组合优化的量子退火：基础、架构、基准测试与新兴方向

Rudraksh Sharma[1], *, **Ravi Katukam**[1],**Arjun Nagulapally**[11]*AIONOS*, 印度特伦甘纳邦海得拉巴金融区Rudraksh.sharma@aionos.ai, katukam.Ravi@aionos.ai, Arjun.Nagulapally@aionos.ai*通讯作者: Rudraksh.sharma@aionos.ai

arXiv:2602.03101v1 [quant-ph] 3 Feb 2026

摘要

科学、工程和工业领域的关键决策问题都以组合优化为基础；然而，这类问题本质上属于NP难问题，因此其应用受到固有限制。量子退火（QA）是一种专门的模拟量子计算范式，旨在通过将优化问题编码到物理能量景观中，并利用量子隧穿系统地探索解空间来求解这些问题。本文是一篇批判性综述，总结了量子退火在组合优化中的当前应用，涵盖理论背景、硬件设计、算法实现策略、编码与嵌入方案、量子退火基准测试协议、应用领域，以及与基于门的硬件和经典求解器上的量子算法实现之间的联系。我们构建了一个统一框架，将绝热量子动力学、伊辛模型和QUBO模型、随机矩阵与非随机矩阵哈密顿量，以及非绝热跃迁，与现代磁通量子比特退火机（Chimera、Pegasus、Zephyr拓扑结构）、新兴架构（Lechner-Hauke-Zoller系统、里德堡原子平台）以及量子与经典计算混合架构联系起来。通过分析，我们发现，嵌入和编码开销是决定可扩展性和性能的首要因素（而非仅仅取决于量子比特数量）。次嵌入通常还会使每个逻辑变量需要5至12个物理量子比特，从而使有效问题容量降低80%至92%；此外，链断裂错误也会损害解的质量。我们表明，通过系统研究运输物流、能源系统优化、机器人学、金融、分子设计和机器学习等领域的应用，可以量化地证实量子退火作为混合改进方法具有实际效用，但它并非求解器。我们批判性地分析了当前的基准测试类型，并指出了一些方法学缺陷，例如选择性报告结果、经典基线薄弱，以及排除预处理开销，导致实际性能比较失真。此外，我们考察了量子退火与基于门的变分算法（QAOA、VQE）之间的结构联系，探讨在精细控制极限下会发生什么，以及随机矩阵约束规定了哪些基本限制。最后，我们提出了研究的优先方向：不论规模大小，都全面定义退火难题；发展非随机矩阵控制；设计具有性能保证的实用嵌入算法；制定标准化基准测试协议；并建立严谨的量子优势衡量方法。本综述可为所有从事量子增强组合优化研究的人员及该领域的实践者提供理想指南。

关键词： 量子退火；组合优化；二次无约束二元优化与伊辛模型；混合量子-经典优化；基准测试与量子优势；嵌入与编码策略。

1 引言

1.1 组合优化挑战

科学、工程和工业中的决策：组合优化问题旨在从规模呈指数级增长的离散解空间中选出最佳配置。例如，安排制造流程、为送货卡车规划路线、设计具有所需特性的分子化合物，以及分配金融或投资组合中的投资，以最大化风险-调整后的收益。这些问题的特点是规模呈指数级增长：随着系统中加入 N 个二元决策变量，其配置选择数量会增至 2^N 。即使是规模相对较小的例子，例如 50 个调度任务、20 个配送地点或 100 项投资组合资产，其解空间也超过 10^{15} 个解，使得穷举在计算上难以实现。许多组合问题不仅在实践中难以处理，而且从结构上来说也属于难解问题，这一点可通过计算复杂性理论来界定。存在相当多具有实际重要性的问题（NP困难问题），即使经过多年研究，实践中仍然没有已知的精确算法。这种固有的难度

可能源于约束与依赖关系的组合所造成的组合爆炸，而不一定是建模复杂度所致。二次无约束二元优化（QUBO）框架为表示这些问题提供了一种统一的数学抽象；它与伊辛自旋玻璃模型在形式上的对应关系，也带来了直接的物理理解，为量子退火策略提供了依据 [1–3]。

1.2 经典方法及其局限性

经典优化算法主要采用三种策略来求解组合问题。分支定界法和混合整数线性规划等精确算法能够保证提供最优解，但其最坏情况的时间复杂度呈指数级增长。近似算法能够在多项式时间内给出问题的解，并且可以证明其性能（但仅限于特定的问题结构）。模拟退火、禁忌搜索、遗传算法和粒子群优化等元启发式算法不提供任何最优性保证，而是以牺牲最优性为代价换取可扩展性。作为量子退火的经典模拟，人们应当高度关注模拟退火。它利用由玻尔兹曼分布控制的热力学变化来摆脱局部极小值，并通过冷却调度逐步降低温度参数。从理论上说，需要采用对数冷却速率才能收敛到全局最优解，但由于速度过于缓慢，这种方法在实践中无法应用。尽管经过数十年的算法优化，元启发式算法在多个问题实例上展现出了令人印象深刻的性能，但当它们用于对抗性构造的实例，或用于具有指数数量局部极小值且这些局部极小值之间由高能量势垒分隔的问题时，其理念最终仍局限于基本情形。 [4, 10]。

1.3 量子退火：原理与演进

量子退火是一种受物理学启发的优化模型，始于 20 世纪 90 年代末。它基于量子力学效应，利用量子隧穿穿越能量势垒，以期加速组合搜索。其核心概念是将优化问题编码为问题哈密顿量 H_{prob} ，使其基态成为该问题的最优解；随后，将量子系统初始化为易于制备的驱动哈密顿量 H_{driver} 的基态，并按照依赖时间的时间表，缓慢驱动两个哈密顿量之间的插值过程。当这一演化过程进行得足够缓慢（绝热）时，量子绝热定理可以保证系统处于其绝热基态，最终给出该问题的最佳解。 [4–7]。经典模拟退火与这里讨论的方法之间的重要区别在于探索机制。与通过热激活克服能量势垒的模拟退火（概率随势垒高度增加而呈指数下降）相比，量子退火利用量子隧穿克服势垒（概率随势垒宽度增加而呈指数下降）。当问题的几何结构具有狭窄而高耸的势垒时，与热跃迁相比，量子隧穿可能带来指数级优势。另一方面，当问题种类具有宽阔的势垒或熵瓶颈时，热方法可能更有效；显然，量子退火的性能取决于具体问题。在理论研究中，量子退火最初被定义为绝热量子计算（AQC）的一种形式，因此可以从谱隙动力学、多体量子物理和计算复杂性理论等角度对其进行研究。D-Wave Systems 后续开始将可编程量子退火设备商业化：2011 年推出了 128 量子比特设备，到 2024 年已扩展至 5,600 多个量子比特，推动了应用领域的大量实证研究。这一发展形成了一个丰富的生态系统，涵盖理论研究、数值建模和实验实现。

表 1：优化概念与量子退火的映射

优化概念	QA / 物理学模拟	数学对象	实际意义
目标函数	问题哈密顿量	伊辛模型 / 二次无约束二元优化	定义能量景观
可行解	基态	最低本征态	最优解
约束违反	能量惩罚	耦合强度	精度瓶颈
局部最小值	激发态	局域本征态	陷阱风险
邻域 move	量子隧穿	横场	障碍函碧穿越

1.4 量子退火性能的现实

尽管硬件不断扩展、算法持续改进，预期中的指数级量子加速仍大多局限于精心构造的基准问题。严谨的对比研究表明，对于具有特定结构性质的问题类别——尤其是那些

具有高而窄、适合量子隧穿的能量势垒的问题，量子退火机的表现可与专用经典启发式算法相当，偶尔甚至更胜一筹。然而，对于涉及复杂约束结构的大多数现实应用，实际部署无一例外地采用混合量子—经典工作流：量子退火作为细化子程序，在大量经典预处理之后发挥作用。本综述的核心论点是，可扩展量子优势的主要障碍并非量子退相干、相干时间有限或量子比特数量不足，而是与问题编码和次嵌入相关的经典计算开销。当前量子退火硬件采用稀疏连接拓扑（每个量子比特有 6–15 个物理连接），而现实世界的优化问题通常需要稠密或完全的逻辑连接。次嵌入——即将逻辑问题变量映射到由铁磁耦合的物理量子比特组成的链上的过程——会带来巨大的开销，通常每个逻辑变量需要 5–12 个物理量子比特，使有效问题容量降低 80–92% [16]。此外，约束密集型问题的表述需要使用占主导地位的惩罚系数，这些系数会压过目标项；为确保约束满足，系数动态范围往往需要达到 100:1 至 1000:1。然而，当前硬件提供的系数精度仅约为 0.1–1%，实际上将动态范围限制在 100:1。当编码要求超出硬件精度能力时，30–60% 的解样本会出现约束违反，因此必须进行经典后处理，且解质量也会下降。

1.5 目的与贡献

本综述全面梳理了用于组合优化的量子退火，并以批判性视角评估其能力与根本局限。我们系统考察了理论基础、硬件架构与连接约束、算法策略与控制协议、编码与嵌入方法、基准测试实践与性能评估、应用领域与实证结果、量子优化范式之间的关系，以及当前局限性与未来研究方向。我们的主要贡献包括：对量子退火硬件、算法和编码策略进行全面分类；批判性评估基准测试方法，指出性能报告中的系统性缺陷；通过定量分析表明，嵌入开销而非量子比特数量才是可扩展性的主要制约因素；综合各应用领域的结果，强调混合工作流的必要性；并指出具体技术障碍，评估未来研究方向的可行性。本综述旨在帮助量子计算研究人员全面了解量子退火的现状，帮助优化研究人员评估量子方法在各自问题领域中的应用，以及帮助从业者评估该技术的成熟度，以确定其部署可行性。

2 数学与物理基础

量子退火的概念基础在于将经典组合优化问题编码为量子哈密顿量，然后利用量子动力学使制备好的初始态向哈密顿量的基态演化，而该基态编码了所需的最优解。

2.1 绝热量子计算

绝热量子计算（QAC）基于量子绝热定理。给定绝热量子计算（QAC）基于量子绝热定理。对于一个随时间变化的含时哈密顿量，它在初始哈密顿量 H_{init} 与问题哈密顿量之间进行插值；问题哈密顿量编码在其哈密顿量分布中，即 H_{prob}。当这一插值以缓慢的速率进行时，系统在整个演化过程中始终处于瞬时基态，最终到达 H_{prob}的基态。这一原理在横场伊辛模型中得到了直接实现：通过逐渐减弱驱动哈密顿量，将系统推向问题的基态。任意时刻的最小谱能隙决定绝热收敛，并严格遵循运行时间的反平方定律。能隙越小，为减少激发态所需的演化时间就越长；这种关联既存在于数字化范式中，也存在于模拟绝热量子计算范式中。在基于门的架构中，连续值的哈密顿量演化被拆分为离散的特罗特切片，并由量子门实现；这也说明了通过大量量子门解决多量子比特问题的可行性 [4, 5, 8]。

2.2 量子退火与绝热量子计算的比较

虽然绝热量子计算假设理想的幺正演化和完美的相干性，但实际的量子退火系统是在受环境相互作用影响的开放量子系统中运行的。量子退火明确允许非绝热跃迁，并纳入热效应、退相干和弛豫机制；这些机制可能会产生反直觉的效果，通过帮助系统逃离浅层局部极小值来加速收敛。因此，量子退火不应仅被视为绝热量子计算的一种含噪实现，而应被看作一种结合量子

隧穿、热激活和设备特性来探索复杂能量景观的独特优化策略。这一区别具有重要意义。绝热量子计算的运行时间从根本上受最小谱隙的缩放限制，而量子退火则有望利用非绝热跃迁和热弛豫，比纯绝热演化更有效地克服能量势垒。然而，这也意味着量子退火的性能严重依赖噪声特性、温度和控制精度——这些因素在理想化的绝热量子计算分析中并未涉及 [10,11]。

2.3 伊辛模型和QUBO模型

量子退火通过将二元决策变量映射为自旋构型来求解优化问题。伊辛模型采用经典哈密顿量的形式，其中自旋是编码后的变量$s_i \in \{-1,+1\}$。

$$H_{\text{Ising}}(s) = \sum_i h_i s_i + \sum_{i<j} J_{ij} s_i s_j \tag{1}$$

QUBO（二次无约束二元优化）问题模型用二进制变量取代自旋， $x_i \in \{0,1\},$，即目标函数为 x^TQx，而Q是描述所有相互作用的对称矩阵。通过 $s_i = 2x_i - 1$ 直接变换即可实现这一点，使两种数学表述在数学上完全等价，但在硬件层面有所区别。 [5,8]。将实际组合问题转换为模型的一种传统方法包括以下步骤：首先，将目标函数重新表述为离散变量的表达式，然后将领域选项编码为二元决策变量。通过二次惩罚项施加约束；如果存在高阶相互作用，则可系统地将其化简为二次形式，但代价是需要增加辅助变量。随后构建二次无约束二元优化（QUBO）问题，并将其转换为由±1 自旋构成的伊辛模型，从而可在物理量子退火机器上实现。

2.4 Stoquastic 与非随机负权哈密顿量

哈密顿量的随机矩阵性质从根本上决定了经典模拟复杂度。在计算基下，若哈密顿量的非对角矩阵元均为实数且非正，则称其为 stoquastic。Stoquastic 哈密顿量可避免量子蒙特卡洛符号问题，从而能够通过路径积分蒙特卡罗方法实现高效的经典模拟 [12–15]。

这种区别对量子优势有着深远的影响。标准的横场伊辛量子

表 2：量子退火属性比较

属性	stoquastic量子退火	非随机符号量子退火
符号问题	不存在	存在
经典可模拟性	高效（量子蒙特卡罗）	Hard
典型相变	一级	可能为二级
硬件可用性	当前	实验性
优势潜力	有限	高（理论上）

退火器实现的是随机矩阵哈密顿量，这意味着其动力学可以通过经典方法高效模拟。因此，stoquastic量子退火所带来的任何量子优势，都必须源于实际因素（常数因子加速、有利的尺度变化常数），而非渐近复杂度上的分离。非随机负权哈密顿量打破了这种经典可模拟性，可能实现指数级量子加速，但需要更复杂的硬件实现，而这类实现尚未应用于商业系统。

2.5 非绝热跃迁与量子相变

理想的量子退火假定系统会绝热演化，但在实际实现中，系统经常表现出非绝热动力学，在能级之间发生跃迁；尤其是在量子相变附近，能隙会变得指数级小。这些跃迁主要有两种形式：一阶相变，其能隙随系统规模呈指数级趋零；以及二阶相变，其能隙遵循幂律标度。矛盾的是，通过利用热弛豫或精心设计的非绝热通道，受控的非绝热跃迁有时反而能胜过纯粹的绝热协议，从而帮助系统逃离能量景观中的不利区域。包括非线性退火进程、暂停-弛豫-恢复策略以及非stoquastic驱动哈密顿量在内的先进控制技术，旨在将不利的一阶相变转化为更易处理的二阶相变，从而有望大幅缩短运行时间，同时使stoquastic系统保持在经典NP难性与量子可模拟性之间的中间区间 [10]。

3 架构与硬件概览

量子退火机采用连续时间动力学，其由伊辛模型定义；系统行

为取决于一系列因素，包括硬件连接性、硬件噪声、相干性，以及控制参数精度。目前综述的内容涵盖通量量子比特器件、Lechner-Hauke-Zoller（LHZ）系统和里德伯原子系统，以及最新的控制方法，包括时间暂停和反向退火，并介绍了限制可扩展性的主要噪声源。

3.1 基于通量量子比特的退火器

超导通量量子比特退火器（例如 D-Wave 技术制造的退火器）通过双稳态约瑟夫森结环对逻辑伊辛自旋进行编码，从而使用横场伊辛哈密顿量。在过去几年中，连接架构已从较为稀疏的 Chimera网络发展到密度更高的 Pegasus 和 Zephyr（Advantage-2）网络，从而降低了次嵌入的开销。仿真这些系统通过使用铁磁耦合的物理量子比特系统来实现逻辑自旋，而嵌入质量会显著影响系统整体性能 [16]。

这些系统中的物理量子比特并不直接代表逻辑问题变量。相反，逻辑自旋通过铁磁耦合的物理量子比特链来实现，并对链强度进行校准，以便在单个量子比特存在差异和噪声的情况下维持连贯的逻辑行为。这些链的质量和稳定性会直接影响系统整体性能，其中链断裂（逻辑量子比特碎片化为状态不一致的物理量子比特）是主要的错误模式。

3.2 连接性与嵌入约束

超导量子退火器稀疏的物理连接性使次嵌入成为必要，即将逻辑问题图映射到物理硬件拓扑上。此过程需要为每个逻辑变量使用多个物理量子比特，以模拟硬件图中无法直接实现的耦合。由此产生的嵌入开销严重限制了有效问题规模——一台拥有 5,000 个物理量子比特的设备，嵌入后通常只能支持 400 至 800 个逻辑变量，具体取决于问题图的结构。嵌入质量会通过多种机制显著影响性能：较长的链会增加链断裂的可能性，占用可用的耦合强度（降低有效能标），并加剧对控制噪声和温度的敏感性。因此，了解拓扑的嵌入策略至关重要，因为问题连接结构与硬件拓扑之间的不匹配会从根本上限制计算效率。这一嵌入瓶颈可以说是量子退火实现实用可扩展性的最重要障碍。 [16, 33]。

3.3 替代架构

Lechner-Hauke-Zoller（LHZ）架构采用截然不同的方法，通过将伊辛耦合编码为局部多体约束，而非成对物理量子比特相互作用，从而解决连接性局限。这消除了对显式次级嵌入的需求，并通过局部约束满足实现全连接逻辑连接性。几何最速降线技术还可进一步优化 LHZ 框架内的退火路径，有望实现快速收敛。里德伯原子平台则提供了另一种替代方案，利用处于高度激发里德伯态的原子之间强而可调的长程相互作用[16,18]。这些系统能够实现灵活的连接模式，支持模拟和数字控制范式，并可实现超出磁通量子比特系统能力范围的非随机负权哈密顿量。虽然里德伯系统不如超导平台成熟，但其相干性和控制精度表现出良好前景 [16–18]。

表3：架构比较

架构	连通性控		噪声	成熟度
磁通量子比特	稀疏	模拟	热	商业化
LHZ	全对 all	模拟	中等	实验性
里德堡	长程-范围	混合	Low	原型

3.4 高级控制功能

现代量子退火机支持超越简单线性退火调度的复杂控制。时间相关的调度 A(s) 和 B(s) 分别控制横场驱动器与问题哈密顿量的相对权重，其中 $s_i \in \{-1, +1\}$ 用于参数化退火进程。非线性调度可以重新分配演化时间，在临界谱隙附近减慢进程，并在有利区域 [19–21] 加速。

反向退火将系统初始化为经典态（而非量子叠加），暂时增强量子涨落以实现局部探索，然后再次退火以优化解。这一协议有效实现了量子辅助局部搜索，在混合工作流中特别有价值：经典启发式算法生成初始解，再由量子退火对其进行优化。实证研究表明，反向退火可以减轻一阶相变的不利影响；而当

与暂停协议（在接近最小谱隙处暂时停止演化，以利用热弛豫）结合时，可以显著提高成功概率。

3.5 误差来源与缓解

量子退火设备面临多种误差来源：有限工作温度（通常为 10–20 mK）引起的热激发、环境耦合导致的退相干、系数实现中的模拟控制不精确、量子比特间串扰，以及最终状态读出中的测量误差。这些扰动会导致非期望激发、参数变化以及最终自旋构型的误分类，从而降低优化性能和采样保真度 [22]。适用于量子退火的当代误差缓解策略包括零噪声外推（根据不同噪声水平下的多次运行结果外推性能）、温度重标度（对热噪声效应进行建模），以及能量-时间重标度（近似理想的绝热行为）[22]。第 4.4 节将讨论量子退火纠错（QAC），它通过冗余编码来抑制逻辑错误，而无需实现完全容错。尽管这些技术能够提升性能，但无法消除根本性的精度与相干性局限，而这些局限最终制约着可实现的解质量 [22, 24, 25]。

4 量子退火算法策略

量子退火（QA）并非一种特定算法，而是一系列用于引导量子系统进入问题哈密顿量低能态的动力学方法。量子退火对复杂能量流形的探索效果，取决于算法决策、性能调度、驱动代码、误差抑制编解码器以及混合经典-量子反馈回路的应用。

4.1 标准量子退火：动力学与隧穿

标准量子退火使系统在如下形式的含时哈密顿量下演化

$$H(s) = A(s)H_{\text{driver}} + B(s)H_{\text{prob}}, \quad s \in [0,1] \qquad (2)$$

其中 H_{driver} 引发量子涨落，而 H_{prob}编码优化目标。在典型的横场伊辛模型设定中，降低 A(s)并提高 B(s)，会将权重从量子离域转向经典能量最小化。量子退火常与模拟退火（SA）比较：SA 利用热涨落在不同能谷间跳转，而量子退火则利用量子隧穿穿越势垒。在许多崎岖的景观中，隧穿能够穿越狭窄但高耸的势垒，而热涨落行走者往往受其阻碍，因此在某些实例族中，量子退火与模拟退火呈现出不同的经验标度行为[10]。在有利于隧穿的势垒形状几何中，例如两个势垒之间的距离有利于隧穿时，量子退火优于经典爬山法；而在熵主导、人为拓宽能谷的几何中，热策略或混合工作流表现更佳 [10, 23]。

4.2 高级调度

非线性退火调度通过采用问题感知形式的 A(s) 和 B(s)，在临界能隙附近重新分配时间：在瓶颈处减速，在宽裕区域加速。自适应退火会根据中间信号动态调整调度，有望带来二次级的性能提升并缩短有效退火时间。暂停-弛豫-恢复策略会在 $s*$ 处暂停，以利用热弛豫和耗散，并经实证表明可提高非绝热瓶颈附近的成功率 [10]。

4.3 反向退火

反向退火将系统初始化为经典种子态，而非标准量子退火所需的均匀叠加态；随后增强横向场，以便在重新退火前进行局部量子探索。这一协议发挥着量子局部搜索算子的作用，可优化通过经典启发式算法或先前退火过程获得的解。通过避免全局量子叠加，反向退火能够高效地摆脱次优能谷，或修正初始种子中的缺陷，而无需进行完整的全局优化。在投资组合优化和矩阵分解等多种应用中，交替采用正向退火与反向退火的混合方法，表现优于仅采用正向退火的协议。这些工作流程体现了一个更广泛的原则：量子退火往往并非作为独立求解器，而是作为经典-量子计算流程中的专用组件，才能发挥最大价值。

4.4 量子退火纠错（QAC）

模拟量子退火器中的控制误差、热涨落和退相干，可通过量子退火纠错（QAC）加以抑制。它通过抑制错误而非纠正错误来发挥作用。采用适度编码逻辑量子比特，并通过重复码或奇偶校验施加惩罚哈密顿量；因此，低能激发对应的是可纠正的逻辑错误事件。常见的 QAC协议包括能量惩罚耦合、冗余编码、多数表决或奇偶校验解码，以及经典的读出后解码。QAC 并不具备容错的基于电路的量子纠错所具有的容错能力；

不过，实际上它具有很强的可扩展性（适用于近期应用），并能显著改善硬件 [4, 22, 24, 25]。

4.5 非stoquastic驱动

当哈密顿量在计算基下的非对角项均为实数且非正时，它就是stoquastic的，因此可以通过避免符号问题，利用量子蒙特卡洛高效模拟。引入非stoquastic驱动（例如符号不当的 $\sigma_i^x \sigma_j^x$耦合）会破坏这一性质，使得其动力学难以通过经典方法模拟。这类项还可以改变能谱结构，例如将一阶相变转变为二阶相变、避免指数级小的能隙，并允许量子干涉以及stoquastic退火此前无法实现的新隧穿路径。 [12, 13, 15]。

4.6 Trotter化、量子近似优化算法与混合策略

表 4：量子优化范式（量子退火、量子近似优化算法、VQE）比较

方面	QA	QAOA	VQE
模型	模拟	数字	变分
目标函数	采样	近似特征值	
深度	常数	递增	变量
NISQ可行性	High	中等	中等
嵌入	必需	不需要	不需要

量子退火（QA）和量子近似优化算法（QAOA）可视为一致量子控制框架下的量子副本；在大 p（Trotter 化）近似中，QAOA 将随时间模拟横场动力学。另一方面，数字化退火和绝热脉冲调度与优化后的有限深度量子近似优化算法相似，因此更容易将这两种模态结合起来，以促进对它们的理解。这种结构上的平行关系有助于确定最优的 QAOA 参数选择，并鼓励采用哈密顿量重排序和 Trotter 化方法，将连续时间退火转化为有效的基于门的编码[12, 13, 23–27]。

表 5：量子退火算法变体分类

策略	Core Idea	优势	Cost	最佳用途 Case
标准量子退火	全局退火	广泛探索	能隙敏感性	未知最优解
暂停	热弛豫-化	更高成功率	调优	小 gaps
反向问答	局部再-精炼	快速收-收敛性	Seed 所需	混合循环
QAC	编码冗余-度	噪声抑制 sion	量子比特开销	含噪的去缺点
非随机负权	Gap re-塑造	潜力加速	硬件	困难实例

5 嵌入与映射：未言明的障碍

5.1 QUBO 编码策略

量子退火机的一项固有功能是最小化二次无约束二元优化和伊辛哈密顿量；然而，涉及整数或类别变量的实际优化问题，首先需要通过二元表示进行优化。所选编码方案会直接影响所需量子比特的数量、惩罚项的尺度、系数值的精度，最终还会影响能否获得解。独热编码是解决排列问题的一种简单且常用的方法，但资源消耗较大，也就是说，它需要许多变量、较高的惩罚强度和较高的硬件精度。畴壁编码通过二元链跃迁对整数值进行编码，因此能够最大限度地减少二次惩罚项和耦合，同时支持更有效的高吞吐量优化 [28–32]。

表 6：QUBO 编码策略

编码	变量	约束精度	Need	可扩展性
独热	高（N^2）	二次	High	Poor
畴壁	中等 ($N \log N$)	线性	适中	更好
二元	Low （对数 N）	高阶序	非常高	高风险

5.2 次嵌入

完成二次无约束二元优化建模后，必须将问题嵌入量子退火硬件的稀疏物理连接图中。由于大多数优化问题自然定义的是稠密或完全逻辑图，因此通常无法直接

实现。次要嵌入通过将每个逻辑变量表示为一组相互连通的物理量子比特（链），并以铁磁方式耦合这些量子比特，解决了这一问题 [33]。

这一过程带来了多项挑战：
1. 量子比特开销：根据问题结构和硬件拓扑，每个逻辑变量通常需要 5–12 个物理量子比特组成链 [33,34,35]。

2. 链断裂：热噪声和控制不精确性可能导致链中的物理量子比特取值不一致，使逻辑变量碎片化，并产生无效解。

3. 能量尺度降低：铁磁链耦合会占用可用的耦合强度，从而降低问题特定项的有效能标。**4. 噪声放大**：较长的链更容易受到热激发和控制误差的影响，从而降低解的保真度。[33–35]。

5.3 映射成本和硬件开销

独热编码产生的巨大惩罚系数，加上较长的量子比特链，往往会使所需硬件超出硬件精度范围，产生噪声，并导致错误沿断裂的链扩散，必须经过后处理。这些现象会使解的保真度受到热涨落、控制不精确性以及代表同一个逻辑变量的物理量子比特之间差异的影响。量子退火纠错（QAC）通过采用重复编码和能量惩罚来应对这些问题；实验结果表明，这能提高成功获得基态的概率。结合嵌入使用时，QAC 还能提升 NP难植入问题上的性能 [29, 31, 33–35]。

表 7：逻辑量子比特到物理量子比特的膨胀

问题类型	逻辑 Vars	物理 量子比特	比率
最大割	100	800	12.5%
旅行商问题（20 个城市）	400	3,000+	<10%
投资组合（50 项资产）	50	600	∼8%

6 基准测试：批判性分析

量子退火是一个颇具争议的领域，其在基准测试及其他任务中的表现仍备受争议。尽管许多文章表明其性能更佳，但由于缺乏标准操作流程、背景条件不一致，以及对实验操作验证不足，结果仍显得不一致。本部分将概述恰当的基准测试原则。

6.1 基准测试原则

使用随机自旋玻璃或植入解 QUBO 等合成基准，可以更轻松地开展受控扩展研究，但由于其结构近似高度理想化，通常难以扩展到实际应用。更为均衡的评估依赖于旅行商问题、调度、背包问题和图划分等系统性问题。要证明实际效益，就必须在现实世界的示例（如车辆路径规划、投资组合优化和物流）上进行测试；这些问题通常采用量子—经典混合算法处理，并且无论是否使用量子退火，在经典计算上都很难解决。在严格基准测试中，必须确保求解器对等性，即采用相同的预处理、精度、重启次数和时间预算；众所周知，这些因素在很大程度上取决于输入/输出开销、模型结构因素及其他系统性因素。若忽略这些因素，就会夸大量子优势的感知效果 [37]。

6.2 常见方法论缺陷

薄弱的基准测试通常存在若干典型缺陷：

1. 选择性报告：只呈现最佳情况的时间或解质量，却省略失败率、中位性能和统计分布。

2. 不充分的基线：将算法与朴素的经典实现（随机搜索、贪心启发式、未经优化的模拟退火）进行比较，而不是与工业级求解器（Gurobi、CPLEX、SCIP）或成熟的元启发式算法（复杂的遗传算法、带记忆结构的禁忌搜索、混合进化策略）进行比较。

3. 精心挑选的实例：只评估符合硬件约束的小规模问题，却未证明方法能够扩展到实际相关的规模。

4. 忽略开销：只报告退火时间，却未计入编码表述、嵌入计算（通常需要数秒到数分钟）以及用于约束修复的后处理。

5. 忽视预处理的影响：未将经典预处理（分解、变量约简、骨干识别）纳入考量，而这些步骤对性能的贡献可能超过量子退火本身 [**?** 、**?** 、**?**]。

[36–38]。

表 8：基准测试的注意事项

实践	正确方法	常见错误
运行时间	挂钟时间	仅退火时间
统计量	中位数 + 方差	仅最佳情况
基线	Gurobi/禁忌搜索/模拟退火	朴素启发式
实例	真实 + 合成	玩具问题

6.3 与工业级求解器的比较

基准测试构造性量子退火方法时，应将其与工业级经典求解器而非启发式方法进行比较。这类比较涉及模拟退火、禁忌搜索和混合整数线性规划求解器（如 Gurobi、CPLEX、SCIP），这些求解器对建模和约束构造错误十分敏感。当代元启发式方法，如遗传算法、粒子群优化、蚁群优化和差分进化，拥有强大的全局搜索算法；迄今为止，尚无证据证明量子退火问题求解协议在解决现实问题方面始终优于这些方法 [39]。

6.4 当前实证证据

处理具有狭窄势垒的崎岖能量景观时，量子退火（QA）可能很有用，因为此时可以利用隧穿；在调整惩罚项后，对聚集的低能量盆地进行采样也可能有效；与直接采用量子退火相比，混合工作流（如禁忌搜索-量子退火或骨干量子退火）也可能更有效，这部分归功于通过经典分解和剪枝对崎岖能量景观进行采样的能力。另一方面，量子退火难以处理连接稀疏的惩罚结构，因为惩罚项会削弱隧穿带来的增益；也难以处理整数密集型表述，因为这会导致二次无约束二元优化（QUBO）规模膨胀和惩罚饱和；此外，当模拟系数导数中的噪声掩盖目标函数之间的细微差异时，量子退火也难以奏效 [38, 40]。

7 应用领域

此后，量子退火理论已从抽象分析发展到以应用为导向的优化领域；然而，这类技术的整体实用性目前仍取决于问题结构的兼容性、问题编码的开销，以及利用现有量子硬件可扩展处理此类问题的规模。

7.1 交通与物流

7.1.1 问题表述

路径规划问题是交通运输优化任务中的重要类别，包括旅行商问题（TSP）、车辆路径问题（VRP）、容量约束车辆路径问题（CVRP）以及各种行程优化问题。这些问题旨在分配离散路径，在满足容量、时间窗和服务约束的同时，尽可能降低累计行程成本。由于路径规划问题的可行解空间会随着节点数量的增加而呈阶乘级增长，因此属于 NP难问题 [41, 42]。

7.1.2 QUBO编码

路径规划问题通过二元决策变量进行映射：

$$x_{i,t} = \begin{cases} 1 & \text{if city } i \text{ is visited at time } t \\ 0 & \text{otherwise}[cite_s tart] \end{cases} \tag{3}$$

目标函数定义如下：

$$[cite_s tart] \min \sum_{i,j,t} d_{ij} x_{i,t} x_{j,t+1} [cite : 257] \tag{4}$$

每个城市恰好访问一次，每个时间步访问一个城市；通过辅助变量处理容量约束。这会产生耦合矩阵稠密且惩罚系数较大的 QUBO。

7.1.3 硬件模型

簇。超导量子退火机（例如 D-Wave 系统）常用于混合经典量子退火路径规划求解器中，这类求解器采用聚类启发式方法以及正向和反向退火模式，以优化问题的求解结果。

7.1.4 结果

混合量子退火路径规划求解器需要在不到一秒的时间内，为中等规模的容量约束车辆路径问题生成路径。对于冷链车辆路径问题，使用量子退火技术计算出的路径质量约为传统方法的 85%，运行时间则比遗传算法缩短约 95%。

7.1.5 局限性

为了编码高度描述性的约束，高维二次无约束二元优化程序中的量子优势会呈指数级衰减；辅助变量的数量也会随着以实际运行中的物理量衡量的规划变量数量迅速增加，例如时间窗可行性和多配送中心物流。

7.2 能源优化（机组组合与电网控制）

7.2.1 问题表述

机组组合问题是发电机组的启停问题，旨在最大限度地利用燃料，同时考虑启动成本和爬坡成本，并满足电力平衡方程和备用限制。此类优化通常使用随时间变化的二元决策变量进行建模[cite: 269]。

7.2.2 QUBO编码

令 $x_{g,\ t}$ 表示发电机 g 在时间 t的开/关状态；该表述包括线性运行成本、成对爬坡惩罚和二次负荷平衡约束，高阶可靠性约束则通过辅助二进制变量加以化简。

7.2.3 硬件模型

新一代调度技术采用全局正向退火进行粗粒度优化，采用反向退火进行细粒度爬坡优化，并依赖强制性的混合分解方法来应对复杂性。

7.2.4 局限性

变量时间耦合会产生稠密连接的 QUBO，其所需的惩罚精度高于硬件精度能力；因此，即使电网规模调度问题在近期也无法求解。

7.3 机器人学与运动规划

运动规划、任务调度和抓取选择使用二元变量来编码路径段和关节构型 [43]。

7.3.1 问题表述

机器人优化的主要领域包括运动规划、任务调度、抓取选择和立体对应。

7.3.2 QUBO编码

在每种情况下，均使用二进制变量对路径段的选择、机械臂关节的配置以及任务的执行顺序进行编码。

目标：

$$\min \sum_i c_i x_i + \sum_{i<j} J_{ij} x_i x_j \tag{5}$$

其中， c_i 表示能量、距离或执行成本。

7.3.3 硬件模型

云端系统上的超导量子退火是所设计的机器人-量子退火协同仿真方案中不可或缺的一部分。

7.3.4 结果

这些集成控制架构的有益成果包括：利用QUBO/伊辛编码优化可变形物体操控、机械臂动力学和立体匹配。

7.3.5 局限性

对于动力学机器人，QUBO 的规模会随工作空间分辨率呈超线性增长，因此使用现有硬件无法实现闭环控制的实时运行。

7.4 金融：投资组合优化

投资组合优化旨在最大化预期收益并将风险降至最低，同时考虑交易成本和投资组合再平衡；为此，使用二元变量选择资产，并采用离散化连续权重 [44]。

7.4.1 QUBO编码

二元资产选择 QUBO：

$$\min_i (-\mu_i) x_i + \sum_{i<j} \Sigma_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

交易成本与基数约束通过二次惩罚项进行编码。

7.4.2 硬件模型

量子-经典混合投资流程将经典财富配置算法与由量子退火得到的资产选择相结合，在精炼投资组合时采用反向退火，并在再平衡投资组合时采用迭代正向退火。

7.4.3 结果

实验性研究表明，量子退火-经典混合方法能够产生高于传统基金基准测试的累计收益，且经过再平衡的量子退火投资组合表现优于未经调整（静态）的量子退火投资组合。

7.4.4 局限性

资产相关性会产生稠密 QUBO；权重变量的离散化会扭曲有效前沿，而交易成本模型对惩罚项校准高度敏感。

7.5 药物发现与材料设计

7.5.1 问题表述

分子设计中的任务，例如分子结构和反应路径的优化，以及具有特定性质的设计，都可以重新表述为离散图标记问题和约束满足问题。

7.5.2 QUBO编码

在这一表述中，使用二进制变量对原子的选择、键结构以及子结构的纳入进行编码；目标函数则针对性质违反、结构合理性和稳定化问题施加惩罚。

7.5.3 硬件模型

混合量子-经典机器学习流程基于基于量子退火的离散搜索与经典性质评估模块的集成。

7.5.4 结果

混合量子机器学习模型改善了分子子结构识别，同时所需参数少于传统方法，并提升了子结构模型的预测能力。

7.5.5 局限性

准确评估分子有效性需要巨大的惩罚系数，这会增加相较于标准物理学模拟解决方案的 QUBO 编码复杂性；因此，任何量子增益都局限于结构选择中的小步长范围。

7.6 机器学习

7.6.1 问题表述

本质上，几乎所有离散机器学习问题，包括特征选择、实例选择和聚类，都可以表述为优化中的镜像问题，例如冗余最小化、子集选择和中心对象识别 [45]。

7.6.2 QUBO编码

特征选择 QUBO：

$$\min \sum_i w_i x_i + \sum_{i<j} r_{ij} x_i x_j \tag{7}$$

其中， w_i = 特征相关性惩罚项和 r_{ij} = 冗余性惩罚项。聚类采用基于中心对象选择的 QU-BO。

7.6.3 硬件模型

所采用的工作流程使用了 D-Wave Advantage 系统，并结合了经典预处理、基于量子退火的优化以及后处理解码。

7.6.4 结果

与模拟退火相比，即使存在自然的硬件约束，量子退火在特征和簇的紧凑性方面也能更胜一筹，并且在特征与簇紧凑性以及检索（归一化折损累积增益和戴维斯–鲍丁指数）方面的指标表现更好。

7.6.5 局限性

特征相关性会导致稠密 QUBO，而数据扩展能力又超出了嵌入限制，因此只能使用量子退火来改进目标函数，而无法完全求解。在路径规划、机器人学、金融、药物发现和机器学习应用中，量子退火最有可能通过实证证明其作为混合局部优化器的效用；它用于经过经典预处理的数据，以缩小搜索空间并找出由障碍主导的区域。

7.7 应用领域摘要

表 9：应用领域摘要

领域	问题	编码	硬件	结果
物流	VRP	独热	Flux QA	混合增益
能量	单位承诺承诺	二元	混合	经典 wins
金融	投资组合	二元	反向 QA	竞争性
ML	特征选-择	QUBO	QA	紧凑型模型

8 量子退火与其他量子范式的比较

量子退火通常被介绍为一种独立的优化理论；但要理解其实际重要性，最好将其与基于量子门的变分算法进行对比，例如量子近似优化算法（QAOA）和变分量子本征求解器（VQE）。

8.1 量子退火与量子近似优化算法

量子退火（QA）系统通过哈密顿量实现连续时间演化（其中

通过将横向场驱动项切换为问题哈密顿量来执行演化）。量子近似优化算法（QAOA）则通过对基于门的酉演化进行特罗特化，在离散时间内实现类似的过程。浅层 QAOA 可视为 QA 的离散化近似，以可调角度取代连续时间；而 QA 则试图利用硬件中的固定相互作用，无需构建显式的逻辑电路。凭借其采样复杂度、较浅的有效深度和硬件可扩展性，QA 目前在崎岖的伊辛模型优化问题上优于浅层 QAOA，但深层 QAOA 在近期规模的量子（NISQ）系统上并不可行 [46]。

8.2 量子退火与VQE

变分量子本征求解器（VQE）本质上是一种基于近似方法的本征值求解器；它优化一个已制备的参数化态，以最小化哈密顿量的期望代价。优化在连续参数空间中进行，这与量子退火不同，后者是对离散能量空间的优化。量子退火天然能够生成低能离散解的集合，并可视化组合能量景观，因此很适合作为决策问题的模型。相反，VQE在物理学和化学中使用时针对单一量子态，拟设的设计主要决定其性能；只有在被大幅离散化之后，它才会变成组合问题 [47]。

需要进行经典后处理，而这会消除所谓的量子优势。方法论缺陷导致基准测试不一致，掩盖了真实性能：选择性报告、薄弱的基线、遗漏开销以及统计量不足。在业界采用严格标准之前，量子优势的主张仍缺乏证据支持 [48, 49]。

9.2 可应对的研究挑战

具有性能保证的自动化嵌入是一个高优先级研究方向。当前的启发式嵌入算法所产生的解比理论最优值差2-3×，并表现出不可预测的、依赖于实例的变化。开发具有可证明近似比的嵌入方法，或能够预测嵌入质量的机器学习方法，可大幅提高有效硬件利用率。非随机矩阵控制的发展有望通过避开经典可模拟性约束而实现指数加速。然而，实现稳定的非随机负权演化需要超越当前商业系统的硬件进展，且关于实际优势的经验证据仍然有限。混合架构优化值得更多关注。由于实际量子优势几乎只出现在混合工作流中，针对经典—量子问题分解、组件间信息流以及自适应资源分配的系统性设计原则，能够最大化当前硬件的效用。标准化基准测试协议，包括强制报告完整实际运行时间、中位数与百分位性能统计、与工业级经典求解器的比较，以及公开基准实例库，将显著提升研究严谨性

9 当前局限

9.1 根本局限

嵌入开销是最显著的实际障碍。目前的架构每个逻辑变量需要 5–12 个物理量子比特，使有效问题容量降低 80%–92%。这种开销在根本上是拓扑性的——它源于将稠密逻辑图映射到稀疏物理连接性，而非可通过渐进式改进弥补的工程缺陷。随机矩阵约束限制了理论上可能实现量子优势的问题类别。标准横场退火器实现的是随机矩阵哈密顿量，能够避开量子蒙特卡洛符号问题，从而实现高效的经典模拟。因此，任何量子优势都必须来自实际的常数因子加速，而非渐近复杂度分离——这比通常所声称的要弱得多。硬件限制（系数动态范围为 100:1）与问题需求（约束密集型模型通常需要 1000:1 的范围）相互作用，形成了精度障碍。这种不匹配导致 30%–60% 的样本出现约束违反，

9.3 开放研究问题

若干基本问题仍未解决：1. 退火难度表征：我们能否依据结构性质（势垒几何、能隙结构、吸引域拓扑）系统地预测哪些问题实例将从量子退火中获益，而非依赖经验性的试错？2. 非随机负权优势的可扩展性：非随机矩阵哈密顿量能否带来可扩展的性能提升，抑或实现挑战（退相干、控制复杂度）会抵消理论上的收益？3. 通用量子优势度量：鉴于性能的多面性质（求解时间、近似质量、采样多样性、能量效率），何种指标才构成优化中公平且通用的量子优势度量？4. 最优混合架构：哪些原则支配着量子退火与经典预处理、基于量子近似优化算法的精炼，

以及经典后处理的有效整合，从而最大化实际影响? [10, 23, 37, 38, 40]。

表10：研究优先事项

挑战	影响	可行性时间表	
嵌入自-动化	High	中等	3—5年
非随机负权QA	非常高	Low-Med	8—12年
优势	High	High	1—2年
指标混合 原理ples	High	Med-High	2—4年

10 结论

本综述深入探讨了量子退火在解决组合优化问题中的应用，涵盖其理论阐释、硬件呈现、算法框架、编码方法、基准测试协议、架构应用及未来研究方向。综合分析得出了一些重要结论。量子退火是一种受物理学启发的专用优化启发式方法，其本质与任何经典元启发式方法，以及任何基于变分量子算法门操作实现的方案都截然不同。它的典型特征——连续时间模拟演化、能级之间的量子隧穿，以及对低能态分布的内在采样——使其在具有相容结构的问题上具备一定优势，尤其适用于具有狭窄高势垒的崎岖能量景观。嵌入和编码开销被认为是当前可扩展性的主要限制，而非原始量子比特数量。鉴于现代硬件通常具有的物理量子比特稀疏性，次要嵌入约占用 80–92% 的物理量子比特，从而缓解稀疏性问题。高密度表述。高约束密度问题的表述还需要更高精度的系数，超出了当前硬件的能力。因此，阻碍实现实用量子优势的主要因素是经典开销，而非退相干或相干时间。由此可以预期，随着量子比特数量增加，如果连接强度和精度没有相应提升，收益将逐渐递减。实验优势主要出现在混合模型中：量子退火在经过大量计算机预处理后，作为优化子程序发挥作用。在具有实际意义的应用中，独立量子退火通常无法在相关问题类别的现实规模上与工业级经典求解器竞争。

物流、金融、机器人学和机器学习领域的重要应用，都采用了高度结构化的混合架构，将经典分解、量子辅助探索与经典后处理结合起来。严格的基准测试应当成为可信性能评估的基础。若存在选择性报告、基线水平不足、遗漏开销以及统计补偿不充分等方法论缺陷，就会严重夸大量子技术的表观优势。若不采用全面的基准测试协议，科学严谨性便无从谈起；这些协议应包括完整的挂钟计时、完整的统计分布、与工业级经典基准的比较，以及公开可用的实例库。克服当前局限最有前景的技术方向包括：非确定性控制，有望在经典模拟难度增加时带来指数加速，但硬件成本极高；自动化嵌入算法，可提供性能保证，从而更充分地利用量子比特；结合量子退火与量子近似优化算法，以发挥模拟量子控制和数字量子控制的互补特性；以及系统地刻画退火难度，从而为问题分配提供有原则的依据。量子退火不能孤立评估，而是量子-经典优化栈的一部分，其中物理学、算法与工程密不可分。其最终效果取决于能否审慎地融入理论发展（难度刻画、编码策略）、算法创新（混合架构、自适应协议）和工程进步（改善连接性、提高精度、扩大容差等）。尽管组合优化能否实现普适量子优势这一问题仍未解决，量子退火已经展现出其科学价值，可用于探测复杂能量景观，并阐释多体系统中的量子动力学。它在工业优化中的实际作用可能仅限于一些特定领域，即问题结构与量子退火的优势相匹配，且系统和混合集成能够得到有效管理。未来的发展应采取兼容并蓄的视角：审慎看待其固有缺陷，同时有选择地提升硬件能力、算法复杂度，并推进面向应用的协同架构。

数据和材料的可用性

本研究未生成或分析任何新数据。本综述讨论的所有信息均基于此前已发表的文献，并已适当引用。

利益冲突

作者声明，他们不存在可能被视为影响本文所报告工作的竞争性财务利益或个人关系。

资助

本研究未获得公共部门、商业化部门或非营利部门资助机构的任何专项拨款。

作者贡献

Rudraksh Sharma 构思了综述的结构，开展了全面的文献调研，综合并分析了相关材料，撰写了论文主体。Ravi Katukam 为主题选择和概念方向提供了总体指导，参与了关键讨论，并围绕学术内容对稿件进行了审阅和修订。Arjun Nagulapally 协助完善综述范围，参与构建关键章节，并在稿件修订期间提供了重要反馈。所有作者均阅读并批准了稿件的最终版本。

资助

作者感谢 AIONOS 提供支持性的研究环境，并鼓励跨学科探索，从而推动了本综述的撰写。作者还感谢同事和同行提供宝贵的讨论与反馈，帮助完善了稿件的范围和清晰度。此外，作者感谢为本研究提供支持的开放获取科学文献和计算工具的开发者与维护者。

参考文献

[1] S. Chowla 和 H. J. Ryser，《组合问题》，《加拿大数学杂志》，第 2 卷，第 93–99 页，1950 年。

[2] F. Glover、G.Kochenberger 和 Y. Du，《量子桥接分析 I：QUBO 模型的构建与应用教程》，2019 年。

[3] B. A. Cipra，《伊辛模型导论》，《美国数学月刊》，第 94 卷，第 10 期，第 937–959 页，1987 年。

[4] T. Kadowaki 和 H. Nishimori，《横向伊辛模型中的量子退火》，1998 年。

[5] S.Morita 和 H. Nishimori，《量子退火的数学基础》，数学物理学杂志，第 49 卷，第 12 期，2008 年。

[6] A. Peruzzo 等人，“在量子处理器上实现变分本征值求解器”，2013年。

[7] E. Farhi、J. Goldstone 和 S. Gutmann，“量子近似优化算法”，2014年。

[8]A. Rajak 等人，“量子退火：概述”，2023

[9]R. Barends 等人，“利用超导电路实现数字化绝热量子计算”，《自然》，第 534 卷，第 222–226 页，2016年。

[10] P. Hauke 等人，“量子退火展望：方法与实现”，2020年。

[11] L. P. Yulianti 和 K. Surendro，“量子退火的实现：系统综述”，2022年。

[12] S. Bravyi，《随机矩阵哈密顿量的蒙特卡罗模拟》，2015年。

[13]M. Marvian、D. A. Lidar 和 I. Hen，《消除非随机矩阵哈密顿量的计算复杂性》，《自然·通讯》，第10卷，2019年。

[14] S. Bravyi 等，《随机矩阵局域哈密顿量问题的复杂性》，2007年。

[15] W. Vinci 和 D. A. Lidar，《通过几何相位实现量子退火中的非随机矩阵哈密顿量》，《*npj*量子信息》，第3卷，2017年。

[16] A. W. Glaetzle 等，《采用里德堡原子的相干量子退火器》，《自然·通讯》，第8卷，2017年。

[17] F. Leitner 和 G. B. Mbeng，《LHZ架构的量子绝热最速路径》，2023。

[18] H. Zhao 等，《基于相位滑移的超导量子干涉仪》，电子学，第 13 卷，2024。[19]M. Ohkuwa、H. Nishimori 和 D. A. Lidar，《全连接 p 自旋模型的反向退火》，物理评论*A*，第 98 卷，2018。[20] M. S. Jattana，《正向退火辅助的反向量子退火》，2024。[21] E. J. Crosson 和 D. A. Lidar，《非绝热量子退火实现量子增强的前景》，2021。[22] M. H. Amin 等，《量子退火中的量子误差缓解》，2023。[23]B. Tasseff 等，《量子退火硬件的新兴潜力》，启发式杂志，第 30 卷，第 325–358 页，2024。

[24] K. L. Pudenz、T. Albash 和 D. A. Lidar，《随机伊辛模型问题的量子退火纠错》，物理评论*A*，第 91 卷，2015年。

[25] Y. Nambu，“编码量子退火的纠错再探，”2024。

[26] C. Ho Thanh，“面向更浅Trotter化电路的哈密顿量重排序，”2024。

[27] R. Acharya等人，“低于表面码阈值的量子纠错，”《自然》，第638卷，第920–926页，2025年。

[28] P. Codognet，“比较用于量子退火的二次无约束二元优化模型”，《国际运筹研究汇刊》，第32卷，第18–37页，2025年。[29] M. Kumagai 等，“独热约束的外部定义与快速QUBO生成”，2021。[30] S. Kikuchi、K. Takahashi 和 S. Tanaka，“数字伊辛机中畴壁编码的性能”，2025年。[31] P. M. Xavier 等，“用于 QUIO 和二次无约束二元优化问题的变量编码技术性能比较”，2024。[32] P. Codognet，“为量子退火在二次无约束二元优化中编码二元比较约束”，*GECCO 2025*，第2419–2423页，2025年。[33] J. Raymond 等，“通过参数调优提升逻辑量子比特的性能”，*IEEE QCE 2020*论文集，第295–305页，2020年。[34] K. L. Pudenz、T. Albash 和 D. A. Lidar，“ 采用数百个量子比特的纠错量子退火 ”，《自然·通讯》，第5卷，2014年。[35] W. Vinci 等，“通过次嵌入实现量子退火纠错”，物理评论*A*，第92卷，2015年。[36] E. Osaba 等，“聚焦于混合量子计算—禁忌搜索算法”，*GECCO 2021*，第1476–1482页，2021年。[37] A. N. Ignatov 和 S. V. Ivanov，“混合整数线性规划问题求解器比较”，《南乌拉尔国立大学学报》，第17卷，第57–72页，2024年。[38] M. Gou 等，“通过骨干驱动的问题分解实现分层量子优化”，2025年。[39] V. Tomar、M. Bansal 和 P. Singh，“优化元启发式算法：简要综述”，《工程学论文集》，第59卷，2023年。

[40] A. Bonomi 等，“量子退火学习搜索实现”，2022年。

[41]S. Mario等人，“基于量子退火的实时路径优化混合策略，”2025年。

[42] E. W. H. Chow等人，“利用量子退火应对车辆路径规划挑战，”第137–142页，2025年。[43]“通过完全集成的量子退火增强机器人操作：FIQA-RM系统，”2025年。[44] S. N. Morapakula等人，“基于量子退火的端到端投资组合优化，”2025年。[45] C. Pomeroy等人，“面向机器学习的量子退火：特征选择中的应用，”2025年。[46] E. Pelofske、A. B¨artschi与S. Eidenbenz，“短深度量子近似优化算法电路与量子退火，”《*npj*量子信息》，第10卷，2024。[47] J. Li，“受知识蒸馏启发的变分量子本征求解器，”2025年。[48] F. A. Quinton等人，“量子退火的应用、挑战与局限性，”《科学报告》，第15卷，2025年。[49] V. Choi，“Stoquastic量子退火的局限性：一种结构性视角，”2025年。