arXiv:2602.03080v1 [math.GR] 3 Feb 2026

幺群的自同构与反自同构

BIRAMA SANGARE

Abstract. 本文给出群 G的自同构或反自同构诱导出 m-共轭拟群 $\mathrm{Conj_m}(G)$ $m \in \mathbb{Z}$、核幺群 Core(G)、广义亚历山大拟群 Alex(G, ϕ) 的自同构或反自同构的条件，其中 $\phi \in$ Aut(G)，以及其他一些条件。我们还构造了这些并非源自 G的拟群的自同构。

AMS 分类。 20N02, 20B27, 20D15, 20E36.
关键词： 拟群、平凡幺群、 m-共轭拟群、核幺群、亚历山大拟群、词 quandle、自同构、反自同构、中心自同构。

Introduction

拟群这一概念最早由 Joyce [1] 和 Matveev[2] 在各自独立的研究中提出，用于三维球面中纽结的分类。目前，拟群正从代数角度得到研究（例如参见 [3, 4, 5]）。幺群理论中的问题之一，是描述拟群的自同构与反自同构。有关拟群自同构的描述已在论文 [6, 7, 8, 9, 10, 11]中讨论。幺群理论的最新进展表明，反自同构可作为构建更复杂结构的基本构件。例如，可以利用任意反自同构在非交换群上构造拟群；它们在幺群导子与扩张理论中发挥着重要作用（例如参见 [6, 13]）。因此，理解这些映射对于更广泛地分类所有可能的幺群结构及其表示至关重要。由于从群范畴到幺群范畴的许多函子都是通过群运算明确定义的，拟群实际上可视为群的一种特定投影。例如：Conj$_m$、Core 和 Alex（定义见 §1）。因此，从代数角度看，有必要精确确定群的自同构或反自同构在何种条件下会诱导相应拟群的自同构或反自同构。本文类比群的反自同构来研究拟群的反自同构。我们可以提出以下一般问题：

问题。 设 $\mathcal{Q}$ 是从群范畴到拟群范畴的函子，且 G 是一个群。自同构群 Aut(G) 与 Aut($\mathcal{Q}(G)$) 之间有什么联系？特别地，对于哪些函子 $\mathcal{Q}$ 和群 G，等式 Aut(G) =Aut($\mathcal{Q}(G)$) 成立?

由于 $\mathcal{Q}$ 是一个函子，因此对于任意群 G，它都会诱导出一个同态 Aut(G) $\to$Aut($\mathcal{Q}(G)$)。

在 [7] 中，已证明 Aut(Conj(G)) $=$ Aut(G) 当且仅当 G 的中心 $Z(G)$ 是平凡的。对于函子 Core，已知（参见 [7]）Aut(Core(G)) 包含以下子群

Date: 2026年2月4日。

$Z(G) \rtimes \mathrm{Aut}(G)$。对于函子 Alex，[11] 中已证明，$\mathrm{Alex}(G, \phi)$ 包含以下子群 $Z(G) \rtimes C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi)$，其中 $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi)$ 是 ϕ 在 $\mathrm{Aut}(G)$ 中的中心化子，即

$$C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid \varphi\phi = \phi\varphi\}.$$

当且仅当 G 是有限阿贝尔群且 ϕ是 G上的无不动点自同构时，这两个群相等。

本文研究上述问题在自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathcal{Q}(G))$ 中的情形，也研究群 G 和拟群$\mathcal{Q}(G)$中反自同构集合 $\mathrm{AAut}(G)$ 和 $\mathrm{AAut}(\mathcal{Q}(G))$ 的情形。已知（见 [12]），若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，则复合映射 $\varphi\varepsilon$，其中$\varepsilon : G \to G$, $\varepsilon(g) = g^{-1}, g \in G$，是一个反自同构，而 G 的任意反自同构都可以通过这种方式构造。因此，对于群，自同构的描述与反自同构的描述相同。拟群的情况则有所不同。特别地，我们证明，存在具有非平凡自同构群但没有反自同构的拟群。

近年来，人们引入了由群构造拟群的新方法。在 [12], 中定义了广义亚历山大拟群的若干类似物。词拟群在[3]中被引入。例如，$\mathrm{Conj}_m(G)$和$\mathrm{Core}(G)$是词拟群的类型。此外，[3] 描述了可对任意群定义的所有词拟群。在 [13], 中，这一结果得到推广，并描述了所有单参数词拟群。

本文结构如下。在第1节中，我们介绍基本定义与符号。

在第2节中，我们引入映射集

$$F = \{f_{a,b} : G \to G \mid a, b \in G, f_{a,b}(x) = axb, x \in G\}$$

并证明它在乘法下构成一个群$f_{a,b}f_{c,d} = f_{ac,db}$, $a, b, c, d \in G$。由所有中心元乘法构成的集合 H，即

$$H = \{f_a : G \to G \mid a \in Z(G), f_a(x) = ax, x \in G\}$$

是 F的正规子群。我们将证明 $H \rtimes$ 自同构群$(G) \leq$ 自同构群$(\mathrm{Conj}_m(G))$ $m \in \mathbb{Z}$ （命题2.1）。该结果推广了 [11, 命题4.7]。本节以命题 2.8结束，其中我们证明 $G^{op} \rtimes C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi) \leq$ 自同构群$(\mathrm{Alex}(G, \phi))$。该结果同样推广了[11, 命题4.1]。这里，G^{op} 是 G 的反群，即 $G^{op} = G$ 作为集合，而运算 $\circ$ 对 $a, b \in G$由 $a \circ b = ba$ 定义。

在第3节中，我们证明了，如果中心 $Z(G)$ 是平凡的，那么 $(G \times G^{op}) \rtimes \mathrm{Out}(G) \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Core}(G))$（命题 3.8）。对于阶为 $n \neq 3$ 的二面体拟群 R_n，我们证明了反自同构的集合为空（定理 3.6）。另一方面，[10,定理 2.1] 已证明 $\mathrm{Aut}(\mathrm{R}_n) = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_n^{\times}$，其中 $\mathbb{Z}_n^{\times}$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 的单位群。

在第4节中，我们考察拟群 $Q_i := (G, *_i)$ $i = 1,2,3,4$，这些拟群是在 [12] 中引入的。我们证明了 $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi) \leq \mathrm{Aut}(Q_i)$（定理4.1）。我们还证明了，当且仅当 ϕ 是中心自同构时，$\varphi \in C_{\mathrm{AAut}(G)}(\phi)$ 才属于 $\mathrm{Aut}(Q_i)$（定理 4.3），其中

$$C_{\mathrm{AAut}(G)}(\phi) = \{\psi \in \mathrm{AAut}(G) \mid \psi\phi = \phi\psi\}$$

是与 ϕ可交换的 G 的反自同构集合。回顾一下，群 G 的中心自同构是指满足对所有 $x \in G$，$x^{-1}\theta(x) \in Z(G)$ 的自同构 θ。

在第5节中，我们考察带有单参数 $c \in G$的词拟群。对于这些拟群，P_i 定义为 $(G, *_i)$ $i = 1,2,3,4$，它们最初发表于 [13]。我们证明，对于给定的

$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，$\varphi$ 诱导出 P_i 的一个自同构，当且仅当 $c^{-1}\varphi^{-1}(c)$ 属于 $Z(G)$（定理 5.1）。我们还证明，若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 且 $c \in \mathrm{Fix}(\varphi)$，则 φ 诱导出P_i 的一个反自同构，当且仅当 $x = [x, c^{-1}],\ x \in G$ （定理 5.2）；其中 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in G \mid \varphi(x) = x\}$ 和$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab,\ a, b \in G$。本文最后给出一个结果并证明：若 $\psi \in \mathrm{AAut}(G)$ 且 $c \in \mathrm{Fix}(\psi)$，则 ψ 诱导出 P_i 的一个自同构，当且仅当 $[c^2, x^{-1}] = 1,\ x \in G$（定理 5.2）。

1. Definitions and Notations

拟群是一个非空集合 Q，带有二元运算 $(x, y) \mapsto x * y$，满足以下公理：

(Q1) $x * x = x$ 对所有 $x \in Q$；(Q2) 对任意 $x, y \in Q$，存在唯一的 $z \in Q$ 使得 $x = z * y$；(Q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ 对所有 $x, y, z \in Q$。

仅满足 $(Q2)$ 和 $(Q3)$ 的代数系统称为架。许多有趣的拟群例子都来自群。

- 若拟群 Q 满足对所有 $x, y \in Q$，均有 $x * y = x$，则称其为平凡拟群。与群不同，平凡拟群可以有任意多个元素。我们用 T_n 表示含 n个元素的平凡拟群。
- 设 $m \in \mathbb{Z}$ 和 G 是群，则二元运算 $x * y = x^{-m}xy^m$ 将 G 变为拟群 $\mathrm{Conj}_m(G)$，称为 G 的-共轭拟群。特别地，对于 $m = 1$，我们有 $\mathrm{Conj}(G)$，称为共轭拟群。若 G 是阿贝尔群，则拟群 $\mathrm{Conj}_m(G)$ 是平凡的。
- 带有二元运算 $x * y = yx^{-1}y$ 的群 G 将集合 G 变为拟群 $\mathrm{Core}(G)$，称为 G 的核幺群。特别地，若 $G = \mathbb{Z}_n$ 是阶为n的循环群，则称其为二面体拟群，记作 R_n。
- 设 G为一个群，且 $\phi \in$ 自同构群(G)。则集合 G 在二元运算 $x * y = \phi(xy^{-1})y$下构成一个拟群 $\mathrm{Alex}(G, \phi)$，称为 G 关于 ϕ的广义亚历山大拟群 。

拟群 Q 称为交换的，如果对所有 $x, y \in Q$都有 $x * y = y * x$。拟群 Q 称为余交换的，如果对所有 $x, y \in Q$都有 $x *^{-1} y = y *^{-1} x$。
双射 $\varphi\colon\ Q \to Q$ 称为拟群 Q 的自同构，如果对每个元素 $x, y \in Q$，等式 $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$成立。 Q 的反自同构 ψ 是一个双射 Q，它逆转 Q的运算次序，即对所有 $x, y \in Q$，有 $\psi(x * y) = \psi(y) * \psi(x)$。

注 1.1. 在 [14]和 [15]中，若双射 $\psi\colon\ Q \to Q$满足对于所有 $x, y \in Q$，$\psi(x *^{-1} y) = \psi(x) *^{-1} \psi(y)$，则称其为反自同构。这个定义与我们的定义并不等价。事实上，若 Q 是对合拟群结，即 $* = *^{-1}$，那么由恒等式 $\psi(x * y) = \psi(x) *^{-1} \psi(y)$ 可知ψ 是自同构。在我们的情形中，由恒等式 $\psi(x * y) = \psi(y) * \psi(x)$ 可知，若 Q是交换拟群结，则 ψ 是自同构。
Luc Ta 在其博客 [16] 中证明，交换拟群结是余交换拟群结，当且仅当它是对合拟群结。因此，本文（以及论文 [14] 和 [15]）中同时为交换拟群结和余交换拟群结的拟群结的任何反自同构，也都是自同构。

对于群 G、自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ 和反自同构 $\psi \in \mathrm{AAut}(G)$，在 [7]中定义了 4 种拟群：

- $Q_1 := (G, *_1) :\ x *_1 y = y\phi(y^{-1}x),\ x, y \in G$ and $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$.
- $Q_2 := (G, *_2) :\ x *_2 y = y\psi(yx^{-1}),\ x, y \in G$ and $\psi \in \mathrm{AAut}(G)$.
- $Q_3 := (G, *_3) :\ x *_3 y = \psi(xy^{-1})y,\ x, y \in G,\ \psi \in \mathrm{AAut}(G)$ and $x\psi(y)x^{-1} = \psi(xyx^{-1})$.
- $Q_4 := (G, *_4) :\ x *_4 y = y\psi(y^{-1}x),\ x, y \in G,\ \psi \in \mathrm{AAut}(G)$ and $x\psi(y)x^{-1} = \psi(xyx^{-1})$.

在 [13], 中定义了单参数词拟群。设 c 是 G中的一个固定元素，则可以在集合 G 上定义 4 种拟群:

- $P_1 := (G, \circ_1)$: $x \circ_1 y = yc^{-1}y^{-1}xc$、 x、 $y \in G$, -
$P_2 := (G, \circ_2)$: $x \circ_2 y = yc^{-1}xy^{-1}c$、 x、 $y \in G$, -
$P_3 := (G, \circ_3)$: $x \circ_3 y = c^{-1}y^{-1}xcy$、 x、 $y \in G$, -
$P_4 := (G, \circ_4)$: $x \circ_4 y = c^{-1}xy^{-1}cy$、 x、 $y \in G$.

2. Automorphisms and antiautomorphisms on 共轭拟群$_m(G)$ and 亚历山大奎德尔$(G,\ \phi\ )$

在本节中，我们确定群 G 的自同构或反自同构在何种条件下会在 m-共轭拟群 $\mathrm{Conj_m}(G)$ 和亚历山大拟群 $\mathrm{Alex}(G,\ \phi)$ 上诱导出自同构或反自同构。

首先，我们证明以下命题，它推广了 [11, 命题 4.7] 中的结果。为此，我们引入由中心元素的所有乘法构成的集合 H ，即

$$H = \{f_a : G \to G \mid a \in Z(G), f_a(x) = ax, x \in G\}.$$

接下来，我们考虑半直积 $H \rtimes \mathrm{Aut}(G)$，其中乘法按以下规则定义:

$$(f_a, \varphi_1)(f_b, \varphi_2) = (f_a.\varphi_1 f_b \varphi_1^{-1}, \varphi_1\varphi_2)$$

对所有 $f_a,\ f_b \in H$ 以及 $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$。

命题 2.1。设 G是一个群。

1) 对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，有 $H \rtimes \mathrm{Aut}(G) \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Conj_m}(G))$。2) 若 $m = 1$ 则 $H \rtimes \mathrm{Out}(G) \leq \mathrm{Out}(\mathrm{Conj}(G))$。

证明。 1) 由于 $f_a,\ \ a \in Z(G)$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Conj_m}(G))$ 的一个自同构，因此有

$$\langle \mathrm{Aut}(G), H\rangle \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Conj_m}(G)).$$

此外

$$\varphi f_a \varphi^{-1}(x) = \varphi(a)x = f_{\varphi(a)}(x),\ x \in G,$$

那么， H 是群 $\langle \mathrm{Aut}(G)\ H\rangle$ 的正规子群。由于对于 G 的每个自同构 φ ， $\varphi(1) = 1$ ， $\mathrm{Aut}(G)$ 与 H 的交集是平凡的。因此

$$H \rtimes \mathrm{Aut}(G) = \langle \mathrm{Aut}(G), H\rangle.$$

2) 我们有

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Conj}(G))/Inn(\mathrm{Conj}(G)) \leq (H \rtimes \mathrm{Aut}(G))/Inn(\mathrm{Conj}(G)) \leq H \rtimes (\mathrm{Aut}(G)/Inn(G)).$$

□

在以下定理中，我们给出一个充分条件，使 G 的反自同构能够诱导 $\mathrm{Conj_m}(G)$ 的自同构。我们还证明，$\mathrm{Conj_m}(G)$ 不存在反自同构。

定理 2.2。 设 G 是一个群，且 $m \in \mathbb{Z}$。那么：
a) 当且仅当对所有 $y \in G$， $y^{2m} \in Z(G)$ 时，交集 $\mathrm{AAut}(G) \cap \mathrm{Aut}(\mathrm{Conj}_m(G))$ 非空。b) 若 G 是非平凡群，则 $\mathrm{Conj_m}(G)$ 不存在反自同构。

证明。 a) 需要验证 $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$ $x, y \in G$，其中 $a * b = a^{-m}ab^m$,$a, b \in G$。右边为

$$\begin{aligned} \psi(x) * \psi(y) &= \psi(y)^{-m}\psi(x)\psi(y)^m \\ &= \psi(y^{-m})\psi(x)\psi(y^m) \\ &= \psi(y^m x y^{-m}) \end{aligned}$$

左边为 $\psi(x * y) = \psi(y^{-m}xy^m)$。等式

$$\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$$

当且仅当 $y^{-m}xy^m = y^m x y^{-m}$ 时成立。因此 $x = y^{2m}xy^{-2m}$，即对于任意 $y \in G$， $y^{2m} \in Z(G)$。
b) 设 ψ 是 $\mathrm{Conj_m}(G)$ 的一个反自同构，且 $x \in G$ 满足 $x \neq 1$。
我们有

$$\psi(x) = \psi(x * 1) = \psi(1) * \psi(x) = \psi(x)^{-m}\psi(1)\psi(x)^m.$$

因此 $\psi(x) = \psi(1)$，这与 ψ 是双射矛盾。

□

推论 2.3. 设 G 是一个群。若 G 无中心，则不存在能诱导出$\mathrm{Conj}(G)$自同构的G反自同构。

下面给出两个重要例子来说明这一推论。

例 2.4. 众所周知，对称群 Σ_n， $n \geq 3$ 的中心是平凡的。因此，根据推论 2.3，对于$n \geq 3$，Σ_n 的任何反自同构都不会在 $\mathrm{Conj}(\Sigma_n)$ 上诱导出自同构。

例 2.5. 如果 S 是一个至少包含两个不同元素的集合，那么自由群 $F(S)$ 的中心是平凡的。在这种情况下， $F(S)$ 的任何反自同构都不会在 $\mathrm{Conj}(F(S))$ 上诱导出自同构。

以下定理给出了群 G 的反自同构能够在亚历山大拟群 $\mathrm{Alex}(G, \phi)$ 上诱导出自同构或反自同构的充分条件。

定理2.6. 设 G 是一个群，$\mathrm{Aut}(\mathrm{Alex}(G, \phi))$ 为广义亚历山大拟群，且 $\psi \in C_{\mathrm{AAut}(G)}(\phi)$。则

a) $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Alex}(G, \phi))$ 当且仅当 ϕ 是中心自同构，b) $\psi \in \mathrm{AAut}(\mathrm{Alex}(G, \phi))$ 当且仅当 G 是阿贝尔的。

证明。 a) 我们将证明： ψ 诱导 $\mathrm{Alex}(G, \phi)$ 的一个自同构，当且仅当 ϕ 是中心自同构。对所有 x, $y \in G$，左端

$$\psi(x * y) = \psi(\phi(x)\phi(y^{-1})y) = \psi(y)\psi\phi(y^{-1})\psi\phi(x)$$

以及右边

$$\psi(x) * \psi(y) = \phi(\psi(x)\psi(y)^{-1})\psi(y) = \phi\psi(x)\phi\psi(y^{-1})\psi(y).$$

令 $\psi\phi = \phi\psi = f$。等式

$$\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$$

当且仅当

$$\psi(y)f(y^{-1})f(x) = f(x)f(y^{-1})\psi(y)$$

这意味着

$$f^{-1}\psi(y)y^{-1}x = xy^{-1}f^{-1}\psi(y)$$

i.e.

$$\begin{aligned} 1 &= x^{-1}yf^{-1}\psi(y)^{-1}xy^{-1}f^{-1}\psi(y) \\ &= x^{-1}yf^{-1}\psi(y^{-1})xy^{-1}xx^{-1}f^{-1}\psi(y) \\ &= [y^{-1}x, x^{-1}f^{-1}\psi(y)] \\ &= [z, z^{-1}y^{-1}f^{-1}\psi(y)] \text{ where } z = y^{-1}x \\ &= [z, y^{-1}\phi^{-1}(y)], \end{aligned}$$

因此 $y^{-1}\phi^{-1}(y) \in Z(G)$。

b) 我们将证明，ψ 诱导 Alex(G, ϕ) 的一个反自同构，当且仅当 G 是阿贝尔的。对于所有 $x, y \in G$，我们有：

$$\psi(x * y) = \psi(\phi(xy^{-1})y) = \psi(y)\psi\phi(xy^{-1})$$

and

$$\begin{aligned} \psi(y) * \psi(x) &= \phi(\psi(y))\phi(\psi(x)^{-1})\psi(x) \\ &= \phi\psi(y)\phi\psi(x^{-1})\psi(x) \\ &= \phi\psi(x^{-1}y)\psi(x). \end{aligned}$$

令 $\psi\phi = \phi\psi = f$。等式

$$\psi(x * y) = \psi(y) * \psi(x)$$

当且仅当

$$\psi(y)f(xy^{-1}) = f(x^{-1}y)\psi(x).$$

由于 f 是反自同构，因此我们有

$$xy^{-1}f^{-1}\psi(y) = f^{-1}\psi(x)x^{-1}y$$

i.e.

$$f^{-1}\psi(y) = yx^{-1}f^{-1}\psi(x)x^{-1}y.$$

取 $x = 1$，得到 $f^{-1}\psi(y) = y^2$。由于 $f^{-1}\psi$是自同构，因此我们有

$$f^{-1}\psi(a)f^{-1}\psi(b) = f^{-1}\psi(ab),\ a, b \in G.$$

这意味着 $a^2b^2 = abab$，即 $ab = ba$，所以 G 是阿贝尔的。

□

类似地，以下定理成立。

定理2.7。设 G 是一个群。交集 $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi) \cap \mathrm{AAut}(\mathrm{Alex}(G, \phi))$ 非空，当且仅当 G 是阿贝尔群。

我们以如下命题结束本节，它推广了结果 [11,命题4.1]。

P命题 2.8. 设 G 为一个群。那么 $G^{op} \rtimes C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi) \leq$ Alex(的自同构群G, ϕ))。

证明。 由于 $F \cong G^{op}$ 对于 $a = 1$，我们可以用与 [11, 命题.4.1].□ 类似的推理来证明。

3. Automorphisms and antiautomorphisms on Core(G)

对于群 G，我们确定 Aut(G)、AAut(G)、Aut(Core (G)) 和 AAut(Core (G)) 之间的联系。现在来证明

命题 3.1. 设 G 是一个群，且 $\psi \in$AAut(G)。那么

a) $\psi \in$ Aut(Core (G)),b) $\psi \in$ AAut(Core (G)) 当且仅当 G 的指数为 3。

证明。 a) 我们来说明 ψ 诱导了 Core (G) 的一个自同构。为此，我们需要验证 $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$ $x, y \in G$。左边等于

$$\psi(x * y) = \psi(y)\psi(x^{-1})\psi(y)$$

右边等于

$$\psi(x) * \psi(y) = \psi(y)\psi(x)^{-1}\psi(y) = \psi(y)\psi(x^{-1})\psi(y).$$

因此，我们有 $\psi \in$ Aut(Core (G))。

b) 对于所有 $x, y \in G$，我们有如下结论：

$$\begin{aligned} \psi(x * y) &= \psi(yx^{-1}y) \\ &= \psi(y)\psi(x^{-1})\psi(y) \\ &= \psi(y)\psi(x)^{-1}\psi(y) \end{aligned}$$

且 $\psi(y) * \psi(x) = \psi(x)\psi(y)^{-1}\psi(x)$. 等式

$$\psi(x * y) = \psi(y) * \psi(x)$$

成立当且仅当

$$\psi(y)\psi(x)^{-1}\psi(y) = \psi(x)\psi(y)^{-1}\psi(x),$$

这意味着 $\psi((x^{-1}y)^3) = 1$ 即 $(x^{-1}y)^3 = 1$。因此， ψ 诱导 Core(G) 的反自同构，当且仅当 G 的指数为 3。

□

类似地，下面的命题成立。

命题 3.2. 设 G 是一个群，且 $\varphi \in$ 自同构群(G)。那么， $\varphi \in$ AAut$(\mathrm{Core}(G))$ 当且仅当G 的指数为 3。

注 3.3。 G 的指数为 3，当且仅当 Core(G) 是交换的（见 [16]）。因此，如果G的指数为 3，那么 AAut(Core (G)) $=$Aut(Core (G))。

在下面的推论中，我们确定群 G 与群 $\mathbb{Z}_3$之间存在同构的条件。

推论 3.4. 设 G 为阶为 n的循环群。那么，当且仅当 $n = 3$时，自同构群(G) ∩自同构群(Core(G)) 非空。

证明。设 G 是一个循环群，且 $\varphi \in \in$Aut(G)。若 $\varphi \in \in$AAut(Core(G))，则根据命题 3.1，G 的指数为 3。因此，G 中各元素阶的最小公倍数为 3。由于 G 是循环群，存在元素 $x \in G$，使得 $x^n = 1$，其中 n 是 G 的阶。因此 n 整除 3，所以 $n = 3$，即 $G \cong \mathbb{Z}_3$。

□

推论 3.5。设 G 是一个中心平凡的群。那么，G 的任何自同构或反自同构都不会在 $Core(G)$ 上诱导出反自同构。

证明。设 G 是一个中心平凡的群，且 φ 是 Aut(G) 或 AAut(G) 中的元素。假设 $\varphi \in \in$ AAut(Core(G))。那么，根据命题 3.1，G 的指数为 3。因此，G 是一个 3-群。因此，G 是幂零的。于是 Z(G) 非平凡，这就产生了矛盾。因此，不存在 G 的自同构或反自同构能在 Core(G) 上诱导出反自同构。□

由于二面体拟群 R_3 是交换的，R_3 的每个反自同构都是 R_3 的自同构。我们证明，阶为 $n \neq 3$ 的二面体拟群 R_n 上不存在反自同构。回顾一下，阶为 n 的二面体拟群 R_n 是一个拟群，其运算为 $a_i * a_j = a_{2j-i \text{ (模 } n)}$，其中 a_i，$a_j \in R_n$。为方便起见，在下述定理中，我们将 $a_{i \text{ (模 } n)}$ 记作 a_i。

定理 3.6. 设 $\mathrm{R_n} = \{a_0, \cdots a_{n-1}\}$ 是满足 $n \neq 3$ 的二面体拟群。那么 $\mathrm{R_n}$ 不存在反自同构。

证明。设 φ 是 R_n 的一个反自同构，满足 $\varphi(a_0) = a_i$ 且 $\varphi(a_1) = a_j$。由于 $\varphi(a_0 * a_1) = \varphi(a_{\overline{2}})$ 且 $\varphi(a_{\overline{1}}) * \varphi(a_0) = a_j * a_{\overline{i}} = a_{2\overline{i}-j}$，我们有 $\varphi(a_2) = a_{2i-j}$。同理——

$$\varphi(a_{\overline{3}}) = \varphi(a_{\overline{1}} * a_{\overline{2}}) = \varphi(a_{\overline{2}}) * \varphi(a_{\overline{1}}) = a_{\overline{2i-j}} * a_j = a_{\overline{3j-2i}},$$

$$\varphi(a_{\overline{4}}) = \varphi(a_{\overline{2}} * a_{\overline{3}}) = \varphi(a_{\overline{3}}) * \varphi(a_{\overline{2}}) = a_{\overline{3j-2i}} * a_{\overline{2i-j}} = a_{\overline{6i-5j}}$$

and

$$\varphi(a_{\overline{5}}) = \varphi(a_{\overline{1}} * a_{\overline{3}}) = \varphi(a_{\overline{3}}) * \varphi(a_{\overline{1}}) = a_{\overline{3j-2i}} * a_{\overline{j}} = a_{\overline{2i-j}}.$$

由于 $a_{\overline{2}} \neq a_{\overline{5}}$，因此 $\varphi(a_2) = \varphi(a_5)$ 矛盾。因此，R_n 不存在反自同构。□

接下来，我们构造 Core(G) 和 (Alex(G, ϕ)) 的自同构，它们不是 G 的自同构。为进行这些构造，我们引入映射集

$$F = \{f_{a,b} : G \to G \mid a, b \in G, f_{a,b}(x) = axb, x \in G\}.$$

在乘法 $f_{a,\ b}f_{c,\ d} = f_{ac,\ db}$，下，该集合构成一个群，其中 a，b，c，$d \in G$。我们将 F 的子群 $\langle f_{a,\ b} \mid a \in$ Fix(ϕ) $b \in G\rangle$ 记为 F'。

命题 3.7。设 G 为一个群，$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$。设 N 是 $G \times G^{op}$ 的一个子集，使得 $N = \{(a, a^{-1}) \mid a \in Z(G)\} \cong Z(G)$。

1） F 是$\mathrm{Aut}(\mathrm{Core}(G))$ 的子群。2） F' 是 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alex}(G,\phi))$ 的子群。3） $F \cong (G \times G^{op})/N$。

证明。 1) 只需证明 $f_{a,b} \in$ Aut(Core(G))。对于所有 $x, y \in G$，我们有

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) * f_{a,b}(y) = (axb) * (ayb) &= aybb^{-1}x^{-1}a^{-1}ayb \\ &= ayx^{-1}yb = f_{a,b}(x * y). \end{aligned}$$

因此 F 是 Aut(Core(G)) 的子群。

2) 我们将证明 $f_{a,b} \in$ Aut(Alex(G, ϕ))，其中 $a \in$ Fix(ϕ)。对于所有 $x, y \in G$，我们有:

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) * f_{a,b}(y) = (axb) * (ayb) &= \phi(axbb^{-1}y^{-1}a^{-1})ayb \\ &= a\phi(xy^{-1})a^{-1}ayb = a\phi(xy^{-1})yb = f_{a,b}(x * y) \end{aligned}$$

因此 $f_{a,b} \in$ 自同构群(Alex(G, ϕ))。

3) 对所有 $(a, b) \in G \times G^{op}$，我们用 $[(a, b)]$ 表示 (a, b) 在 $(G \times G^{op})/N$ 中的等价类。设 $\Phi: F \to (G \times G^{op})/N$ 使得 $\Phi(f_{a,b}) = [(a, b)]$, $a, b \in G$。

对所有 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in G$，我们有:

$$\Phi(f_{a_1,b_1} f_{a_2,b_2}) = \Phi(f_{a_1a_2,b_2b_1}) = [(a_1a_2, b_2b_1)]$$

and

$$\Phi(f_{a_1,b_1})\Phi(f_{a_2,b_2}) = [(a_1, b_1)][(a_2, b_2)] = [(a_1a_2, b_2b_1)].$$

若 $f_{a,b} \in$ 核(Φ)，则 $\Phi(f_{a,b}) = [(a, b)] = [(1, 1)]$。因此存在 $c \in Z(G)$ 使得 $(a, b) = (c, c^{-1})$，即 $b = a^{-1}$, $a \in Z(G)$。故 $f_{a,b}(x) = f_{a,a^{-1}}(x) = x$ 对所有 $x \in G$ 成立，且核(Φ) = {id}，其中 id 是恒等映射。此外，对所有 $[(a, b)] \in (G \times G^{op})/N$，我们有 $a, b \in G$ 与 $f_{a,b} \in F$。因此 $\Phi(f_{a,b}) = [(a, b)]$ 且 $[(a, b)] \in$像 Φ。故像 $\Phi = (G \times G^{op})/N$. 至此证明完成。

□

命题 3.8. 设 G 是一个群， N 是一个集合，使得 $N = \{(a, a^{-1}) \mid a \in Z(G)\} \cong Z(G)$。那么 $((G \times G^{op})/N) \rtimes$ Out(G) $\leq$ Aut(Core(G)).

证明。只需证明 $F \rtimes$ Out(G) $\leq$ Aut(Core(G))。根据命题 3.7，有 $\langle$Out(G) $F\rangle \leq$ Aut(Core(G))。设 a, $b \in G$ 且 $\varphi \in$ Out(G)。对于 $x \in G$，有

$$\varphi^{-1} f_{a,b} \varphi(x) = \varphi^{-1}(a)x\varphi^{-1}(b) = f_{\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)}(x).$$

因此， F 是群 $\langle$Out(G) $F\rangle$ 的正规子群。由于 G 的每个自同构 φ 都满足 $\varphi(1) = 1$, Out(G) 与 F 的交集就是 G 的内自同构群。因此 $F \rtimes$Out(G) $\leq$ Aut(Core(G))

. □

我们给出一个与 [11, Theorem.4.2] 类似的定理，适用于无 2-挠的阿贝尔群。

定理 3.9。 设 G 是一个无 2-挠的阿贝尔群。那么 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Core}(G)) \cong G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$.

证明。设 e 是 G 的单位元，并考虑映射 $\Phi: G \rtimes$Aut(G) $\to$ Aut(Core(G))，其定义为 $\Phi((a, h)) = t_a h$, 其中 $t_a: G \to G$ 定义为 $t_a(b) = ba$, 对所有 $b \in G$ 均成立。根据[11, 命题 4. 1]， Φ 是一个同态。

我们证明 Φ是单射。

$$\Phi(a_1, h_1) = \Phi(a_2, h_2) \text{ i.e. } t_{a_1}h_1 = t_{a_2}h_2.$$

因此 $t_{a_1}h_1(e) = t_{a_2}h_2(e)$，这等价于 $a_1e = a_2e$，即 $a_1 = a_2$。所以 $h_1 = h_2$，即 $(a_1, h_1) = (a_2, h_2)$。

现在，我们证明 Φ 是满射。设 $f \in$ 自同构群(Core(G))。则对所有 $x, y \in G$，我们有 e

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \text{ i.e. } f(xy^{-1}x) = f(x)f(y)^{-1}f(x).$$

定义 h： $G \to G$，由 $h(x) = f(x)f(e)^{-1}$给出。由于 f是双射，要证明 $h \in$自同构群(G)，只需证明 $f(xy) = f(x)f(y)f(e)^{-1}$。
左端

$$\begin{aligned} f(xy) &= f(x(xy^{-1})^{-1}x) \\ &= f(x)f(xy^{-1})^{-1}f(x) = f(x)^2f(xy^{-1})^{-1}. \quad (1) \end{aligned}$$

另一方面，我们有 $f(xy) = f(yx) = f(y)^2f(yx^{-1})^{-1}$. (2) 由于

$$\begin{aligned} f(xy^{-1}) &= f(e(yx^{-1})^{-1}e) \\ &= f(e)f(yx^{-1})^{-1}f(e) = f(e)^2f(yx^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

多重 将 (1) 和 (2) 相乘，并代入 $f(xy^{-1})$，得到 $f(xy)^2 = f(x)^2f(y)^2f(e)^{-2}$，即 .

$$[f(xy)(f(x)f(y)f(e)^{-1})^{-1}]^2 = e.$$

由于 G 没有 2-挠，我们有

$$f(xy)(f(x)f(y)f(e)^{-1})^{-1} = e, \text{ i.e. } f(xy) = f(x)f(y)f(e)^{-1}.$$

因此 $h \in$Aut(G)。由于 $h = f(e)^{-1}f$ 等价于 $f = f(e)h \in \Phi(G \rtimes \text{Aut}(G))$ Φ 是满射的。□

4. Automorphisms and antiautomorphisms of some analogous of Alex(G, ϕ)

对于第 1 节定义的拟群，我们研究以下问题：Aut(G)、AAut(G)、Aut(Q_i) 和 AAut(Q_i) 之间有什么联系?

定理4.1。 设 G 是一个群，且 $\varphi \in C_{\text{Aut}(G)}(\phi)$。则

1) $C_{\text{Aut}(G)}(\phi) \leq$自同构群($Q_i$) 对于 $i = 1, 2,3, 4$。2) $\varphi \in \text{AAut}(Q_i)$ 当且仅当 G 是阿贝尔群，对于 $i = 1,2,3)$ $\varphi \in \text{AAut}(Q_i)$ 当且仅当 $[G, G]$ 是 G的指数为3 的中心子群，对于$i = 3,4$。

证明。 1) 我们证明，对于 $i = 1, 2,3, 4$，有 $\varphi \in$Aut(Q_i(G))。

- 设 $i = 1$，对于所有 $x, y \in G$，我们有 $\varphi(x *_1 y) = \varphi(y\phi(y^{-1}x)) = \varphi(y)\varphi\phi(y^{-1}x)$，并且

$$\begin{aligned} \varphi(x) *_1 \varphi(y) = \varphi(y)\phi(\varphi(y)^{-1}\varphi(x)) = \varphi(y)\phi(\varphi(y^{-1})\varphi(x)) &= \varphi(y)\phi(\varphi(y^{-1}x)) \\ &= \varphi(y)\phi\varphi(y^{-1}x) \\ &= \varphi(x *_1 y). \end{aligned}$$

因此 $\varphi \in$Aut(Q_1(G))，即 $C_{\text{Aut}(G)}(\phi) \leq$ Aut(Q_1(G))。

- 设 $i = 2$，对所有 $x, y \in G$，我们有 $\varphi(x *_2 y) = \varphi(y\phi(yx^{-1})) = \varphi(y)\varphi\phi(yx^{-1})$ 且

$$\varphi(x) *_2 \varphi(y) = \varphi(y)\phi(\varphi(y)\varphi(x)^{-1}) = \varphi(y)\phi\varphi(yx^{-1}).$$

Hence $\varphi \in \text{Aut}(Q_2(G))$ i.e. $C_{\text{Aut}(G)}(\phi) \leq \text{Aut}(Q_2(G))$.

- 设 $i=3$，对所有 $x,\ y\in G$，我们有 $\varphi(x*_3 y)=\varphi(\phi(xy^{-1})y)=\varphi\phi(xy^{-1})\varphi(y)$，并且

$$\varphi(x)*_3\varphi(y)=\phi(\varphi(x)\varphi(y)^{-1})\varphi(y)=\phi\varphi(xy^{-1})\varphi(y).$$

因此 $\varphi\in$自同构群$(Q_3(G))$，即 $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi)\leq$ 自同构群$(Q_3(G))$。

- 设 $i=4$，对所有 $x,\ y\in G$，我们有 $\varphi(x*_4 y)=\varphi(y\phi(y^{-1}x))=\varphi(y)\varphi\phi(y^{-1}x)$，并且

$$\varphi(x)*_4\varphi(y)=\varphi(y)\phi(\varphi(y)^{-1}\varphi(x))=\varphi(y)\phi\varphi(y^{-1}x).$$

因此 $\varphi\in$Aut$(Q_4(G))$，即 $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\phi)\leq$ Aut$(Q_4(G))$。

在证明 2) 和 3) 的过程中，假设 $f=\varphi\phi=\phi\varphi$。

2) 我们证明，$\varphi\in$ AAut$(Q_i(G))$ 当且仅当 G 是阿贝尔的，其中 $i=1,\ 2$。

- Let $i=1$，对于所有 $x,\ y\in G$，我们有 $\varphi(x*_1 y)=\varphi(y\phi(y^{-1}x))=\varphi(y)\varphi\phi(y^{-1}x)$ 并且

$$\begin{aligned}\varphi(y)*_1\varphi(x)=\varphi(x)\phi(\varphi(x)^{-1}\varphi(y)) &= \varphi(x)\phi(\varphi(x^{-1}y))\\ &= \varphi(x)\phi\varphi(x^{-1}y).\end{aligned}$$

等式

$$\varphi(x*_1 y)=\varphi(y)*_1\varphi(x)$$

成立当且仅当

$$\varphi(y)\varphi\phi(y^{-1}x)=\varphi(x)\phi\varphi(x^{-1}y)$$

i.e.

$\varphi(y)f(y^{-1}x)=\varphi(x)f(x^{-1}y)$。对两边作用 f^{-1}，得到

$$f^{-1}\varphi(y)y^{-1}x=f^{-1}\varphi(x)x^{-1}y \text{ i.e. } f^{-1}\varphi(x^{-1}y)=(x^{-1}y)^2.$$

若 $x=1$，则 $f^{-1}\varphi(y)=y^2$。因此，G 是阿贝尔的。

- 令 $i=2$，对于所有 $x,\ y\in G$，我们有 $\varphi(x*_2 y)=\varphi(y\phi(yx^{-1}))=\varphi(y)\varphi\phi(yx^{-1})$ 并且

$$\begin{aligned}\varphi(y)*_2\varphi(x)=\varphi(x)\phi(\varphi(x)\varphi(y)^{-1}) &= \varphi(x)\phi(\varphi(xy^{-1}))\\ &= \varphi(x)\phi\varphi(xy^{-1}).\end{aligned}$$

等式

$$\varphi(x*_2 y)=\varphi(y)*_2\varphi(x)$$

成立当且仅当

$$\varphi(y)\varphi\phi(yx^{-1})=\varphi(x)\phi\varphi(xy^{-1}).$$

对两边作用 f^{-1}，得到

$$f^{-1}\varphi(x^{-1}y)=(xy^{-1})^2.$$

取 $x=1$，得到 $f^{-1}\varphi(y)=(y^{-1})^2$。由于 $f^{-1}\varphi$ 是反自同构，对于所有 $a,\ b\in G$：

$$(ab)^{-1}(ab)^{-1}=b^{-1}b^{-1}a^{-1}a^{-1}$$

i.e.

$$b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}=b^{-1}b^{-1}a^{-1}a^{-1}.$$

因此 $a^{-1}b^{-1}=b^{-1}a^{-1}$，即 G 是阿贝尔的。

3) 我们证明，当且仅当 $[G,G]$ 是 G 的指数为 3 的中心子群时，$\varphi\in$ AAut(Q_i)，对于 $i=3,\ 4$。

- Let $i = 3$, 对于所有 $x, y \in G,$, 我们有 $\varphi(x *_3 y) = \varphi(\phi(xy^{-1})y) = \varphi\phi(xy^{-1})\varphi(y)$, 并且

$$\varphi(y) *_3 \varphi(x) = \phi(\varphi(y)\varphi(x)^{-1})\varphi(x) = \phi\varphi(yx^{-1})\varphi(x).$$

等式

$$\varphi(x *_3 y) = \varphi(y) *_3 \varphi(x)$$

成立当且仅当

$$f^{-1}\varphi(yx^{-1}) = (yx^{-1})^2,$$

其中 $f = \varphi\phi = \phi\varphi$。由于 $f^{-1}\varphi$ 是一个反自同构，我们有 $(ab)^2 = b^2a^2, \quad a, \quad b \in G$，即 $abab = b^2a^2$。因此，左乘 b^{-1} 并左乘 a^{-1} ，得到

$$a^{-1}b^{-1}abab = a^{-1}ba^2$$

i.e.

$$[a, b]ab = b(b^{-1}a^{-1}ba)a = b[b, a]a.$$

由于 $[b, a] = [a, b]^{-1}$，我们有 $[a, b]^2ab = ba$ ，这等价于 $[a, b]^2 = b^{-1}a^{-1}ba$ ，即 $[a, b]^3 = 1$。

Q_4 的证明类似。

□

类似地，下列定理成立。

定理4.2. 设 G 是一个群，且 $\psi \in C_{\mathrm{AAut}(G)}(\phi)$。则

1) $\psi \in \mathrm{AAut}(Q_i)$ 当且仅当 G 是阿贝尔的，对于 $i = 1$，2，2) $\psi \in \mathrm{AAut}(Q_i)$ 当且仅当 $[G, G]$ 是 G的指数为3 的中心子群，对于$i = 3$，4。

接下来，我们给出群 G 的反自同构诱导 Q_i, $i =$ 1,2, 3, 4的自同构的条件。

定理4.3. 设 G 是一个群，且 $\psi \in C_{\mathrm{AAut}(G)}(\phi)$。则

1) $\psi \in \mathrm{Aut}(Q_i)$ 当且仅当 ϕ 是中心自同构，对于 $i = 1$，2 .
2) $\psi \in$ 自同构群(Q_i) 当且仅当 $y\phi^{-1}(y) \in Z(G)$，其中 $i =$ 3,4。

证明。 在整个证明过程中，设 $\psi\phi = \phi\psi = f$.

1) 我们证明，对于 $i =$ 1,2, $\psi \in$ 属于自同构群(Q_i) 当且仅当 ϕ 是一个中心自同构。- 设 $i = 1$，对所有 $x, y \in G$，我们有 $\psi(x *_1 y) = \psi(y\phi(y^{-1}x)) = \psi\phi(y^{-1}x)\psi(y)$，并且

$$\begin{aligned} \psi(x) *_1 \psi(y) &= \psi(y)\phi(\psi(y)^{-1}\psi(x)) \\ &= \psi(y)\phi(\psi(y^{-1})\psi(x)) = \psi(y)\phi\psi(xy^{-1}). \end{aligned}$$

等式

$$\psi(x *_1 y) = \psi(x) *_1 \psi(y)$$

成立当且仅当

$$f^{-1}\psi(y)y^{-1}x = xy^{-1}f^{-1}\psi(y)$$

i.e.

$$\begin{aligned} 1 &= x^{-1}yf^{-1}\psi(y^{-1})xy^{-1}f^{-1}\psi(y) \\ &= [y^{-1}x, x^{-1}f^{-1}\psi(y)] \\ &= [z, z^{-1}y^{-1}f^{-1}\psi(y)] \text{ where } z = y^{-1}x \\ &= [z, z^{-1}y^{-1}\phi^{-1}(y)] \\ &= [z, y^{-1}\phi^{-1}(y)], \end{aligned}$$

因此 $y^{-1}\phi^{-1}(y) \in Z(G)$。

- 设 $i = 2$, 对所有 $x, y \in G$, 我们有 $\psi(x *_2 y) = \psi(y\phi(yx^{-1})) = \psi\phi(yx^{-1})\psi(y)$ 且

$$\psi(x) *_2 \psi(y) = \psi(y)\phi(\psi(y)\psi(x^{-1})) = \psi(y)\phi\psi(x^{-1}y).$$

等式

$$\psi(x *_2 y) = \psi(x) *_2 \psi(y)$$

成立当且仅当 $f^{-1}\psi(y)x^{-1}y = yx^{-1}f^{-1}\psi(y)$, 即

$$\begin{aligned} 1 &= y^{-1}xf^{-1}\psi(y^{-1})yx^{-1}f^{-1}\psi(y) \\ &= [x^{-1}y, y^{-1}f^{-1}\psi(y)] \\ &= [z, y^{-1}\phi^{-1}(y)] \text{ where } z = x^{-1}y, \end{aligned}$$

因此 $y^{-1}\phi^{-1}(y) \in Z(G)$。

2) 我们证明, 对于 $i = 3,4$, $\psi \in \mathrm{Aut}(Q_i)$ 当且仅当 $y\phi^{-1}(y) \in Z(G)$。

设 $i = 3$, 对于所有 $x, y \in G$, 有 $\psi(x *_3 y) = \psi(\phi(xy^{-1})y) = \psi(y)\psi\phi(xy^{-1})$, 并且

$$\psi(x) *_3 \psi(y) = \phi(\psi(x)\psi(y^{-1}))\psi(y) = \phi\psi(y^{-1}x))\psi(y).$$

等式

$$\psi(x *_3 y) = \psi(x) *_3 \psi(y)$$

成立当且仅当

$$f^{-1}\psi(y)xy^{-1} = y^{-1}xf^{-1}\psi(y)$$

i.e.

$$\begin{aligned} 1 &= yx^{-1}f^{-1}\psi(y^{-1})y^{-1}xf^{-1}\psi(y) \\ &= yx^{-1}f^{-1}\psi(y^{-1})y^{-1}xy^{-1}yf^{-1}\psi(y) \\ &= [xy^{-1}, yf^{-1}\psi(y)] \\ &= [z, y\phi^{-1}(y)] \text{ where } z = xy^{-1}, \end{aligned}$$

因此 $y\phi^{-1}(y) \in Z(G)$。对 Q_4 的证明类似。

□

5. Automorphisms and antiautomorphisms on verbal quandles with oneparameter

本节研究以下问题: $\mathrm{Aut}(G)$、$\mathrm{AAut}(G)$、$\mathrm{Aut}(P_i)$ 和 $\mathrm{AAut}(P_i)$ 之间有什么联系?

这些拟群 P_i 是在第 1 节中定义的。

定理 5.1. 设 G 为一个群，$\varphi \in$ 自同构群(G) 和 $P_i(G)$ 为参数为 c 的词 ***quandle***。则 φ 诱导出 $P_i(G)$ 的一个自同构，当且仅当 $c^{-1}\varphi^{-1}(c) \in Z(G)$。

证明。我们声称，上述定义的所有词拟群都满足这一结论。因此，只需对任意一个词拟群证明此结论。

设 $\varphi \in$Aut(G) 和 $P_1(G)$ 是一个由下式定义的单参数词拟群

$$x \circ_1 y = yc^{-1}y^{-1}xc,\ x, y \in G.$$

我们将证明 d φ 在 $P_i(G)$ 上诱导一个自同构，当且仅当 $c^{-1}\varphi^{-1}(c) \in Z(G)$ 。

$$\varphi(x \circ_1 y) = \varphi(yc^{-1}y^{-1}xc) = \varphi(y)\varphi(c^{-1}y^{-1}xc)$$

and

$$\varphi(x) \circ_1 \varphi(y) = \varphi(y)c^{-1}\varphi(y^{-1})\varphi(x)c = \varphi(y)\varphi(\varphi^{-1}(c^{-1})y^{-1}x\varphi^{-1}(c)).$$

等式

$$\varphi(x \circ_1 y) = \varphi(x) \circ_1 \varphi(y)$$

当且仅当成立

$$c^{-1}y^{-1}xc = \varphi^{-1}(c^{-1})y^{-1}x\varphi^{-1}(c)$$

i.e.

$$y^{-1}x = \varphi^{-1}(c)c^{-1}y^{-1}xc\varphi^{-1}(c^{-1}).$$

因此，当且仅当时，φ 在 $P_1(G)$ 上诱导自同构

$$y^{-1}x = (c\varphi^{-1}(c^{-1}))^{-1}y^{-1}xc\varphi^{-1}(c^{-1}) \text{ i.e. } c\varphi^{-1}(c^{-1}) \in Z(G).$$

□

定理 5.2. 设 G 是一个群，$c \in G$ 和 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$。

1) 若 $\varphi \in$ 自同构群(G) 且 $c \in$ 不动点集(φ)，则 φ 当且仅当时在 P_i 上诱导反自同构 $x = [x, c^{-1}]$，对所有 $x \in G$ 均成立。2) 若 $\psi \in$AAut(G) 且 $c \in$不动点集(ψ)，则 ψ 当且仅当时在 P_i 上诱导自同构$[c^2, x^{-1}] = 1$，对所有 $x \in G$ 均成立。

证明。**1)** 我们证明，φ 当且仅当满足 $x = [x, c^{-1}],\ x \in G,\ i =$ 1,2, 3, 4 时，在 P_i 上诱导反自同构。

- 设 $i = 1$，对于 $x, y \in G$，我们有

$$\varphi(x \circ_1 y) = \varphi(yc^{-1}y^{-1}xc)$$

and

$$\varphi(y) \circ_1 \varphi(x) = \varphi(x)c^{-1}\varphi(x^{-1})\varphi(y)c = \varphi(xc^{-1}x^{-1}yc).$$

等式

$$\varphi(x \circ_1 y) = \varphi(y) \circ_1 \varphi(x)$$

当且仅当成立

$$x^{-1}c^{-1}y^{-1}xc = c^{-1}x^{-1}yc.$$

Thus

$$cx^{-1}yc^{-1}y^{-1}x = x^{-1}y.$$

取 $y = 1$ 可得

$$x = x^{-1}cxc^{-1} \text{ i.e. } x = [x, c^{-1}],\ x \in G.$$

- 设 $i=2$，对于 $x,y\in G$，我们有

$$\varphi(x\circ_2 y)=\varphi(yc^{-1}xy^{-1}c)$$

and

$$\varphi(y)\circ_2\varphi(x)=\varphi(x)c^{-1}\varphi(y)\varphi(x^{-1})c=\varphi(xc^{-1}yx^{-1}c).$$

等式

$$\varphi(x\circ_2 y)=\varphi(y)\circ_2\varphi(x)$$

当且仅当成立

$$yc^{-1}xy^{-1}=xc^{-1}yx^{-1}\text{ i.e. }xy^{-1}=x^{-1}ycy^{-1}xc^{-1}.$$

取 $y=1$ 可得 $x=x^{-1}cxc^{-1}$.

- 令 $i=3$，对于 $x,\ y\in G$，我们有

$$\varphi(x\circ_3 y)=\varphi(c^{-1}y^{-1}xcy)$$

and

$$\varphi(y)\circ_3\varphi(x)=c^{-1}\varphi(x)^{-1}\varphi(y)c\varphi(x)=\varphi(c^{-1}x^{-1}ycx).$$

等式

$$\varphi(x\circ y)=\varphi(y)\circ_3\varphi(x)$$

成立当且仅当

$$c^{-1}y^{-1}xcy=c^{-1}x^{-1}ycx\text{ i.e. }y^{-1}x=x^{-1}ycxy^{-1}c^{-1}.$$

取 $y=1$，得到 $x=x^{-1}cxc^{-1}$.

- 令 $i=4$，对于 $x,\ y\in G$，我们有

$$\varphi(x\circ_4 y)=\varphi(c^{-1}xy^{-1}cy)$$

and

$$\varphi(y)\circ_4\varphi(x)=c^{-1}\varphi(y)\varphi(x^{-1})c\varphi(x)=\varphi(c^{-1}yx^{-1}cx).$$

等式

$$\varphi(x\circ_4 y)=\varphi(y)\circ_4\varphi(x)$$

当且仅当成立

$$c^{-1}xy^{-1}cy=c^{-1}yx^{-1}cx.$$

因此 $xy^{-1}c=yx^{-1}cxy^{-1}$ 即 $xy^{-1}=[xy^{-1},c^{-1}]$。

2) 我们证明，ψ 在 P_i 上诱导一个自同构，当且仅当 $[c^2,x^{-1}]=1,\ x\in G$。- 令 $i=1$，对于 $x,\ y\in G$，我们有

$$\psi(x\circ_1 y)=\psi(yc^{-1}y^{-1}xc)$$

and

$$\psi(x)\circ_1\psi(y)=\psi(y)c^{-1}\psi(y)^{-1}\psi(x)c=\psi(cxy^{-1}c^{-1}y).$$

等式

$$\psi(x\circ_1 y)=\psi(x)\circ_1\psi(y)$$

当且仅当成立

$$yc^{-1}y^{-1}xc=cxy^{-1}c^{-1}y.$$

取 $y=1$ 可得 $c^{-2}xc^2x^{-1}=1$，即 $[c^2,x^{-1}]=1$。——
令 $i=2$，对于 $x,\ y\in G$，我们有

$$\psi(x\circ_2 y)=\psi(yc^{-1}xy^{-1}c)$$

and

$$\psi(x)\circ_2\psi(y)=\psi(y)c^{-1}\psi(x)\psi(y^{-1})c=\psi(cy^{-1}xc^{-1}y).$$

等式

$$\psi(x\circ_2 y)=\psi(x)\circ_2\psi(y)$$

成立当且仅当

$$yc^{-1}xy^{-1}c=cy^{-1}xc^{-1}y.$$

取 $y=1$ 可得 $c^{-2}xc^2x^{-1}=1$，即 $[c^2,x^{-1}]=1$。
- 设 $i=3$，对于 $x,\ y\in G$，我们有

$$\psi(x\circ_3 y)=\psi(c^{-1}y^{-1}xcy)$$

and

$$\psi(x)\circ_3\psi(y)=c^{-1}\psi(y)^{-1}\psi(x)c\psi(y)=\psi(ycxy^{-1}c^{-1}).$$

等式

$$\psi(x\circ_3 y)=\psi(x)\circ_3\psi(y)$$

成立当且仅当

$$c^{-1}y^{-1}xcy=ycxy^{-1}c^{-1}.$$

取 $y=1$，得到 $c^{-2}xc^2x^{-1}=1$，即 $[c^2,x^{-1}]=1$。
- 令 $i=4$，对于 $x,\ y\in G$，我们有

$$\psi(x\circ_4 y)=\psi(c^{-1}xy^{-1}cy)$$

and

$$\psi(x)\circ_4\psi(y)=c^{-1}\psi(x)\psi(y)^{-1}c\psi(y)=\psi(ycy^{-1}xc^{-1}).$$

等式

$$\psi(x\circ_4 y)=\psi(x)\circ_4\psi(y)$$

成立当且仅当

$$c^{-1}xy^{-1}cy=ycy^{-1}xc^{-1}.$$

取 $y=1$，得到 $c^{-2}xc^2x^{-1}=1$，即 $[c^2,x^{-1}]=1$。

□

致谢。 我非常感谢新西伯利亚国立大学的 V. G. Bardakov 教授，他是本项工作的指导者，感谢他在开展这项工作期间给予的帮助、耐心和关注。我还要感谢 M. V. Neshchadim、P. Sokolov 和 Luc Ta 提供的宝贵建议。还要感谢埃瓦里斯特·伽罗瓦研讨会的参与者。

References

[1] Joyce D., *classifying invariant of knots, the knot quandle,"*《纯粹与应用代数杂志》, 第23卷，第1期, 37–65页（1982年）。[2] Matveev S.V., *Distributive groupoids in knot theory,"*《数学文集》, 第119卷，第1期, 78–88页（1982年）。[3] Bardakov V.G., Nasybullov T., Singh M., *General constructions of biquandles and their symmetries,"*《纯粹与应用代数杂志》, 第226卷，第7期, 106936（2022年）。[4] Taniguchi Y., *Good involutions of generalized Alexander quandles,"*《纽结理论及其分歧》, 第 32 卷，第 12 期，2350081 （ 2023 年）。[5] Andruskiewitsch N., Grana M., *From racks to pointed Hopf algebras,"*《数学进展》, 第178卷，第2期，177–243页（2003年）。[6] Bardakov V.G., Singh M., *Quandle cohomology, extensions and automorphisms,"*《代数杂志》, 第585卷，558-591页（2021年）。[7] Bardakov V.G., Nasybullov T., Singh M., *Automorphisms groups of quandles and related groups,"*《数学月刊》, 第189卷，第1期，1-21页（2019年）。[8] Karmakar B., Saraf D., Singh M., *Automorphisms, cohomology and extensions of symmetric quandles,"* arXiv 预印本 arXiv:2407.02971（2024年）。[9] Singh M., *Residual finiteness and profinite properties of automorphism groups of quandles,"*《拓扑学及其应用》, 第373卷，109538（2025年）。[10] Elhamdadi M., MacQuarrie J., Restrepo R., *Automorphism groups of Quandles,"*《代数及其应用杂志》, 第11卷，第01期，文章编号1250008（2012年）。[11] Bardakov V.G., P. Dey., Singh M., *Automorphism groups of quandles arising from groups,"*《数学月刊》, 第184卷，519–530页（2017年）。[12] Simonov A.A., Neshchadim M.V., Borodin A. N., *Constuctions of quandles over groups and rings,"*《西伯利亚数学杂志》, 第65卷，第3期，627"638（2024年）。[13] Markhinina E., Nasybullov T., *Verbal quandles with one parameter,"*《拓扑学及其应用》, 第362卷，109–203页（2025年）。[14] Eva Horvat., 纽结对称性与基本拟群，2017年。预印本，arXiv:1707.04824 [math.GT]. [15] Luc Ta., 共轭子拟群的良好对合，2025年。预印本，arXiv:08090v5 [math.GT]. [16] Luc Ta., 交换拟群和中介拉丁拟群的结构理论，2026年1月20日。博客文章

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk 630090, Russia.
Email address: b.sangare@g.nsu.ru