcal{L}$: 假设推导以原子 A 上的 $\Delta\mathcal{L}$ 结束，其中 $\Gamma = \Gamma',\ A$。显然，若 $\mathsf{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B,\ A\delta,\ \epsilon_\emptyset,\ B')$，则 $\mathsf{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B,\ A,\ \delta,\ B')$；此外，$\mathsf{range}(\delta) = \emptyset$，因为 δ 是一个基替换。因此，对基前提 $\emptyset$ 应用归纳假设，可得到下方前提 $\Gamma'\delta,\ B' \vdash C\delta$ 的一个 $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}_{\infty}$推导；$\Gamma'\delta,\ B' \vdash C\delta$ 使用空 grounding 代换。

$$\frac{\{\mathcal{Z};\Gamma'\theta,B'\vdash C\theta \mid \mathrm{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B,A,\theta,B') \text{ and } \mathcal{Z}=\mathrm{range}(\theta)\}}{\mathcal{Y};\Gamma',A\vdash C}\,\Delta\mathcal{L} \quad \rightsquigarrow$$

$$\frac{\{\Gamma'\delta,B'\vdash C\delta \mid \mathrm{defn}(H \triangleq_{\mathcal{X}} B,A\delta,\epsilon_\emptyset,B')\}}{\Gamma'\delta,A\delta\vdash C\delta}\,\Delta\mathcal{L}$$

我们注意到，这会产生从 $\Delta\mathcal{L}$剪去分支的效果。

$\Delta\mathcal{R}$：假设推导以 $\Delta\mathcal{R}$ with $C=A$ for an atom A 结束。注意，如果 $A=H\rho$，那么$A\delta=(H\rho)\delta$，因此 defn($H \triangleq B$, A, $\epsilon_\emptyset$, B') 蕴含 defn($H \triangleq B$, $A\delta$, $\epsilon_\emptyset$, $B'\delta$)，因此将归纳假设应用于前提 $\mathcal{Y};\Gamma\vdash B'$，并使用基替换 δ，我们得到

$$\frac{\mathcal{Y};\Gamma\vdash B'}{\mathcal{Y};\Gamma\vdash A}\,\Delta\mathcal{R} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma\delta\vdash B'\delta}{\Gamma\delta\vdash A\delta}\,\Delta\mathcal{R}$$

$\nabla\mathcal{R}$：假设推导以 $\nabla\mathcal{R}$ with $C=\nabla_\alpha x.D$ 结束。由于 x可以在$\nabla_\alpha x.D$中重命名，我们可以假设 $x\notin\mathcal{Y}$。现在，由于 δ 可能具有非空支撑集，我们先选取 $m\notin\mathrm{supp}(D[\delta,x/x])$。然后，我们对前提 7 中的 $\mathcal{Y};\Gamma\vdash D[n/x]$ 应用重命名引理（ $\mathcal{Y};\Gamma[m/n]\vdash D[m/x]$ ），从而得到一个推导，其高度与原前提推导相同。因此，我们可以将其与基替换 δ 一起应用于归纳假设，从而得到基前提 $\Gamma[m/n]\vdash D[\delta,x/x][m/x]$，进而得到

$$\frac{\mathcal{Y};\Gamma\vdash D[n/x]}{\mathcal{Y};\Gamma\vdash\nabla_\alpha x.D}\,\nabla\mathcal{R}\quad n\notin\mathrm{supp}(D) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma[m/n]\delta\vdash(D[\delta,x/x])[m/x]}{\Gamma[m/n]\delta\vdash(\nabla_\alpha x.D)\delta}\,\nabla\mathcal{R}\quad m\notin\mathrm{supp}(D[\delta,x/x])$$

其中我们注意到（$\nabla_\alpha x.D$）$\delta=\nabla_\alpha x.$（$D[\delta,x/x]$）。第二次应用重命名引理（7）给出了 $\Gamma\delta\vdash$（$\nabla_\alpha x.D$）δ的基项推导。

$\mu\mathcal{L}$：设该推导以 $\mu\mathcal{L}$ 结束，且带有 $\Gamma=\Gamma'$，$p\ \vec{t}$，对应于归纳定义 $p\ \vec{x}\stackrel{\mu}{=}B\ p\ \vec{x}$。这里我们必须首先对 $\vec{x}$ 的推导应用归纳假设；$B\ S\ \vec{x}\vdash S\ \vec{x}$ 对每个 $\vec{t}\in$ 基项（$\vec{\alpha}$）使用$\vec{x}$-基化替换 $[\vec{t}/\vec{x}]$，然后再对前提 $\mathcal{X}$；Γ，$S\ \vec{t}\vdash C$使用基替换 δ 应用归纳假设，从而得到

$$\frac{\vec{x};B\ S\ \vec{x}\vdash S\ \vec{x}\qquad \mathcal{X};\Gamma',S\ \vec{t}\vdash C}{\mathcal{X};\Gamma',p\ \vec{t}\vdash C}\,\mu\mathcal{L} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\{B\ S\ \vec{t}\vdash S\ \vec{t}\}_{\vec{t}\in\mathrm{ground}(\vec{\alpha})}\qquad \Gamma'\delta,S\ \vec{t}\delta\vdash C\delta}{\Gamma'\delta,(p\ \vec{t})\delta\vdash C\delta}\,\mu\mathcal{L}$$

□

A.3 展开引理

我们首先给出一个技术性定义。给定一条推理规则，若它是右引入规则，则其所有前提都称为主要前提。若它是左引入规则或多重切，则只有那些与其结论具有相同后件的前提才是主要前提。所有其他前提都是次要前提。仅有的带有次要前提的规则是 $\supset\mathcal{L}$、$\mu\mathcal{L}$ 和多重割，它们往往需要特别注意。

引理9。假设 $p\ \vec{x}\stackrel{\mu}{=}B\ p\ \vec{x}$ 是一个归纳定义，那么对于 Ξ 的任意推导 $\Delta\vdash C\ p$，若 p 不出现在 C 中，且仅以正方式出现在 $C\ p$中（即不出现在蕴含的左侧），则存在一个 μ（Ξ,Π_S）的推导 $\Delta\vdash C\ S$。

证明。对推导 Ξ的高度进行归纳。若 $C\ p = C\ (\lambda\vec{x}.\top)$（即 $C\ p$ 不依赖于 p），则 $\mu(\Xi,\ \Pi_S) := \Xi$。若 Ξ 以除 Ax、$\supset\mathcal{R}$或 $\mu\mathcal{R}$之外的任意规则（包括多重切）结束，则通过展开每个主要前提推导得到 $\mu(\Xi,\ \Pi_S)$。例如，

$\supset\mathcal{L}$：若 Ξ 以 $\supset\mathcal{L}$结尾，则 $\mu(\Xi,\ \Pi_S)$按如下方式得到

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Xi_1 & \Xi_2\\ \Delta \vdash D_1 & \Delta, D_2 \vdash C\ p\end{array}}{\Delta, D_1 \supset D_2 \vdash C\ p}\supset\mathcal{L} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{cc}\Xi_1 & \mu(\Xi_2, \Pi_S)\\ \Delta \vdash D_1 & \Delta, D_2 \vdash C\ S\end{array}}{\Delta, D_1 \supset D_2 \vdash C\ S}\supset\mathcal{L}$$

我们必须特别处理 Ξ 以 Ax、$\supset\mathcal{R}$或 $\mu\mathcal{R}$结尾的情况。

Ax：若 Ξ 以 Ax 在不动点 p上结尾，则 $\mu(\Xi,\ \Pi_S)$按如下方式得到

$$\dfrac{}{p\ \vec{t} \vdash (p\ \vec{t})[\pi]}\ \text{Ax} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^{\vec{u}}\\ B\ S\ \vec{u} \vdash S\ \vec{u}\end{array}\right\}_{\vec{u}\in\text{ground}(\alpha)} \qquad \dfrac{}{S\ \vec{t} \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ \textsc{Init}}{p\ \vec{t} \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ \mu\mathcal{L}$$

$\supset\mathcal{R}$：若 Ξ 以 $\supset\mathcal{R}$结尾，则 $\mu(\Xi,\ \Pi_S)$按如下方式得到

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta, C_1 \vdash C_2\ p\end{array}}{\Delta \vdash C_1 \supset C_2\ p}\supset\mathcal{R} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mu(\Xi', \Pi_S)\\ \Delta, C_1 \vdash C_2\ S\end{array}}{\Delta \vdash C_1 \supset C_2\ S}\supset\mathcal{R}$$

这里注意，由于 p只以正向出现于 $C\ p$中，p可能不会出现在 C_1中。

$\mu\mathcal{R}$：若 Ξ 以 $\mu\mathcal{R}$ 作为不动点 p结尾，则 $\mu(\Xi,\ \Pi_S)$按如下方式得到

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta \vdash B\ p\ \vec{t}\end{array}}{\Delta \vdash p\ \vec{t}}\ \mu\mathcal{R} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{cc}\mu(\Xi', \Pi_S) & \Pi_S^{\vec{t}}\\ \Delta \vdash B\ S\ \vec{t} & B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}}{\Delta \vdash S\ \vec{t}}\ mc$$

请注意，此处必须使用关于归纳定义是（严格）分层的约束，该约束保证 p 仅在 $B\ p\ \vec{t}$中正向出现，从而使我们能够应用归纳假设。

□

A.4 规范化引理

引理 4（正规化引理）。若 Ξ 是 γ-可约的，则 Ξ 可正规化。

证明。我们对 Ξ的 γ-可约性进行归纳。

情形1：设 Ξ是一个多重切，其约化式 Ξ'是 γ-可约的。根据归纳假设，Ξ' 可正规化，因此 Ξ 可正规化。

情形2：假设 Ξ 以 $\supset\mathcal{R}$ 结束，并引入公式 $A \supset B$。根据定义，Ξ 具有 γ-可约的前提推导 Π'，因此根据归纳假设，Π' 是可正规化的，从而 Ξ 也是可正规化的。

情形 3：假设 Ξ 以 $\supset\mathcal{L}$ 结束，并带有前提推导 Π_1 和 Π_2。根据定义， Π_1 已经是可正规化的。同样， Π_2 是 γ-可约的，因此根据归纳假设， Π_2 是可正规化的，从而 Ξ 也是可正规化的。

情形 4：假设 Ξ 以 $\mu\mathcal{L}$ 结束，且其次要前提推导为 $\{\Pi_{\vec{u}}\}_{\text{ground}(\vec{u})}$ ，主要前提推导为 Π'，那么 $\Pi_{\vec{u}}$ 已经可正规化，并且 Π' 是 γ-可约的。根据归纳假设可得 Π' 可正规化，因此 Ξ可正规化。

情形 5：假设 Ξ 以任何其他规则结束，那么它的每个前提 Π_i 都是主要前提，且是 γ-可约的，因此根据归纳假设可正规化。由此可得 Ξ 可正规化。

□

A.5 展开推导的可约性

下面的引理表明，展开操作 $\mu(\Pi, \Pi_S)$ 与归约关系交换。本节的结果与 [17]中的结果非常接近。

引理 10 (展开交换引理)。 假设 $\Pi_S^{\vec{u}}$ 是归纳定义谓词 p的推导族，其中 $B\ S\ \vec{u} \vdash S\ \vec{u}$，那么对于任意推导 $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$和 Π，若 Π 不以 Ax 或 $\mu\mathcal{R}$ 结束，且其后件为 $p\ \vec{t}$，则 $\mu(mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi)\ \Pi_S) \to \Psi$ 当且仅当存在 Ψ' 使得 $\Psi \sim \mu(\Psi', \Pi_S)$ 并且 $mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi) \to \Psi'$。

证明。 这必须通过对切割归约 $\mu(mc(\Pi_1, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi)\ \Pi_S) \to \Psi$ 进行分类讨论来完成。请注意，除了 Π 以 $\mu\mathcal{R}$ 或 Ax 结束且后件为 $p\ \vec{t}$的情形外，展开的定义就是对主要前提推导进行展开。这意味着，除了右交换情形和右公理情形（-/$\mu\mathcal{R}$）与（-/Ax）之外，对每种情形都可以用非常机械的方式检验该引理。

□

下一个引理刻画了展开推导可约的充分条件。

引理 11 （展开推导的可归约性）。 给定一个归纳定义 $p\ \vec{x} \stackrel{\mu}{=} B\ p\ \vec{x}$、一个与 p 类型相同的归纳不变量 S，以及一个由推导 $B\ S\ \vec{u} \vdash S\ \vec{u}$ 组成的推导族 $\Pi_S^{\vec{u}}$，对任意基项 $\vec{u}$，设

1. 每个推导 Π_S^u 都可正规化。

2. 对于任意可约推导 Υ，该推导

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Upsilon & \Pi_S^{\vec{t}} \\ \Delta \vdash B\ S\ \vec{t} & B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}}{\Delta \vdash S\ \vec{t}}\ mc$$

是可约的。

3. 对于任意公式 C 和任意可约的 Υ，该推导

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Upsilon & \\ \Delta \vdash C & \dfrac{}{C \vdash C[\pi]}\ \textsc{Init}\end{array}}{\Delta \vdash C[\pi]}\ mc$$

是可约的。

那么，对于任意 α-可约推导 Ξ ，若 p 仅以正形式出现在其结论中，则展开 μ（Ξ, Π_S）是可约的。

证明。我们首先对 α 作超限归纳，然后对 Ξ 的 α-可约性作归纳，最后根据 Ξ 的最后规则进行分类讨论。若 Ξ 以除 Ax、$\supset\mathcal{R}$、$\mu\mathcal{R}$ 或多重割之外的任何规则结束，请回想一下，$\mu(\Xi, \Pi_S)$ 是通过展开每个主要前提推导得到的。例如，

$\supset\mathcal{L}$：若 Ξ 以 $\supset\mathcal{L}$ 结束，且其前提推导为 Ξ_1 和 Ξ_2，则 $\mu(\Xi, \Pi_S)$ 是

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Xi_1 & \mu(\Xi_2, \Pi_S) \\ \Delta \vdash D_1 & \Delta, D_2 \vdash C\ S\end{array}}{\Delta, D_1 \supset D_2 \vdash C\ S}\ \supset\mathcal{L}$$

如果 $\mu(\Xi_2, \Pi_S)$ 是 β-可约的，且 Ξ_1 可正规化，那么它就是 β-可约的。由于 Ξ 是 α-可约的，因此 Ξ_1 可正规化，且 Ξ_2 是 α-可约的；于是根据第二归纳假设可知，$\mu(\Xi_2, \Pi_S)$ 是 β-可约的，正如所需。更一般地，主要前提推导的 β-可约性由第二归纳假设推出，而次要前提推导的可正规化性则由 Ξ 的 α-可约性推出。

现在我们特别处理 Ax、$\supset\mathcal{R}$、$\mu\mathcal{R}$ 和 多重割 的情形。

Ax：假设 Ξ 是 Ax，那么 $\mu(\Xi, \Pi_S)$ 是

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^{\vec{u}} \\ B\ S\ \vec{u} \vdash S\ \vec{u}\end{array}\right\}_{\vec{u} \in \mathrm{ground}(\alpha)} \qquad \dfrac{}{S\ \vec{t} \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ \textsc{Init}}{p\ \vec{t} \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ \mu\mathcal{L}$$

它是 β-可约的，因为 $\Pi_S^{\vec{u}}$ 根据假设是可正规化的（1），并且 Init是 α-可约的，因为它是无切的。

$\supset\mathcal{R}$：假设 Ξ 以 $\supset\mathcal{R}$ 规则结尾，前提推导为 Ξ'，末端序列为 $\Gamma \vdash C_1 \supset C_2\ p$，那么 $\mu(\Xi, \Pi_S)$ 是

$$\dfrac{\mu(\Xi', \Pi_S)}{\Gamma, C_1 \vdash C_2\ p}{\Gamma \vdash C_1 \supset C_2\ p}\ \supset\mathcal{R}$$

现在假设 $\alpha_1 = \mathrm{lvl}(C_1)$ 且 $\alpha_2 = \mathrm{lvl}(C_2\ p)$，那么根据 Ξ 的 α-可约性，我们知道 Ξ' 是 α_2-可约的。因此，如果 $\alpha_2 = \alpha$，那么根据第二归纳假设，$\mu(\Xi', \Pi_S)$ 是可约的。如果 $\alpha_2 < \alpha$ ，那么根据第一归纳假设，$\mu(\Xi', \Pi_S)$ 是可约的。最后，我们知道对于任意 α_1-可约的 Υ，推导

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Upsilon & \Xi' \\ \Delta \vdash C_1 & \Gamma, C_1 \vdash C_2\ p\end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash C_2\ p}\ mc$$

是 α_2-可约的。我们希望证明 $mc(\Upsilon, \mu(\Xi', \Pi_S))$ 是可约的。若 $\alpha_2 < \alpha$，则应用第一归纳假设可知 $\mu(mc(\Upsilon, \Xi')\ \Pi_S) = mc(\Upsilon, \mu(\Xi', \Pi_S))$ 是可约的。若 $\alpha_2 = \alpha$，则由第二归纳假设可知 $\mu(mc(\Upsilon, \Xi')\ \Pi_S) = mc(\Upsilon, \mu(\Xi', \Pi_S))$ 是可约的。

$\mu\mathcal{R}$：若 Ξ 以 $\mu\mathcal{R}$ 结尾，且其前提推导为 Ξ'，则 $\mu(\Xi, \Pi_S)$ 是

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mu(\Xi', \Pi_S) & \Pi_S^t \\ \Gamma \vdash B\ S\ \vec{t} & B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}}{\Gamma \vdash S\ \vec{t}}\ mc$$

根据引理的假设（2）可约的 $\mu(\Xi',\ \Pi_S)$ 可约。若 $\mathbf{lvl}(B\ S\ \vec{t}) < \mathrm{lvl}(S\ \vec{t})$，则这由第一个归纳假设得出；否则，$\mathbf{lvl}(B\ S\ \vec{t}) = \mathrm{lvl}(S\ \vec{t})$，结论由第二个归纳假设得出。

多重切：设 Ξ 是一个多重切，其次要前提为 $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$，主要前提为 Ξ'，末端序列为 $\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\ p$。我们先假设主要前提 Ξ' 不以 Ax 或 $\mu\mathcal{R}$ 结尾。现在设 $\mu(\Xi, \Pi_S) \to \Psi$，那么根据引理 10，存在 Ψ' 使得 $\Psi \sim \mu(\Psi', \Pi_S)$，且 $\Xi \to \Psi'$。特别地，根据归纳假设，$\mu(\Psi', \Pi_S)$ 可约，这意味着 $\mu(\Xi, \Pi_S)$ 可约。

现在必须考虑剩余的情形：Ξ' 以 Ax或 $\mu\mathcal{R}$结尾，此时$C\ p = (p\ \vec{t})[\pi]$。

若 Ξ' 以 Ax结尾：假设 Ξ 是

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \\ \Delta_1 \vdash p\ \vec{t} & \dfrac{}{p\ \vec{t} \vdash (p\ \vec{t})[\pi]}\ \textsc{Ax}\end{array}}{\Delta_1 \vdash (p\ \vec{t})[\pi]}\ mc$$

它可约化为一个推导 Π_1'，其中有 $\Pi_1' \sim \Pi_1$。根据假设，Π_1'（因此 Π_1 根据引理8）是α-可约的，而第二归纳假设表明 μ（Π_1，Π_S）是可约的。现在 μ（Ξ，Π_S）如下

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \left\{\begin{array}{c}\Pi_S^{\vec{u}} \\ B\ S\ \vec{u} \vdash S\ \vec{u}\end{array}\right\}_{\vec{u} \in \mathrm{ground}(\alpha)} \qquad \dfrac{}{S\ \vec{t} \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ \textsc{Init} \\ \Delta_1 \vdash p\ \vec{t} & p\ \vec{t} \vdash (S\ \vec{t})[\pi]\ \mu\mathcal{L}\end{array}}{\Delta \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ mc$$

其自身可进一步约化为

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mu(\Pi_1, \Pi_S) & \\ \Delta_1 \vdash S\ \vec{t} & \dfrac{}{S\ \vec{t} \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ \textsc{Init}\end{array}}{\Delta_1 \vdash (S\ \vec{t})[\pi]}\ mc$$

根据假设，它是可约的（3）。

若 Ξ' 以 $\mu\mathcal{R}$结尾：假设 Ξ 是

$$\dfrac{\begin{array}{ccccc}\Pi_1 & & \Pi_n & & \Xi' \\ \Delta_1 \vdash B_1 & \cdots & \Delta_n \vdash B_n & & \dfrac{\Gamma, B_1, \ldots, B_n \vdash B\ p\ \vec{t}}{\Gamma, B_1, \ldots, B_n \vdash p\ \vec{t}}\ \mu\mathcal{R}\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash p\ \vec{t}}\ mc$$

它归约为 $\mu\mathcal{R}(mc(\Pi_1, \ldots\ldots, \Pi_n, \Xi'))$。由于 Ξ 是 α-可约的，因此前提推导 $mc(\Pi_1, \ldots\ldots, \Pi_n, \Xi')$ 必定是 α- 可约的。现在，展开 $\mu(\Xi, \Pi_S)$ 就是多重切

$$mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \mu(\mu\mathcal{R}(\Xi'), \Pi_S)) = mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, mc(\mu(\Xi', \Pi_S), \Pi_S^t))$$

归约为

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \quad \cdots \quad \Pi_n \quad \mu(\Xi', \Pi_S)}{\Delta_1 \vdash B_1 \quad \cdots \quad \Delta_n \vdash B_n \quad B_1, \ldots, B_n, \Gamma \vdash B\ S\ \vec{t}}\, mc \qquad \dfrac{\Pi_S^{\vec{t}}}{B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash S\ \vec{t}}\, mc \qquad (\star)$$

现在，由于 $mc(\Pi_1, \ldots\ldots, \Pi_n, \Xi')$ 是 α-可约的，根据我们的第二归纳假设可知，

$$\mu(mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Xi'), \Pi_S) = mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \mu(\Xi', \Pi_S))$$

是可约的，因此根据假设（2），上方的多重切（$\star$）是可约的。由此可知，$\mu(\Xi, \Pi_S)$ 是可约的，因为它唯一的归约是可约的。 □

B 切割归约

如果 $n = 0$, Ξ 归约为前提推导 Π。

对于 $n > 0$，我们通过对 Π 的最后规则进行分类讨论来指定归约关系：

- 如果 Π 以引入切公式 B_i 的非结构左规则结束（即不是 $\mathsf{c}\mathcal{L}$ 或 $\mathsf{w}\mathcal{L}$），则根据 Π_i 的最后规则可分为以下子情形：

  – 关键情形：这是指 Π_i 以右规则结束的情形。– 归纳情形：这是指 Π以 $\mu\mathcal{L}$结束的情形。– 左交换情形：这是指 Π_i 以左规则结束的情形。– 左公理情形：这是指 Π_i 以公理规则结束的情形。– 左多重切情形：这是指 Π_i 以多重切结束的情形。

- 右交换情形：这是指 Π 以作用于非切公式的公式上的规则结束的情形。

- 结构情形：这是指 Π 以作用于切公式的结构规则（$\mathsf{c}\mathcal{L}$ 或 $\mathsf{w}\mathcal{L}$）结束的情形。

- 右公理情形：这是指 Π 以公理规则结束的情形。

- 右多重切情形：这是指 Π 以多重切结束的情形。

B.1 关键情形：

这指的是 Π 以主左规则结束，而 Π_1 以（主）右规则结束的情况。

$\wedge\mathcal{R}/\wedge\mathcal{L}i$：如果 Π_1 和 Π 是

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1^1 \qquad \Pi_1^2}{\Delta_1 \vdash B_1^1 \qquad \Delta_1 \vdash B_1^2}\, \wedge\mathcal{R}}{\Delta_1 \vdash B_1^1 \wedge B_1^2} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi'}{B_1^i, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\, \wedge\mathcal{L}i}{B_1^1 \wedge B_1^2, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}$$

那么 Ξ可约化为 $mc(\Pi_1^i, \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi')$。

$\vee\mathcal{R}i/\vee\mathcal{L}$：如果 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B_1^i\end{array}}{\Delta_1 \vdash B_1^1 \vee B_1^2}\vee\mathcal{R}i \qquad \frac{\begin{array}{cc}\Pi^1 & \Pi^2\\ B_1^1, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C & B_1^2, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{B_1^1 \vee B_1^2, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\vee\mathcal{L}$$

那么 Ξ 可约化为 $mc(\Pi_1', \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi^i)$。

$\supset\mathcal{R}/\supset\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ B_1', \Delta_1 \vdash B_1''\end{array}}{\Delta_1 \vdash B_1' \supset B_1''}\supset\mathcal{R} \qquad \frac{\begin{array}{cc}\Pi' & \Pi''\\ B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash B_1' & B_1'', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{B_1' \supset B_1'', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\supset\mathcal{L}$$

设 $\Xi_1 = mc(\Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi')$, 则 Ξ化简为

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Xi_1 & \Pi_1'\\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash B_1' & B_1', \Delta_1 \vdash B_1''\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash B_1''}mc \qquad \left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i \vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in\{2..n\}} \qquad \begin{array}{c}\Pi''\\ B_1'', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\dfrac{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\mathrm{c}\mathcal{L}\ *}mc$$

$\forall\mathcal{R}/\forall\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_1^s\\ \Delta_1 \vdash B_1'[s/x]\end{array}\right\}_{s\in\mathrm{ground}(\tau)}}{\Delta_1 \vdash \forall_\tau x.B_1'}\forall\mathcal{R} \qquad \frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1'[t/x], B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\forall_\tau x.B_1', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\forall\mathcal{L}$$

推导 Ξ化简为 $mc(\Pi_1^t, \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi')$。

$\exists\mathcal{R}/\exists\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B_1'[t/x]\end{array}}{\Delta_1 \vdash \exists_\tau x.B_1'}\exists\mathcal{R} \qquad \frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^s\\ B_1'[s/x], B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}\right\}_{s\in\mathrm{ground}(\tau)}}{\exists_\tau x.B_1', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\exists\mathcal{L}$$

那么 Ξ化简为 $mc(\Pi_1', \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi^t)$。

$\Delta\mathcal{R}/\Delta\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B'\end{array}}{\Delta_1 \vdash A}\Delta\mathcal{R} \quad \mathrm{defn}(H \triangleq B, A, \epsilon_\emptyset, B')$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{c|c}\Pi_{B'}^{H\triangleq B} & \\ B', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C & \mathrm{defn}(H \triangleq B, A, \epsilon_\emptyset, B')\end{array}\right\}}{A, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\Delta\mathcal{L}$$

那么 Ξ就简化为 $mc(\Pi_1', \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi')$, 其中, 对于任意满足 $\mathsf{defn}(H \triangleq B, A, \epsilon_\emptyset, B')$ 的子句 $H \triangleq B$, Π' 是 $\Pi_{B'}^{H\triangleq B}$。

$\nabla\mathcal{R}/\nabla\mathcal{L}$：给定 n，$m \notin \mathrm{supp}(B_1')$，如果 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B_1'[n/x]\end{array}}{\Delta_1 \vdash \nabla_\tau x.B_1'}\,\nabla\mathcal{R} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1'[m/x], B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\nabla_\tau x.B_1', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\,\nabla\mathcal{L}$$

然后根据重命名引理（引理 7），存在一个推导 $\Pi_1'' \sim \Pi_1'$ 关于 $\Delta_1 \vdash B_1'[m/x]$，且$\Xi$可约化为 mc $(\Pi_1''$，Π_2，…，Π_n，$\Pi')$。

B.2 归纳情形

$-/\mu\mathcal{L}$ (归纳情形)：设 Π_1 是一个末端序列为 $\Delta_1 \vdash p\ \vec{t}$ 且 Π 是的任意推导

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^{\vec{t}}\\ B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)} \qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ S\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{p\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\,\mu\mathcal{L}$$

那么 Ξ 可约化为

$$\frac{\begin{array}{c}\mu(\Pi_1, \Pi_S)\\ \Delta_1 \vdash S\ \vec{t}\end{array} \qquad \left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i \vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in\{2\ldots n\}} \qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ S\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\,mc$$

B.3 左交换情形：

当 Π 是主左规则且 Π_1 以左规则结束时，即为此情形。

$\bullet_L/\circ_L$：假设 Π 以一个左规则收尾，该规则不是作用于 B_1 和 Π_1 上的 $\mathsf{c}\mathcal{L}$ 或 $\mathsf{w}\mathcal{L}$，且 Π_1 是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_1^i\\ \Delta_1^i \vdash B_1\end{array}\right\}}{\Delta_1 \vdash B_1}\,\bullet_L$$

其中，$\bullet_L$ 是除 $\supset\mathcal{L}$ 和 $\mu\mathcal{L}$之外的任意左规则。令 $\Xi^i = mc(\Pi_1^i$，Π_2，……，Π_n，$\Pi)$。
那么 Ξ 可化简为

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^i\\ \Delta_1^i, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}\right\}}{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\,\bullet_L$$

$\supset\mathcal{L}$ $/\circ_L$：假设 Π 以一个作用于 B_1 且不同于 $\mathsf{c}\mathcal{L}$ 或 $\mathsf{w}\mathcal{L}$ 的左规则结束，并且 Π_1 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1' \vdash D_1'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1''\\ D_1'', \Delta_1' \vdash B_1\end{array}}{D_1' \supset D_1'', \Delta_1' \vdash B_1}\,\supset\mathcal{L}$$

令 Ξ_1 为 $mc(\Pi_1'', \Pi_2, \ldots\ldots, \Pi_n, \Pi)$。那么 Ξ 可化简为

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1' \vdash D_1'\end{array}}{\Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash D_1'}\, \mathrm{w}\mathcal{L} \qquad \begin{array}{c}\Xi_1\\ D_1'', \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{D_1' \supset D_1'', \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\, \supset\mathcal{L}$$

$\mu\mathcal{L}$ $/\circ_L$：假设 Π 以作用于 B_1 的、除 $\mathrm{c}\mathcal{L}$ 或 $\mathrm{w}\mathcal{L}$ 之外的左规则结尾，且 Π_1 为

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^t\\ B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1'\\ S\ \vec{t}, \Delta_1' \vdash B_1\end{array}}{p\ \vec{t}, \Delta_1' \vdash B_1}\, \mu\mathcal{L}$$

设 Ξ_1 为 $mc(\Pi_1', \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi)$。 则 Ξ 可归约为

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^t\\ B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)} \qquad \begin{array}{c}\Xi_1\\ S\ \vec{t}, \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{p\ \vec{t}, \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\, \mu\mathcal{L}$$

B.4 右交换情形：

这是 Π以非主规则结尾的情形。

$-/\circ_L$：假设 Π 为

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^i\\ B_1, \ldots, B_n, \Gamma^i \vdash C\end{array}\right\}}{B_1, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\, \circ_L$$

其中 $\circ_L$ 是除 $\supset\mathcal{L}$和 $\mu\mathcal{L}$ 之外的任意左规则（但包括 $\mathrm{c}\mathcal{L}$ 和 $\mathrm{w}\mathcal{L}$），作用于除 $B_1, \ldots, B_n$之外的公式。设 $\Xi^i = mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi^i)$。

推导 Ξ化简为

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^i\\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma^i \vdash C\end{array}\right\}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\, \circ_L$$

$-/\supset\mathcal{L}$：设 Π是

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1, \ldots, B_n, \Gamma' \vdash D_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi''\\ B_1, \ldots, B_n, D_2, \Gamma' \vdash C\end{array}}{B_1, \ldots, B_n, D_1 \supset D_2, \Gamma' \vdash C}\, \supset\mathcal{L}$$

令 $\Xi_1 = mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi')$，并令 $\Xi_2 = mc(\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi'')$。

则 Ξ 归结为

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Xi_1\\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma' \vdash D_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Xi_2\\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n, D_2, \Gamma' \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, D_1 \supset D_2, \Gamma' \vdash C}\, \supset\mathcal{L}$$

$-/\mu\mathcal{L}$：假设 Π是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^t\\ B\ S\ \vec{t}\vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)}\qquad\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1,B_2,\ldots,B_n,S\ \vec{t},\Gamma'\vdash C\end{array}}{B_1,\ldots,B_n,p\ \vec{t},\Gamma'\vdash C}\ \mu\mathcal{L}$$

令 $\Xi'=mc(\Pi_1$、.....、Π_n、$\Pi')$，则 Ξ化简为

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^t\\ B\ S\ \vec{t}\vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)}\qquad\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n,S\ \vec{t},\Gamma'\vdash C\end{array}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,p\ \vec{t},\Gamma'\vdash C}\ \mu\mathcal{L}$$

$-/\supset\mathcal{R}$：假设 Π是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1,\ldots,B_n,\Gamma,C_1\vdash C_2\end{array}}{B_1,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C_1\supset C_2}\ \supset\mathcal{R}$$

令 $\Xi'=mc(\Pi_1$、.....、Π_n、$\Pi')$，则 Ξ化简为

$$\frac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma,C_1\vdash C_2\end{array}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C_1\supset C_2}\ \supset\mathcal{R}$$

$-/\circ\mathcal{R}$：假设 Π 是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^i\\ B_1,\ldots,B_n,\Gamma^i\vdash C^i\end{array}\right\}}{B_1,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C}\ \circ\mathcal{R}$$

其中 $\circ\mathcal{R}$ i s除 $\supset\mathcal{R}$ 之外的任意右规则。令 $\Xi^i=mc(\Pi_1$，.....，Π_n，$\Pi^i)$，则 Ξ化简为 o

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^i\\ \Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma^i\vdash C^i\end{array}\right\}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C}\ \circ\mathcal{R}$$

B.5 多重切情形：

当 Π 或 Π_1 以多重切结尾时，即为此情形。

$mc/\circ_L$ （左多重切情形）：如果 Π以作用于 B_1 的、除 c$\mathcal{L}$ 或 w$\mathcal{L}$ 之外的左规则结尾，而 Π_1以多重切结尾并归约为 Π_1'，那么 Ξ归约为 $mc(\Pi_1'$，Π_2，.....，Π_n，$\Pi)$。

$-/mc$（右多重切情形）：
假设 Π 是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^j\\ \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}^j},\Gamma^j\vdash D^j\end{array}\right\}_{j\in[m]}\qquad\begin{array}{c}\Pi'\\ D^1,\ldots,D^m,\{B_i\}_{i\in\mathcal{I}'},\Gamma'\vdash C\end{array}}{B_1,\ldots,B_n,\Gamma^1,\ldots,\Gamma^m,\Gamma'\vdash C}\ mc$$

其中 $\mathcal{I}^1$、.....、$\mathcal{I}^m$、$\mathcal{I}'$ 将公式 B_1、.....、B_n 分配给前提推导 Π^1、.....、Π^m、Π'。对于 $1 \leq j \leq m$，令 Ξ^j 为

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i \vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in\mathcal{I}^j} \qquad \begin{array}{c}\Pi^j\\ \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}^j}, \Gamma^j \vdash D^j\end{array}}{\{\Delta_i\}_{i\in\mathcal{I}^j}, \Gamma^j \vdash D^j}\ mc$$

则 Ξ 归约为

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^j\\ \{\Delta_i\}_{i\in\mathcal{I}^j}, \Gamma^j \vdash D^j\end{array}\right\}_{j\in[m]} \qquad \left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i \vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in\mathcal{I}'} \qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ D^1, \ldots, D^m, \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}'}, \Gamma' \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma^1, \ldots \Gamma^m, \Gamma' \vdash C}\ mc$$

B.6 结构情形：

当 Π是一条主结构规则时，即属此情形。

$-/\mathrm{c}\mathcal{L}$：设 Π为

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1, B_1, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{B_1, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\ \mathrm{c}\mathcal{L}$$

设 $\Xi' = mc(\Pi_1, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi')$。则 Ξ归约为

$$\frac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\ \mathrm{c}\mathcal{L}$$

$-/\mathrm{w}\mathcal{L}$：设 Π 为

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{B_1, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\ \mathrm{w}\mathcal{L}$$

令 $\Xi' = mc(\Pi_2,\ .....,\ \Pi_n,\ \Pi')$。则 Ξ化简为：

$$\frac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\ \mathrm{w}\mathcal{L}$$

B.7 公理情形：

这是 Π 或 Π_1 以 Ax 结尾的情形。

Ax $/\circ_L$ （左公理情形）：

假设 Π 以 B_1 的左规则结尾，且 Π_1 以 Ax结尾。这意味着对某个 $B_1' \approx B_1$，$\Delta_1 = \{B_1'\}$，因此 Ξ 归约为

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i \vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in[2,n]} \qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ \Gamma, B_1', \ldots, B_n \vdash C\end{array}}{\Gamma, B_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n \vdash C}\ mc$$

w此处 $\Pi' \sim \Pi$ 是由重命名引理（引理7）得到的推导 .

$-/\mathrm{Ax}$(右公理情形):

若 Π 以 Ax 规则结束，则 $n=1$，$\Gamma=\emptyset$ 且 $C=B_1'$ 对于 $B_1 \approx B_1'$。在此情形下，Ξ 可约化为 Π_1'，其中 $\Pi_1' \sim \Pi_1$ 由重命名引理（引理 7）得到。

C 可约性引理

引理 5 （可约性引理）。给定 n 推导 Π_1，.....，Π_n 使得 Π_i 是 α_i-可约的，以及任意推导 Π 多重切

$$\dfrac{\begin{array}{cccc}\Pi_1 & & \Pi_n & \Pi \\ \Delta_1 \vdash B_1 & \cdots & \Delta_n \vdash B_n & \Gamma, B_1, \ldots, B_n \vdash C\end{array}}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\ mc$$

我们将其记为 Ξ，是 $\mathrm{lvl}(C)$-可约的。

证明。我们首先对 (1) 指标 Ind(Π) 进行归纳，然后对 (2) 高度 ht(Π) 进行归纳，再通过从属归纳针对 (3) 切公式数目 n。

情形 $n=0$：在这种情形下，Ξ 归约为 Π，因此只需证明 Π 可约。我们使用以下技巧：对于任意高度小于 ht(Π) 的推导 Ψ，第二归纳假设适用于多重切 $mc(\Psi)$；由于它归约为 Ψ，因此必有 Ψ 可约。现在我们可以通过对 Π 进行分类讨论来证明 Π可约:

子情形 $\supset\mathcal{R}$：假设 Π 是 $\Gamma \vdash A \supset B$ 的一个推导，其前提推导为 Π'，令 $\alpha = \mathrm{lvl}(A)$，并令 Υ 是一个 α- 可约的 $\Delta \vdash A$ 推导。那么，由于 ht(Π') $<$ ht(Π)，Π' 可约；此外，第二归纳假设适用于 $mc(\Upsilon, \Pi')$，因此 Π 可约。

子情形 $\supset\mathcal{L}$：若 Π 以 $\supset\mathcal{L}$ 结尾，其主要前提推导为 Π'，次要前提推导为Ψ，那么由于 ht(Π')，$\mathrm{ht}(\Psi) < \mathrm{ht}(\Pi)$，和 Π' 都可约；根据正规化引理（引理4），Ψ 必定可正规化，因此 Π 可约。

子情形 $\mu\mathcal{L}$：若 Π 以 $\mu\mathcal{L}$ 结尾，其主要前提推导为 Π'，次前提推导为 $\{\Pi_{\vec{u}}\}_{\mathrm{ground}(\vec{u})}$，则由于 ht($\Pi'$)，$\mathrm{ht}(\Pi_{\vec{u}}) < \mathrm{ht}(\Pi)$，所有 $\Pi_{\vec{u}}$ 和 Π' 都是可约的，并且根据正规化引理（引理4）$\Pi_{\vec{u}}$ 必定可正规化，因此 Π 是可约的。

子情形 多重割：若 Π是一个多重切 $mc(\Psi_1$、.....、Ψ_n、$\Pi')$，则每个 Ψ_i都是可约的，因为 ht(Ψ_i) <ht(Π)，所以第二归纳假设适用。

否则：若 Π 有前提推导 $\{\Psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，则由于 ht($\Psi_i$) $<$ ht(Π)，因此 Ψ_i 是可约的，Π也如此。

情形 $n>0$：我们对 (4) α_i关于 Π_i的可约性进行从属归纳，条件为 $i=1\ldots n$，并对 Ξ的归约进行分类讨论。下文中，当 Π 以作用于 B_i的主左规则结尾时，为清楚起见且不失一般性，我们假设 $i=1$。

C.1 关键情形:

假设 Π 以主左规则结束，而 Π_1 以（主）右规则结束。

$\wedge\mathcal{R}/\wedge\mathcal{L}$: 如果 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{cc}\Pi_1^1 & \Pi_1^2\\ \Delta_1 \vdash B_1^1 & \Delta_1 \vdash B_1^2\end{array}}{\Delta_1 \vdash B_1^1 \wedge B_1^2}\wedge\mathcal{R} \qquad \frac{\Pi'}{B_1^i, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\wedge\mathcal{L}i$$

那么，根据归纳假设 $mc(\Pi_1^i,\ \Pi_2,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi')$ 是可约的，因为 2 Π_1^i是可约的，且 $\mathsf{ht}(\Pi') <\mathrm{ht}(\Pi)$。

$\vee\mathcal{R}i/\vee\mathcal{L}$: 如果 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B_1^i\end{array}}{\Delta_1 \vdash B_1^1 \vee B_1^2}\vee\mathcal{R}i \qquad \frac{\begin{array}{cc}\Pi^1 & \Pi^2\\ B_1^1, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C & B_1^2, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{B_1^1 \vee B_1^2, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\vee\mathcal{L}$$

那么，根据归纳假设 $mc(\Pi_1',\ \Pi_2,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi^i)$ 是可约的，因为 2 Π_1'是可约的，且 $\mathsf{ht}(\Pi^i) <\mathrm{ht}(\Pi)$。

$\supset\mathcal{R}/\supset\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ B_1', \Delta_1 \vdash B_1''\end{array}}{\Delta_1 \vdash B_1' \supset B_1''}\supset\mathcal{R} \qquad \frac{\begin{array}{cc}\Pi' & \Pi''\\ B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash B_1' & B_1'', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{B_1' \supset B_1'', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\supset\mathcal{L}$$

那么，为了证明归约 $mc(\Xi_1', \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi'')$ 是可约的，只需根据归纳假设 2 证明多重切 $\Xi_1' = mc(\Xi_1, \Pi_1')$ 是可约的。然而，由于 Π_1 可约，这一点便可得证；而多重切 $\Xi_1 = mc(\Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi')$ 是可约的，这本身又可由归纳假设 2 得出。这里注意到 $\mathsf{ht}(\Pi')$、$\mathsf{ht}(\Pi'') < \mathsf{ht}(\Pi)$。

$\forall\mathcal{R}/\forall\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_1^s\\ \Delta_1 \vdash B_1'[s/x]\end{array}\right\}_{s\in\mathrm{ground}(\tau)}}{\Delta_1 \vdash \forall_\tau x.B_1'}\forall\mathcal{R} \qquad \frac{\Pi'}{B_1'[t/x], B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\forall\mathcal{L}$$

那么，归约 $mc(\Pi_1^t,\ \Pi_2,\ \ldots,\ \Pi_n,\ \Pi')$ 根据归纳假设是可约的 2，因为 Π_1^t 的可约性可由 Π_1的可约性推出，并且 $\mathsf{ht}(\Pi') <\mathrm{ht}(\Pi)$。

$\exists\mathcal{R}/\exists\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B_1'[t/x]\end{array}}{\Delta_1 \vdash \exists_\tau x.B_1'}\exists\mathcal{R} \qquad \frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^s\\ B_1'[s/x], B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}\right\}_{s\in\mathrm{ground}(\tau)}}{\exists_\tau x.B_1', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\exists\mathcal{L}$$

那么，归约式 $mc(\Pi_1',\ \Pi_2,\ \ldots\ldots,\ \Pi_n,\ \Pi^t)$ 根据归纳假设 2是可约的，因为 Π_1 的可约性蕴含 Π_1' 的可约性，且 $\mathsf{ht}(\Pi^t) <\mathrm{ht}(\Pi)$。

$\Delta\mathcal{R}/\Delta\mathcal{L}$: 假设 Π_1 和 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B'\end{array}}{\Delta_1 \vdash A}\,\Delta\mathcal{R} \quad \mathrm{defn}(H \triangleq B, A, \epsilon_\emptyset, B')$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_{B'}^{H\triangleq B}\\ B', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}\;\middle|\;\mathrm{defn}(H \triangleq B, A, \epsilon_\emptyset, B')\right\}}{A, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\,\Delta\mathcal{L}$$

则归约 $mc(\Pi_1', \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi')$，其中 Π' 是 $\Pi_{B'}^{H\triangleq B}$，对于任意子句 $H \triangleq B$，使得 $\mathsf{defn}(H \triangleq B, A, \epsilon_\emptyset, B')$ 根据归纳假设 2 是可约的，因为 Π_1' 的可约性由 Π_1的可约性所蕴含，且 $\mathsf{ht}(\Pi') <\mathrm{ht}(\Pi)$。

$\nabla\mathcal{R}/\nabla\mathcal{L}$: 给定 n， $m \notin \mathrm{supp}(B_1')$，若 Π_1 与 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1 \vdash B_1'[n/x]\end{array}}{\Delta_1 \vdash \nabla_\tau x.B_1'}\,\nabla\mathcal{R} \qquad \frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1'[m/x], B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{\nabla_\tau x.B_1', B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\,\nabla\mathcal{L}$$

则由重命名引理（引理 7），存在一个推导 $\Pi_1'' \sim \Pi_1'$，其导出 $\Delta_1 \vdash B_1'[m/x]$，且归约 $mc(\Pi_1'', \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi')$ 根据归纳假设 2 是可约的，因为 $\mathsf{Ind}(\Pi') =\mathrm{Ind}(\Pi)$，且 $\mathsf{ht}(\Pi') <\mathrm{ht}(\Pi)$，此外，由重命名同余引理（引理 8），$\Pi_1''$是可约的。

C.2 归纳情形

-/$\mu\mathcal{L}$ (归纳情形): 设 Π_1 是一个末端序列式为 $\Delta_1 \vdash p\ \vec{t}$ 且 Π 是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^t\\ B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)} \qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ S\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{p\ \vec{t}, B_2, \ldots, B_n, \Gamma \vdash C}\,\mu\mathcal{L}$$

那么，要证明归约 $mc(\mu(\Pi_1, \Pi_S)\ \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi')$ 是可约的，只需根据归纳假设 2 证明 $\mu(\Pi_1, \Pi_S)$ 是可约的。由引理 11 可知，只要满足以下假设即可：

假设 *1*： 注意到 $\mathsf{Ind}(\Pi_S^t) < \mathrm{Ind}(\Pi)$，因此由归纳假设 1可得 $\vec{}$零元切割 $mc(\Pi_S^t)$ 是可约的，这意味着 Π_S^t 是可约的，因此根据引理4，它也是可正规化的。

假设 *2*： 注意到 $\mathsf{Ind}(\Pi_S^t) < \mathrm{Ind}(\Pi)$，因此由归纳假设 1 可得，对于任意可约的 Υ， $mc(\Upsilon, \Pi_S^t)$ 都是可约的。

假设 *3*： 注意，$\mathsf{Ind}(\textsc{Init}) = 0 <\mathrm{Ind}(\Pi)$，因此根据归纳假设 1 对于任意可约的 Υ，多重割$(\Upsilon, \textsc{Init})$ 都是可约的。

C.3 左交换情形:

假设 Π 是主左规则，且 Π_1 以左规则结尾。

$\bullet_L/\circ_L$: 假设 Π 以除 c$\mathcal{L}$ 或 w$\mathcal{L}$ 之外的左规则结束，该规则作用于 B_1 并且 Π_1 是

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_1^i\\ \Delta_1^i \vdash B_1\end{array}\right\}}{\Delta_1 \vdash B_1}\bullet_L$$

其中 $\bullet_L$ 是除 $\supset\mathcal{L}$ 和 $\mu\mathcal{L}$之外的任意左规则。在这种情况下，每个 Π_1^i 都是 α_1-可约的（因为 Π_1 的每个前提都是主要前提），因此根据归纳假设 4，每个推导 $\Xi^i = mc(\Pi_1^i, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi)$ 都是可约的。由此可知，归约

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^i\\ \Delta_1^i, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}\right\}}{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\bullet_L$$

是可约的。

$\supset\mathcal{L}$ $/\circ_L$: 假设 Π 以除 c$\mathcal{L}$或 w$\mathcal{L}$ 之外的左规则结束，该规则作用于 B_1 并且 Π_1 是

$$\frac{\begin{array}{cc}\Pi_1' & \Pi_1''\\ \Delta_1' \vdash D_1 & D_2, \Delta_1' \vdash B_1\end{array}}{D_1 \supset D_2, \Delta_1' \vdash B_1}\supset\mathcal{L}$$

在这种情况下， Π_1' 是可正规化的，且 Π_1'' 是 α_1-可约的，因此根据归纳假设 4，可知推导 $\Xi_1 = mc(\Pi_1'', \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \Pi)$ 是可约的。此外，w$\mathcal{L}(\Pi_1')$ 是可正规化的，因此归约

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ \Delta_1' \vdash D_1\end{array}}{\Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash D_1}\,\mathrm{w}\mathcal{L} \qquad \begin{array}{c}\Xi_1\\ D_2, \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{D_1 \supset D_2, \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\supset\mathcal{L}$$

是可约的。

$\mu\mathcal{L}/\circ_L$: 假设 Π 以作用于 B_1 和 Π_1 的左规则 $\circ_L$ （而非c$\mathcal{L}$或w$\mathcal{L}$ ）结尾i s

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^t\\ B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1'\\ S\ \vec{t}, \Delta_1' \vdash B_1\end{array}}{p\ \vec{t}, \Delta_1' \vdash B_1}\,\mu\mathcal{L}$$

在这种情况下， Π_S^t 是可正规化的，并且 Π_1' 是 α_1-可约的，因此根据归纳假设4，由此可知推导 $\Xi_1 = mc$（Π_1', Π_2, ..., Π_n, Π）是可约的。因此该归约

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_S^t\\ B\ S\ \vec{t} \vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)} \qquad \begin{array}{c}\Xi_1\\ S\ \vec{t}, \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C\end{array}}{p\ \vec{t}, \Delta_1', \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash C}\,\mu\mathcal{L}$$

是可约的。

C.4 右交换情形：

假设 Π以一条非主规则结束。

$-/\circ_L$： 假设 Π 是

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^i\\ B_1,\ldots,B_n,\Gamma^i\vdash C\end{array}\right\}}{B_1,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C}\circ_L$$

其中 $\circ_L$ 是除 $\supset\mathcal{L}$和 $\mu\mathcal{L}$ 之外的任意左规则（但包括 c$\mathcal{L}$ 和 w$\mathcal{L}$），作用于非 B_1、.....、 B_n的公式上。由于 $\mathrm{ht}(\Pi^i)<\mathrm{ht}(\Pi)$，由归纳假设 2 可知，每个 $\Xi^i=mc(\Pi_1$、.....、 Π_n、 $\Pi^i)$ 都是可约的，因此归约

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^i\\ \Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma^i\vdash C\end{array}\right\}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C}\circ_L$$

是可约的。

$-/\supset\mathcal{L}$： 假设 Π是

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi' & \Pi''\\ B_1,\ldots,B_n,\Gamma'\vdash D_1 & B_1,\ldots,B_n,D_2,\Gamma'\vdash C\end{array}}{B_1,\ldots,B_n,D_1\supset D_2,\Gamma'\vdash C}\supset\mathcal{L}$$

由于 $\mathrm{ht}(\Pi')$，$\mathrm{ht}(\Pi'')<\mathrm{ht}(\Pi)$，因此根据归纳假设 $\Xi_1=mc(\Pi_1$、.....、 Π_n、 $\Pi')$ 和 $\Xi_2=mc(\Pi_1$、.....、 Π_n、 $\Pi'')$ 均可约，于是由引理 2可知 Ξ_1 可正规化，而归约

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Xi_1 & \Xi_2\\ \Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma'\vdash D_1 & \Delta_1,\ldots,\Delta_n,D_2,\Gamma'\vdash C\end{array}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,D_1\supset D_2,\Gamma'\vdash C}\supset\mathcal{L}$$

是可约的。

$-/\mu\mathcal{L}$： 假设 Π是

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^t_S\\ B\ S\ \vec{t}\vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)}\qquad\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1,B_2,\ldots,B_n,S\ \vec{t},\Gamma'\vdash C\end{array}}{B_1,\ldots,B_n,p\ \vec{t},\Gamma'\vdash C}\mu\mathcal{L}$$

那么，由于 $\mathrm{ht}(\Pi')<\mathrm{ht}(\Pi)$，根据归纳假设 2 可知 $\Xi'=mc(\Pi_1,\ldots,\Pi_n,\Pi')$ 是可约的，因此归约

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^t_S\\ B\ S\ \vec{t}\vdash S\ \vec{t}\end{array}\right\}_{\mathrm{ground}(t)}\qquad\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n,S\ \vec{t},\Gamma'\vdash C\end{array}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,p\ \vec{t},\Gamma'\vdash C}\mu\mathcal{L}$$

是可约的。

$-/\supset\mathcal{R}$：假设 Π是

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1,\ldots,B_n,\Gamma,C_1\vdash C_2\end{array}}{B_1,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C_1\supset C_2}\supset\mathcal{R}$$

由于 $\mathrm{ht}(\Pi')<\mathrm{ht}(\Pi)$，根据归纳假设 2，$\Xi'=mc(\Pi_1,\ldots,\Pi_n,\Pi')$ 是可约的。此外，对于任意一个可约推导 Υ，其结论为序列式 $\Delta\vdash C_1$，由于 $mc(\Upsilon,\Xi')$ 归约为 $mc(\Pi_1,\ldots,\Pi_n,\Upsilon,\Pi')$，再次根据归纳假设 2 可知，$mc(\Upsilon,\Xi')$ 是可约的，因此归约

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma,C_1\vdash C_2\end{array}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C_1\supset C_2}\supset\mathcal{R}$$

是可约的。

$-/\circ\mathcal{R}$：假设 Π 是

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^i\\ B_1,\ldots,B_n,\Gamma^i\vdash C^i\end{array}\right\}}{B_1,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C}\circ\mathcal{R}$$

其中 $\circ\mathcal{R}$ 是任意右规则。由于 $\mathrm{ht}(\Pi^i)<\mathrm{ht}(\Pi)$，根据归纳假设可知 $\Xi^i=mc(\Pi_1,\ldots,\Pi_n,\Pi^i)$ 是可约的2，因此归约

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^i\\ \Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma^i\vdash C^i\end{array}\right\}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C}\circ\mathcal{R}$$

是可约的。

C.5 多重切情形：

假设 Π 或 Π_1 以一个多重切结束。

$mc/\circ_L$ (左多重切情形)：若 Π 以一条作用于 $\mathcal{L}$ 的左规则结束（该规则既非 c$\mathcal{L}$，也非 w B_1），且 Π_1 以一个多重切结束，并归约为 Π_1'（它是 α_1-可约的），那么归约 $mc(\Pi_1',\ \Pi_2,\ \ldots,\ \Pi_n,\ \Pi)$。根据归纳假设 4 可约。

$-/mc$(右多重切情形)：

假设 Π 是

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi^j\\ \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}^j},\Gamma^j\vdash D^j\end{array}\right\}_{j\in[m]}\qquad\begin{array}{c}\Pi'\\ D^1,\ldots,D^m,\{B_i\}_{i\in\mathcal{I}'},\Gamma'\vdash C\end{array}}{B_1,\ldots,B_n,\Gamma^1,\ldots,\Gamma^m,\Gamma'\vdash C}\,mc$$

其中 $\mathcal{I}^1$、……、$\mathcal{I}^m$、$\mathcal{I}'$ 将公式 B_1、……、B_n 分配到前提推导 Π^1、……、Π^m、Π' 中。对于 $1\leq j\leq m$，注意到 $\mathrm{ht}(\Pi^j)<\mathrm{ht}(\Pi)$，因此下面的每个推导 Ξ^j

$$\dfrac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i\vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in\mathcal{I}^j}\qquad\begin{array}{c}\Pi^j\\ \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}^j},\Gamma^j\vdash D^j\end{array}}{\{\Delta_i\}_{i\in\mathcal{I}^j},\Gamma^j\vdash D^j}\,mc$$

根据归纳假设是可约的2。

此外，由于 ht(Π′) <ht(Π)，归约

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Xi^j\\ \{\Delta_i\}_{i\in\mathcal{I}^j},\Gamma^j\vdash D^j\end{array}\right\}_{j\in[m]}\qquad \left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i\vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in\mathcal{I}'}\qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ D^1,\ldots,D^m,\{B_i\}_{i\in\mathcal{I}'},\Gamma'\vdash C\end{array}}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n,\Gamma^1,\ldots\Gamma^m,\Gamma'\vdash C}\ mc$$

根据归纳假设是可约的2。

C.6 结构情形：

假设 Π是一个主结构规则。

$-/\mathrm{c}\mathcal{L}$: 假设 Π是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_1,B_1,B_2,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C\end{array}}{B_1,B_2,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C}\ \mathrm{c}\mathcal{L}$$

那么，由于 ht(Π′) $<\mathrm{ht}(\Pi)$，根据归纳假设 2 可知 $\Xi'=mc(\Pi_1,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \ldots,\ \Pi_n,\ \Pi')$ 是可约的，因此归约

$$\frac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_1,\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C\end{array}}{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C}\ \mathrm{c}\mathcal{L}$$

是可约的。

$-/\mathrm{w}\mathcal{L}$: 假设 Π 是

$$\frac{\begin{array}{c}\Pi'\\ B_2,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C\end{array}}{B_1,B_2,\ldots,B_n,\Gamma\vdash C}\ \mathrm{w}\mathcal{L}$$

则由于 ht(Π′) $<\mathrm{ht}(\Pi)$，由归纳假设 2 可得 $\Xi'=mc(\Pi_2,\ldots,\Pi_n,\Pi')$ 是可约的，因此该归约

$$\frac{\begin{array}{c}\Xi'\\ \Delta_2,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C\end{array}}{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n,\Gamma\vdash C}\ \mathrm{w}\mathcal{L}$$

是可约的。

C.7 公理情形：

假设 Π 或 Π_1 以 Ax结尾。

Ax $/\circ_L$ (左公理情形):

假设 Π 以关于 B_1 的左规则结尾，而 Π_1 以 Ax结尾。这意味着 $\Delta_1=\{B_1'\}$ 对于某个 $B_1'\approx B_1$ 成立，因此 Ξ 可约为

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\Pi_i\\ \Delta_i\vdash B_i\end{array}\right\}_{i\in[2,n]}\qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ \Gamma,B_1',\ldots,B_n\vdash C\end{array}}{\Gamma,B_1',\Delta_2,\ldots,\Delta_n\vdash C}\ mc$$

其中 $\Pi' \sim \Pi$ 是由重命名引理（引理7）得到的推导。由于 $\mathsf{ht}(\Pi') = \mathrm{ht}(\Pi)$，且现在切公式的数量为 $n-1$ 根据归纳假设 3，可得 Ξ是可约的。

$-/\mathrm{Ax}$(右公理情形):

如果 Π以 Ax 规则结尾，则 $n = 1$， $\Gamma = \emptyset$ 且 $C = B_1'$ 对于 $B_1 \approx B_1'$。在此情形下， Ξ归约为 Π_1'，其中 $\Pi_1' \sim \Pi_1$ 由重命名引理（引理7）得到。根据重命名同余引理（引理8）， Π' 是可约的。

□

D $\mathrm{LD}^{\mu\nabla}$的其他性质

D.1 $\Delta\mathcal{L}$归纳定义

我们作如下观察：归纳定义也是不动点定义：

引理 12 (归纳定义是不动点定义)。 给定一个归纳定义 $p\ \vec{x} \stackrel{\mu}{=} B\ p\ \vec{x}$，以下规则是可导出的

$$\frac{\Gamma, B\ p\ \vec{t} \vdash C}{\Gamma, p\ \vec{t} \vdash C}\ \Delta\mathcal{L}^*$$

证明。该推导由 $\mu\mathcal{L}$ 结合归纳不变量 $S = B\ p$ 得到，具体如下

$$\frac{B\ (B\ p)\ \vec{x} \vdash B\ p\ \vec{x} \qquad \Gamma, B\ p\ \vec{t} \vdash C}{\Gamma, p\ \vec{t} \vdash C}\ \mu\mathcal{L}$$

$B\ (B\ p)$的可推导性 $\vec{x} \vdash B\ p\ \vec{x}$ 由以下子引理得到:

子引理13。 设 B 是一个类型为 $\omega \to \omega$ 的算子，使得 p 不在公式 $B\ p\ \vec{x}$的否定位置出现，并设 S： ω 对任意 $\vec{t}$都满足 $S\ \vec{t} \vdash p\ \vec{t}$，则 $B\ S\ \vec{x} \vdash B\ p\ \vec{x}$ 是可推导的。

证明。 我们对 $B\ p\ \vec{x}$的复杂度进行归纳。我们只考虑以下情形。

$\underline{p\ \vec{t}}$: 在此情形下， $B\ S\ \vec{x} \equiv S\ \vec{t}$，因此 $S\ \vec{t} \vdash p\ \vec{t}$的推导由假设得到。

$\underline{B_1\ p\ \vec{x} \wedge B_2\ p\ \vec{x}}$: 在这种情况下，推导如下

$$\frac{\dfrac{B_1\ S\ \vec{x} \vdash B_1\ p\ \vec{x} \qquad B_2\ S\ \vec{x} \vdash B_2\ p\ \vec{x}}{B_1\ S\ \vec{x}, B_2\ S\ \vec{x} \vdash B_1\ p\ \vec{x} \wedge B_2\ p\ \vec{x}}\ \wedge\mathcal{R}}{B_1\ S\ \vec{x} \wedge B_2\ S\ \vec{x} \vdash B_1\ p\ \vec{x} \wedge B_2\ p\ \vec{x}}\ \wedge\mathcal{L}*$$

其中 $B_i\ S\ \vec{x} \vdash B_i\ p\ \vec{x}$ 由归纳假设得出。

$\underline{B_1\ \vec{x} \supset B_2\ p\ \vec{x}}$: 在这种情况下，推导如下得到

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{B_1\ \vec{x} \vdash B_1\ \vec{x}}\ \textsc{Init} \qquad \dfrac{B_2\ S\ \vec{x} \vdash B_2\ p\ \vec{x}}{B_2\ S\ \vec{x}, B_1\ \vec{x} \vdash B_2\ p\ \vec{x}}\ \mathrm{w}\mathcal{L}}{B_1\ \vec{x} \supset B_2\ S\ \vec{x}, B_1\ \vec{x} \vdash B_2\ p\ \vec{x}}\ \supset\mathcal{L}}{B_1\ \vec{x} \supset B_2\ S\ \vec{x} \vdash B_1\ \vec{x} \supset B_2\ p\ \vec{x}}\ \supset\mathcal{R}$$

其中 $B_2\ S\ \vec{x} \vdash B_2\ p\ \vec{x}$ 由归纳假设得到。

$\underline{\forall_\alpha y.B'\ y\ p\ \vec{x}}$：在这种情况下，该推导按如下方式得到

$$\frac{\left\{\dfrac{B'\ t\ S\ \vec{x} \vdash B'\ t\ p\ \vec{x}}{\forall y.B'\ y\ S\ \vec{x} \vdash B'\ t\ p\ \vec{x}}\ \forall\mathcal{L}\right\}_{t\in\text{ground}(\alpha)}}{\forall y.B'\ y\ S\ \vec{x} \vdash \forall y.B'\ y\ p\ \vec{x}}\ \forall\mathcal{R}$$

其中 $(B'\ t)\ S\ \vec{x} \vdash (B'\ t)\ p\ \vec{x}$ 由归纳假设得到，并注意到在 $(B'\ t)$ 中用t 替换 y 不会增加该公式的复杂度。 □

我们通过选取 $B = B$ 与 $S =(B\ p)$ 来应用该引理。注意，归纳定义上的分层条件保证 p 不会在 $B\ p$ 中以否定位置出现。此外，关于 S 的条件按如下方式得到

$$\frac{\dfrac{}{B\ p\ \vec{t} \vdash B\ p\ \vec{t}}\ \textsc{Init}}{B\ p\ \vec{t} \vdash p\ \vec{t}}\ \mu\mathcal{R}$$

□

D.2 定义实例的唯一性

我们由 [19]作出如下观察，其中利用了如下要求：定义 $H \triangleq B$ 的头部 H须位于模式片段中。

引理 14（定义实例的唯一性）。 给定一个定义 $H \triangleq_{\mathcal{X}} B$，它满足$\text{defn}(H \triangleq B, A, \theta, B_1)$ 与$\text{defn}(H \triangleq B, A, \theta, B_2)$，且使得 $H\rho_1 = A\theta = H\rho_2$，则 $\rho_1 = \rho_2$。特别地，这意味着 $B_1 = B_2$。

证明。 我们首先回顾定义域 θ： $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$和 ρ_1， ρ_2： $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}$。然后，我们可以考虑寻找代换 ρ： $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}$，使 $A\theta$ 和 H合一的问题。由于 $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$，且 H 属于模式片段，我们知道存在唯一的最一般合一子 ρ （见 [13]）。特别地，由于 ρ 是关于 $\mathcal{X}$的基替换，它是唯一解，因此 $\rho = \rho_1 = \rho_2$。最后，我们注意到 $B_1 = B\rho_1 = B\rho_2 = B_2$，如所需。 □