arXiv:2602.03083v1 [math.NA] 3 Feb 2026

无界域上的缩放优化谱逼近：广义厄米特与拉盖尔方法

Hao Hu[1,2] 和 HaiJun Yu[2,1*]

[1]中国科学院大学数学科学学院，北京市街道，100049，中国。[2]数学科学国家重点实验室（SKLMS）和科学与工程计算国家重点实验室（LSEC），中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所，北京，100190，中国。

*通讯作者。电子邮箱：hyu@lsec.cc.ac.cn；贡献作者：huhao@lsec.cc.ac.cn；

摘要

我们提出了一种针对缩放广义拉盖尔逼近和广义厄米特逼近的新型误差分析框架。该框架可视为奈奎斯特–香农采样定理的一种类比：它刻画了拉盖尔或厄米特采样点能够有效捕捉的空间与频率带宽。只要函数满足相应的带宽约束，就能在该框架下得到准确近似。与经典理论相比，所提出的框架显著更强大——它不仅为选择最优缩放因子提供了系统性指导，还能预测经典方法无法捕捉的根指数收敛及其他复杂收敛行为。借助这一框架，我们对厄米特逼近与拉盖尔逼近进行了详细的比较研究。我们发现，具有相似衰减与振荡特征的函数，其收敛率仍可能存在显著差异。此外，基于两组串接的拉盖尔函数的逼近，相较于基于单组厄米函数的逼近，可能具有显著优势。

关键词：广义拉盖尔函数、广义厄米特函数、无界域上的谱方法、最优缩放因子、误差分析、厄米特–高斯求积、拉盖尔–高斯求积

数学学科分类：65N35，33C45，42C05，41A10，41A05，65D32

1 引言

谱方法以正交多项式或函数作为基集，是偏微分数值求解中应用最为广泛的方法之一

方程（偏微分方程）。它们以其高近似精度而著称，在科学计算和工程模拟中发挥着关键作用。

在无界区域上，拉盖尔多项式和埃尔米特多项式尤其适用。然而，使用拉盖尔多项式（分别为埃尔米特多项式）求解定义在半直线（分别为整个实数轴）上的微分方程时，会面临若干挑战 [1–3]：1）在浮点运算中计算高阶拉盖尔多项式或埃尔米特多项式时，会遇到溢出问题，并因舍入误差而导致不稳定。2）直接使用拉盖尔多项式和埃尔米特多项式，只能在相对较小的区间内获得精确近似，因为误差估计通常是在配备快速衰减权重的加权索博列夫空间中推导出来的。3）与其他在有界区域上正交的多项式族相比，标准拉盖尔多项式和埃尔米特多项式的分辨率特性较差。

在解决这些问题方面已经取得了显著进展。为应对第一个挑战，Funaro 引入了缩放拉盖尔函数 [2]。Huang 和 Yu 最近提出了进一步的改进 [4]。针对第二个挑战，Shen 倡导使用拉盖尔函数而非多项式作为基函数来构造谱方法 [3]„ 这一方法也部分缓解了第一个挑战。关于第三个问题，研究表明，通过选择适当的缩放因子，埃尔米特和拉盖尔多项式/函数的近似质量都能得到显著改善 [3, 5]。得益于这些突破，拉盖尔和埃尔米特谱方法的稳定性和效率得到了大幅提升，因而广泛应用于各种科学与工程领域。

例如，研究者已开发出稳定的拉盖尔方法，用于求解半无限区间上的非线性偏微分方程 [6]。拉盖尔多项式和函数也被用于构造复合谱方法或谱元方法，以求解无界区域上的问题 [7–13]。此外，拉盖尔方法还被用于设计求解常微分方程的谱数值积分器 [14, 15]，、用于玻色–爱因斯坦凝聚体的高效时间分裂拉盖尔–厄米特谱方法 [16, 17]，，以及用于最优控制 [18] 和分数阶微分方程 [19, 20]的方法。

同样，厄米特谱方法已广泛应用于众多领域，包括无界区域上的薛定谔方程 ¨ [16, 21, 22]，、Vlasov 方程和动力学方程 [23–29]，、高维偏微分方程和随机微分方程 [30, 31]，、流体动力学和不确定性量化 [32–39]，，甚至电子设计 [40, 41],等。

由于标准拉盖尔多项式与其他正交多项式族相比表现出相对较差的分辨率性质——厄米特多项式也具有这一特征 [1]——长期以来人们认为，适当的坐标缩放可以显著提升基于拉盖尔和厄米特的谱方法的性能 [3, 5]。在实践中，已发展出许多纳入尺度变换的算法。例如，Ma等人 [42] 针对抛物型偏微分方程提出了时变缩放，而Xia等人 [43]引入了频率依赖缩放策略。

尽管如此，目前仍缺乏一个用于选择最优缩放因子并明确揭示逼近误差如何依赖于该因子的系统性框架。从根本上说，这一困难源于经典逼近误差理论的根本局限，这些理论通常是在有限光滑函数空间中表述的。这些理论不仅无法刻画缩放拉盖尔函数的逼近能力，也无法预测在逼近解析函数时所观察到的根指数收敛速率 [44]，，更不用说其他更为复杂的收敛行为。

厄米特逼近在选择最优缩放因子和刻画收敛性方面面临类似挑战——我们此前的工作 [45] 已系统地解决了这些问题。本文所讨论的拉盖尔情形在分析上更加困难，而本文的结果大幅推广了 [45] 中关于厄米特方法的研究成果。

具体而言，我们提出了一种用于尺度变换拉盖尔近似的新型误差分析框架。该框架可视为奈奎斯特–香农采样定理的一个类似形式。我们精确刻画了拉盖尔采样点能够捕获的空间（物理）带宽和频率带宽。只要目标函数满足相应的带宽约束，就能在该框架下实现高保真近似。如下文所示，我们的刻画在若干关键方面超越了经典理论。

首先，我们的框架为尺度变换提供了系统性的指导。采用最优缩放因子，可以显著提高广泛一类函数的广义厄米特或拉盖尔近似的收敛率。如第 6 节所示，对于原本在标准厄米特/拉盖尔近似下呈现次几何收敛的函数，通过最优尺度变换可将其加速至几何收敛。同样，对于代数收敛的函数，最优尺度变换可使收敛阶加倍。此外，通过适当的尺度变换，可以有效缓解厄米特/拉盖尔高斯求积相较于有界区域上的高斯求积效率低下这一广为人知的问题 [46, 47]（见第 5.3.3 节）。值得注意的是，Kazashi 等人 [47] 证明，即使采用其他求积权重，未经尺度变换的高斯–埃尔米特节点仍然存在固有的次优性——这一发现凸显了尺度变换在提升近似性能方面的关键作用。

其次，我们的框架能够成功预测根指数收敛及其他超出经典理论适用范围的复杂收敛行为。尽管解析函数的厄米特和拉盖尔近似的根指数收敛直到最近才得到严格确立 [44, 48]，，我们的分析揭示了其成因：它直接源于函数傅里叶变换的指数衰减率。此外，我们的方法还能够推导出非根指数收敛率（见第 6.2 节），而文献中对此类收敛率仍缺乏严格的理论证明。耐人寻味的是，Shen 等人 [49–51] 报告称，在预渐近区间内近似代数衰减函数时，收敛率呈根指数——这一现象长期以来令人费解，因为经典理论仅预测代数收敛。我们的框架为这一行为提供了清晰而完整的解释（见第 6.4 节）。

最后，由于我们的框架比经典理论提供了更细致的刻画，因此能够对广义厄米特和拉盖尔逼近进行详细的比较分析。我们证明，具有相似衰减和振荡特征的函数，采用厄米基或拉盖尔基进行近似时，可能呈现截然不同的收敛行为（见第 6.5 节）。我们还比较了单组厄米函数与两组串接的Laguerre函数的效率。对于一类解析函数，我们证明，基于拉盖尔的方法至少不逊于厄米特方法，而且往往更优（见第 6.6 节）。我们推测，相较于单组厄米函数，双组拉盖尔函数表现更优反映了一条普遍规律，值得在后续工作中深入研究。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍全文所用广义拉盖尔函数和广义厄米特函数的必要预备知识。第 3 节直观概述本文的主要见解。核心理论结果——对投影误差的新估计——将在第 4 节给出。第 5 节将这些结果推广到导数、插值、求积和模型偏微分方程。第 6 节介绍数值实验及讨论，最后在第 7 节给出结论。

2 预备知识

2.1 广义拉盖尔多项式与函数

广义拉盖尔多项式（广义拉盖尔多项式），记作 $\mathscr{L}_n^{(\alpha)}(x)$（其中 $\alpha > -1$），是在半直线上关于权函数 $\omega_\alpha^+(x) = x^\alpha e^{-x}$ 正交的多项式

$\mathbb{R}_+ := (0, \ +\infty)$，即，

$$\int_0^{+\infty} \mathscr{L}_n^{(\alpha)}(x)\mathscr{L}_m^{(\alpha)}(x)\omega_\alpha^+(x)dx = \gamma_n^{(\alpha)}\delta_{mn}, \tag{1}$$

其中

$$\gamma_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{2}$$

广义拉盖尔函数（GLFs）定义为

$$\widehat{\mathscr{L}_n^{(\alpha)}}(x) := e^{-x/2}\mathscr{L}_n^{(\alpha)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha > -1. \tag{3}$$

由（1）和（2）可知，GLFs 关于权函数 $\hat{}\omega_\alpha^+ = x^\alpha$正交，即 .,

$$\int_0^{+\infty} \widehat{\mathscr{L}_n^{(\alpha)}}(x)\widehat{\mathscr{L}_m^{(\alpha)}}(x)\hat{\omega}_\alpha^+(x)dx = \gamma_n^{(\alpha)}\delta_{mn}. \tag{4}$$

2.2 广义厄米特多项式与函数

广义厄米特多项式（GHPs）记为 $H_n^{(\mu)}(x)$（其中 $\mu > -\frac{1}{2}$），它们是定义在整条实线 $\mathbb{R}$ 上、关于权函数 $\omega_\mu(x) = |x|^{2\mu}e^{-x^2} = (-\infty, \ +\infty)$ 的正交多项式，即

$$\int_{\mathbb{R}} H_m^{(\mu)}(x)H_n^{(\mu)}(x)|x|^{2\mu}\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \gamma_{n,H}^{(\mu)}\delta_{mn}, \tag{5}$$

其中

$$\gamma_{n,H}^{(\mu)} = 2^{2n}\left[\frac{n}{2}\right]!\Gamma\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] + \mu + \frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

对于 $\mu > -\frac{1}{2}$，我们将参数为μ 、次数为 n的广义厄米特函数（GHF）定义为

$$\widehat{H}_n^{(\mu)}(x) := \sqrt{1/\gamma_{n,H}^{(\mu)}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}H_n^{(\mu)}(x), \quad n \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

于是，我们得到正交关系：

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{H}_l^{(\mu)}(x)\widehat{H}_n^{(\mu)}(x)|x|^{2\mu}\ \mathrm{d}x = \delta_{ln}. \tag{8}$$

可以验证，广义超几何函数满足以下三项递推关系

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_0^{(\mu)}(x) &= \sqrt{1/\Gamma(\mu+1/2)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \\
\widehat{H}_1^{(\mu)}(x) &= \sqrt{1/\Gamma(\mu+3/2)}x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \\
\widehat{H}_{n+1}^{(\mu)}(x) &= a_n^{(\mu)}x\widehat{H}_n^{(\mu)}(x) - c_n^{(\mu)}\widehat{H}_{n-1}^{(\mu)}(x), \quad n \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$a_n^{(\mu)} = \sqrt{\frac{2}{n+1+2\mu-\theta_n}}, \quad c_n^{(\mu)} = \frac{n+\theta_n}{\sqrt{(n+\theta_n/(2\mu))\,(n+2\mu+1-\theta_n/(2\mu))}}, \tag{10}$$

θ_n 定义为

$$\theta_n = \begin{cases} 0, & n \text{ even}, \\ 2\mu, & n \text{ odd}. \end{cases} \tag{11}$$

由（9），我们可以进一步推导出广义超几何函数的导数递推公式：

引理 2.1 *When* $2 \mid n$,

$$\partial_x \widehat{H}_n^{(\mu)} = -\sqrt{\frac{n+1+2\mu}{2}}\widehat{H}_{n+1}^{(\mu)} + \sqrt{\frac{n}{2}}\widehat{H}_{n-1}^{(\mu)}, \tag{12}$$

when $2 \nmid n$,

$$\begin{aligned}\partial_x \widehat{H}_n^{(\mu)} = &-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\widehat{H}_{n+1}^{(\mu)} + \sqrt{\frac{n+2\mu}{2}}\widehat{H}_{n-1}^{(\mu)} \\ &+ 2\mu(-1)^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\mu+1\right)}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\sqrt{\frac{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)}{k!}}\widehat{H}_{2k}^{(\mu)}.\end{aligned} \tag{13}$$

2.3 拉盖尔多项式与厄米特多项式之间的关系

广义厄米特多项式可以用广义拉盖尔多项式表示:

$$H_n^{(\mu)}(x) = \begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}2^n\left(\frac{n}{2}\right)!\mathscr{L}_{n/2}^{(\mu-1/2)}\left(x^2\right), & n \text{ even}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^n\left(\frac{n-1}{2}\right)!x\mathscr{L}_{(n-1)/2}^{(\mu+1/2)}\left(x^2\right), & n \text{ odd},\end{cases} \tag{14}$$

2.4 一些有用的傅里叶变换结果

设 $\mathcal{F}[f(u)](x)$ 表示 $f(u)$ 的傅里叶变换，其定义为

$$\mathcal{F}[f(u)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu}f(u)du. \tag{15}$$

在下述引理中，我们给出一些有用的傅里叶变换结果，这些结果将用于构造主要结果，即定理4.1。这些结果可见 [52]。

引理2.2

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\mathcal{F}\left[e^{-u^2}|u|^{2\mu}H_{2m}^{\mu}(u)\right](-2x) = \\ &\qquad(-1)^m 2^{2m}\frac{\Gamma\left(m+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}x^{2m}e^{-x^2}\Phi\left(-\mu, m+\frac{1}{2}; x^2\right), \\ &\sqrt{2}\mathcal{F}\left[e^{-u^2}|u|^{2\mu}H_{2m+1}^{\mu}(u)\right](-2x) = \\ &\qquad(-1)^m 2^{2m+1}\frac{\Gamma(m+\mu+3/2)}{\Gamma(m+3/2)}i\,x^{2m+1}e^{-x^2}\Phi\left(-\mu, m+3/2; x^2\right).\end{aligned} \tag{16}$$

3 对我们结果的快速直观理解

研究拉盖尔/埃尔米特谱方法中收敛性的传统方法，侧重于考察由与这些多项式族相对应的施图姆-刘维尔问题所产生的特征值。例如，广义拉盖尔多项式是施图姆-刘维尔微分方程的一个解

$$x^{-\alpha}e^x\partial_x\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\partial_x\mathscr{L}_n^{(\alpha)}(x)\right) + \lambda_n\mathscr{L}_n^{(\alpha)}(x) = 0, \tag{17}$$

对应的特征值为 $\lambda_n = n$。正如 [51] 中所强调的， λ_n 是线性增长的，而不是像雅可比情形那样呈二次增长。因此，使用广义拉盖尔多项式展开的收敛率只有基于具有“相当”正则性的雅可比多项式展开的一半。

然而，这种策略无法有效用于分析缩放拉盖尔（厄米特）多项式 $\mathscr{L}_n^{(\alpha)}(\beta x)$（$\widehat{H}_n^{(\mu)}(\beta x)$）的近似性质。这类估计在文献中十分常见。例如， [53] 定理 4.1 断言：

$$\left\|u-\pi_N^{\alpha,\beta}u\right\|_{s,\alpha,\beta}\lesssim(\beta N)^{\frac{s-r}{2}}\left\|u-\pi_N^{\alpha,\beta}u\right\|_{r,\alpha,\beta}\lesssim(\beta N)^{\frac{s-r}{2}}\|u\|_{r,\alpha,\beta},\quad r\geq s. \tag{18}$$

该结果给出了用 u 的前$N+1$个缩放拉盖尔多项式 $\mathscr{L}_n^{(\alpha)}(\beta x)$ 进行近似时的投影误差估计。虽然式（18）右侧似乎表明收敛率为（βN）$^{\frac{s-r}{2}}$，但必须注意，范数本身也会随缩放参数变化。因此，要分离并评估缩放因子 β 对逼近误差的确切影响并非易事。

相比之下，我们的方法遵循一条截然不同的思路，其依据是对埃尔米特多项式根分布的一项观察。以 $H^{(\alpha+\frac{1}{2})}{}_{2N+2}(\beta x)$ 为例。设 $\{x_j^{(\alpha)}\}_{j=0}^N$ 表示其按升序排列的正根，则由（14）可知， $\left(\beta\, x_j^{(\alpha)}\right)^2$， $0\leqslant j\leqslant N$ 是 $\mathscr{L}_{N+1}^{(\alpha)}(x)$ 的根。因此，根据 [54], 的定理 8.9.2

$$x_j^{(\alpha)}=\frac{(j+1)\pi+O(1)}{2\beta\sqrt{N+1}},\ \text{for}\ x_j^{(\alpha)}\in(0,\eta/\beta],\ \alpha>-1, \tag{19}$$

其中 $\eta>0$ 是一个固定常数。此外，根据 [54], 的定理 6.31.3

$$\left(x_j^{(\alpha)}\right)^2<(j+(\alpha+3)/2)\frac{2j+\alpha+3+\sqrt{(2j+\alpha+3)^2+1/4-\alpha^2}}{\beta^2\,(N+(\alpha+3)/2)}, \tag{20}$$

对所有 $0\leqslant j\leqslant N$ 和 $\alpha>-1$均成立。特别地，

$$x_N^{(\alpha)}=\frac{1}{\beta}\sqrt{4N+2\alpha+6+O\left(N^{1/3}\right)}. \tag{21}$$

总的来说， $H_N^{(\mu)}(\beta x)$ 的零点位于区间 $\left[-\mathcal{O}\left(\sqrt{N}/\beta\right),\mathcal{O}\left(\sqrt{N}/\beta\right)\right]$ 内，相邻零点之间的最小距离通常为 $\frac{1}{\beta\sqrt{N}}$ 量级。

正如在 [5], 中已经观察到的，由于 $H_N^{(\mu)}(\beta x)$ 的零点——也就是埃尔米特插值的采样节点——被限制在大小为 $\sqrt{N}/\beta$ 的区间内，因此只有当目标函数在该区间之外充分衰减时，基于前 $N+1$ 个缩放埃尔米特多项式 $H_n^{(\mu)}(\beta x)$ 的近似才有望取得良好效果。我们将 $\sqrt{N}/\beta$ 称为空间带宽，并将目标函数在该空间带宽之外衰减不足所导致的误差称为空间截断误差。

我们的分析始于一个补充观察：由于相邻插值点之间的间距约为 $\frac{1}{\beta\sqrt{N}}$，因此，目标函数中频率超过 $\beta\sqrt{N}$ 的任何分量都无法得到准确近似。这种情况类似于香农采样定理中的混叠，即高频分量无法被准确捕捉。因此，我们将 $\beta\sqrt{N}$ 称为频带宽度，并将目标函数的傅里叶变换在该带宽之外衰减不足所导致的误差定义为频率截断误差。

我们得出结论：广义Hermite近似的误差可由空间截断误差、频率截断误差以及指数衰减的谱误差控制（见定理 4.1）。拉盖尔近似的情形可通过变换转化为广义Hermite近似来分析。

4 主要结果：投影误差估计

我们首先定义广义拉盖尔投影和厄米特投影。随后，我们证明基于这两种正交系的近似之间的等价性。最后，我们给出缩放埃尔米特逼近的误差估计定理。由于这种等价性，拉盖尔近似相应的误差界可通过简单变换立即得到。

4.1 投影的定义

令 P_N 表示次数至多为 N 的多项式集合。我们定义 $\widehat{P}^{\beta,L}_N$ 为

$$\widehat{P}^{\beta,L}_N := \{\phi : \phi = e^{-\beta x/2}\psi, \quad \forall \psi \in P_N\}. \tag{22}$$

我们定义投影算子 $\widehat{\Pi}^{(\alpha,\beta,L)}_N \colon L^2_{\omega^{\pm}_{\alpha}}(\mathbb{R}_+) \to \widehat{P}^{\beta,L}_N$，使其满足

$$\left(u - \widehat{\Pi}^{(\alpha,\beta,L)}_N u, v_N\right)_{x^\alpha} = 0, \quad \forall v_N \in \widehat{P}^{\beta,L}_N. \tag{23}$$

于是，我们有

$$\widehat{\Pi}^{(\alpha,\beta,L)}_N u = \sum_{n=0}^{N} c_n \widehat{\mathscr{L}}^{(\alpha)}_n(\beta x), \ c_n = \frac{1}{\left\|\widehat{\mathscr{L}}^{(\alpha)}_n(\beta x)\right\|^2_{x^\alpha}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x)\widehat{\mathscr{L}}^{(\alpha)}_n(\beta x)x^\alpha dx. \tag{24}$$

也就是说，$\widehat{\Pi}^{(\alpha,\beta,L)}_N u$ 是拉盖尔展开的前 $N+1$ 项之和。类似地，我们定义 $\widehat{P}^{\beta,H}_N$ 为

$$\widehat{P}^{\beta,H}_N := \left\{\phi : \phi = e^{-\beta^2 x^2/2}\psi, \quad \forall \psi \in P_N\right\}. \tag{25}$$

设 $\omega_\mu = |x|^{2\mu}$，我们可以定义投影算子 $\widehat{\Pi}^{(\mu,\beta)}_N \colon \ L^2_{\omega_\mu}(\mathbb{R}) \to \widehat{P}^{\beta,H}_N$ 如下：

$$\left(u - \widehat{\Pi}^{(\mu,\beta)}_N u, v_N\right)_{\omega_\mu} = 0, \quad \forall v_N \in \widehat{P}^{\beta,H}_N. \tag{26}$$

因此，我们有

$$\widehat{\Pi}^{(\mu,\beta)}_N u = \sum_{n=0}^{N} c_n \widehat{H}^{(\mu)}_n(\beta x), \ c_n = \frac{1}{\left\|\widehat{H}^{(\mu)}_n(\beta x)\right\|^2_{|x|^{2\mu}}} \int_{\mathbb{R}} u(x)\widehat{H}^{(\mu)}_n(\beta x)|x|^{2\mu} dx. \tag{27}$$

也就是说，$\widehat{\Pi}^{(\mu,\beta)}_N u$ 是厄米特展开的前 $N+1$ 项之和。

只需简单地进行变量替换，我们即可证明以下引理:

引理 **4.1** *If* $v(x) \in L^2_{x^\alpha}(\mathbb{R}_+)$ *define* $u(x) \in L^2_{|x|^{2\mu}}(\mathbb{R})$ *by* $u(x) = v(x^2)$ *where* $\alpha = \mu - 1/2$, *the* n

$$\left\|u - \widehat{\Pi}^{(\mu,\beta)}_{2N} u\right\|_{|x|^{2\mu}} = \left\|v - \widehat{\Pi}^{(\alpha,\beta^2,L)}_N v\right\|_{x^\alpha}. \tag{28}$$

由（24）、（27）和引理 4.1 可知，广义拉盖尔近似等价于广义厄米特近似。因此，我们可以通过考察厄米特情形来理解拉盖尔近似的性质。

4.2 投影误差估计

在下一个定理中，我们给出使用 $N+1$ 个缩放广义厄米函数 $\widehat{H}_n^{(\mu)}(\beta x)$ 的截断项来近似函数 u 时的误差估计。该误差估计由三个不同部分组成：空间截断误差、频率截断误差和谱误差。

定理 **4.1** *If* $u\cdot\left(1+x^2\right)^{\mu/2}\in L^2$, *where* $0\leqslant\mu\in\mathbb{R}$, *let* $\widehat{\Pi}_N^\beta u$ *denote* $\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}$ *defined in* (26), *and* $\omega=|x|^{2\mu}$. *Let* $M=\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}/\beta$, $B=\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\beta$ *being the spatial and frequency bandwidths, respectively, that can be resolved when approximating* u *by* $\widehat{\Pi}_N^\beta u$. *Then we have*

$$\begin{aligned}\left\|u-\widehat{\Pi}_N^\beta u\right\|_\omega \lesssim_\mu \left\|u\cdot\mathbb{I}_{\{|x|>M\}}\right\|_\omega + B^{-\mu+\frac{1}{2}}\left\|\mathcal{F}[u]\left(B\xi\right)\right\|_{H^\mu(\mathbb{R}\setminus[-1,1])}\\ + e^{-\frac{N}{24}}\left(\|u\|_\omega+\|u\|\cdot M^\mu\right),\end{aligned}\tag{29}$$

where $f\lesssim_\mu g$ *means* $f\leqslant C_\mu g$, C_μ *is a constant that depends only on* μ.

Remark 1 该定理可视为奈奎斯特–香农采样定理的一个类比：使用前 $N+1$ 个缩放后的厄米函数 $\widehat{H}_n^{(\mu)}(\beta x)$ 时，空间域和频域中可捕获的带宽范围分别为 $M=\mathcal{O}(\sqrt{N}/\beta)$ 和 $B=\mathcal{O}(\sqrt{N}\beta)$。近似误差有三个来源：

1. $\left\|u\cdot\mathbb{I}_{\{|x|>M\}}\right\|_\omega$：空间带宽之外分量的衰减不足。2. $B^{-\mu+\frac{1}{2}}\left\|\mathcal{F}[u]\left(B\xi\right)\right\|_{H^\mu(\mathbb{R}\setminus[-1,1])}$：频率带宽之外的高频分量。3. $e^{-\frac{N}{24}}(\|u\|_\omega+\|u\|\cdot M^\mu)$：归因于截断带宽范围内近似的指数衰减误差。

以下证明策略建立在这一直观理解之上。

Proof 令 $v(x)=u(x/\beta)$，则

$$\left\|u-\widehat{\Pi}_N^\beta u\right\|_\omega=\beta^{-\mu-\frac{1}{2}}\left\|v-\widehat{\Pi}_N^1 v\right\|_\omega.\tag{30}$$

同理，将 u 替换为 v 并将 β 替换为 1 后，右端的 (29) 中每一项也会获得相同的额外因子 $\beta^{-\mu-\frac{1}{2}}$，因此只需对 $\beta=1$证明 (29)。在这种情况下，我们有 $M=B=\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}$。

我们将空间截断函数定义为

$$T_M^s=\mathbb{I}_{[-2M,2M]}*\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.\tag{31}$$

然后定义

$$u_M(x)=u(x)\cdot T_M^s(x).\tag{32}$$

Let

$$\alpha(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1,\end{cases}\tag{33}$$

and

$$\gamma(x)=\left(\int_{\mathbb{R}}\alpha(x)dx\right)^{-1}\alpha(x);\quad \gamma_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).\tag{34}$$

然后，定义频率截断函数

$$T_B^f=\mathbb{I}_{[-\frac{3}{2}B,\frac{3}{2}B]}*\gamma_{\frac{B}{2}}.\tag{35}$$

进一步定义

$$u^B(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\mathcal{F}[u](\xi)\cdot T_B^f(\xi)\cdot e^{i\xi x}d\xi,\tag{36}$$

and

$$u_M^B = u^B \cdot T_M^S. \tag{37}$$

完成上述准备后，我们可以进行如下估计。由于 $\beta = 1$，为简便起见，我们将忽略 $\widehat{\Pi}_N^\beta$ 中的上标 β。

$$\begin{aligned}
\left\|u - \widehat{\Pi}_N u\right\|_\omega &\leqslant \left\|u - u_M^B\right\|_\omega + \left\|u_M^B - \widehat{\Pi}_N u_M^B\right\|_\omega + \left\|\widehat{\Pi}_N\left(u_M^B - u\right)\right\|_\omega \\
&\lesssim \left\|u - u_M^B\right\|_\omega + \left\|u_M^B - \widehat{\Pi}_N u_M^B\right\|_\omega \\
&\lesssim \|u - u_M\|_\omega + \left\|u_M - u_M^B\right\|_\omega + \left\|u_M^B - \widehat{\Pi}_N u_M^B\right\|_\omega \\
&\triangleq E_s + E_f + E_H.
\end{aligned} \tag{38}$$

注意到

$$\begin{aligned}
E_s^2 &= \int (u - u_M)^2 \cdot \omega \\
&= \int_{|x| \leqslant M} (u - u_M)^2 \cdot \omega + \int_{|x| > M} (u - u_M)^2 \cdot \omega.
\end{aligned} \tag{39}$$

对于第一项,

$$\int_{|x| \leqslant M} (u - u_M)^2 \cdot \omega = \int_{|x| \leqslant M} u^2 \left(1 - T_M^s\right)^2 \cdot \omega. \tag{40}$$

由于对于 $|x| \leqslant M$

$$\begin{aligned}
\left|1 - T_M^s\right| &= \left(\int_{2M-x}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-2M-x}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\
&\lesssim \int_M^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\
&\lesssim e^{-\frac{1}{2}M^2},
\end{aligned} \tag{41}$$

将（41）代入（40）可得

$$\int_{|x| \leqslant M} (u - u_M)^2 \cdot \omega \lesssim e^{-M^2} \int u^2 \cdot \omega = e^{-M^2} \|u\|_\omega^2. \tag{42}$$

对于（39）的第二项，我们有

$$\int_{|x| > M} (u - u_M)^2 \cdot \omega = \int_{|x| > M} u^2 \left(1 - T_M^s\right)^2 \cdot \omega. \tag{43}$$

注意到 $0 \leqslant T_M^s \leqslant 1$，我们有

$$\int_{|x| > M} (u - u_M)^2 \cdot \omega \leqslant \int_{|x| > M} u^2 \cdot \omega = \left\|u \cdot \mathbb{I}_{\{|x| > M\}}\right\|_\omega^2. \tag{44}$$

将（42）、（44）代回（39）可得

$$\begin{aligned}
E_s &\lesssim e^{-\frac{1}{2}M^2} \|u\|_\omega + \|u \cdot \mathbb{I}_{\{|x| > M\}}\|_\omega \\
&= e^{-\frac{N}{24}} \|u\|_\omega + \left\|u \cdot \mathbb{I}_{\{|x| > M\}}\right\|_\omega.
\end{aligned} \tag{45}$$

对于 E_f 由（38）定义，我们有

$$\begin{aligned}
E_f^2 &= \int \left|u_M - u_M^B\right|^2 \cdot \omega \\
&= \int \left|u - u^B\right|^2 \cdot \left(T_M^s\right)^2 \cdot \omega \\
&\leqslant \int \left|u - u^B\right|^2 \cdot \omega.
\end{aligned} \tag{46}$$

上述公式中的不等式由 $0 \leqslant T_M^s \leqslant 1$ 得出。回顾一下，权函数 $\omega = |x|^{2\mu}$ ，
let

$$y = Bx, \quad d(y) = u(x) - u^B(x), \tag{47}$$

then

$$\begin{aligned}\int \left|u-u^B\right|^2 \cdot \omega dx &= B^{-2\mu-1}\int |d(y)|^2|y|^{2\mu}dy \\ &\leqslant B^{-2\mu-1}\int |d(y)|^2\left(1+y^2\right)^{\mu}dy.\end{aligned} \tag{48}$$

结合 H^{μ} 范数的定义，可得

$$\int \left|u-u^B\right|^2 \cdot \omega dx \lesssim B^{-2\mu-1}\left\|\mathcal{F}[d](\xi)\right\|_{H^{\mu}}^2. \tag{49}$$

由（36）可得

$$\mathcal{F}\left[u^B\right](k) = \mathcal{F}[u](k)\cdot T_B^f(k), \tag{50}$$

然后结合（47）可得

$$\mathcal{F}[d](\xi) = B\cdot\mathcal{F}[u](B\xi)\cdot\left(1-T_1^f(\xi)\right). \tag{51}$$

将（51）代回（49），可得

$$\int \left|u-u^B\right|^2 \cdot \omega dx \lesssim B^{-2\mu+1}\left\|\mathcal{F}[u](B\xi)\left(1-T_1^f(\xi)\right)\right\|_{H^{\mu}}^2. \tag{52}$$

设 $g(\xi)=\mathcal{F}[u](B\xi)$，我们断言以下结论成立：

$$\left\|g(\xi)\left(1-T_1^f(\xi)\right)\right\|_{H^{\mu}(\mathbb{R})} \lesssim_{\mu} \left\|g(\xi)\right\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])}. \tag{53}$$

根据 T_B^f （ξ） （35）的定义可得

$$0\leqslant T_1^f(\xi)\leqslant 1;\quad T_1^f(\xi)\equiv 1,\ \forall\,|\xi|\leqslant 1. \tag{54}$$

因此，对于 $\mu\in\mathbb{N}$，有

$$\left\|g\left(1-T_1^f\right)\right\|_{H^{\mu}(\mathbb{R})}^2 = \sum_{j=0}^{\mu}\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}\left|\partial^j\left(g\left(1-T_1^f\right)\right)\right|^2 d\xi. \tag{55}$$

结合

$$\begin{aligned}\left|\partial^j\left(g\left(1-T_1^f\right)\right)\right|^2 &= \left|\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\left(\partial^r g\right)\cdot\left(\partial^{j-r}\left(1-T_1^f\right)\right)\right|^2 \\ &\lesssim_{\mu}\sum_{r=0}^{\mu}\left|\partial^r g\right|^2\end{aligned} \tag{56}$$

可得

$$\left\|g\left(1-T_1^f\right)\right\|_{H^{\mu}(\mathbb{R})}^2 \lesssim_{\mu}\sum_{j=0}^{\mu}\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}\left|\partial^j g\right|^2 d\xi. \tag{57}$$

也就是说，(53) 对 $\mu\in\mathbb{N}$成立。由索博列夫空间的插值理论可知，(53) 对任意 $\mu\geqslant 0$成立。将 (53) 代入 (52)，再代入 (46，得到

$$E_f \lesssim_{\mu} B^{-\mu+\frac{1}{2}}\left\|\mathcal{F}[u](B\xi)\right\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])}. \tag{58}$$

接下来，我们考虑估计由 (38) 定义的 E_H。

$$g_{\xi,s}(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-s)^2+i\xi x}, \tag{59}$$

then

$$\begin{aligned}u_M^B &= u^B\cdot T_M^s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\leqslant 2B,|s|\leqslant 2m}\mathcal{F}\left[u^B\right](\xi)g_{\xi,s}(x)d\xi ds.\end{aligned} \tag{60}$$

由 2.2 可知：设 $z=\xi-is$，则 g_{ξ} 的广义 Hermite 展开为：s

$$g_{\xi,s}(x) = \sum_n c_n\widehat{H}_n^{(\mu)} \tag{61}$$

满足：当 $n=2m$、 $m\in\mathbb{N}$ 时，

$$c_{2m}=\sqrt{\pi}\times(-1)^m\times\sqrt{\frac{\Gamma\left(m+\mu+\frac{1}{2}\right)}{m!}}\times\frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\times\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\\ \times e^{-\frac{z^2}{4}-\frac{1}{2}s^2}\times\phi\left(-\mu,m+\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right), \tag{62}$$

当 $n=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$,

$$c_{2m+1}=\sqrt{\pi}\times(-1)^m\times\sqrt{\frac{\Gamma\left(m+\mu+\frac{3}{2}\right)}{m!}}\times\frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\times i\times\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1}\\ \times e^{-\frac{z^2}{4}-\frac{1}{2}s^2}\times\phi\left(-\mu,m+\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right). \tag{63}$$

这里， $\phi(a,c;x)$ 在 (62) 和 (63) 中是所谓的库默尔合流超几何函数，其定义如下：

$$\phi(a,c;x)=1+\frac{a}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\dots \tag{64}$$

由于 $z=\xi-is$，当 $|\xi|,|s|\leqslant 2B=2M=\sqrt{\frac{N}{3}}$ 时，我们有

$$\left|\frac{z^2}{4}\right|\leqslant\frac{N}{6}.$$

那么，对于 $n>N$, $m=\left[\frac{n}{2}\right]$，我们有

$$\left|\frac{z^2}{4}\right|\leqslant\frac{m}{3}. \tag{65}$$

设 $a=-\mu$, $c=m+\frac{1}{2}$或 $c=m+\frac{3}{2}$, $x=\frac{z^2}{4}$，由 (65) 可知 $|x/c|\leqslant\frac{1}{3}$，因此

$$\left|\frac{a\cdots(a+k-1)}{c\cdots(c+k-1)}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|\frac{(-\mu)(-\mu+1)\cdots(-\mu+k-1)}{1\cdot2\cdots k}\right|\cdot\left|\frac{x}{c}\right|\cdot\left|\frac{x}{c+1}\right|\cdots\left|\frac{x}{c+k-1}\right|\\ \leqslant\frac{1}{3^k}. \tag{66}$$

由 (66) 可知，对于 $z=\xi-is$其中 $|\xi|,|s|\leqslant 2B=2M=\sqrt{\frac{N}{3}}$以及 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ 其中 $n>N$，以下不等式成立：

$$\left|\phi\left(-\mu,m+\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)\right|,\left|\phi\left(-\mu,m+\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right)\right|\leqslant\sum_{k\geqslant0}\frac{1}{3^k}=\frac{3}{2}. \tag{67}$$

当 $n>N$时，结合（62）、（63）和（67）可得

$$|c_n|^2\lesssim e^{-\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}s^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\left[\frac{n}{2}\right]!}\cdot\frac{1}{\left\{\Gamma\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}\cdot\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2n}. \tag{68}$$

进一步应用斯特林公式可得

$$|c_n|^2\lesssim_\mu e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+s^2)}\cdot n^\mu\cdot\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\xi^2+s^2}{2}\right)^n. \tag{69}$$

由（61）和（69）可知：当 $|\xi|$, $|s|\leqslant 2B=2M=\sqrt{\frac{N}{3}}$,

$$\left\|g_{\xi,s}-\widehat{\Pi}_Ng_{\xi,s}\right\|_\omega^2=\sum_{n>N}|c_n|^2\\ \lesssim_\mu\sum_{n>N}e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+s^2)}\cdot n^\mu\cdot\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\xi^2+s^2}{2}\right)^n\\ \lesssim_\mu\frac{\left(\frac{\xi^2+s^2}{2}\right)^{N+1}}{(N+1)!}\cdot N^\mu. \tag{70}$$

由（60）可得

$$u_M^B - \widehat{\Pi}_N u_M^B = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|\leqslant 2B, |s|\leqslant 2M} \mathcal{F}\left[u^B\right](\xi) \left(g_{\xi,s} - \widehat{\Pi}_N g_{\xi,s}\right) d\xi ds. \tag{71}$$

应用三角不等式可得

$$\left\| u_M^B - \widehat{\Pi}_N u_M^B \right\|_\omega \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|\leqslant 2B, |s|\leqslant 2M} \left| \mathcal{F}\left[u^B\right](\xi) \right| \left\| g_{\xi,s} - \widehat{\Pi}_N g_{\xi,s} \right\|_\omega . \tag{72}$$

进一步应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} \left\| u_M^B - \widehat{\Pi}_N u_M^B \right\|_\omega^2 &\lesssim \left(\int_{|\xi|\leqslant 2B, |s|\leqslant 2M} \left| \mathcal{F}\left[u^B\right](\xi) \right|^2 d\xi ds \right) \times \left(\int \left\| g_{\xi,s} - \widehat{\Pi}_N g_{\xi,s} \right\|_\omega^2 d\xi ds \right) \\ &\lesssim 4M \|u\|^2 \int_{|\xi|\leqslant 2B, |s|\leqslant 2M} \left\| g_{\xi,s} - \widehat{\Pi}_N g_{\xi,s} \right\|_\omega^2 . \end{aligned} \tag{73}$$

由（70）可得

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi|\leqslant 2B, |s|\leqslant 2M} \left\| g_{\xi,s} - \widehat{\Pi}_N g_{\xi,s} \right\|_\omega^2 d\xi ds \\ &\lesssim_\mu \int_{|\xi|\leqslant 2B, |s|\leqslant 2M} \frac{1}{(N+1)!} \cdot \left(\frac{\xi^2 + s^2}{2} \right)^{N+1} \cdot N^\mu d\xi ds \\ &\leqslant \frac{N^\mu}{(N+1)!} \cdot \int_{(\xi^2+s^2)\leqslant 4(B^2+M^2)} \left(\frac{\xi^2 + s^2}{2} \right)^{N+1} d\xi ds \\ &= \frac{N^\mu}{(N+1)!} \cdot 2\pi \cdot 2^{-(N+1)} \cdot \frac{N^{N+2}}{2N+4} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{N+2} \\ &\lesssim_\mu N^{\mu - \frac{1}{2}} e^{-\frac{N}{12}}. \end{aligned} \tag{74}$$

将（74）代回（73），可知 E_H 在（38）中定义的量满足：

$$\begin{aligned} E_H &= \left\| u_M^B - \widehat{\Pi}_N u_M^B \right\|_\omega \\ &\lesssim_\mu e^{-\frac{N}{24}} M^\mu \|u\|. \end{aligned} \tag{75}$$

结合（ E_s 在（45）中的估计、 E_f 在（58）中的估计、 E_H 在（75）中的估计以及（38），我们在条件 $\beta = 1$下证明了（29）。如前所述，进一步应用（30），当 $\beta \neq 1$时即可证明一般情形，证明完毕。□

结合引理 4.1 和定理 4.1 可得投影到由前 $N+1$ 个广义拉盖尔函数张成的空间上的误差：

推论 **4.1** *For $v(x)$ defined on $\mathbb{R}_+$, define $u(x)$ on $\mathbb{R}$ by $u(x) = v(x^2)$. Let $M = \sqrt{\frac{N}{6\beta}}$, $B = \sqrt{\frac{\beta N}{6}}$, if $u(x) \cdot (1+x^2)^{\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}} \in L^2(\mathbb{R})$ then*

$$\begin{aligned} \left\| v - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)} v \right\|_{x^\mu} \lesssim_\mu &\left\| u \cdot \mathbb{I}_{\{|x|>M\}} \right\|_{|x|^{2\mu+1}} \\ &+ B^{-\mu} \left\| \mathcal{F}[u](B\xi) \right\|_{H^{\mu+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])} \\ &+ e^{-\frac{N}{24}} \left(\|u\|_{|x|^{2\mu+1}} + M^{\mu+\frac{1}{2}} \|u\| \right). \end{aligned} \tag{76}$$

接下来，我们将投影误差估计扩展到更广泛的情形，包括涉及导数、插值误差、求积误差以及模型方程误差估计的情形。

5 各种逼近误差的估计

本节旨在说明，前述投影误差估计可以扩展到广泛的近似误差估计。

由于将投影误差推广到这些结果所采用的证明框架已在文献中确立，为增强可读性，我们将冗长的证明置于附录中。

5.1 含导数的投影误差

下面的定理展示了如何根据投影近似的收敛速率获得含导数的投影误差估计，该收敛速率可由定理 4. 1.

定理 5.1 *Assume that*

$$\left\|u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim_\mu \left(\int_N^{+\infty}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}, \tag{77}$$

then

$$\left\|\partial_x^l\left(u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim_{\mu,l} \beta^l\left(\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^l dx\right)^{1/2}. \tag{78}$$

其证明见附录 A。

Remark 2 定理 5.1 可以直观地理解如下。假设

$$u=\sum_n c_n\beta^{\mu+\frac{1}{2}}\widehat{H}_n^{(\mu)}(\beta x),$$

then

$$\left\|u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right\|_{|x|^{2\mu}}=\sum_n|c_n|^2.$$

结合式（77），可以假设 $c_n\approx f(n)$。此外，根据引理 2.1，$\partial_x\widehat{H}_n^{(\mu)}(\beta x)$可以表示为包含诸如 $\beta\sqrt{n+1}\widehat{H}_{n+1}^{(\mu)}(\beta x)$ 这类项的求和，因此 $\partial_x u$ 包含诸如 $\beta\sqrt{n+1}c_{n+1}\times\left(\beta^{\mu+\frac{1}{2}}\widehat{H}_{n+1}^{(\mu)}(\beta x)\right)$ 这类项。换言之，单次 ∂_x 会将 c_n 放大到 $\beta\sqrt{n}c_n$，而由于 $c_n\approx f(n)$，这意味着 $f(x)$会被放大到 $\beta\sqrt{x}f(x)$。这就是为什么在式（78）中，对投影误差进行 l 次微分后，误差估计会乘上一个 $(\beta\sqrt{x})^l$ 的放大因子。

Remark 3 当投影误差呈现指数收敛时，即当 $f(x)=e^{-c|x|^\alpha}$时，由(77)可得

$$\left\|u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim_\mu e^{-cN^\alpha}.$$

在这种情况下，微分不影响误差的收敛率，这可以从(78)看出，

$$\left\|\partial_x^l\left(u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim_{\mu,\beta,l} e^{-cN^\alpha}.$$

然而，当投影误差仅呈现代数收敛率时，即当 $f(x)=|x|^{-h}$，由(77)可得

$$\left\|u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim_\mu N^{-h+\frac{1}{2}}.$$

在此条件下，若 β 为固定常数，则由(78)可知，每增加一次微分会使收敛阶降低12，即

$$\left\|\partial_x^l\left(u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim_{\mu,\beta,l} N^{-h+\frac{1+l}{2}}.$$

这与有限光滑函数的经典理论结论一致，表明我们的结果构成了一个更一般的框架，涵盖了经典理论。

对于拉盖尔情形，设 $u(x) = v(x^2) = v(y)$ $\tilde{\partial}_y = 2\sqrt{y}\partial_y$，得益于等价性

$$\left\|\partial_x^l\left(u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}} = \left\|\tilde{\partial}_y^l\left(v - \widehat{\Pi}_N^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2,L)}v\right)\right\|_{y^{\mu-\frac{1}{2}}}, \tag{79}$$

我们可以得到 $\left\|\tilde{\partial}_y^l\left(v - \widehat{\Pi}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2,L)}{}_N \qquad v\right)\right\|_{y^{\mu-\frac{1}{2}}}$的误差估计，这可通过结合定理5.1与(79)。

推论5.1 *Assume that*

$$\left\|v - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)}v\right\|_{x^\mu} \lesssim_\mu \left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}. \tag{80}$$

Let $\partial_x = 2\sqrt{x}\partial_x$, *then*

$$\left\|\tilde{\partial}_x^l\left(v - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)}v\right)\right\|_{x^\mu} \lesssim_{\mu,l} \beta^{\frac{l}{2}}\left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^l dx\right)^{1/2}. \tag{81}$$

5.2 插值误差与求积误差

我们首先定义广义拉盖尔插值与广义厄米特插值。设 $\xi_{G\,N}^{(\mu,\beta)}$，，$_j$与 $\xi_{R\,N}^{(\mu,\beta)}$，，$_j$，$0 \leqslant j \leqslant N$分别为 $\widehat{\mathscr{L}}$ (μ) $_{N+1}(\beta x)$和 $x\widehat{\mathscr{L}}$ $(\mu+1)$ $_N(\beta x)$的零点。它们按升序排列。于是我们可以定义拉盖尔–高斯与拉盖尔–高斯–拉道插值算子 $\widehat{I}_{Z\,N}^{(\mu,\beta)}$，： $C[0,+\infty) \to \widehat{P}^\beta$，$_N{}^L$，其中 $Z = G$， R表示拉盖尔–高斯或拉盖尔–高斯–拉道（如$\widehat{P}^\beta$，$_N{}^L$在(22)中所定义）

$$\left(\widehat{I}_{Z,N}^{(\mu,\beta)}u\right)\left(\xi_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)}\right) = u\left(\xi_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)}\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{82}$$

记 $\widehat{\omega}_{Z\,N}^{(\mu,\beta)}{}_{,,j}, 0 \leqslant j \leqslant N, Z = G, R$为相应的求积权重，使得

$$\int_0^\infty \phi(x)x^\mu dx = \sum_{j=0}^N \phi\left(\xi_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)}\right)\widehat{\omega}_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)} \quad \forall\phi \in \widehat{P}_{2N+\lambda_Z}^{\beta,L}, \tag{83}$$

其中 $\lambda_z = 1$ 和 0 分别对应 $Z = G$ 和 R。类似地，我们可以定义 $\omega_{Z\,N}^{(\mu,\beta)}{}_{,,j}, 0 \leqslant j \leqslant N$, $Z = G, R$，使得

$$\int_0^\infty \phi(x)e^{-\beta x}x^\mu dx = \sum_{j=0}^N \phi\left(\xi_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)}\right)\omega_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)} \quad \forall\phi \in P_{2N+\lambda_Z}, \tag{84}$$

其中 $\lambda_z = 1$ 和 0 分别对应 $Z = G$ 和 R， P_k 表示次数至多为k。由 (83) 和 (84)，容易看出

$$\widehat{\omega}_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)} = e^{\beta\xi_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)}}\omega_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)}. \tag{85}$$

对于广义厄米特插值，设 $\left\{x_N^{(\mu,\beta)}{}_{,j}\right\}_{j=0}^N$ 为 $\widehat{H}_{N+1}^{(\mu)}(\beta x)$ 的零点，并按升序排列。我们将厄米特插值算子定义为$\widehat{I}_N^{(\mu,\beta)}$: $C(-\infty,+\infty) \to \widehat{P}^\beta{}_{,N}{}^H$，其中 $\widehat{P}^\beta{}_{,N}{}^H$定义见 (25)，使得

$$\left(\widehat{I}_N^{(\mu,\beta)}u\right)\left(x_{N,j}^{(\mu,\beta)}\right) = u\left(x_{N,j}^{(\mu,\beta)}\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant N. \tag{86}$$

记 $\widehat{\omega}_N^{(\mu,\beta)}{}_{,j}, 0 \leqslant j \leqslant N, Z = G, R$ 为相应的求积权重，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)|x|^{2\mu} dx = \sum_{j=0}^{N} \phi\left(x_{N,j}^{(\mu,\beta)}\right) \widehat{\omega}_{N,j}^{(\mu,\beta)} \quad \forall \phi \in \widehat{P}_{2N+1}^{\beta,H}. \tag{87}$$

现在我们给出插值误差估计。下一个定理表明，广义厄米特插值误差在某种意义上可以由投影误差控制。

定理 5.2 *Let* $\omega = |x|^{2\mu}$, *for* $\widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)}$, *we have*

$$\begin{aligned} \left\| u - \widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega \lesssim_\mu N^{\frac{1}{2}} \left\| u - \widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega + \beta^{-1} \left\| \partial \left(u - \widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)} u \right) \right\|_\omega \\ + (\beta\sqrt{N})^{-\mu-\frac{1}{2}} \left| u(0) - \left(\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)} u \right)(0) \right|. \end{aligned} \tag{88}$$

For $\widehat{I}_{2N+1}^{(\mu,\beta)}$, *we have*

$$\left\| u - \widehat{I}_{2N+1}^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega \lesssim_\mu N^{\frac{1}{2}} \left\| u - \widehat{\Pi}_{2N+1}^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega + \beta^{-1} \left\| \partial \left(u - \widehat{\Pi}_{2N+1}^{(\mu,\beta)} u \right) \right\|_\omega. \tag{89}$$

证明见附录B 。

在定理 $\left\| \partial\left(u - \widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)} u\right) \right\|_\omega$ 和 $\left| u(0) - \left(\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)} u\right)(0) \right|$ 中的进一步处理5.2 得到以下结果。

定理 5.3 *Let* $\omega = |x|^{2\mu}$. *Assume that*

$$\left\| u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega \lesssim_\mu \left(\int_N^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{90}$$

Then, for $\widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)} u$, *we have*

$$\left\| u - \widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega \lesssim_\mu \left(\int_{2N}^{+\infty} |f(x)|^2 \cdot \left(x + \beta^{-2\mu} \left(\frac{x}{N} \right)^{\mu+1} \right) dx \right)^{1/2}, \tag{91}$$

for $\widehat{I}_{2N+1}^{(\mu,\beta)} u$, *we have*

$$\left\| u - \widehat{I}_{2N+1}^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega \lesssim_\mu \left(\int_{2N+1}^{+\infty} |f(x)|^2 \cdot x dx \right)^{1/2}. \tag{92}$$

Remark 4 与经典理论类似，插值误差比投影误差多出一个因子，这源于插值稳定性的估计。我们在此给出的结果更具一般性。经典理论仅针对具有有限光滑性的目标函数，这对应于 $f(x) = |x|^{-h}$。在此情形下，由 (90) 可得

$$\left\| u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega \lesssim_\mu N^{-h+\frac{1}{2}}.$$

对于固定的 β，应用 (91) 和 (92) 可得

$$\left\| u - \widehat{I}_N^{(\mu,\beta)} u \right\|_\omega \lesssim_{\mu,\beta} N^{-h+1}.$$

也就是说，与投影误差的估计相比，插值误差的估计多了一个因子 $N^{\frac{1}{2}}$。这与经典结果 [55]，相符，不过我们在此并不特别关注如何尽可能减小这一额外因子。我们的主要目标是将新的投影误差估计推广到插值误差的情形，从而证明插值误差与投影误差表现相似：二者都可以由空间/频率截断误差和谱误差控制。

Proof 为证明（91），我们需要处理（88）右端的三项。对于第一项，由（90）可知

$$N^{\frac{1}{2}}\left\|u-\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right\|_{\omega}\lesssim_{\mu}\quad\left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^{2}\cdot xdx\right)^{1/2}. \tag{93}$$

对于第二项，应用定理 51 可得 .

$$\beta^{-1}\left\|\partial\left(u-\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{\omega}\lesssim_{\mu}\quad\left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^{2}\cdot xdx\right)^{1/2}. \tag{94}$$

对于第三项，令 $u(x)=\sum_n c_n\widehat{H}_n^{(\mu)}(\beta x)$，则

$$u(0)-\left(\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right)(0)=\sum_{n>N}c_{2n}\widehat{H}_{2n}^{(\mu)}(0). \tag{95}$$

应用 [51]，的方程（14）和（7）可得

$$\widehat{H}_{2n}^{(\mu)}(0)=\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}{n!}}\sim_{\mu}n^{\frac{1}{2}(\mu-\frac{1}{2})}. \tag{96}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|u(0)-\left(\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right)(0)\right|^{2}&=\left|\sum_{n>N}c_{2n}\widehat{H}_{2n}^{(\mu)}(0)\right|^{2}\\&\lesssim_{\mu}\left(\sum_{n>N}|c_{2n}|^{2}\cdot n^{\mu+1}\right)\left(\sum_{n>N}n^{-\frac{3}{2}}\right)\\&\lesssim_{\mu}N^{-\frac{1}{2}}\sum_{n>2N}|c_n|^{2}\cdot n^{\mu+1}.\end{aligned} \tag{97}$$

将（90）与 $u(x)=\sum_n c_n\widehat{H}_n^{(\mu)}(\beta x)$ 结合，可得

$$\sum_{n>N}|c_n|^{2}\lesssim_{\mu}\beta\cdot\int_{N}^{+\infty}|f(x)|^{2}\,dx. \tag{98}$$

应用阿贝尔变换和（98），可以证明

$$\sum_{n>2N}|c_n|^{2}\cdot n^{\mu+1}\lesssim_{\mu}\beta\cdot\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^{2}\cdot x^{\mu+1}dx. \tag{99}$$

将（99）代回（97）可得

$$\left|u(0)-\left(\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right)(0)\right|\lesssim N^{-\frac{1}{4}}\beta^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^{2}\cdot x^{\mu+1}dx\right)^{1/2}. \tag{100}$$

将（93）、（93）、（100）与（88）结合，我们证明了（91）。（92）的证明类似。 □

设 $u(x)=v(x^2)=v(y)$，由拉盖尔与Hermite函数之间的关系（14）不难推出

$$\begin{aligned}\left\|\left(u-\widehat{I}_{2N+1}^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}}&=\left\|\left(v-\widehat{I}_{G,N}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}v\right)\right\|_{y^{\mu-\frac{1}{2}}},\\\left\|\left(u-\widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}}&=\left\|\left(v-\widehat{I}_{R,N}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}v\right)\right\|_{y^{\mu-\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{101}$$

将定理 5.3 中广义 Hermite 插值误差的估计与（101）相结合，可得如下拉盖尔插值误差估计。

推论 **5.2** *Assume that*

$$\left\|v-\widehat{\Pi}_{N}^{(\mu,\beta,L)}v\right\|_{x^{\mu}}\lesssim_{\mu}\left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^{2}\,dx\right)^{1/2}. \tag{102}$$

Then, for Gauss–Radau interpolation $\widehat{I}_{R,N}^{(\mu,\beta)}v$, , *we have*

$$\left\|v-\widehat{I}_{R,N}^{(\mu,\beta)}v\right\|_{x^\mu}\lesssim_\mu\left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^2\cdot\left(x+\beta^{-\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{N}\right)^{\mu+\frac{3}{2}}\right)dx\right)^{1/2}. \tag{103}$$

For Gauss interpolation $\widehat{I}_{G,N}^{(\mu,\beta)}v$,, *we have*

$$\left\|v-\widehat{I}_{G,N}^{(\mu,\beta)}v\right\|_{x^\mu}\lesssim_\mu\quad\left(\int_{2N}^{+\infty}|f(x)|^2\cdot xdx\right)^{1/2}. \tag{104}$$

5.3 数值求积误差

我们证明，对于一般的 Gauss 求积，可以将求积误差转化为插值误差进行估计，从而能够应用先前建立的缩放的 Hermite/Laguerre 插值误差估计，推导出相应的求积误差估计。

具体而言，考虑 $\mathcal{X}$ 上的加权积分

$$Q(\phi)=\int_{\mathcal{X}}\phi(x)\omega(x)dx. \tag{105}$$

相应的 Gauss 求积定义为

$$Q_N(\phi)=\sum_{j=0}^{N}\omega_{N,i}\phi(x_{N,i}), \tag{106}$$

其中 $x_{N,i}$ 和 $\omega_{N,i}$ 分别是数值求积节点和权重。接下来，将求积节点处的插值算子定义为 I_N: $C(\mathcal{X})\to P_N$，使其满足

$$I_N[\phi](x_{N,i})=\phi(x_{N,i}),\ \forall 0\leqslant i\leqslant N. \tag{107}$$

于是，我们得到以下结果。

引理 5。**1** *Assuming the numerical quadrature* (106) *satisfies the following exactness property:*

$$Q_N(\phi)=Q(\phi),\forall\,\phi\in P_{2N}. \tag{108}$$

Let $\phi=\phi_1\phi_2$, $\psi_1=I_N\phi_1$, $\psi_2=I_N\phi_2$. *Then the quadrature error can be controlled in terms of th e interpolation error* $\phi_1-\psi_1$, $\phi_2-\psi_2$, *i.e.*,

$$\begin{aligned}|Q(\phi)-Q_N(\phi)|\leqslant&\left(\|\phi_1\|_\omega+\|\phi_2\|_\omega+\|\psi_1\|_\omega+\|\psi_2\|_\omega\right)\\&\times\left(\|\phi_1-\psi_1\|_\omega+\|\phi_2-\psi_2\|_\omega\right).\end{aligned} \tag{109}$$

*Proof*根据 I_N（107）的定义，我们知道 $\psi_i\left(x_{N,j}\right)=\phi_i\left(x_{N,j}\right)$, $0\leqslant j\leqslant N$, $i=1,2$。由于 $\psi_1\psi_2\in P_{2N}$，得益于其精确性，

$$\begin{aligned}Q\left(\psi_1\psi_2\right)&=\int_{\mathcal{X}}\omega(x)\psi_1\psi_2dx\\&=\sum_{j=0}^{N}\left(\psi_1\psi_2\right)\left(x_{N,j}\right)\omega_{N,j}\\&=\sum_{j=0}^{N}\left(\phi_1\phi_2\right)\left(x_{N,j}\right)\omega_{N,j}\\&=Q_N(\phi).\end{aligned} \tag{110}$$

因此

$$\begin{aligned}|Q(\phi)-Q_N(\phi)| &= |Q(\phi_1\phi_2)-Q(\psi_1\psi_2)| \\ &\leqslant |Q((\phi_1-\psi_1)\phi_2)|+|Q(\psi_1(\phi_2-\psi_2))|.\end{aligned} \tag{111}$$

应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}|Q((\phi_1-\psi_1)\phi_2)| &= \left|\int_{\mathcal{X}}(\phi_1-\psi_1)\phi_2\omega(x)dx\right| \\ &\leqslant \|\phi_1-\psi_1\|_\omega\|\phi_2\|_\omega.\end{aligned} \tag{112}$$

同理，

$$|Q(\psi_1(\phi_2-\psi_2))| \leqslant \|\psi_1\|_\omega\|\phi_2-\psi_2\|_\omega. \tag{113}$$

将（112）、（113）与（111）合并，得到（109）. □

5.3.1 拉盖尔求积误差

将积分 $\int_0^\infty \phi(x)x^\mu dx$ 记为 $Q^{(\mu)}(\phi)$，并将其拉盖尔求积近似 $\sum_{j=0}^N \phi\left(\xi_{Z,N,j}^{(\mu,\beta)}\right)\widehat{\omega}_{Z\,N}^{(\mu,\beta)}{}_{,j}$ 记为 $Q_{Z\,N}^{(\mu,\beta)}{}_{,}(\phi)$。然后由（83）可得

$$Q^{(\mu)}(\phi)=Q_{Z,N}^{(\mu,\beta)}(\phi),\quad \forall\,\phi\in\widehat{P}_{2N+\lambda z}^{\beta,L}. \tag{114}$$

采用上述记号，现陈述以下关于拉盖尔求积误差估计的定理，该定理可由定理 5.1 推导得出。

定理 **5 4** *Assume* $\phi=\phi_1\phi_2$ *let* $\psi_1=\widehat{I}_{Z\,N}^{(\mu,\beta)}\phi_1$ $\psi_2=\widehat{I}_{Z\,N}^{(\mu,\beta)}\phi_2$ $\omega=x^\mu$. *Then Laguerre* ., ,,,, , , , *quadrature error can be controlled in terms of the interpolation error* $\phi_1-\psi_1$ $\phi_2-\psi_2$ *more precisely*

$$\begin{aligned}\left|Q^{(\mu)}(\phi)-Q_{Z,N}^{(\mu,\beta)}(\phi)\right| &\leqslant \left(\|\phi_1\|_\omega+\|\phi_2\|_\omega+\|\psi_1\|_\omega+\|\psi_2\|_\omega\right) \\ &\quad\times\left(\|\phi_1-\psi_1\|_\omega+\|\phi_2-\psi_2\|_\omega\right).\end{aligned} \tag{115}$$

5.3.2 厄米特求积误差

我们将积分 $\int_{-\infty}^\infty \phi(x)|x|^{2\mu}dx$ 记为 $Q_H^{(\mu)}(\phi)$，并将其使用厄米特求积的近似 $\sum_{j=0}^N \phi\left(x_{N,j}^{(\mu,\beta)}\right)\widehat{\omega}_{N\,j}^{(\mu,\beta)}{}_{,}$ 记为 $Q_{H\,N}^{(\mu,\beta)}{}_{,}(\phi)$。于是由（87）可得

$$Q_H^{(\mu)}(\phi)=Q_{H,N}^{(\mu,\beta)}(\phi),\quad \forall\,\phi\in\widehat{P}_{2N+1}^{\beta,H}. \tag{116}$$

类似于定理5.4，我们有

定理 5.5 *Assume* $\phi=\phi_1\phi_2$, *let* $\psi_1=\widehat{I}_N^{(\mu,\beta)}\phi_1$, $\psi_2=\widehat{I}_N^{(\mu,\beta)}\phi_2$, $\omega=|x|^{2\mu}$. *Then the error of generalized Hermite quadrature can be controlled in terms of the interpolation error* $\phi_1-\psi_1$, $\phi_2-\psi_2$, *more precisely,*

$$\begin{aligned}\left|Q_H^{(\mu)}(\phi)-Q_{H,N}^{(\mu,\beta)}(\phi)\right| &\leqslant \left(\|\phi_1\|_\omega+\|\phi_2\|_\omega+\|\psi_1\|_\omega+\|\psi_2\|_\omega\right) \\ &\quad\times\left(\|\phi_1-\psi_1\|_\omega+\|\phi_2-\psi_2\|_\omega\right).\end{aligned} \tag{117}$$

5.3.3 应用：缩放厄米特/拉盖尔求积的最优性

文献中发现，与有界区域上的求积方法相比，厄米特和拉盖尔求积的效率较低。例如，Trefethen [46] 指出，在计算

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}cos(x^3)dx, \tag{118}$$

高斯–勒让德、克伦肖–柯蒂斯和梯形求积的收敛率可达到 $\exp(-CN^{2/3})$，而数值结果表明，高斯–厄米特求积的收敛率只能达到 $\exp(-C\sqrt{N})$。

然而，这样的比较并不完全公平。有界区域上的求积公式通常应用于适当截断的区域，而厄米特求积并不会通过尺度变换将其求积点分布在同一区域上。一旦实现这一点，应用本文建立的误差分析，便可证明厄米特求积将达到与有界区域上的求积公式相同的精度水平。

具体而言，设 $\phi_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$，$\phi_2(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(x^3)$，由定理 5.5，厄米特求积误差在计算（118）时可由 $\left\|\phi_1-\widehat{I}_N^{(\beta)}\phi_1\right\|$ 与 $\left\|\phi_2-\widehat{I}_N^{(\beta)}\phi_2\right\|$控制。此外，利用定理 5.3，可以得出插值误差表现出与投影误差相似的性态。只需分析投影误差的最优缩放因子。

根据帕利–维纳定理 [56]，

$$|\mathcal{F}[\phi_2](\xi)| \lesssim e^{-c|\xi|}. \tag{119}$$

因此，令 $M = \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\beta$, $B = \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}/\beta$，我们有

$$\left\|\phi_2 \cdot \mathbb{I}_{\{|x|>M\}}\right\| \lesssim e^{-cN/\beta^2}, \quad B^{\frac{1}{2}}\left\|\mathcal{F}\left[\phi_2\right](B\xi)\right\|_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \lesssim e^{-c\sqrt{N}\beta}. \tag{120}$$

令$\beta = N^{\frac{1}{6}}$ 以平衡频率截断误差与空间截断误差，并应用定理4.1，我们得到：

$$\left\|\phi_2 - \widehat{\Pi}_N^{\beta}\phi_2\right\| \lesssim e^{-cN^{\frac{2}{3}}}. \tag{121}$$

同样可以得出，ϕ_1 也具有相同的收敛精度。基于上述分析，在 $\beta = N^{\frac{1}{6}}$ 的最优选取下，如下求积误差估计成立：

$$\left|Q_H\left(e^{-x^2}cos(x^3)\right) - Q_{H,N}^{(\beta)}\left(e^{-x^2}cos(x^3)\right)\right| \lesssim e^{-cN^{\frac{2}{3}}}. \tag{122}$$

这表明，经尺度优化的厄米特求积可达到与有界区域上求积公式相当的精度。拉盖尔求积表现出类似的低效性，同样可通过选取适当的缩放因子来平衡空间截断误差与频率截断误差加以克服。

5.4 模型问题

考虑半直线上的模型问题

$$-u_{xx} + \gamma u = f, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma > 0; \quad u(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x) = 0. \tag{123}$$

记

$$\widehat{P}_{N,\beta}^0 = \left\{\phi \in \widehat{P}_N^{\beta,L} : \phi(0) = 0\right\}.$$

(12 s的弱形式 3) i

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^1\left(\mathbb{R}_+\right) \text{such that} \\ a(u,v) := (u',v') + \gamma(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1\left(\mathbb{R}_+\right). \end{cases} \tag{124}$$

相应的、针对（123）的拉盖尔–伽辽金逼近为

$$\begin{cases} \text{Find } u_{N,\beta} \in \widehat{P}_{N,\beta}^0 \text{ such that} \\ a\left(u_{N,\beta}, v_{N,\beta}\right) = \left(\widehat{I}_{N,\beta}f, v_{N,\beta}\right), \quad \forall\, v_{N,\beta} \in \widehat{P}_{N,\beta}^0. \end{cases} \tag{125}$$

与 [51], 中的定理 7.11 类似，我们定义投影算子 $\widehat{\Pi}^{1}_{,\ N}{}^{0}_{,\ \beta}: H_0^1(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \widehat{P}^0_{N,\ \beta}$满足

$$\left(\left(u-\widehat{\Pi}^{1,0}_{N,\beta}u\right)',v'_{N,\beta}\right)+\frac{\beta^2}{4}\left(u-\widehat{\Pi}^{1,0}_{N,\beta}u,v_{N,\beta}\right)=0,\quad \forall v_{N,\beta}\in\widehat{P}^0_{N,\beta}. \tag{126}$$

按照 [51], 定理 7.10 的证明，定理 7.11 给出

定理 5。**6** *For any* $u\in H_0^1(\mathbb{R}_+)$ *use* $\widehat{\Pi}^{\beta}_N$ *to represent* $\widehat{\Pi}^{(0,\beta,L)}_N$ *defined in* (23) *we have*

$$\left\|u-\widehat{\Pi}^{1,0}_{N,\beta}u\right\|_1\leqslant\left(2+\frac{2}{\beta}\right)\left\|u'-\widehat{\Pi}^{\beta}_{N-1}u'\right\|+(\beta+1)\left\|u-\widehat{\Pi}^{\beta}_{N-1}u\right\|. \tag{127}$$

此外，参照 [51], 定理 7.19 的证明，并将其与定理 5.6结合，可得

定理 5。**7** *For the solution* u *to the model problem* (124) *and the solution* $u_{N,\ \beta}$ *to the Laguerre–Galerkin approximation problem* (125) *we have*

$$\begin{aligned}\left\|u-u_{N,\beta}\right\|_1\lesssim&\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\left\|u'-\widehat{\Pi}^{\beta}_{N-1}u'\right\|\\&+(1+\beta)\left\|u-\widehat{\Pi}^{\beta}_{N-1}u\right\|\\&+\left\|f-\widehat{I}^{\beta}_N f\right\|.\end{aligned} \tag{128}$$

结合此前得到的投影误差估计和插值误差估计，以及定理 5.7，我们发现误差$\|u-u_{N,\ \beta}\|_1$ 可由空间/频率截断误差和谱误差控制。

关于整个实数轴上定义的模型问题的厄米特–伽辽金方法的误差，也可在我们此前的论文 [45]中找到类似分析。

6 数值结果与讨论

我们通过将数值结果与理论预测进行比较来验证误差估计。选取若干典型例子，以展示由我们的估计获得的新见解。

6.1 最优尺度平衡空间截断误差与频率截断误差

由定理 4.1 可知，投影误差可由空间截断误差、频率截断误差和谱误差控制。谱误差以 $\|u\|e^{-cN}$关于缩放因子拟一致地为界。因此，我们只需考虑这些截断误差。

如果空间截断误差与频率截断误差不平衡，即一方远大于另一方（通常相差一个数量级），则通过恰当缩放可以减小占主导一侧的误差，从而减小总误差。

一般来说，寻找最优尺度等价于平衡空间截断误差与频率截断误差。通过第 5 节上述扩展分析，我们知道，这一原则同样适用于插值和伽辽金近似。在下面的例子中，我们将展示它的作用。

6.2 恰当缩放恢复几何收敛

由 [57], 中的 (59)、(60) 可知， $u_H = e^{-x^{2n}}$ 的傅里叶变换满足

$$\begin{aligned}\Phi(k;n) &\sim \left(\frac{k}{2n}\right)^{1/(2n-1)} \exp\left(z\Psi\left(t_\sigma\right)\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{-P_2}} \\ &= C_1 k^{(1-n)/(2n-1)} \exp\left(-C_2 k^{2n/(2n-1)}\right) \cos\left(C_3 k^{2n/(2n-1)} - \xi_n\right),\end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3, ξ_n 为依赖于 n 的常数。若 $\mu+\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$，则对 $r \in \mathbb{N}, 0 \leqslant r \leqslant \mu+\frac{1}{2}$，

$$u_H(x) \lesssim e^{-x^{2n}}, \quad \partial^r \mathcal{F}[u_H](k) \lesssim_\mu e^{-ck^{2n/(2n-1)}}.$$

根据定理 4.1，若 $\beta = a$，其中 a 为常数，则对 $y = x^2$, $u(y) = u_H(x) = e^{-y^n}$，我们有

$$\|u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)} u\|_{y^\mu} \lesssim_\mu e^{-cN^{n/(2n-1)}}. \tag{129}$$

若 $\mu+\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$，由插值不等式（129）同样成立。取 $\beta = a$ （N）$^{(n-1)/n}$ 平衡 s 空间与频率截断误差，我们有

$$\|u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)} u\|_{y^\mu} \lesssim_\mu e^{-cN}. \tag{130}$$

我们现在求解模型问题（123），采用 Laguerre–Galerkin 方法，其定义于（125），并取 $\gamma = 1$ 以及真解 $u = e^{-x^n} - e^{-\frac{x^n}{2}}$， $n \in \mathbb{N}^+$。采用常数缩放因子$\beta = 1$， L^2 误差 $\|u - u_{N,\ \beta}\|$ 展示于 1，其中 N 取自 10 到 300。

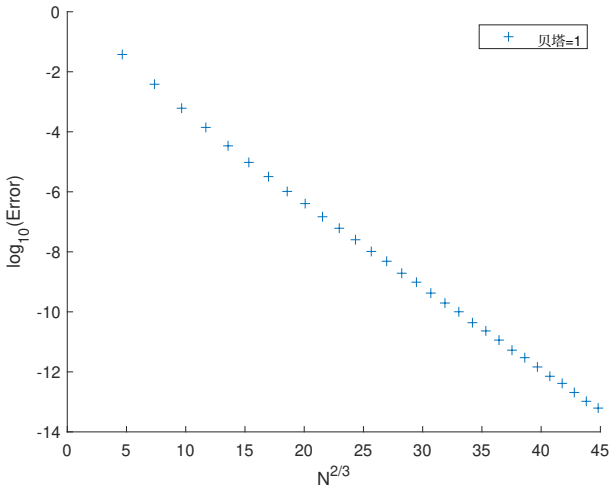


图 1 采用 L^2 方法求解方程 $\|u-u_{N,\ \beta}\|$ 拉盖尔–Galerkin 方法求解方程 (123)，其中 $u = e^{-x^2} - e^{-\frac{x^2}{2}}$， $\beta =$ 1.

我们观察到与 (129) 中预期的收敛阶一致的结果。

该 L^2 误差$\|u - u_{N,\ \beta}\|$ 对应于尺度变换 $\beta = N^{1/2}$ 在2中给出，这证了（130）。请注意，在 1 N 中取值范围为 10 至 300，而在 2 N 中仅取值范围为 10 至 50；简单的尺度变换显著提高了精度。

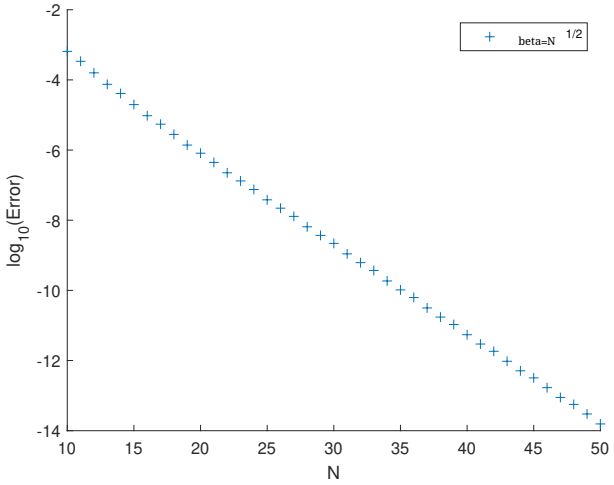


图 **2** L^2 $\|u-u_{N\ \beta}\|$ 123 — $\beta=$误差, $N^{1/2}$
Laguerre–Galerkin 方法求解（）时取 $u=e^{-x^2}-e^{-\frac{x^2}{2}}$，。

6.3 合适的尺度变换使收敛阶加倍

在本小节中，我们考虑 $u_H(x)=\left(1+x^2\right)^{-h}$ 的近似，它表示一类在空间域中具有代数衰减、在频域中具有指数衰减的函数。

由于

$$\mathcal{F}[u_H](k)=\frac{2^{1-h}|k|^{h-1/2}K_{h-\frac{1}{2}}(|k|)}{\Gamma(h)}. \tag{131}$$

这里， $K_v(k)$表示第二类修正贝塞尔函数，满足

$$K_v(k)\propto\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-k}}{\sqrt{k}}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right),\quad \text{as } |k|\to\infty. \tag{132}$$

由（131）和（132）可知，对于$\mu+\frac{1}{2}\in\mathbb{N}$和 $r\in\mathbb{N}$， $0\leqslant r\leqslant\mu+\frac{1}{2}$，

$$\partial^r\mathcal{F}[u_H](k)\lesssim_\mu e^{-c|k|}. \tag{133}$$

根据推论 4.1 可知，若 $\beta=a$，其中 a 是一个常数，则对于 $y=x^2$， $u(y)=u_H(x)=(1+y)^{-h}$，我们有

$$\|u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)}u\|_{y^\mu}\lesssim_\mu N^{\frac{\mu+1}{2}-h}. \tag{134}$$

若 $\mu+\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$，由插值不等式（134）也成立。 $\beta=Ch^2(\ln\ N)^{\ 2}/N$平衡了空间误差和频率误差。同样，根据推论4.1，我们有

$$\|u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)}u\|_{y^\mu}\lesssim_\mu (N/\ln N)^{\mu+1-2h}. \tag{135}$$

接下来，我们用（123）中定义的 Laguerre–Galerkin 方法求解模型问题（125），其中 $\gamma=1$，真解为 $u=(1+x)^{-h+1}-(1+x)^{-h}=x\cdot(1+x)^{-h}$。以 $u=x/(1+x)^2$为例，缩放因子为 $\beta=10$，且 $\beta=100/N$。注意，此处选择的缩放因子与（135）略有不同。若 $\beta=C/N$，其中 C 是一个较大的数，则根据推论4.1，频率截断误差可以忽略。在预渐近区间内，我们有

$$\|u-\widehat{\Pi}_N^{(0,\beta,L)}u\|\lesssim N^{1-2h}. \tag{136}$$

L^2 误差 $\|u-u_{N,\ \beta}\|$ 的表现类似于

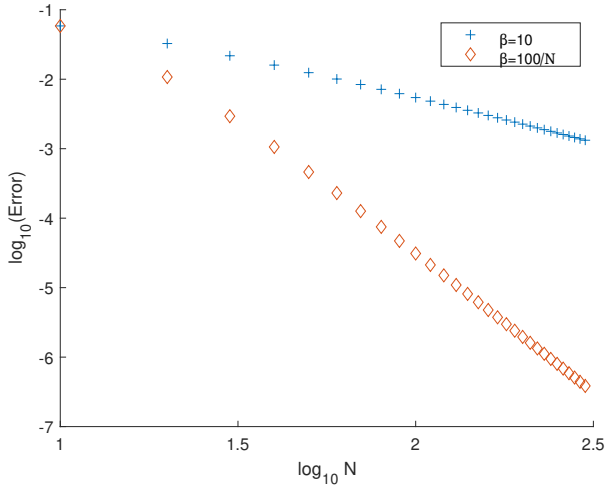


图 3 问题（ L^2 误差 $\|u - u_{N,\ \beta}\|$ 使用 Laguerre–Galerkin 方法求解问题（123）时， $u = x/(1 + x)^2, \beta = 10, \beta = 100/N$。

对于 $u = x/(1+x)^h$，取不同的 h，我们在表 $\|u - u_{N\text{ 中列出了 }\beta}\|$ 的收敛阶。1。回顾一下，我们使用式（125）求解模型问题。这里我们选取 $\beta = 10$ 和 $\beta = 100/N$，其中 $10 \leqslant N \leqslant 150$。

表 1 不同缩放因子选择下的收敛阶。

h	$\beta = 10$	$\beta = 100/N$
1.6	0.732	2.76
1.8	0.914	3.14
2	1.10	3.52
2.2	1.28	3.90
2.4	1.46	4.29
2.6	1.64	4.67

从表 1 可以清楚地看出，当 h 增加 0.2 时， $\beta = 10$ 的收敛阶约增加 0.2，而 $\beta = 100/N$ 则约增加 0.4。也就是说，恰当缩放可使收敛阶加倍。对于所有在空间域中呈代数（指数）衰减、在频域中呈指数（代数）衰减的函数，这一结论均成立。

6.4 为什么预渐近区间内的误差呈现次几何收敛

求解模型问题（123）时，真解为 $u = x(1+x)^{-h}$， [3] 报告了次几何收敛 $\exp(-c\sqrt{N})$。这令人困惑，因为经典误差估计仅预测收敛率约为 N^{-h}。

然而，根据我们的洞见，预渐近区间中出现的次几何收敛是推论 4.1 的自然结果。令 $u_H(x) = u(x^2) = x^2(1+x^2)^{-h}$，注意到

$$u_H(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{h-1}} - \frac{1}{(1+x^2)^h},$$

由（133）可知，频率截断误差为 $\exp(-c\sqrt{N})$。另一方面，空间截断误差满足

$$\left\| u_H \cdot \mathbb{I}_{\left\{|x|>\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right\}} \right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim N^{\frac{5}{4}+\frac{\mu}{2}-h}. \tag{137}$$

尽管渐近地，空间截断误差将成为主导项，因此误差的阶约为 N^{-h}。在预渐近区间内，频率截断误差可能大于空间截断误差，使总误差呈现次几何收敛阶。

为使论证更具说服力，我们将计算误差从次几何收敛 $\exp(-c\sqrt{N})$ 转变为约为 N^{-h} 的代数收敛的位置，然后将结果与数值实验的结果进行比较。

Let

$$E_s(M) = \left\| u_H \cdot \mathbb{I}_{\{|x|>M\}} \right\|_{|x|^{2\mu}}, \tag{138}$$

and

$$\begin{aligned} E_f(B) = B^{-\mu+\frac{1}{2}} &\left\| \mathcal{F}[u](B\xi) \right\|^{1/p}_{H^{\lfloor\mu\rfloor}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])} \\ &\times \left\| \mathcal{F}[u](B\xi) \right\|^{1/q}_{H^{\lceil\mu\rceil}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])}, \end{aligned} \tag{139}$$

其中 $\frac{1}{p}\lfloor\mu\rfloor + \frac{1}{q}\lceil\mu\rceil = \mu$。根据定理 4.1、(138) 和 (139)，我们知道空间/频率截断误差可表示为 $E_s\left(\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right)$ 和 $E_f\left(\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right)$。此处，为方便计算，我们使用整数阶 Sobole夫空间范数的插值来近似分数阶 Sobole夫空间范数。根据前面的理论分析，我们知道，当空间截断误差等于频率截断误差时，即

$$E_s\left(\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right) = E_f\left(\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right). \tag{140}$$

由于常数 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 并非关键因素，我们只能预期转变点 p 满足$E_f(p) = E_s(p)$ 与 $\sqrt{N}$成正比。

注意，对于真解为$u(x) = x(1+x)^{-h}$的问题，其 Laguerre–Galerkin 方法 (125) 使用 Laguerre 函数 $\widehat{\mathscr{L}}_n(x)$ 来逼近 $u(x)$，这等价于使用 $\widehat{H}_n^{(1/2)}(x)$ 来逼近 $u_H(x) = u(x^2) = x^2(1+x^2)^{-h}$。因此，对于 $E_s(M)$，利用 (138) 和 (139) 中定义的 $E_f(B)$，其中 $\mu = \frac{1}{2}$且 $u_H(x) = x^2(1+x^2)^{-h}$，我们计算满足 $E_f(p) = E_s(p)$ 的转变点 p。不同 h 对应的转变点 p 列于表2。回顾我们的分析可知，p 应与 $\sqrt{N}$ 成正比。

表2 满足 $E_s(p) = E_f(p)$ 的转变点 p。

h	3.0	3.5	4.0	4.5
p	10.34	16.00	21.86	27.92

现在，我们用123中的 $\gamma = 1$ 以及真解 $u(x) = x(1+x)^{-h}$通过Laguerre–Galerkin 方法（125）中定义的方法 $\beta = 1$求解模型问题。取 h的不同值，$\|u - u_{N\text{的}\beta}\|$ 行为如图4所示。

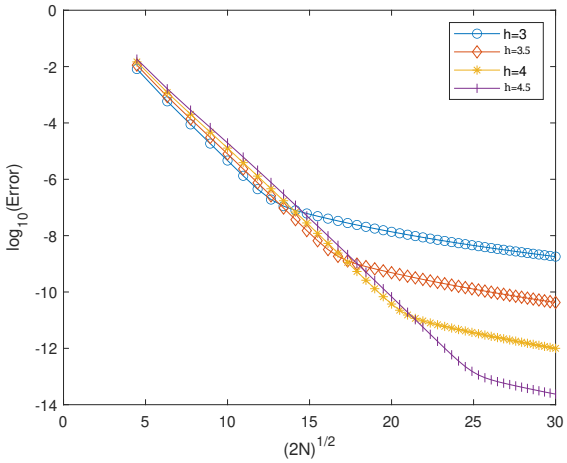


图4 对于 L^2 问题（$\|u-u_{N,\beta}\|$ 其误差为（123），其中 $\gamma=1$ 和真解 $u=x/(1+x^2)^h$。此处 $\beta=1$。

根据表2 和图4，我们发现转变点 p 与误差从次几何收敛转变为代数收敛的位置完全吻合。这证明了我们理论的有效性。

6.5 厄米特与拉盖尔：不同的收敛行为

在[51]，第7.4.3节中，考虑了以下用于拉盖尔和厄米特近似的测试函数：

$$u(x)=\frac{\sin kx}{(1+x)^h}\ \text{for}\ x\in(0,\infty)\ \text{or}\ u(x)=\frac{\sin kx}{(1+x^2)^h}\ \text{for}\ x\in(-\infty,\infty). \tag{141}$$

尽管这两个函数在 [51], 中都被统一描述为具有代数衰减且在无穷远处振荡的函数，但我们的理论表明，它们的近似性质完全不同。这再次证明，我们框架中的近似刻画比经典理论提供了更丰富的信息。

回到（141），使用厄米函数逼近 $u(x)=\sin kx/(1+x^2)^h$ 时，很容~~易验证~~，该函数在空间域中呈代数衰减，在频域中呈指数衰减。因此，与第 6.3 节一样，恰当缩放可以使收敛阶加倍。

然而，使用拉盖尔函数逼近 $u(x)=\sin kx/(1+x)^h$ 时，由于等价性，~~我们~~需要分析使用广义厄米特函数逼近 $u_H(x)=\sin kx^2/(1+x^2)^h$ 时的误差。

对于空间截断误差，当 $\beta=1$ 时，我们有

$$\left\|u_H\cdot\mathbb{I}_{\left\{|x|>\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right\}}\right\|_{|x|^{2\mu}}\lesssim N^{\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}-h}. \tag{142}$$

对于频率截断误差，由于 $i^{s+r}\xi^s\partial^r\mathcal{F}[u_H](\xi)=(\mathcal{F}[\partial^s(u_Hx^r)](\xi))$，且对于任意 $s<2h-r-\frac{1}{2}$，$\partial^s(u_Hx^r)$ 都属于 L^2，因此有

$$\begin{aligned}\left\|\partial^r\mathcal{F}\left[u_H\right](\xi)\cdot\mathbb{I}_{\left\{|\xi|>\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right\}}\right\|&\leqslant N^{-\frac{s}{2}}\left\|\xi^s\partial^r\mathcal{F}\left[u_H\right](\xi)\right\|\\&=N^{-\frac{s}{2}}\left\|\partial^s(u_H\cdot x^r)\right\|.\end{aligned} \tag{143}$$

因此，对于任意 $t > \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} - h$，式（29）中定义的频率截断误差满足

$$
\begin{aligned}
& B^{-\mu+\frac{1}{2}} \left\| \mathcal{F}[u](B\xi) \right\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])} \\
\leqslant\ & B^{-\mu+\frac{1}{2}} \left\| \mathcal{F}[u](B\xi) \right\|^{\frac{1}{p}}_{H^{\lfloor\mu\rfloor}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])} \times \left\| \mathcal{F}[u](B\xi) \right\|^{\frac{1}{q}}_{H^{\lceil\mu\rceil}(\mathbb{R}\setminus[-1,1])} \\
\lesssim\ & \left(\sum_{r=0}^{\lfloor\mu\rfloor} \left\| \partial^r \mathcal{F}[u_H](\xi) \cdot \mathbb{I}_{\left\{|\xi| > \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right\}} \right\| \cdot (\sqrt{N})^{-(\lfloor\mu\rfloor - r)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\sum_{r=0}^{\lceil\mu\rceil} \left\| \partial^r \mathcal{F}[u_H](k) \cdot \mathbb{I}_{\left\{|\xi| > \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}\right\}} \right\| \cdot (\sqrt{N})^{-(\lceil\mu\rceil - r)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
\lesssim_{\mu}\ & N^t.
\end{aligned}
\tag{144}
$$

这里 p，q 满足 $\frac{1}{p}\lfloor\mu\rfloor + \frac{1}{q}\lceil\mu\rceil = 1$。结合（142）和（144，我们知道空间截断误差和频率截断误差以几乎相同的代数速率衰减。因此，尺度变换无法提高渐近收敛率。平衡空间和频率的最佳缩放因子很可能是 $O(1)$。下面的数值实验验证了我们的结论。

我们采用（123）中的 Laguerre–Galerkin 方法（定义见（125）求解模型问题，其中 $\gamma = 1$，真解为 $u(x) = \sin 2x \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}}$，$L^2$ 误差为 $\|u - u_{N,\beta}\|$ 见图 5。

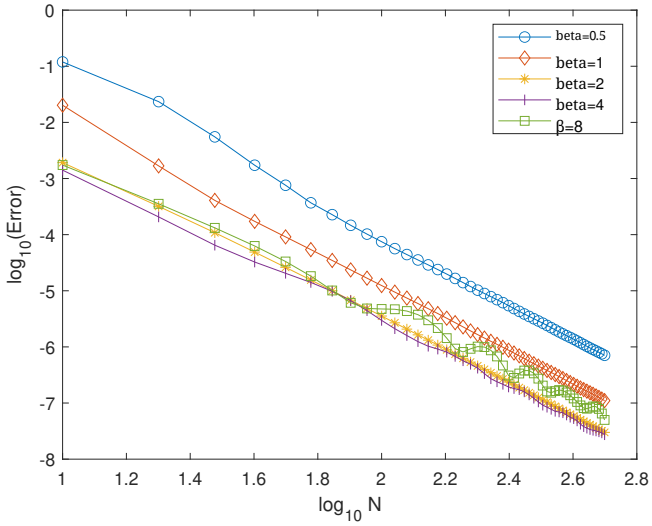


图 5 问题 L^2 误差 $\|u - u_{N,\beta}\|$ 对于问题 (123) 且 $u = \sin 2x \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}}$ 具有不同的 β。

从图 5 可以看出，最佳缩放因子对所用基函数的数量并不敏感，这与我们的误差分析一致。在 [4] 中可以找到类似的数值结果。

6.6 厄米特与拉盖尔：厄米特还是对偶拉盖尔?

本小节旨在比较一组厄米函数与 t
两组串接的Laguerre函数组的性能。

直观而言，对于在零点处光滑性有限（如 $e^{-|x|}$）或在 $\pm\infty$ 处衰减率不同的函数，使用两组串接的Laguerre函数能提供更大的灵活性，有助于提高逼近效率。

然而，一般而言，尤其是在引入缩放因子的情况下，并不能保证两组串接的Laguerre函数一定优于单组厄米函数。例如，人们自然会认为，衰减率为 e^{-x^2} 的函数用厄米函数（其衰减率相同）比用两组串接的Laguerre函数近似效果更好。

利用本文建立的误差分析框架，我们将证明这种直觉是错误的。具体而言，我们提出以下定理，该定理表明，对于一大类按 e^{-x^2} 衰减的函数，两组串接的Laguerre函数的近似能力不逊于单组厄米函数，甚至可能更胜一筹。

定理 6.1 *For $g(x)$ bounded and analytic in the strip domain $-a \leqslant \mathrm{Im}(x) \leqslant a$, $u(x) = e^{-x^2} g(x)$ let scaling factor $\beta = N^{\frac{1}{6}}$, then approximating $u(x)$ by a set of Hermite functions yields the following result*

$$\left\| u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)} u \right\|_{|x|^{2\mu}} \lesssim_{\mu,u} e^{-cN^{\frac{2}{3}}}. \tag{145}$$

Moreover, when $g(x)$ has singularities, the convergence rate estimated in (145) cannot be improved to $e^{-cN^{\alpha}}$ for $\alpha > \frac{2}{3}$ via Theorem 4.1.

In contrast, when approximating $u(x)$ using two sets of concatenated Laguerre functions, taking $\beta = N^{\frac{2}{3}}$ yields a convergence rate no worse than that in 145 . This holds for both segments of ( ) 0 , u x . For instance the following estimate holds for the part where $x \geqslant 0$

$$\left\| u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)} u \right\|_{x^{\mu}} \lesssim_{\mu,u} e^{-cN^{\frac{2}{3}}}. \tag{146}$$

Moreover when g x has singularities the convergence rate estimated in 146 may still be further , ( ) , improved. For instance if g x^2 remains a bounded analytic function in the strip region $-b \leqslant$ ( ) , ( ) $\mathrm{Im}(x) \leqslant b$, then by setting $\beta = N^{\frac{2}{5}}$, the following error estimate holds for the part of $u(x)$ where $x \geqslant 0$

$$\left\| u - \widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta,L)} u \right\|_{x^{\mu}} \lesssim_{\mu,u} e^{-cN^{\frac{4}{5}}}. \tag{147}$$

An analogous result applies to the part where $x < 0$.

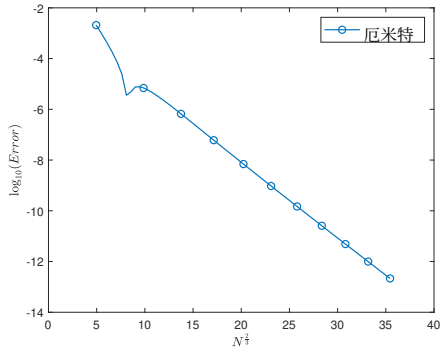
该定理的证明可见附录 C。

我们通过比较 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+16x^2} dx$ 的厄米特求积与拉盖尔求积误差，验证上述结果。令 N 为奇数。我们在每个半轴上采用含 $\frac{N+1}{2}$ 个节点的高斯 – 拉盖尔 – 拉道求积，总计得到 N 个求积点，从而确保可与节点数相同的厄米特求积直接比较。这里的求积公式对应狭义的厄米特函数和拉盖尔函数，具体来说，分别记为 $H_n(x)$ 和 $\mathscr{L}_n(x)$。

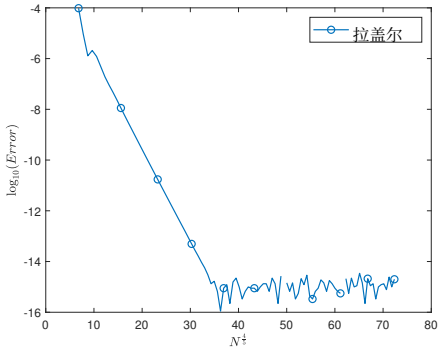
由于此处 $u(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+16x^2}$, $g(x) = e^{x^2} u(x)$ 满足 $g(x^2)$ 在带状区域 $-b \leqslant \mathrm{Im}(x) \leqslant b$ for $b < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 中仍是有界解析函数，因此根据定理 6.1 ，厄米特和拉盖尔近似的渐近最优收敛率分别为 $e^{-cN^{\frac{1}{3}}}$ 和 $e^{-cN^{\frac{1}{5}}}$。

与第 6.4 节类似，对插值节点之外的空间误差和频率误差进行平衡，可得到渐近最优缩放因子，分别约为 $\beta_{opt}^H = 2^{\frac{5}{6}} N^{\frac{1}{6}}$（厄米特求积）和 $\beta_{opt}^L = 2^{\frac{5}{6}} N^{\frac{3}{5}}$（拉盖尔求积）。

采用最优缩放因子 β_{opt}^H 的厄米特求积和缩放因子 β_{opt}^L 的拉盖尔求积所得误差结果如下所示，其中 N 也取自 11 到 211。



（a）横轴为 $N^{\frac{2}{3}}$ 时的厄米特求积误差



（b）横轴为 $N^{\frac{4}{5}}$ 时的拉盖尔求积误差

图 6 最优缩放因子下厄米特与拉盖尔求积误差的比较

图 6(a) 和图 6(b) 验证了最优厄米特和拉盖尔近似的收敛阶，如式（145）和（147）所示。

与上述过程类似，可以考察更多示例，其中两个经过最优尺度变换的拼接Laguerre函数，其近似效果可与单个经过最优尺度变换的厄米特函数相当或更优。

这一规律表明，在最优尺度变换下，两个拼接的Laguerre函数可能系统性地更优。一个值得未来探究的问题是，能否将这一结论证明为一般定理。

7 结论

本文提出了一种新的误差分析框架，用于分析带有缩放因子的广义厄米特近似和广义拉盖尔近似。该框架可视为奈奎斯特–香农采样定理的类比：我们刻画了广义厄米特/拉盖尔采样点能够捕捉的空间带宽和频率带宽；只要函数满足带宽限制，就能得到良好的近似。我们的刻画比经典理论更有力。数值实验表明，它不仅能系统地指导尺度变换，还能预测经典理论无法刻画的根指数收敛及其他更复杂的收敛行为。基于这一刻画，我们深入比较了厄米特近似与拉盖尔近似的行为。我们发现，具有相似衰减与振荡特征的函数可能呈现不同的收敛行为。此外，与使用单组厄米函数相比，使用两组串接的Laguerre函数进行近似可能更具优势。

致谢。 我们谨此感谢国家自然科学基金委员会（项目编号：12494543、12171467）和中国科学院战略性先导科技专项（项目编号：XDA0480504）的资助。

附录 A 定理 5.1 的证明定理 5.1

为证明定理 5.1，我们需要以下引理：

引理 **A.1** *Suppose that*

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\widehat{H}_n^{(\mu)},\quad \partial_x u=\sum_{n=0}^{+\infty}d_n\widehat{H}_n^{(\mu)},$$

then

$$\sum_n |d_n|^2\lesssim_\mu \sum_n |c_n|^2\cdot(n+1). \tag{A1}$$

Proof 根据引理 2.1，当 $2\mid n$时，

$$\partial_x\widehat{H}_n^{(\mu)}=-\sqrt{\frac{n+1+2\mu}{2}}\widehat{H}_{n+1}^{(\mu)}+\sqrt{\frac{n}{2}}\widehat{H}_{n-1}^{(\mu)}, \tag{A2}$$

因此对于 $2\nmid n$,

$$d_n=-\sqrt{\frac{n+2\mu}{2}}c_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}c_{n+1}. \tag{A3}$$

于是我们有

$$\sum_{2\nmid n} |d_n|^2\lesssim_\mu \sum_{2\mid n} |c_n|^2\cdot(n+1). \tag{A4}$$

当 $2\nmid n$时，根据引理 2.1,

$$\begin{aligned}\partial_x\widehat{H}_n^{(\mu)}=&-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\widehat{H}_{n+1}^{(\mu)}+\sqrt{\frac{n+2\mu}{2}}\widehat{H}_{n-1}^{(\mu)}\\&+2\mu(-1)^{\frac{n-3}{2}}\times\sqrt{\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\mu+1\right)}}\\&\times\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\sqrt{\frac{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)}{k!}}\widehat{H}_{2k}^{(\mu)}.\end{aligned} \tag{A5}$$

因此对于 $2\mid n$,

$$d_n=-\sqrt{\frac{n}{2}}c_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1+2\mu}{2}}c_{n+1}+\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}w_{n,2k+1}c_{2k+1}, \tag{A6}$$

其中 $w_{n,\ 2k+1}$ 定义为

$$w_{n,2k+1}=2\mu(-1)^{k-1+\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{k!}{\Gamma\left(k+\mu+\frac{3}{2}\right)}}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)!}}. \tag{A7}$$

由（A6）可知

$$|d_n|^2\lesssim_\mu |c_{n-1}|^2\cdot n+|c_{n+1}|^2\cdot(n+2)+\left|\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}w_{n,2k+1}c_{2k+1}\right|^2. \tag{A8}$$

设 $\alpha=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\mu\right)$，由于 $\mu>-\frac{1}{2}$, $\alpha<1$，根据柯西–施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}w_{n,2k+1}c_{2k+1}\right|^2\leqslant&\left[\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}\left|w_{n,2k+1}\right|^2\cdot(2k+1)^{-\alpha}\right]\\&\times\left[\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}|c_{2k+1}|^2\cdot(2k+1)^{\alpha}\right]\end{aligned} \tag{A9}$$

由（A7）可知

$$\left|w_{n,2k+1}\right|^2\lesssim_\mu (k+1)^{-\frac{1}{2}-\mu}(1+n)^{-\frac{1}{2}+\mu}, \tag{A10}$$

因此

$$\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}\left|w_{n,2k+1}\right|^2(2k+1)^{-\alpha}\lesssim_\mu (1+n)^{-\frac{1}{2}+\mu}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}(k+1)^{-\alpha-\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}. \tag{A11}$$

回顾一下，$\alpha=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\mu\right),\mu>-\frac{1}{2}$，我们有 $\alpha+\frac{1}{2}+\mu>1$,

$$\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}(k+1)^{-\alpha-\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}\lesssim_{\mu}(1+n)^{-\alpha+\frac{1}{2}-\mu}. \tag{A12}$$

结合（A12）和（A11）可得

$$\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}\left|w_{n,2k+1}\right|^{2}(2k+1)^{-\alpha}\lesssim_{\mu}(1+n)^{-\alpha}.$$

将上述公式代回（A9），得到

$$\left|\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}w_{n,2k+1}c_{2k+1}\right|^{2}\lesssim_{\mu}(1+n)^{-\alpha}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}\left|c_{2k+1}\right|^{2}\cdot(2k+1)^{\alpha}. \tag{A13}$$

结合（A13）和（A8），可知对于 $2\mid n$,

$$\begin{aligned}\left|d_{n}\right|^{2}\lesssim_{\mu}&\left|c_{n-1}\right|^{2}\cdot n+\left|c_{n+1}\right|^{2}\cdot(n+2)\\&+(1+n)^{-\alpha}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}\left|c_{2k+1}\right|^{2}\cdot(2k+1)^{\alpha},\end{aligned} \tag{A14}$$

因此

$$\sum_{2|n}\left|d_{n}\right|^{2}\lesssim_{\mu}\sum_{2\nmid n}\left|c_{n}\right|^{2}\cdot\left[(n+1)+n^{\alpha}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(1+2k)^{-\alpha}\right]. \tag{A15}$$

回顾一下，$\mu>-\frac{1}{2}$、$\alpha=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\mu\right)<1$，因此

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(1+2k)^{-\alpha}\lesssim_{\mu}n^{1-\alpha}. \tag{A16}$$

将（A16）代回（A15），可得

$$\sum_{2|n}\left|d_{n}\right|^{2}\lesssim_{\mu}\sum_{2\nmid n}\left|c_{n}\right|^{2}\cdot(n+1). \tag{A17}$$

结合（A4）与（A17）即可完成证明。 □

现在我们回到定理 5.1 的证明。

Proof 我们通过归纳论证来进行证明。显然，（78）成立 f or $l=0$。假设（78）对 0，.....，$l-1$成立。令

$$\begin{aligned}\partial_{x}^{l-1}\left(u-\widehat{\Pi}_{N}^{(\mu,\beta)}u\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n}\widehat{H}_{n}^{(\mu)}(\beta x)\\\partial_{x}^{l}\left(u-\widehat{\Pi}_{N}^{(\mu,\beta)}u\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}d_{n}\widehat{H}_{n}^{(\mu)}(\beta x).\end{aligned} \tag{A18}$$

令 $y=\beta x,e=\partial_{x}^{l-1}\left(u-\widehat{\Pi}_{N}^{(\mu,\beta)}u\right)$，则

$$\begin{aligned}e&=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n}\widehat{H}_{n}^{(\mu)}(y)\\\partial_{y}e&=\frac{1}{\beta}\partial_{x}e\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\beta}d_{n}\widehat{H}_{n}^{(\mu)}(y).\end{aligned} \tag{A19}$$

利用引理 A.1 可得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|d_{n}\right|^{2}\lesssim_{\mu}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|c_{n}\right|^{2}\cdot(n+1)\cdot\beta^{2}. \tag{A20}$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2\cdot(n+1)&=\sum_{n=0}^{N+l}|c_n|^2\cdot(n+1)+\sum_{n>N+l}|c_n|^2\cdot(n+1)\\&\triangleq P_1+P_2.\end{aligned}\tag{A21}$$

对于 P_1,

$$\sum_{n=0}^{N+l}|c_n|^2\cdot(n+1)\lesssim_l N\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2.\tag{A22}$$

由于

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2=\beta\cdot\left\|\partial_x^{l-1}\left(u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}}^2,\tag{A23}$$

由归纳假设，我们有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2\lesssim_{\mu,l}\left(\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^{l-1}dx\right)\cdot\beta^{2l-1}.\tag{A24}$$

结合（A22）可得

$$\sum_{n=0}^{N+l}|c_n|^2\cdot(n+1)\lesssim_{\mu,l}N\cdot\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^{l-1}dx\cdot\beta^{2l-1}.\tag{A25}$$

对于 P_2 （定义于（A21），我们有

$$\sum_{n>N+l}|c_n|^2\cdot(n+1)=(N+l+1)\sum_{n>N+l}|c_n|^2+\sum_{n\geqslant N+l}\sum_{m>n}|c_m|^2.\tag{A26}$$

由引理 2.1，我们知道

$$\partial_x^{l-1}\left(\widehat{\Pi}_{n-l+1}^{(\mu,\beta)}u\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\widehat{H}_k^{(\mu)}(\beta x),\tag{A27}$$

然后结合（A18）可得

$$\widehat{\Pi}_n^{(\mu,\beta)}\left(\partial_x^{l-1}\left(u-\widehat{\Pi}_{n-l+1}^{(\mu,\beta)}u\right)\right)=\sum_{m>n}c_m\widehat{H}_m^{(\mu)}(\beta x).\tag{A28}$$

根据归纳假设，

$$\begin{aligned}\sum_{m>n}|c_m|^2&=\beta\cdot\left\|\widehat{\Pi}_n^{(\mu,\beta)}\left(\partial_x^{l-1}\left(u-\widehat{\Pi}_{n-l+1}^{(\mu,\beta)}u\right)\right)\right\|_{|x|^{2\mu}}^2\\&\leqslant\beta\cdot\left\|\partial_x^{l-1}\left(u-\widehat{\Pi}_{n-l+1}^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_{|x|^{2\mu}}^2\\&\lesssim_{\mu,l}\int_{n-l+1}^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^{l-1}dx\cdot\beta^{2l-1}.\end{aligned}\tag{A29}$$

将（A29）代回（A26）可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant N+l}\sum_{m>n}|c_m|^2&\lesssim_{\mu,l}\sum_{n\geqslant N+l}\int_{n-l+1}^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^{l-1}dx\cdot\beta^{2l-1}\\&\lesssim_{\mu,l}\int_N^{+\infty}\int_y^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^{l-1}dx\cdot\beta^{2l-1}dy\\&=\beta^{2l-1}\cdot\left(\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^l dx-N\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^{l-1}dx\right).\end{aligned}\tag{A30}$$

与（A25）类似，我们有

$$(N+l+1)\sum_{n>N+l}|c_n|^2\lesssim_{\mu,l}N\cdot\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^{l-1}dx\cdot\beta^{2l-1}.\tag{A31}$$

将（A30）、（A31）代回（A26）可得

$$\sum_{n>N+l}|c_n|^2\cdot(n+1)\lesssim_{\mu,l}\beta^{2l-1}\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^l dx.\tag{A32}$$

将（A25）与（A32）合并，得到

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2\cdot(n+1)\lesssim_{\mu,l}\beta^{2l-1}\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^l dx. \tag{A33}$$

将（A33）代回（A20），我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^l\left(u-\widehat{\Pi}_N^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|^2_{|x|^{2\mu}}&=\sum_{n=0}^{+\infty}|d_n|^2/\beta\\&\lesssim_{\mu,l}\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2\cdot(n+1)\cdot\beta\\&\lesssim_{\mu,l}\beta^{2l}\int_N^{+\infty}|f(x)|^2\cdot x^l dx.\end{aligned} \tag{A34}$$

这就完成了我们的证明。. □

附录 B 定理 5.2的证明

为证明定理 5.2，我们首先给出两个引理。

引理 B. **1** *Let* $\omega_{\alpha,\beta}$ *x* *A/B* *where* C_α *is a constant*, 0 *depends on* α. *Then we have denote* $x^\alpha e^{-\beta x}$. $A\sim_\alpha B$ *means* $(\,)^{\pm1}\leqslant C_\alpha$,

$$\begin{aligned}\omega^{(\alpha,\beta)}_{G,N,j}&=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}}\omega^{(\alpha)}_{G,N,j}\sim_\alpha\frac{1}{\beta^{\alpha+1}}\omega_\alpha\left(\xi^{(\alpha)}_{G,N,j}\right)\left(\xi^{(\alpha)}_{G,N,j+1}-\xi^{(\alpha)}_{G,N,j}\right)\\&=\omega_{\alpha,\beta}\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{G,N,j}\right)\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{G,N,j}-\xi^{(\alpha,\beta)}_{G,N,j-1}\right),\quad 0\leqslant j\leqslant N.\end{aligned} \tag{B35}$$

As for $\omega^{(\alpha,\beta)}_{R\ N}{}_{,j}$, *we have*

$$\omega^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}}\omega^{(\alpha)}_{R,N,j}=\begin{cases}\frac{(\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(N+1)}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(N+\alpha+2)}, & j=0,\\ \frac{\Gamma(N+\alpha+1)}{\beta^\alpha\Gamma(N+2)}\frac{1}{\mathcal{L}^{(\alpha,\beta)}_{N+1}\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}\right)\partial_x\mathcal{L}^{(\alpha,\beta)}_N\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}\right)}, & 1\leqslant j\leqslant N,\end{cases} \tag{B36}$$

besides,

$$\begin{aligned}\omega^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}&=\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}\right)^{-1}\omega^{(\alpha+1,\beta)}_{G,N-1,j-1}\\&\sim_\alpha\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}\right)^{-1}\omega_{\alpha+1,\beta}\left(\xi^{(\alpha+1,\beta)}_{G,N-1,j-1}\right)\left(\xi^{(\alpha+1,\beta)}_{G,N-1,j-1}-\xi^{(\alpha+1,\beta)}_{G,N-1,j-2}\right)\\&=\omega_{\alpha,\beta}\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}\right)\left(\xi^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j}-\xi^{(\alpha,\beta)}_{R,N,j-1}\right),\quad 1\leqslant j\leqslant N.\end{aligned} \tag{B37}$$

（B35）、（B36）和（B37）分别是 [58]中的（2.19）、（2.12）和（2.21）。

引理 B.**2** *For* $\widehat{\omega}^{(\mu,\beta)}_{2N+1,\ j}$ *defined in* (87) *we have*

$$\widehat{\omega}^{(\mu,\beta)}_{2N+1,j}\sim_\mu\left|x^{(\mu,\beta)}_{2N+1,j}\right|^{2\mu-1}\left(\left|x^{(\mu,\beta)}_{2N+1,j}\right|^2-\left|x^{(\mu,\beta)}_{2N+1,j'}\right|^2\right), \tag{B38}$$

where

$$j'=\begin{cases}j+1 & 0\leqslant j\leqslant N-1,\\ N+\frac{1}{2} & j=N,N+1,\\ j-1 & N+2\leqslant j\leqslant 2N+1.\end{cases} \tag{B39}$$

Here we set $x^{(\mu,\beta)}_{2N+1,\ N+\frac{1}{2}}=0$.

As for $\widehat{\omega}^{(\mu,\beta)}_{2N\ ,\ j,}$ *we have*

$$\widehat{\omega}^{(\mu,\beta)}_{2N,N}\sim_\mu\left(\beta\sqrt{N}\right)^{-2\mu-1}, \tag{B40}$$

and for $j \neq N$,

$$\widehat{\omega}_{2N,j}^{(\mu,\beta)} \sim_{\mu} \left|x_{2N,j}^{(\mu,\beta)}\right|^{2\mu-1}\left(\left|x_{2N,j}^{(\mu,\beta)}\right|^{2}-\left|x_{2N,j'}^{(\mu,\beta)}\right|^{2}\right), \tag{B41}$$

where j' *satisfies*

$$j'=\begin{cases} j+1 & 0 \leqslant j \leqslant N-1, \\ j-1 & N+1 \leqslant j \leqslant 2N. \end{cases} \tag{B42}$$

Proof 我们只证明（B40）和（B41）。（B38）的证明类似。

令 $v(y) \in \widehat{P}^{\beta^2}{}_{N}^{L}, y=x^2, u(x)=v(y)$，则 $u(x) \in \widehat{P}^{\beta}{}_{2N}^{H}$。根据积分变换公式，

$$\int_0^{+\infty} v(y) y^{\mu-\frac{1}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)|x|^{2\mu} dx. \tag{B43}$$

将（B43）与（83）和（87）结合可得

$$\sum_{j=0}^{2N} u\left(x_{2N,j}^{(\mu,\beta)}\right)\widehat{\omega}_{2N,j}^{(\mu,\beta)} = \sum_{j=0}^{N} v\left(\xi_{R,N,j}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}\right)\widehat{\omega}_{R,N,j}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}. \tag{B44}$$

对于 $0 \leqslant i \leqslant 2N$，定义 $u_i(x) \in \widehat{P}^{\beta}{}_{2N}^{H}$ 使得

$$u_i\left(x_{2N,j}^{(\mu,\beta)}\right) = \delta_{ij}, \tag{B45}$$

那么对于 $1 \leqslant j \leqslant N$，我们知道 $u_{N-j}(x) = u_{N+j}(-x)$，结合（87）可得

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_{2N,N-j}^{(\mu,\beta)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_{N-j}(x)|x|^{2\mu} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_{N+j}(x)|x|^{2\mu} dx \\ &= \widehat{\omega}_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}. \end{aligned} \tag{B46}$$

注意到 $x_{2N}^{(\mu,\beta)}{}_{,j}$、$0 \leqslant j \leqslant 2N$是 $H_{2N+1}^{(\mu)}(\beta x)$、$\xi(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)$的零点，$R$、$N$、$j$是 $y\mathscr{L}(\mu+\frac{1}{2})_N(\beta^2 y)$的零点。结合转换关系（14）（厄米特多项式与拉盖尔多项式之间），可得

$$\xi_{R,N,j}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)} = \left|x_{2N,N\pm j}^{(\mu,\beta)}\right|^2. \tag{B47}$$

设 $u(x)=u_N(x)$，则 $v(y)=v(x^2)=u(x)$ 满足

$$v\left(\xi_{R,N,j}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}\right) = \delta_{0j}.$$

将 $u(x)$与 $v(y)$代回（B44），可得

$$\widehat{\omega}_{2N,N}^{(\mu,\beta)} = \widehat{\omega}_{R,N,0}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}. \tag{B48}$$

进一步将 $u(x)=u_{N-j}(x)+u_{N+j}(x)$ $v(y)=v\left(x^2\right)=u(x)$ $1 \leqslant j \leqslant N$代入（B44），可得

$$\widehat{\omega}_{2N,N-j}^{(\mu,\beta)} + \widehat{\omega}_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)} = \widehat{\omega}_{R,N,j}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}. \tag{B49}$$

结合（B46），可知

$$\widehat{\omega}_{2N,N-j}^{(\mu,\beta)} = \widehat{\omega}_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)} = \frac{1}{2}\widehat{\omega}_{R,N,j}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)}. \tag{B50}$$

由（B48）、（85）和（B36）可得

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_{2N,N}^{(\mu,\beta)} &= \widehat{\omega}_{R,N,0}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)} \\ &= \omega_{R,N,0}^{(\mu-\frac{1}{2},\beta^2)} \\ &= \frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(N+1)}{\beta^{2\mu+1}\Gamma\left(N+\mu+\frac{3}{2}\right)} \\ &\sim_{\mu} (\beta\sqrt{N})^{-2\mu-1}. \end{aligned} \tag{B51}$$

这就完成了（B40）的证明。此外，由（B50）、（85）和（B37）可得

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_{2N,N\pm j}^{(\mu,\beta)} &= \frac{1}{2}\widehat{\omega}_{R,N,j}^{\left(\mu-\frac{1}{2},\beta^2\right)} \\ &= \frac{1}{2}e^{\beta^2\xi_{R,N,j}^{\left(\mu-\frac{1}{2},\beta^2\right)}}\omega_{R,N,j}^{\left(\mu-\frac{1}{2},\beta^2\right)} \\ &\sim_\mu \left|\xi_{R,N,j}^{\left(\mu-\frac{1}{2},\beta^2\right)}\right|^{\mu-\frac{1}{2}}\left(\xi_{R,N,j}^{\left(\mu-\frac{1}{2},\beta^2\right)}-\xi_{R,N,j-1}^{\left(\mu-\frac{1}{2},\beta^2\right)}\right).\end{aligned} \tag{B52}$$

结合（B47）可得

$$\widehat{\omega}_{2N,N\pm j}^{(\mu,\beta)} \sim_\mu \left|x_{2N,N\pm j}^{(\mu,\beta)}\right|^{2\mu-1}\left(\left|x_{2N,N\pm j}^{(\mu,\beta)}\right|^2-\left|x_{2N,N\pm j\mp 1}^{(\mu,\beta)}\right|^2\right). \tag{B53}$$

至此完成了（B41）的证明。 □

现在我们回到定理 5.2的证明。

Proof 注意到

$$\begin{aligned}\left\|u-\widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right\|_\omega &\leqslant \left\|u-\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right\|_\omega+\left\|\widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)}\left(u-\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u\right)\right\|_\omega \\ &\triangleq E_1+E_2.\end{aligned} \tag{B54}$$

令 $e:=u-\widehat{\Pi}_{2N}^{(\mu,\beta)}u$，由于求积（87）的精确性，

$$\begin{aligned}E_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{I}_{2N}^{(\mu,\beta)}e\right|^2|x|^{2\mu}dx \\ &= \sum_{j=0}^{2N}\widehat{\omega}_{2N,j}^{(\mu,\beta)}\left|e\left(x_{2N,j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2.\end{aligned} \tag{B55}$$

由引理B.2 我们有

$$\begin{aligned}E_{21} &= \widehat{\omega}_{2N,N}^{(\mu,\beta)}|e(0)|^2 \\ &\lesssim_\mu \beta^{-2\mu-1}N^{-\mu-\frac{1}{2}}|e(0)|^2.\end{aligned} \tag{B56}$$

再次应用引理 B.2 ，可得

$$\begin{aligned}E_{22} &= \sum_{j=1}^{N}\widehat{\omega}_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\left|e\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2 \\ &\lesssim_\mu \sum_{j=1}^{N}\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)^{2\mu-1}\left(\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)^2-\left(x_{2N,N+j-1}^{(\mu,\beta)}\right)^2\right) \\ &\times\left|e\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2 \\ &\leqslant \sup\left\{\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)^{2\mu-1}\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}+x_{2N,N+j-1}^{(\mu,\beta)}\right)\left|e\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2\right\} \\ &\times\sum_{j=1}^{N}\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}-x_{2N,N+j-1}^{(\mu,\beta)}\right).\end{aligned} \tag{B57}$$

由 [51] 中的（7.44）和（14）可知

$$\sum_{j=1}^{N}\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}-x_{2N,N+j-1}^{(\mu,\beta)}\right)=x_{2N,2N}^{(\mu,\beta)}\lesssim_\mu \sqrt{N}/\beta. \tag{B58}$$

由索博列夫不等式（参见 [51]中的引理 B.4）

$$\max_{x\in[a,b]}|u(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{b-a}}\|u\|_{L^2[a,b]}+\sqrt{b-a}\left\|u'\right\|_{L^2[a,b]} \tag{B59}$$

我们知道

$$\left|e\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2 \lesssim \int_{x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}}^{x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}+\left(\beta\sqrt{N}\right)^{-1}}\beta\sqrt{N}e^2+\left(\beta\sqrt{N}\right)^{-1}\left(e'\right)^2dx. \tag{B60}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)^{2\mu-1}\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}+x_{2N,N+j-1}^{(\mu,\beta)}\right)\left|e\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2\\
\lesssim&\int_{x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}}^{x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}+\left(\beta\sqrt{N}\right)^{-1}}\beta\sqrt{N}e^2|x|^{2\mu}+\left(\beta\sqrt{N}\right)^{-1}\left(e'\right)^2|x|^{2\mu}dx\\
\lesssim&\beta\sqrt{N}\left\|e\right\|_\omega^2+\left(\beta\sqrt{N}\right)^{-1}\left\|e'\right\|_\omega^2.
\end{aligned}\tag{B61}$$

将（B58）和（B61代回（B57）可得

$$\begin{aligned}
E_{22}=&\sum_{j=1}^{N}\widehat{\omega}_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\left|e\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2\\
\lesssim_\mu& N\left\|e\right\|_\omega^2+\beta^{-2}\left\|e'\right\|_\omega^2.
\end{aligned}\tag{B62}$$

同理,

$$\begin{aligned}
E_{23}=&\sum_{j=1}^{N}\widehat{\omega}_{2N,N-j}^{(\mu,\beta)}\left|e\left(x_{2N,N+j}^{(\mu,\beta)}\right)\right|^2\\
\lesssim_\mu& N\left\|e\right\|_\omega^2+\beta^{-2}\left\|e'\right\|_\omega^2.
\end{aligned}\tag{B63}$$

因此，对于在（ E_2 中定义的（B54），结合（B56）、（B62）和（B63）可得

$$\begin{aligned}
E_2^2=&E_{21}+E_{22}+E_{23}\\
\lesssim_\mu&\left(\beta\sqrt{N}\right)^{-2\mu-1}|e(0)|^2+N\left\|e\right\|_\omega^2+\beta^{-2}\left\|e'\right\|_\omega^2.
\end{aligned}\tag{B64}$$

由（B54）和（B64）可证明（88）。关于（89）的证明类似。 □

附录 C 定理 6.1 的证明

Proof 由于 $g(x)$ 在 $-a\leqslant \mathrm{Im}(x)\leqslant a$ 中有界且解析，根据 Paley 和 Wiener 的经典著作引言中的定理 IV [56], , 我们知道对于 $\mu,r\in\mathbb{N},0\leqslant r\leqslant\mu$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial^r\mathcal{F}[u](\xi)\cdot\mathbb{I}_{\{|\xi|>B\}}\right\|\\
=&\left\|\partial\mathcal{F}\left[u\cdot x^r\right](\xi)\cdot\mathbb{I}_{\{|\xi|>B\}}\right\|\\
\leqslant&\left\|e^{a|\xi|}\mathcal{F}\left[u\cdot x^r\right](\xi)\cdot\mathbb{I}_{\{|\xi|>B\}}\right\|\cdot e^{-aB}\\
\lesssim_{\mu,u}&\, e^{-aB}.
\end{aligned}\tag{C65}$$

因此

$$\left\|\mathcal{F}[u](B\xi)\right\|_{H^\mu(\mathbb{R}\setminus[-1,1])}\lesssim_{\mu,u} e^{-aB}.\tag{C66}$$

若 $\mu\notin\mathbb{N}$，由插值不等式（C66）也成立。结合（C66）与定理 4.1 可得（145）。这证明了使用一组厄米函数进行近似时的误差估计结果。

此外，当 g（x）存在奇点时，根据[56], 引言中的定理 I，我们知道$\mathcal{F}[u]$（ξ）至多呈指数衰减，因此（145）中估计的收敛率无法通过定理 e^{-cN^α} 4.1$\alpha>\frac{2}{3}$ 改进为 $\alpha>\frac{2}{3}$。

根据定理 4.1，要分析使用两组拉盖尔函数近似$u(x)$时的误差，需要考察 $u(x^2)=e^{-x^4}g(x^2)$的傅里叶变换及其直到某一阶的导数的衰减率。这可以通过平移积分路径来实现。具体而言，我们首先假设 $r,\mu+\frac{1}{2}\in\mathbb{N},0\leqslant r\leqslant\mu+\frac{1}{2}$，考察 $h(x)=x^re^{-x^4}g(x^2)$。由于 $g(x)$在 $-a\leqslant\mathrm{Im}(x)\leqslant a$中解析且有界， $g(x^2)$有界且解析于

$$\Omega=\left\{x=t+is:-\frac{a}{2}\leqslant ts\leqslant\frac{a}{2},t,s\in\mathbb{R}\right\}.\tag{C67}$$

鉴于

$$\mathcal{F}[h](\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^re^{-x^4}g\left(x^2\right)e^{-ix\xi}dx,\tag{C68}$$

对于 $\xi>0$，利用 $h(x)$ 在 Ω 内的解析性，我们通过围道积分方法将积分路径移至 Ω 的下边界，即，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[h](\xi)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(t+i\frac{a}{2t}\right)^{r}e^{-\left(t+i\frac{a}{2t}\right)^{4}}g\left(\left(t+i\frac{a}{2t}\right)^{2}\right)e^{-i\left(t+i\frac{a}{2t}\right)\xi}dt,\\&+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(t-i\frac{a}{2t}\right)^{r}e^{-\left(t-i\frac{a}{2t}\right)^{4}}g\left(\left(t-i\frac{a}{2t}\right)^{2}\right)e^{-i\left(t-i\frac{a}{2t}\right)\xi}dt\\&\triangleq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_2.\end{aligned}\tag{C69}$$

对于 I_2，假设 $|g(x)|\leqslant G,\forall x\in\Omega$，我们有

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant\int_{0}^{\infty}\left(t+\frac{a}{2t}\right)^{r}e^{-\left(t^4+\left(\frac{a}{2t}\right)^4\right)+\frac{3}{2}a^2}Ge^{-\frac{a}{2t}\xi}dt\\&\lesssim\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^4-\frac{a}{2t}\xi}dt.\end{aligned}\tag{C70}$$

设 $\varphi(t)=\frac{1}{2}t^4+\frac{a}{2t}\xi$，则 $\varphi(t)$ 存在一个最小点 $t_0=\left(\frac{a\xi}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$，不难证明

$$\varphi(t)\geqslant\varphi(t_0)+\frac{\varphi''(t_0)}{2}(t-t_0)^2\quad\forall t>0.\tag{C71}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}e^{-\varphi(t)}dt&\leqslant\int_{0}^{\infty}e^{-\varphi(t_0)-\frac{\varphi''(t_0)}{2}(t-t_0)^2}dt\\&\leqslant e^{-\varphi(t_0)}\frac{1}{\sqrt{\varphi''(t_0)}}\sqrt{2\pi}.\end{aligned}\tag{C72}$$

代入 $\varphi(t_0)=\frac{5}{2}\left(\frac{a\xi}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$，得到

$$|I_2|\lesssim\int_{0}^{\infty}e^{-\varphi(t)}dt\lesssim e^{-c|\xi|^{\frac{4}{5}}}.\tag{C73}$$

类似地，$|I_1|\lesssim e^{-c|\xi|^{\frac{4}{5}}}$，结合（C69）可得

$$|\mathcal{F}[h](\xi)|\lesssim_{\mu,g}e^{-c|\xi|^{\frac{4}{5}}}.\tag{C74}$$

回忆一下，$h(x)=x^re^{-x^4}g(x^2)$，其中 $0\leqslant r\leqslant\mu+\frac{1}{2}$，因此应用推论4.1 可得（146）。若 $\mu+\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$，通过插值不等式，可以证明（146）仍然成立。

如果 $g(x^2)$ 在条带区域 $-b\leqslant\mathrm{Im}(x)\leqslant b$ 中仍是有界解析函数，那么再次根据 [56], 的定理 I V，我们知道对于 $\mu+\frac{1}{2},r\in\mathbb{N},0\leqslant r\leqslant\mu+\frac{1}{2}$, $h(x)=x^re^{-x^4}g(x^2)$ 满足

$$|\mathcal{F}[h](\xi)|\lesssim_{\mu,g}e^{-c|\xi|}.\tag{C75}$$

因此，根据推论 4.1 可得（147）。若 $\mu+\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$，则插值不等式（147）也成立。这就完成了我们的证明。□

参考文献

[1]D. Gottlieb，S.A. Orszag，谱方法的数值分析：理论与应用 (SIAM，1977)[2] D. Funaro，伪谱拉盖尔逼近的计算方面。技术报告（1989）[3] J. Shen，使用拉盖尔函数处理无界区域问题的稳定高效谱方法。SIAM数值分析杂志 38(4)，1113–1133（2000）[4] S. Huang，H. Yu，舍入误差更少、稳定性更好的改进拉盖尔谱方法。Journal of Scientific Computing 101(3)，72（2024）

[5] T. Tang，用于高斯型函数的厄米特谱方法。SIAM Journal on Scientific Computing 14(3)，594–606（1993）[6]B.Y. Guo，J. Shen，用于半无限区间上非线性偏微分方程的拉盖尔–Galerkin 方法。数值数学 86(4)，635–654（2000）[7]T.J. Wang，B.Y. Guo，用于无限通道中Fokker–Planck方程的复合广义Laguerre–Legendre伪谱方法。应用数值数学 58(10)，1448–1466（2008）[8]B.Y. Guo，H.P. Ma，无界区域上的复合Legendre–Laguerre逼近。Journal of Computational Mathematics，第101–112页（2001）[9] C.L. Xu，B.Y. Guo，用于无限条带中不可压缩流的混合Laguerre–Legendre谱方法。计算数学进展 16(1)，77–96（2002）[10] J. Shen，L.L. Wang，用于三阶方程的拉盖尔与复合Legendre–Laguerre对偶Petrov–Galerkin方法。离散与连续动力系统B辑 6(6)，1381（2006）[11] M. Azaiez，J. Shen，C. Xu，Q. Zhuang，用于半无限通道中Stokes问题的Laguerre–Legendre谱方法。SIAM数值分析杂志 47(1)，271–292（2009）[12] F. Chen，J. Shen，H. Yu，一种新的谱元方法，用于对Black–Scholes模型和Merton跳跃扩散模型下的欧式期权定价。Journal of Scientific Computing 52(3)，499–518（2012）[13] J. Shen，Y. Wang，H. Yu，载于《稀疏网格及其应用——斯图加特2014》（Springer，2016），第265–289页[14] B.Y. Guo，Z.Q. Wang，基于Laguerre–Gauss插值的数值积分。应用力学与工程中的计算方法 196(37-40)，3726–3741（2007）[15] B.Y. Guo，Z.Q. Wang，H.J. Tian，L.L. Wang，基于Laguerre–Radau插值的常微分方程积分过程。计算数学 77(261)，181–199（2008）[16]W. Bao，J. Shen，用于玻色–爱因斯坦凝聚体的四阶时间分裂Laguerre–Hermite伪谱方法。SIAM Journal on Scientific Computing 26(6)（2005）。https://doi.org/10/dj68cc[17] W. Bao，J. Shen，一种广义Laguerre–Hermite伪谱方法，用于计算玻色–爱因斯坦凝聚体中的对称与中心涡旋态。Journal of Computational Physics 227(23)，9778–9793（2008）[18] M. Masoumnezhad，M. Saeedi，H. Yu，H. Saberi Nik，用于半无限区间上非线性系统二次最优控制的拉盖尔谱方法。Automatika 61(3)，461–474（2020）[19] A. Bhrawy，D. Baleanu，L. Assas，用于求解半直线上多项分数阶微分方程的高效广义Laguerre谱方法。振动与控制杂志 20(7)，973–985（2014）

[20] S. Chen, J. Shen, L.L. Wang，拉盖尔函数及其在无穷区间上的温和分数阶微分方程中的应用。Journal of Scientific Computing**74**(3), 1286–1313(2018)[21]J. Shen, Z.Q. Wang，Gross–Pitaevskii 方程的 Strang 时间分裂拉盖尔–厄米特/厄米特配置方法的误差分析。Foundations of Computational Mathematics **13**(1), 99–137(2013). https://doi.org/10/gr7h2p

[22] C. Sheng, S. Ma, H. Li, L.L. Wang, L. Jia，含分数阶拉普拉斯算子和 Schr¨odinger 算子的偏微分方程非张量广义 Hermite 谱方法。ESAIM: M2AN**55**(5), 2141–2168(2021). https://doi.org/10.1051/m2an/2021049

[23]X. Shan、X. He，玻尔兹曼方程求解中的速度空间离散化。Physical Review Letters **80**(1)， 65–68(1998).https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.65

[24] L. Mieussens，平面及轴对称几何中的离散速度模型和玻尔兹曼-BGK 方程数值格式。Journal of Computational Physics 162(2)，429–466（2000）。https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6548[25] L. Gibelli，B.D. Shizgal，Vlasov 方程 Hermite 基函数解的谱收敛性：自由流项。Journal of Computational Physics 219(2)，477–488（2006）。https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.06.017[26]Z. Cai，R. Li，玻尔兹曼-BGK 方程的任意阶数值正则化矩方法。SIAM Journal on Scientific Computing 32(5)（2010）。https://doi.org/10.1137/100785466[27] H. Mizerov´a，B. She，具有黏弹性聚合物流体应用的 Fokker–Planck方程守恒格式。Journal of Computational Physics 374，941–953（2018）。https://doi.org/10/gfgscr[28] D. Funaro，G. Manzini，基于厄米特的 Vlasov–Poisson 系统近似的稳定性和守恒性质。Journal of Scientific Computing 88(1)，29（2021）。https://doi.org/10/gsskwz[29] X. Zhang，L.L. Wang，H. Jia，Vlasov–Poisson系统 Fourier–Legendre 和 Fourier–Hermite 谱 Galerkin 方法的误差分析。ESAIM: M2AN 57(6)（2023）。https://doi.org/10.1051/m2an/2023091 [30] X. Luo，S.S.T. Yau，采用双曲交叉近似的高维抛物型偏微分方程厄米特谱方法。SIAM Journal on Numerical Analysis 51(6)，3186–3212（2013）。https://doi.org/10.1137/120896931[31] G. Zhang，M. Gunzburger，W. Zhao，多维后向随机微分方程的稀疏网格方法。Journal of Computational Mathematics 31(3)，221–248（2013）。https://doi.org/10.4208/jcm.1212-m4014[32] R.H. Cameron，W.T. Martin，非线性泛函关于 Fourier–Hermite 泛函级数的正交展开。Annals of Mathematics 48(2)，385–392（1947）。https://doi.org/10.2307/1969178[33]W.C. Meecham，A. Siegel，大雷诺数模型湍流中的 Wiener–Hermite 展开。The Physics of Fluids 7(8)，1178–1190（1964）。https://doi.org/10.1063/1.1711359

[34]S.A. Orszag，L.R. Bissonnette，截断 Wiener–Hermite 展开的动力学性质。The Physics of Fluids **10**（12），2603–2613（1967）。https://doi.org/10.1063/1.1762082 [35]D. Xiu，G.E. Karniadakis，通过广义多项式混沌对流动模拟中的不确定性进行建模。Journal of Computational Physics **187**（1），137–167（2003）。https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00092-5[36] D. Venturi，X. Wan，R. Mikulevicius，B.L. Rozovskii，G.E. Karniadakis，非线性随机偏微分方程的 Wick–Malliavin逼近：分析与模拟。Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sci-ences **469**（2158），20130001–20130001（2013）。https://doi.org/10.1098/rspa.2013.0001[37]T. Tang，T. Zhou，具有随机评估的无界区域离散最小二乘投影及其在参数不确定性量化中的应用。SIAM Journal on Scientific Computing **36**（5），A2272–A2295（2014）。https://doi.org/10.1137/140961894[38] F. Nobile，L. Tamellini，F. Tesei，R. Tempone，具有对数正态扩散系数的椭圆型偏微分方程自适应稀疏网格算法，载于*Sparse Grids and Applica-tions - Stuttgart 2014*，J. Garcke、D. Pfl¨uger 编（Springer International Publishing，Cham，2016），Lecture Notes in Computational Science and Engineering，第191–220页。https://doi.org/10/g5c5vh[39] X. Wan，H. Yu，具有对数正态随机系数的椭圆问题数值近似。International Journal for Uncertainty Quantification **9**（2）（2019）。https://doi.org/10.1615/Int.J.UncertaintyQuantification.2019029046[40]P. Manfredi，R. Trinchero，D.V. Ginste，线性电路不确定性量化的摄动随机伽辽金方法。IEEE Trans-actions on Circuits and Systems I: Regular Papers **67**（9），2993–3006（2020）。https://doi.org/10.1109/TCSI.2020.2987470[41] J. Chen，Y.W. Chang，Y.C. Huang，考虑电子束雾化效应的解析布局。IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits & Systems **40**（3），560–573（2021）。https://doi.org/10/gssf7n[42] H. Ma，W. Sun，T. Tang，采用时变缩放的无界区域抛物型方程厄米特谱方法。SIAM Journal on Numerical Analysis**43**（1），58–75（2005）。https://doi.org/10/bmh8vd[43] M. Xia，S. Shao，T. Chou，无界区域谱方法的高效缩放与移动技术。SIAM Journal on Scientific Computing **43**（5），A3244–A3268（2021）。https://doi.org/10/gsskw5[44]H. Wang，解析函数拉盖尔逼近的收敛性分析。Mathematics of Computation **93**（350），2861–2884（2024）[45] H. Hu，H. Yu，优化尺度的厄米特近似方法。arXiv preprint arXiv:2412.08044（2024）[46] L.N. Trefethen，求积公式的精确性。SIAM Review **64**（1），132–150（2022）[47] Y. Kazashi，Y. Suzuki，T. Goda，有限光滑性函数的高斯–厄米特求积次优性与梯形法则最优性。SIAM Journal on

数值分析61 (3) ( )2023 . https://doi.org /10.1137/22M1480276[48]H. Wang, L. Zhang, 解析函数的厄米特逼近的收敛性分析. 计算数学 (2025)[49]J. Shen, 极坐标几何中泊松型方程的一种新的快速切比雪夫—傅里叶算法. 应用数值数学 **33**(1), 183–190 (2000).https://doi.org/10.1016/S0168-9274(99)00082-3[50] J. Shen, L.L. Wang, 无界区域谱方法的若干最新进展. 计算物理学通讯 **5**, 195–241 (2009) [51] J. Shen, T. Tang, L.L. Wang, 谱方法：算法、分析与应用, 第41卷 (Springer Science & Business Media, 2011)[52] T.S. Chihara, 广义厄米特多项式 (普渡大学, 1955)[53] F.J. Liu, Z.Q. Wang, H.Y. Li, 半直线上使用广义拉盖尔函数的完全对角化谱方法. 计算数学进展 **43**(6), 1227–1259 (2017)[54] G. Szeg¨o, 正交多项式 . 1975. 美国数学学会 (1975)[55] J. Aguirre, J. Rivas, 厄米特伪谱逼近. 误差估计. 数学分析与应用杂志 **304**(1), 189–197 (2005)[56]R.E.A.C. Paley, N. Wiener, 复域中的傅里叶变换, 第19卷 (美国数学学会, 1934) [57] J.P. Boyd, 四次高斯函数 exp($-ax^4$) 的傅里叶变换：超几何函数、幂级数、最速下降渐近分析与超渐近分析，以及对 exp($-ax^{2n}$) 的推广. 应用数学与计算 **241**, 75–87 (2014)[58] B.Y. Guo, L.L. Wang, Z.Q. Wang, 无界区域的广义拉盖尔插值与伪谱方法. SIAM数值分析杂志**43**(6), 2567–2589 (2006)