arXiv:2602.03106v1 [math.DG] 3 Feb 2026

CP^1 上某些野 Higgs 丛的正则化 L^2 范数

HSIAO-TZU TSAI 和 CHIH-CHUNG LIU

Abstract. 我们定义并分析了带有特定类型奇点的 $\mathbb{CP}^1$ 上 Higgs 丛模空间上的某种 L^2 范数。我们证明，此处所研究的度量的某个极限，就是定义在中心纤维上的正则化 L^2 范数；该范数最早见于 [FN]。

1. introduction引言

紧黎曼曲面 C（亏格为 g）上的秩为 k 的稳定 Higgs 丛模空间 $\mathcal{M}$，亦即 Hitchin 模空间，已从多个角度得到广泛研究。从 Higgs 丛的角度来看，该空间由 Higgs 对（$\mathcal{E}$, φ）构成，其中 $\mathcal{E}$ 是秩为 k、规范群为 $\mathcal{G}$ 的全纯丛，而 φ 是 $End\mathcal{E} \otimes K_X$ 的全纯截面。这里，K_X 是 X 的全纯余切丛（亦即典范丛）。根据 Hitchin-Kobayashi 对应，该空间对应于一类称为调和度量的特殊度量空间。这些度量 h 使得 Higgs 对（$\mathcal{E}$, φ）满足 Hitchin 方程：

$$F_h + [\varphi, \varphi^{*_h}] = 0. \tag{1.1}$$

这里，F_h 是由 h 和 $\mathcal{E}$的全纯结构确定的 Chern 联络的曲率。这是一个规范理论方程，可以通过将经典杨-米尔斯方程降维到黎曼曲面上得到。

这些空间有一种众所周知的结构，即 Hitchin 纤维化，其中 $\mathcal{M}$在不变多项式的向量空间 $\mathcal{B}$ 上有纤维。这种结构促成了用谱曲线来描述 Higgs 对；谱曲线可以视为 φ特征值的截面。于是，多项式上的 Hitchin 纤维由这些曲线上的某些线丛参数化。这些纤维一般是环面型的，例如 $\mathcal{G} = GL(k, \mathbb{C})$ 对应的完整雅可比簇，以及 $\mathcal{G} = SL(k, \mathbb{C})$ 对应的 Prym 簇。Hitchin 还证明了这种纤维化是代数完全可积的。

基于这些结构，过去十年间，文献中出现了许多关于 $k = 2$ 和 $\mathcal{G} = SL(2, \mathbb{C})$ 的深刻而精细的解析结果（参见 [MSWW],[MSWW1], [DN], ...等）。这些结果大多假设亏格为 $g \geq 2$，且谱曲线光滑。后一个条件等价于特征多项式的零点都是单零点。也就是说，该多项式可以写成

$$\lambda^2 - zdz^2 \tag{1.2}$$

在其零点附近。

这两个假设使模空间光滑。然而，它们在一定程度上限制了显式计算和构造实例的可能性。为此，我们考虑一些奇点，以构造有趣的实例。本文研究 $\mathbb{CP}^1$ 上具有 ∞ 处不规则（野）奇点的秩 2 希格斯丛，该奇点由 [FN] 和 [BP] 引入。我们考虑的希格斯场 φ 的特征多项式在以下形式变化

$$\lambda^2 - z^K dz^2 \tag{1.3}$$

在 ∞ 附近，其中 K 为某个奇数。通过考虑带抛物结构的滤子丛，来描述 ∞ 处的奇点。这些对的模空间记作 $\mathcal{M}_{2,\ N}$。[FN]，证明了滤子丛可分解为 2 个抛物线丛，并且模空间按照 N 的某些分拆进行分层。

本文聚焦于情形 $N = 3$，其在 [FN] 中有明确描述。空间 $\mathcal{M}_{2,\ 3}$ 被分解为两个集合的不交并，分别为 $\mathcal{M}^{\text{small}}_{2\,3}$, 和 $\mathcal{M}^{\text{big}}_{2\,3}$, 。它们分别与 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}^2$ 对应。Hitchin 纤维化的中心纤维上有两个不动点，每个分层各有一个。其他纤维由 $\mathcal{M}^{\text{big}}_{2\,3}$, 以及 $\mathcal{M}^{\text{small}}_{2\,3}$, 中的一个点组成，后者是无穷远点。第 2 节将提供 [FN] 中的更多细节。

其中一个重要构造包含一个作用于$\mathcal{M}_{2,3}$ 上的 $\mathbb{C}^*$ 作用，它推广了 Hitchin 定义的经典作用。在该作用的不动点处，作者根据 Higgs 对及其对应的调和度量定义了正则化 L^2 范数，并对$\mathcal{M}_{2,3}$的情形进行了显式计算。我们的第一个结果是将该范数推广到整个$\mathcal{M}_{2,3}$上。

定理 1.1. 调节后的 L^2 范数 μ 可扩展为整个$\mathcal{M}_{2,3}$上的范数。

扩展的关键步骤是在 $\mathcal{M}_{2,3}$的所有点上构造调和度量。我们以这样的方式构造这些度量，使得其方程与在固定点处研究的方程（Toda 型方程）相似。事实上，这些方程是固定点处方程的一些光滑扰动。椭圆估计以及偏微分方程中的其他技巧使我们能够证明

定理 1.2。扩展范数 μ 在$\mathcal{M}_{2,\ 3}$上是光滑的。

扩展范数尤其为 $U(1)$-作用在$\mathcal{M}_{2\,3}^{\text{small}}$, 以及$\mathcal{M}_{2\,3}^{\text{big}}$, 的一小部分上定义了一个矩映射。尽管已经实现了扩展，但在$\mathcal{M}_{2\,3}^{\text{big}}$, 上的定义仍然有些含糊。因此，对于 [FN]中提出的关于μ单调性的精确描述的猜想，我们尚无法给出完整回答。我们将其留作未来迈向其他推广方向的持续研究。

2. PRELIMINARIES

虽然本文旨在分析一个具体例子，但为方便读者起见，我们仍列出[FN] 中的一些相关滤子丛和抛物结构定义。全纯向量丛的结构由整体截面的零点刻画，这是一个标准事实。此外，滤子丛还由带有极点的整体截面定义并刻画。这些截面所构成的层用模的滤过来描述。

定义 2.1（滤子丛（[FN]））。给定一个紧黎曼曲面 C 和一个由有限个点组成的除子 $D \subset C$，在（C, D）上的秩为 K 的滤子丛是一个秩为 K 的局部自由 $\mathcal{O}_C(*D)$-模 $\mathcal{E}$，带有由局部自由 $\mathcal{O}_C$-子模 $\{\mathcal{P}_\alpha\mathcal{E}\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ 构成的递增滤过，使得

- $\mathcal{P}_\alpha\mathcal{E}_{C-D} = \mathcal{E}_{C-D}$.
- $\mathcal{P}_\alpha\mathcal{E} = \cap_{\beta>\alpha}\mathcal{P}_\beta\mathcal{E}$.
- 若 x 是开集 U 上围绕 $p \in D$ 的局部坐标，则

$$\mathcal{P}_\alpha\mathcal{E}|U = \mathcal{P}_{\alpha-1}\mathcal{E}|U. \tag{2.1}$$

这些 $\mathcal{P}_\alpha$ 本质上是具有不同极点阶数的亚纯截面层。根据这一原理，我们有

定义 2.2. 对于 $p \notin D$，我们将 s 在 p 处的阶，或 $\nu_p(s)$，定义为通常的极点阶数。对于 $p \in D$，开集 $U \subset C$ 使得 $U \cap D = \{p\}$，以及 $\mathcal{E}$ 在 U 上的截面 s，我们将 s 在 p 处的阶定义为

$$\nu_p(s) := \inf\{\alpha \mid s \in \mathcal{P}_\alpha \mathcal{E}\}. \tag{2.2}$$

对于我们的具体例子，有

定义 2.3. 在 (C, D) 上的滤子 $SL(K)$-希格斯丛是一个对 $(\mathcal{E}, \varphi)$，其中$\mathcal{E}$ 是在 (C, D) 上的滤子 $SL(K)$ 丛，而 φ 是一个无迹自同态（或 $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ 的截面），在 $C - D$ 上全纯。

与普通丛类似，滤子丛的次数通过计算整体截面的零点和极点来定义。

定义 2.4. 对于 (C, D) 上的过滤线丛 $\mathcal{L}$，我们将其抛物次数定义为

$$p\deg \mathcal{L} := -\sum_{p \in C} \nu_p(s), \tag{2.3}$$

其中 s 是任意整体亚纯截面。对于秩为 K 的滤子丛 $\mathcal{E}$，我们定义

$$p\deg \mathcal{E} := p\deg \wedge^K \mathcal{E}. \tag{2.4}$$

复几何中的一个标准事实是，上述和定义良好。也就是说，阶除了有限个点外均为零，并且该和与截面的选取无关。

本文关注 $C = \mathbb{CP}^1$ 和 $D = \{\infty\}$ 的情形，此时过滤线丛自然推广了 $\mathbb{CP}^1$ 上标准的全纯线丛。

定义 2.5. 对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们将 $(\mathbb{CP}^1, \{\infty\})$ 上的过滤线丛 $\mathcal{O}(\alpha)$ 定义为 $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(*\{\infty\})$– 模的递增滤过，其中在 ∞ 处的极点阶数不大于 α，并按平移了 $-\alpha$ 的极点阶数进行滤过。

一个重要事实是，仿照 [Hu], , 在 [FN] 中证明的结果为

L引理 2.6. 一个过滤的 $SL(K)$-丛 $\mathcal{E}$ 在 $(\mathbb{CP}^1, \{\infty\})$ 上可以分解为 *o*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{K} \mathcal{O}(\alpha_i), \tag{2.5}$$

其中 $\sum \alpha_i = 0$。

接下来，我们引入希格斯场 φ，并赋予这一对 $(\mathcal{E}, \varphi)$ 在 ∞ 处规定类型的奇点。 [FN] 中所讨论的 Higgs 丛范畴

称为 $(\mathbb{CP}^1, \{\infty\})$ 上的良滤过 Higgs 束，记作 $\mathcal{C}_{K,\ N}$。这些丛在 ∞ 附近的某个分歧坐标中具有一定的可对角化性。其构造相当复杂。有兴趣的读者可参阅 [FN] 或 [M]，了解更多详情。对它们进行显式描述的方法是，存在规范 g，使得它们在 ∞ 附近满足

$$\varphi^g = \varphi_{\text{model}} + \tilde{\varphi}, \tag{2.6}$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 在 ∞附近全纯，并且

$$\varphi_{\text{model}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{K}} & & & \\ & e^{\frac{4\pi i}{K}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} z^{\frac{N}{K}} dz. \tag{2.7}$$

关键性质是

命题 2.7（ [FN] 中的命题 2.19）。对于任意 $(\mathcal{E}, \varphi) \in \mathcal{C}_{K,N}$，Higgs 场 φ 使抛物次数增加 $\frac{N}{K}$。此外，(2.5) 中给出的分解满足

$$\sum_{i=1}^{K} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) = 0. \tag{2.8}$$

等价地，若我们将 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_K)$ 定义为

$$\mathbf{b_i} := \alpha_i - \alpha_{i+1} + \frac{N}{K}, \tag{2.9}$$

则 $\mathbf{b}$ 构成 N的一个 K-分拆。该对应关系在 $b_i's$的循环置换下唯一。由此，我们通过 N的循环 K-分拆对好滤过丛进行分类。令 $\mathcal{M}_{K,N}$ 为好滤过丛的同构类，便得到分层

$$\mathcal{M}_{K,N} = \bigsqcup_{[\mathbf{b}]} \mathcal{M}_{K,N}^{[\mathbf{b}]}, \tag{2.10}$$

其中，$\mathcal{M}_K^{[\mathbf{b}]}{}_{,\ N}$ 是由分拆 $\mathbf{b}$ 所表示的循环类确定的好滤过希格斯丛的规范类。

与光滑情形类似，空间 $\mathcal{M}_{K,N}$ 也纤维化于不变多项式空间之上。良滤过 Higgs 束所施加的具体条件要求底空间具有以下某些形式：

命题 2.8（ [FN] 中的命题 2.14）。空间 $\mathcal{M}_{K,N}$ 纤维化于形如 $\mathcal{B}_{K,N}$ 的多项式空间之上

$$(\lambda^K - z^N dz^K) + (P_2(z)dz^2\lambda^{K-2} + \cdots + P_i(z)dz^i\lambda^{K-i} + \cdots + P_K(z)dz^K, \quad (2.11)$$

其中

$$\deg P_i \leq \frac{N(i-1)}{K} - 1. \quad (2.12)$$

纤维化 $\pi: \mathcal{M}_{K,\ N} \to \mathcal{B}_{K,\ N}$ 将一对 $(\mathcal{E}, \varphi)$ 映射为 φ的特征多项式。

鉴于这些初步结果，我们关注的空间 $\mathcal{M}_{2,\ 3}$ 由满足下列条件的一对 $(\mathcal{E}, \varphi)$ 构成：

$$\mathrm{char}\varphi = \lambda^2 - (z^3 + u)dz^2, \quad (2.13)$$

其中 $u \in \mathbb{C}$。由于 $N = 3$ 在循环置换意义下恰有两个 2-划分，即 (3, 0) 和 (2, 1)，因此模空间被分解为两个分层。根据命题 2.7 和 2.8 以及线性代数中的标准事实，可以直接验证

命题 2.9（ [FN] 中的命题 6.2 和 6.3）。 $\mathcal{M}_{2}^{[(3,0)]}{}_{,\ 3} \simeq \mathbb{C}$ ，并且对于每个 $u \in \mathbb{C}$，均由下式表示：

$$\mathcal{E}_u = \mathcal{O}\left(\frac{3}{4}\right) \oplus \mathcal{O}\left(-\frac{3}{4}\right), \qquad \varphi_u = \begin{pmatrix} 0 & z^3 + u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz; \quad (2.14)$$

$\mathcal{M}_{2}^{[(2,1)]}{}_{,\ 3} \simeq \mathbb{C}^2$ 并且对于每个（γ， ω） $\in \mathbb{C}^2$，由

$$\mathcal{E}_{\gamma,\omega} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{4}\right) \oplus \mathcal{O}\left(-\frac{1}{4}\right), \qquad \varphi_{\omega,\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{z^3-\omega^3}{z-\omega} \\ z - \omega & -\gamma \end{pmatrix} dz. \quad (2.15)$$

前一个分层称为 $\mathcal{M}^{\mathrm{small}}_{2\,3}$, 后一个称为 $\mathcal{M}^{\mathrm{big}}_{2\,3}$, 。对于每个 $u \in \mathbb{C}$。这个模空间的纤维化结构可以明确描述。对于每个$u \in \mathbb{C}$， $\pi^{-1}(u)$由所有行列式为（$z^3 + u$）dz^2的 Higgs 场组成。就上述两个分层而言，它由来自$\mathcal{M}^{\mathrm{small}}_{2\,3}$, 的一个点，以及来自$\mathcal{M}^{\mathrm{big}}_{2\,3}$, 的点组成，这些点满足 $\gamma^2 - \omega^3 = u$，即 $\mathbb{C}^2$中的一条仿射三次曲线。事实上，通过考虑规范

$$g = i \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\omega} & \omega + z \\ 0 & -\frac{\gamma}{\omega}, \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

[FN] 中的作者指出， φ_u 是$\varphi_{\omega,\ \gamma}$ 在（ω， γ）沿着与 ∞处的滤过相容的方式趋近时的极限。除 $u = 0$处外，纤维均为光滑的；该处称为中心纤维。这个纤维包含某个 $\mathbb{C}^*$ 作用的两个不动点。我们不会聚焦于这一方面，而是旨在为整个 $\mathcal{M}_{2,\ 3}$ 构造调和度量，并推广受调节的 L^2 范数；这些范数仅在 [FN], 中的 $u = 0$ 上以光滑方式定义。

3. Harmonic Metrics on $\mathcal{M}^{\text{SMALL}}_{2\ 3}$,

给定 (C, D) 上的良滤过 Higgs 束 $(\mathcal{E}, \varphi)$，回忆一下，$(\mathcal{E}, \varphi)$ 上的调和度量是指 $\mathcal{E}$ 上的厄米度量 h，满足

$$F_h + [\varphi, \varphi^{*_h}] = 0. \tag{3.1}$$

这类度量的存在性由以下定理保证：

定理3.1（[BP],[M]）。良滤过束上的调和度量存在，且在相差一个标量倍数的意义下唯一。

这里， F_h 是与度量 h 相对应的 Chern 联络的曲率。基于存在性定理，并受 [FN], 的命题 3.10 启发，我们构造与 (3.1) 相关的偏微分方程，针对 $\mathcal{M}^{\text{small}}_{2\ 3}$, 。

给定与 Higgs 对相对应的 $u \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{E}_u = \mathcal{O}\left(\frac{3}{4}\right) \oplus \mathcal{O}\left(-\frac{3}{4}\right), \qquad \varphi_u = \begin{pmatrix} 0 & z^3 + u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz, \tag{3.2}$$

我们考虑如下形式的已有调和度量

$$h_u = \begin{pmatrix} |z^3 + u|^{\frac{1}{2}} e^{\psi_u} & 0 \\ 0 & |z^3 + u|^{-\frac{1}{2}} e^{-\psi_u} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

其中 ψ_u 是定义在.....上的实值函数

$$\mathbb{C}_u := \mathbb{C} - \{-u^{\frac{1}{3}}\}$$

[FN] 的命题 3.10 和引理 3.13 可以很容易地加以修改。

定理 3.2. 对每个 $u \in \mathbb{C}$, (3.3) 中的函数 ψ_u 满足椭圆方程

$$\Delta\psi_u = 2|z^3+u|\sinh(2\psi_u), \tag{3.4}$$

具有如下边界渐近行为

- $\psi_u \sim \log|z^3+u|$，当 $z \to -u^{\frac{1}{3}}$
- $\psi_u \to 0$ 指数地 $|z| \to \infty$。

这里，$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ 是 $\mathbb{C}$上的拉普拉斯算子。

证明。关于(3.3)中的 h_u， φ_u 的伴随可以容易地算出

$$\varphi_u^{*_h} = \begin{pmatrix} 0 & |z^3+u|e^{2\psi_u} \\ \overline{(z^3+u)}|z^3+u|^{-1}e^{-2\psi_u} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

方程（3.4）可通过直接计算得到。由定理3.1保证的 h 在整个 $\mathbb{C}$ 上的先验光滑性，可得$-u^{\frac{1}{3}}$ 附近的渐近行为。

为证明 ∞处的衰减，我们考虑

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\psi_u|^2 &= \psi_u\Delta\psi_u + \|\nabla\psi_u\|^2 \\ &= 2|z^3+u|\psi_u\sinh(2\psi_u) + \|\nabla\psi_u\|^2 \\ &\geq 2|z^3+u|\psi_u^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

第二个等号用到了（3.4），第一个不等式则由初等微积分得出。根据最大值原理， $|\psi_u|^2$ 在 $\mathbb{C}_u$上不能取到最大值。由于$|\psi_u|^2$为正，且在唯一的奇点$-u^{\frac{1}{3}}$之外有正下界，由 h_u的整体光滑性可知,

$$\lim_{|z|\to\infty} \Delta|\psi_u|^2 = 0 \tag{3.7}$$

这是由平均值不等式得出的。方程（3.6）进而意味着

$$\lim_{|z|\to\infty} |\psi_u|^2 = \lim_{|z|\to\infty} \psi_u = 0. \tag{3.8}$$

当 $|z|$ 足够大，使得 $4|z^3+u| \geq |u|^4$（更精确地说， $|z| \geq \left(|u| + \frac{|u|^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$）时，(3.6) 得出

$$\left(\Delta - |u|^4\right)|\psi_u|^2 \geq 0. \tag{3.9}$$

因此， $|\psi_u|^2$ 由下式的有界解所界定

$$\left(\Delta - |u|^4\right) F_u = 0, \tag{3.10}$$

其在大 $|z|$处具有指数衰减。事实上，由于一个显式有界的 F_u 是

$$F_u = e^{-|u|^2 z - |u|^2 \bar{z}}, \tag{3.11}$$

我们得出结论：每个 ψ_u 都以 $|u|$的衰减率在大$|z|$处指数衰减。

□

注意， [FN] 中考虑的 Toda 方程恰好是带有 $u = 0$的 (3.4)。此外，那里的不动点假设使得规范函数 ψ_u 可以是径向的。由于 u的存在，我们在此不假设这一性质。相反，我们将 (3.4) 视为 Toda 方程的光滑扰动，并研究解 ψ_u 对 u的依赖性。指数衰减在 $u = 0$ 处同样成立，正如 [FN]中所证明的。

我们的主要结果是证明 $\psi_u \to \psi$，其中 ψ 是$u = 0$情形下 (3.4) 的解：

$$\Delta\psi = 2|z^3| \sinh(2\psi) \tag{3.12}$$

在某种适当意义下随 $u \to 0$ 。为证明这一点，我们需要对 ψ_u有更一致的控制。

引理 3.3. 对 $\mathbb{C}^*$ 的每一个紧集 Ω，集合

$$\{\|\psi_u\|_{L^\infty(\Omega)}\}_u \quad and \quad \{\|\nabla\psi_u\|_{L^\infty(\Omega)}\}_u$$

都是有界的。

证明. 我们首先对 $\psi_u's$ 给出一致的界。这由每个 ψ_u 在足够大的 $|z|$ 处的指数衰减得出。由于 Ω 是 $\mathbb{C}^*$ 的紧子集，

$$\delta := \inf\{\left(|w| + \frac{|w|^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \mid w \in \Omega\} > 0. \tag{3.13}$$

由定理 3.2 的证明可知，所有的 ψ_u 均有界于

$$e^{-\delta z + \delta \bar{z}},$$

这是 Ω 上的一致有界函数。

ψ_u 的一致有界性因此意味着 $\Delta\psi_u$ 的一致有界性。我们利用这些结果证明 $\|\nabla\psi_u\|$ 的一致有界性。取一个支撑在 Ω 上的鼓包函数 η。对积分进行分部积分并应用 H¨older 不等式,

$$\int_\Omega \eta^2\psi_u\Delta\psi_u,$$

我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega \|\nabla\psi_u\|^2 \\ &\leq 2\left(\int_\Omega (\psi_u)^2\|\nabla\eta\|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \int_\Omega \eta^2\psi_u\Delta\psi_u. \end{aligned} \tag{3.14}$$

根据先前的构造，最后一个积分在 u 上有界，因此

$$\int_\Omega \|\nabla\psi_u\|^2$$

在 u 上有界。

最后，我们反设 $\|\nabla\psi_u\|$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中无界。因此，对于每个 u，存在 $z_u\in\Omega$，使得集合 $\{\|\nabla\psi_u\|(z_u)\}$ 无界。然而，考虑平均值不等式

$$\|\nabla\psi_u(z)-\nabla\psi_u(z_u)\| \leq C\|\Delta\psi_u\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{3.15}$$

其中 C 是 Ω 的直径。对于每个 u，我们有

$$\int_\Omega \|\nabla\psi_u\|^2 \geq \int_\Omega \left(\|\nabla\psi_u\|(z_u) - C\|\Delta\psi_u\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2. \tag{3.16}$$

我们得出了矛盾，因为左侧有界，而右侧无界。

□

借助这一技术引理，我们现在证明 $\mathcal{M}^{\text{small}}_{2\,3}$, 的主定理。

定理 3.4。方程 (3.4) 的解族 ψ_u 有一个序列，在 C^2 上的 $\mathbb{C}^*$ 中，当 $u\to 0$ 时收敛于 ψ （见 (3.12)）。

证明。我们先澄清一个细微之处。这里的收敛是关于 $\mathbb{C}^*$ 的逐点收敛。不过，如果 $z\in\mathbb{C}^*$ 对某个 ψ_v 是奇点，即 $z=-v^{\frac{1}{3}}$，那么我们考虑满足 $|u|\leq\frac{|v|^{\frac{1}{3}}}{2}$ 的 ψ_u。这样的族在该处不会是奇异的,

因此逐点收敛在 $u \to 0$ 的意义下定义良好。序列收敛从某个满足 $u_1 < \frac{|v|^{\frac{1}{3}}}{2}$ 的 u_1 开始。

接下来，我们证明，在 $\mathbb{C}^*$ 上任意紧集 Ω 上，$\{\psi_u\}$ 都有一个序列在 C^2 (Ω) 中收敛到一个 C^2 函数 ψ_0。这由椭圆方程 (3.4) 的 Schauder估计得出：

$$\|\psi_u\|_{C^{2,1}(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| 2|z^3+u| \sinh(2\psi_u) \right\|_{C^{0,1}(\Omega)} \right). \tag{3.17}$$

右侧第一项由引理 3.3 可知一致有界。第二项由 $\|z^3+u\|_{C^{0,\,1}}$ (Ω) 控制，该项在紧集 Ω 上显然有界；此外，$\|$双曲正弦函数$(2\psi_u)\|_{C^{0,\,1}(\Omega)}$ 也有界。为估计后者，我们注意到，对于每个 z，$w \in \Omega$,

$$\left| \frac{\sinh(2\psi_u(z)) - \sinh(2\psi_u(w))}{z-w} \right| \leq 2\cosh(\psi_u) \|\nabla \psi_u\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{3.18}$$

由平均值不等式可得。这里 ψ_u 介于 $\psi_u(z)$ 和 $\psi_u(w)$ 之间，因此一致有界。根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，存在一个序列 $\{\psi_{u_j}\} \subset \{\psi_u\}$，当 ∞ 趋于 $u_j \to 0$ 时，该序列收敛到 Ω 上的一个 C^2 函数 ψ_0。

剩下要证明 $\psi_0 = \psi$ 在 Ω 上。首先注意到 ψ_0 对 ψ满足相同的 (3.12)。事实上，对每个 j，我们有

$$\begin{aligned} \left\| \Delta\psi_0 - 2|z^3| \sinh(2\psi_0) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq\ & \left\| \Delta\psi_0 - \Delta\psi_{u_j} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ & + \left\| \Delta\psi_{u_j} - 2|z^3+u_j| \sinh(2\psi_{u_j}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ & + \left\| 2|z^3+u_j| \left(\sinh(2\psi_{u_j}) - \sinh(2\psi_0) \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ & + \left\| 2\left(|z^3+u_j| - |z^3| \right) \sinh(2\psi_0) \right\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

根据前面的事实和构造，右端的每一项都可以变得任意小。因此，ψ_0 在 $u=0$ 处也给出了一个调和度量。这两个度量

$$h_0 = \begin{pmatrix} |z^3|^{\frac{1}{2}} e^{\psi_0} & 0 \\ 0 & |z^3|^{-\frac{1}{2}} e^{-\psi_0} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} |z^3|^{\frac{1}{2}} e^{\psi} & 0 \\ 0 & |z^3|^{-\frac{1}{2}} e^{-\psi} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

根据定理3.1，它们相差一个常数倍。因此，ψ_0 和 ψ 相差一个常数 K。由于它们都满足 (3.12)，我们有

$$\sinh(2\psi_0 + K) = \sinh(2\psi) \tag{3.21}$$

这迫使 $K=0$，因为双曲正弦函数是单射的，证明即告完成。 □

4. Harmonic Metrics on $\mathcal{M}^{\mathrm{BIG}}_{2\,3,}$

在$\mathcal{M}^{\mathrm{big}}_{2\,3}$,上的调和度量方程远没有那么显式，除了$\gamma = 0$，那里的方程与(3.4)类似。对于一般的 γ，我们以相当隐式的方式定义受控L^2 范数。

我们从给定的 Higgs 对 $\gamma = 0$开始

$$\mathcal{E}_{0,\omega} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{4}\right) \oplus \mathcal{O}\left(-\frac{1}{4}\right), \qquad \varphi_{\omega,0} = \begin{pmatrix} 0 & P_0 \\ Q_0 & 0 \end{pmatrix} dz. \tag{4.1}$$

这里,

$$Q_0 = z - \omega = z + u^{\frac{1}{3}}, \qquad P_0 = \frac{z^3 - \omega^3}{z - \omega} = \frac{z^3 + u}{z + u^{\frac{1}{3}}}. \tag{4.2}$$

我们提醒一下， ω 和 γ 在 u上满足整个 $\mathcal{M}^{\mathrm{big}}_{2\,3}$ 的纤维上的方程 $\gamma^2 - \omega^3 = u$ 。采用这些记号，我们可以考虑如下形式的调和度量

$$h_{\omega,0} = \begin{pmatrix} \left|\frac{P_0}{Q_0}\right|^{\frac{1}{2}} e^{\psi_0} & 0 \\ 0 & \left|\frac{Q_0}{P_0}\right|^{\frac{1}{2}} e^{-\psi_0}. \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

于是，Hitchin 方程转化为椭圆型偏微分方程

$$\Delta\psi_0 = 2|z^3 + u| \sinh(2\psi_0) \tag{4.4}$$

在 $\omega = -u^{\frac{1}{3}}$ 附近满足渐近边界条件:

$$\psi_0 \sim -\frac{1}{2} \log\left(\frac{z^2 + z\omega + \omega^2}{z - \omega}\right). \tag{4.5}$$

与 $\mathcal{M}^{\mathrm{small}}_{2\,3}$, 中相同的论证表明，当 $|z| \to \infty$ 时， ψ_0 呈指数衰减。对于 $\gamma \neq 0$, 我们有

$$\varphi_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma & P_\gamma \\ Q_\gamma & -\gamma \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

其中

$$Q_\gamma = z - \omega = z + (u - \gamma^2)^{\frac{1}{3}}, \qquad P_\gamma = \frac{z^3 - \omega^3}{z - \omega} = \frac{z^3 + u - \gamma^2}{z + (u - \gamma^2)^{\frac{1}{3}}}. \tag{4.7}$$

在这里无法将 Hitchin方程转化为标量偏微分方程。不过，满足以下条件的光滑调和度量 $h_{\omega,\ \gamma}$

$$F_{h_\gamma} + [\varphi_\gamma, \varphi_\gamma^{*_{h_\gamma}}] = 0 \tag{4.8}$$

根据定理3.1，它仍然存在。

将埃尔米特结构视为具有逐点内积的 $SU(2)$-自同态丛的光滑截面

$$< h_1, h_2 >:= Tr(h_1 h_2^*), \tag{4.9}$$

我们预期调和度量随参数 γ 光滑变化。事实上，我们有

命题 4.1. 调和度量 h_γ 在任意 Sobolev范数下趋近于 h_0，当 $\gamma \to 0$ 时。

证明。固定一个规范，使得所有埃尔米特结构的行列式均为 1，并且每个 γ 对应的调和度量都唯一。我们考虑映射

$$\mathcal{H} : A^{1,0}(\mathfrak{sl}(E) \oplus A^0(SU(E)) \to A^2(\mathfrak{su}(E)) \oplus A^{1,1}(\mathfrak{sl}(E)) \tag{4.10}$$

定义为

$$\mathcal{H}(\varphi, h) := F_h + [\varphi,\ \varphi^{*_h}], \tag{4.11}$$

其中， F_h 是由 h唯一确定的曲率。显然，对于所有 $\gamma \in \mathbb{C}$， $\mathcal{H}(\varphi_\gamma, h_\gamma) = 0$。对于每个 γ，我们有

$$h_\gamma = h_0 e^{\eta_\gamma} \tag{4.12}$$

对于某个 $\mathfrak{su}(E)$值截面 η_γ。代入（4.11），我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}((\varphi_\gamma, h_\gamma)) &= F_{h_\gamma} + [\varphi_\gamma\ ,\ \varphi_\gamma^{*_{h_\gamma}}] \\
&= F_{h_0} + \partial_{h_0}\bar{\partial}_{h_0}\eta_\gamma + o(|\eta_\gamma|^2) + [\varphi_\gamma,\ \varphi_\gamma^{*_{h_\gamma}}] \\
&= \partial_{h_0}\bar{\partial}_{h_0}\eta_\gamma + [\varphi_\gamma\ ,\ \varphi_\gamma^{*_{h_\gamma}}] - [\varphi_0\ ,\ \varphi_0^{*_{h_0}}] + o(|\eta_\gamma|^2) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

无穷小变分 η_γ 满足椭圆型偏微分方程，因此关于系数光滑依赖。因此，$h_{\omega,\ \gamma}$ 中的各项关于 γ 光滑依赖，因为φ_γ也如此。此外，每个调和度量在 $\mathbb{CP}^1$上都是光滑的。对于有界集合上的 γ,

集合， $\|h_\gamma\|_{L^\infty}$ 一致有界。由于调和度量与 ∞处的滤过相适配， φ_γ在 L^∞中一致有界。此外，根据定义， $\varphi_\gamma \to \varphi_0$是光滑的。椭圆正则性结合对（4.13）的自举论证，进而表明 $\eta_\gamma \to 0$ 属于所有 Sobolev 范数空间，证明至此完成。□

5. The regulated L^2 norm

现在，我们给出对 $\mathcal{M}_{2,3}$ 上正则化 L^2 范数的部分推广。在 $\mathcal{M}_{2\,3}^{\text{small}}$, 上，这种推广相当自然。然而，我们在$\mathcal{M}_{2\,3}^{\text{big}}$,上定义的推广仍有些模糊。尽管如此，我们在整个模空间上定义的正则化 L^2-范数关于参数 u、 γ 和 ω 连续变化。

在 [FN], 中，作者定义了如下公式

$$\mu([\mathcal{E},\varphi]) := \frac{i}{\pi}\int Tr\left(\varphi \wedge \varphi^{*_h} - Id|z|^3\right)\, dzd\bar{z} \tag{5.1}$$

并在中心纤维 $u=0$ 上的两个不动点处对其进行了显式计算。

我们注意到，被积函数中的第二项是为了去除迹上的不可积项而加入的。积分在中心纤维之外仍然发散。在 $\mathcal{M}_{2\,3}^{\text{small}}$, 上，我们在纤维 $u \in \mathbb{C}$ 上定义

$$\mu([\mathcal{E}_u,\varphi_u]) := \frac{i}{\pi}\int Tr\left(\varphi_u \wedge \varphi_u^{*_h} - Id|z^3+u|\right)\, dzd\bar{z}. \tag{5.2}$$

这个积分难以显式计算。不过，对于每个 $u \in \mathbb{C}$，它都收敛且光滑。

定理 5.1。积分 (5.2) 对每个 $u \in \mathbb{C}$ 都收敛。此外，它关于 u光滑。

证明。由于被积函数显然关于 u 光滑，因此只需证明这些积分收敛。我们重新写作

$$\mu([\mathcal{E},\varphi]) := \frac{i}{\pi} = \int 4\sinh^2(\psi_u)|z^3+u|\, dzd\bar{z}. \tag{5.3}$$

ψ_u 的指数衰减在较大的 $|z|$ 处支配着 $|z^3+u|$ ，剩下的问题是 ψ_u 在 $z^3 = -u$处的奇点。在这些点附近，3.2中陈述的边界条件给出了渐近行为

$$\sinh^2(\psi_u) \sim \left(|z^3+u| - \frac{1}{|z^3+u|}\right)^2. \tag{5.4}$$

当 $|z|$ 较小时，唯一的奇异项便是 $\frac{1}{|z^3+u|}$。对于 $u \neq 0$， z^3+u 有三个不同的根，因此奇异项由三个简单极点组成。在简单极点附近区域上的二维积分是有限的，因此积分（5.3）收敛。□

严格来说，上文以及 [FN] 中定义的正则化 L^2-范数并非通常范数。例如，该定义不满足齐次性。不过，它们仍与 $\mathbb{S}^1$-矩映射描述密切相关，见 [H]。更确切地说，这些正则化 L^2-范数是定义在 Higgs 场光滑部分上的范数。对积分中的项作出调整，是为了去除奇异部分。事实上，对于在 (5.2) 中定义在 $\mathcal{M}^{\text{small}}_{2\,3,}$ 上的 μ ，考虑由规范给出的、远离 $z=-u^{\frac{1}{3}}$ 的平凡化

$$g=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(z^3+u)^{-\frac{1}{2}} & -1\\ -1 & -(z^3+u)^{\frac{1}{2}}.\end{pmatrix} \tag{5.5}$$

事实上，要使 $[\mathcal{E},\varphi_u]$ 成为 [FN] 中所述的良好配对，这个规范正是所需的规范。在此标架下，正则化范数 (5.2) 的被积函数为零。因此，

$$\mu([\mathcal{E}_u,\varphi_u]):=\frac{i}{\pi}\int_{D_u} Tr\left(\varphi_u\wedge\varphi_u^{*_h}-Id|z^3+u|\right)\,dzd\bar{z}, \tag{5.6}$$

其中 D_u 是 $-u^{\frac{1}{3}}$ 周围的一个小圆盘。在行列式的零点附近，我们观察到

$$Tr\left(\varphi_u\wedge\varphi_u^{*_h}-Id|z^3+u|\right)=Tr\left(\hat{\varphi}_u\wedge\hat{\varphi}_u^{*_h}\right), \tag{5.7}$$

其中

$$\hat{\varphi}_u=\begin{pmatrix}0 & (z^3+u)(e^{2\psi_u}-1)^{\frac{1}{2}}e^{\psi_u}\\ (e^{-2\psi_u}-1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\psi_u} & 0\end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

由于定理 3.2 中所述 ψ_u 的边界条件，这是 D_u 上的光滑 Higgs 场。设 $\tilde{\varphi}_u$ 为借助适当的单位分解将 $\hat{}\varphi_u$ 与 φ_u 拼接而成的光滑 Higgs 场，我们得出 $\mathcal{M}^{\text{small}}_{2,3}$ 上的正则化 L^2 范数为

$$\mu([\mathcal{E}_u,\varphi_u]):=\frac{i}{\pi}\int Tr\left(\tilde{\varphi}_u\wedge\tilde{\varphi}_u^{*_h}\right)\,dzd\bar{z} \tag{5.9}$$

采用通常的矩映射

$$\mathcal{M}(\tilde{\varphi})=[\tilde{\varphi}_u,\tilde{\varphi}_u^{*_h}]. \tag{5.10}$$

推广到$\mathcal{M}^{\text{big}}_{2\,3}$，要复杂得多，除非在 $\gamma = 0$处。在那里，调和方程完全相同，且（5.2）仍有定义。对于 $\gamma \neq 0$，调和度量不再是对角的，也不可能将 Hitchin 方程化为标量偏微分方程。我们在此给出一个相当隐式的势公式。

For

$$\varphi_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma & P_\gamma \\ Q_\gamma & -\gamma \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

如上，我们将相应的调和度量写为

$$h_\gamma = \begin{pmatrix} f_{1,\gamma} & g_\gamma \\ \bar{g}_\gamma & f_{2,\gamma}, \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

并带有规范固定条件 $\det h_\gamma = 1$。

我们在 $\mathcal{M}^{\text{big}}_{2\,3}$,上定义的正则化 L^2 范数为

$$\begin{aligned} \mu([\mathcal{E}_\gamma, \varphi_\gamma]) &:= \frac{i}{\pi}\int [Tr\left(\varphi_\gamma \wedge \varphi_u^{*h_\gamma} - 2|P_\gamma Q_\gamma| Id\right) - E_\gamma]\, dzd\bar{z} \\ &:= \frac{i}{\pi}\int [Tr\left(\varphi_\gamma \wedge \varphi_u^{*h_\gamma} - 2|z^3 + u - \gamma^2| Id\right) - E_\gamma]\, dzd\bar{z}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

误差项 E_γ 的作用与先前定义的那些范数类似：用于消除积分中的发散贡献。经过直接计算，它为

$$\begin{aligned} E_\gamma = \quad & 2|\gamma|^2 f_{1,\gamma} f_{2,\gamma} + |P_\gamma|^2 f_{2,\gamma}^2 + |Q_\gamma|^2 f_{1,\gamma}^2 \\ + \quad & 4Re(\gamma \bar{P}_\gamma f_{2,\gamma} g_\gamma - \gamma \bar{Q}_\gamma f_{1,\gamma} \bar{g}_\gamma - \bar{P}_\gamma Q_\gamma g_\gamma^2) \\ - \quad & 2|z^3 + u - \gamma^2| \cosh(2\psi_0). \end{aligned} \tag{5.14}$$

换言之，我们有，

$$\mu([\mathcal{E}_\gamma, \varphi_\gamma]) := \frac{i}{\pi}\int \left(2|\gamma|^2 |g_\gamma|^2 + 2|z^3 + u - \gamma^2| \sinh^2(\psi_0)\right)\, dzd\bar{z}. \tag{5.15}$$

该积分显然与 $[\mathcal{E}_0, \varphi_0]$ 的正则化 L^2 范数一致。根据命题 4.1 中调和度量的光滑收敛，上述定义的正则化 L^2范数关于 $\mathcal{M}^{\text{big}}_{2\,3}$，$\gamma$ 是光滑的（因此关于 ω 也是如此）。

总之，我们已将正则化的 L^2 范数从 [FN] 延拓到每条纤维的两端 $\gamma = 0$、∞。此外，这些正则化的 L^2 范数本质上是 Higgs 场光滑部分上的通常 L^2 范数，通过去掉

在 ∞ 处的奇异部分，其中 $\mathbb{S}^1$ 矩映射定义于 [H]。然而，我们热切希望改进或调整上述定义，以便对$\mathcal{M}_{2,3}$的托里克纤维的几何结构获得更多深入认识。

References

[BP] O. Biquard 和 P. Boalch，《曲线上的野非阿贝尔霍奇理论》，Compo. Math., 140, 第 179-204 页，(2004)。[DN] D. Dumas 和 A. Neitzke，《Hitchin 截面上希钦度量的渐近性》，Commun. Math. Phys., 367, 第 127-150 页 (2019)。[FN] L. Fredrickson 和 A. Neitzke，《$\mathbb{CP}^2$ 上具有 $\mathbb{C}^*$-作用的野希格斯丛模空间》，Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 第 623-656 页，(2021)。[H] N.J. Hitchin，《黎曼曲面上的自对偶方程》，Proc. London Math. Soc., 55, 第 59-126 页，(1987)。[H1] N.J. Hitchin，《稳定丛与可积系统》，Duke Math. J., 54, 第 91-114 页，(1987)。[Hu] D. Huybrechts，《复几何》，Universitext, Springer-Verlag (2005)。[M] T. Mochizuki，《具有相反符号的调和丛与 Toda 格》，arXiv:1301.1718 (2013)。[MSWW] R. Mazzeo, J. Swoboda, H. Weiss 和 F. Witt，《Higgs 丛模空间的端》，Duke Math. J., 165, no. 12, 第 2227-2271 页，(2016)。[MSWW1] R. Mazzeo, J. Swoboda, H. Weiss 和 F. Witt，《希钦度量的渐近几何》，Commun. Math. Phys., 367, 第 151-191 页，(2019)。

Department of Mathematics, National Cheng-Kung University, Tainan, Tai-wan, l18121014@gs.ncku.edu.twDepartment of Mathematics, National Cheng-Kung University, Tainan, Tai-wan, cliu@mail.ncku.edu.tw