arXiv:2602.03111v1 [math.DG] 3 Feb 2026

凯勒量子化与非极化拉东测度的精确 $C^{1,\bar{1}}$ 估计

Zbigniew Błocki 和 Tamás Darvas

摘要。设 K_φ 表示与多重次调和函数 φ 相关的加权伯格曼核。我们仅用 $i\partial\bar\partial\varphi$ 的上界和正下界，得到伯格曼度量 $i\partial\bar\partial\log K_\varphi$ 的上界和正下界。我们的方法适用于局部和紧致 Kähler 两种情形。作为直接应用，我们得到了对系数有界的凯勒电流进行量子化时最优的 $C^{1,\alpha}$-收敛。我们还证明，紧致 Kähler 流形上的任意非极化拉东测度都存在一种量子化。

1. 主要结果

1.1. 关于 $C^{1,\bar{1}}$ 凯勒量子化的估计。 设 X 是一个凯勒流形，且 $(L,h)\to X$ 是一个正曲率为 $i\Theta(h)=-i\partial\partial\log h=\omega>0$ 的充足厄米线丛。我们固定 (X,ω) 作为背景凯勒结构。

在经典凯勒量子化中，我们考察 h' 在 L上的不同厄米度量。这样的度量可以写成 $h'=he^{-\varphi}$，其中势 $\varphi\in\mathcal{H}_\omega$ 属于光滑 Kähler 势空间：

$$\mathcal{H}_\omega:=\{\varphi\in C^\infty(X):\omega_\varphi:=\omega+i\partial\bar\partial\varphi>0\}.$$

给定 $k\geq 1$，记 $\mathcal{H}^k$ 为向量空间$H^0(X,L^k)$上的厄米内积空间。度量 $he^{-\varphi}$ 通过 *Hilbert* 映射 $H^k_{(\cdot)}:\mathcal{H}_\omega\to\mathcal{H}^k$诱导出一个自然的 L^2 内积：

$$H^k_\varphi(s,s'):=\int_X h^k(s,s')e^{-k\varphi}\omega^n,\quad s,s'\in H^0(X,L^k). \tag{1}$$

设 $\{e_j\}_{j=1,\dots,N_k}$ 是 $H^0(X,L^k)$ 关于该 Hilbert 范数的标准正交基，其中$N_k=\dim H^0(X,L^k)$。相应地，φ 的第 k 个 凯勒伯格曼核/伯格曼势/伯格曼测度 定义如下：

$$K^k_\varphi=\sum_{j=1}^{N_k}h^k(e_j,e_j)=\sup_{s\in H^0(X,L^k),\,H^k_\varphi(s,s)\leq 1}h^k(s,s), \tag{2}$$

$$P^k_\varphi:=\frac{1}{k}\log K^k_\varphi=\frac{1}{k}\log\left(\sum_{j=1}^{N_k}h^k(e_j,e_j)\right)=\sup_{s\in H^0(X,L^k),\,H^k_\varphi(s,s)\leq 1}\frac{1}{k}\log h^k(s,s). \tag{3}$$

$$M^k_\varphi:=\frac{(2\pi)^n}{k^n}K^k_\varphi e^{-k\varphi}\omega^n. \tag{4}$$

重要的是，$P^k_\varphi\in\mathcal{H}_\omega$，而第 k 个*Bergman*度量 $\omega_{P^k_\varphi}$是适当的射影嵌入将 X [45, Chapter 7.1]拉回所得的 Fubini–Study度量。因此，$\omega_{P^k_\varphi}$ 可视为一种代数凯勒度量。

凯勒几何中的一个核心主题可追溯到丘成桐提出的问题 [48], ，即利用 $\omega_{P_\varphi^k}$ 来逼近凯勒度量 ω_φ ，其中 $k\to\infty$。得益于田刚 [46], 的早期工作，以及 Bouche [13],、阮勇 [42],、Catlin [14], 、Zelditch [49], 和 Lu [35],的后续改进，我们知道

$$P_\varphi^k\to_{C^\infty}\varphi,\quad M_\varphi^k\to_{C^\infty}\omega_\varphi^n.$$

参见 [45, 第 7] 章的介绍。

但是，如果ω_φ 是非光滑/退化的凯勒度量，又能说些什么呢？对于来自霍尔德空间的势 $\varphi\in C^{m,\,\alpha}(X)$, 仍可用同样的方式定义 P_φ^k，自然会猜想，对于任意 $m'+\alpha'<m+\alpha$， $P_\varphi^k\to\varphi$ 在 $C^{m',\,\alpha'}$ 中成立。

由于凯勒量子化理论在很大程度上仍依赖于光滑势的渐近展开，关于霍尔德连续势的结果寥寥无几 φ （参见 [3, 36] 及其中的参考文献）。在田刚最初的结果中，他利用 φ[46], 的前五阶导数来控制$^{\omega_{P_\varphi^k}}$；据我们所知，后续研究并未对此作出实质性改进。事实上，根据 [22, 推论 1.2], 之后的讨论，使用目前可用的工具，若要控制伯格曼测度和势，需要 φ 至少六次（！）可微。

我们的第一个主要结果旨在具体解决这一点。我们证明，$^{\omega_{P_\varphi^k}}$ 上的上界和正下界只需利用 ω_φ上的上界和正下界即可得到。为陈述这一尖锐结果，我们考虑以下退化凯勒势空间：

$$\mathcal{H}_\omega^{1,\bar1}:=\{\varphi\in C^{1,\bar1}(X)\ \text{ s.t. }\ \omega_\varphi:=\omega+i\partial\bar\partial\varphi\ge0\ \text{ as currents}\}.$$

（ $C^{1,\,\bar1}$ 指的是其拉普拉斯算子，或等价地，其混合复导数，在全局上有界的函数。）

定理 1.1。 设 $\varphi\in\mathcal{H}^{1,\,\bar1}_\omega$满足 $0<a\omega\le\omega_\varphi\le A\omega$. 则存在正数 $C=C(X,\omega)$ 使得

$$\frac{a^{n+1}}{C(1+A^n)}\omega\le\omega_{P_\varphi^k}\le\frac{C(1+A^{n+1})}{a^n}\omega\quad\text{ for all }k\ge\frac{C}{a}. \tag{5}$$

特别地，对于任意 $\alpha\in(0,\ 1)$，$P_\varphi^k\to_{C^{1,\,\alpha}}\varphi$。

有了（5），$P_\varphi^k\to_{C^{1,\,\alpha}}\varphi$ 便由索伯列夫不等式 [33] 以及 Demailly 的 C^0收敛定理 [21], 推出，该定理指出，如果 $\varphi\in C^0(X)$且 $\omega_\varphi\ge a\omega>0$ ，那么 $P_\varphi^k\to\varphi$一致成立；其依据是 Ohsawa–Takegoshi延拓定理 [39] （或者也可以使用 [19, 定理 4.1]）。

我们论证中一个有趣的特点是，我们始终只处理对角线上的 Bergman 核。在前面提到的研究光滑情形的工作中，他们总是依赖于对角线外的 Bergman 核渐近展开（另见 [30], 将对角线外展开与托普利茨算子复合及其渐近行为联系起来）。若能像定理 1.1 那样得到高阶导数的类似估计，同时在整个过程中仍局限于对角线，也将很有意思。

1.2. 关于 $C^{1,\,\bar1}$ 局部 Bergman 势的估计。 紧 Kähler 情形中的结果将通过先证明局部情形中的相应定理来获得，而这些定理本身也具有独立的意义。

对于区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 和多次调和（psh）函数 $u\colon \Omega \to [-\infty,\infty)$，我们考虑（局部）*Bergman* 核

$$K_{\Omega,u}(z) = \sup\{|f(z)|^2 \colon f \in \mathcal{O}(\Omega),\ \int_\Omega |f|^2 e^{-u} d\lambda \le 1\}.$$

此函数始终光滑，且 $\log K_{\Omega,u}$ 是多重次调和的，自然诱导出一个正的 (1,1) 流 $i\partial\bar\partial \log K_{\Omega,u}$。当 Ω 和 u 有界时，此流成为一个光滑的 (1,1) 形式。它称为带权 u 的*Bergman*度量，其解释如下：

$$B^2_{\Omega,u}(z;v) := \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar\zeta}\Big|_{\zeta=0} \log K_{\Omega,u}(z+\zeta v) = \frac{\widetilde{K}_{\Omega,u}(z;v)}{K_{\Omega,u}(z)}, \tag{6}$$

其中 $z \in \Omega$、$v \in \mathbb{C}^n$ 和

$$\widetilde{K}_{\Omega,u}(z;v) := \sup\{|f'(z)\cdot v|^2 \colon f \in \mathcal{O}(\Omega),\ f(0)=0,\ \int_\Omega |f|^2 e^{-u} d\lambda \le 1\}.$$

这里我们使用了记号 $f'(z)\cdot v = \partial f(z) v = \frac{\partial}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} f(z+\zeta v)$。极值公式 (6) 众所周知；在无权情形下它归功于 Bergman，其证明可推广到一般情形（例如参见 [11,定理 2.7]）。

下面的定理给出了核 $K_{\Omega,u}$, $\widetilde{K}_{\Omega,u}$ 和度量 $B^2_{\Omega,u}$ 的若干界。

定理 1.2. 假设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$, $B_r := B(z,r) \Subset \Omega$ 中的一个有界伪凸域，其中某个 $z \in \Omega$ 以及 $r>0$, $v \in \mathbb{C}^n$ 满足条件，并且 u 在 Ω 中是多次调和的。那么存在 $C = C(n, r, \operatorname{diam}(\Omega))$ 使得

(i) 若 u 是 $C^{1,\bar1}(\overline{B_r})$，则

$$K_{\Omega,u}(z) \le C e^{u(z)} \max(1, \sup_{B_r} \Delta u)^n \quad \text{and} \quad \widetilde{K}_{\Omega,u}(z;v) \le C e^{u(z)} \max(1, \sup_{B_r} \Delta u)^{n+1} |v|^2. \tag{7}$$

(ii) 若 $(\partial_j \partial_{\bar k} u) \ge a(\delta_{jk})$ 在 B_r 中对某个 $a>0$ 成立，则

$$K_{\Omega,u}(z) \ge \frac{1}{C} e^{u(z)} a^n \quad \text{and} \quad \widetilde{K}_{\Omega,u}(z;v) \ge \frac{1}{C} e^{u(z)} a^{n+1} |v|^2. \tag{8}$$

(iii) 若以上条件均成立，则

$$\frac{a^{n+1}}{C \max(1, \sup_{B_r} \Delta u)^n} |v|^2 \le B^2_{\Omega,u}(z;v) \le \frac{C \max(1, \sup_{B_r} \Delta u)^{n+1}}{a^n} |v|^2.$$

(iii)中的估计是(6)以及(i)和(ii)中的估计的直接推论。条件 $(\partial_j\partial_{\bar k} u) \ge a(\delta_{jk})$ 对 $a>0$ 而言自然出现在多复变中，它仅仅意味着 φ 是强多次调和的。

式 (7) 中第一个估计的证明，本质上已包含在 [2,定理 2.1] 的论证中；作者在该论证中证明了某些 Bergman测度的弱收敛——我们将在下文的定理 1.4 中大幅推广这一结果。为完整起见，我们重述该论证。

式 (8) 中的界将采用第一作者在 [10]中发展的技巧获得。更准确地说，在定理 3.2 中，我们证明了一个最优的 Ohsawa–Takegoshi延拓定理 [39]，适用于具有给定横向导数且权函数为强拟次调和函数的全纯函数。式 (8) 中的第一个估计也可以由 [31, 推论 1.8], [38, 定理 4.1], [37,定理 1.1] 或 [34, 定理 1.2] 得到（不过请注意，下面的定理 3.2 将这些结果中的常数 π/α 改进到了最优值 $\pi(1-e^{-\alpha})/\alpha$）。

推论 1.3。 设 u 是有界伪凸域 中的 强拟次调和函数$\Omega \subset \mathbb{C}^n$。那么，由上述定理和 (6) 可知，*Levi* 形式 $i\partial\bar\partial u_k$ 在Ω中局部一致有界，既有上界也有下界，其中

$$u_k := \frac{1}{k}\log K_{\Omega,ku}$$

是对 u [21] 的 ***Demailly*** 逼近。因此 $u_k \to_{C^{1,\alpha}} u$, $\alpha \in (0,1)$。 □

回顾一下，若 u 仅为多次调和函数，则 $u_k \to u$ 逐点收敛且在 L^1_{loc} 中收敛。若它还连续，则 $u_k \to u$ 在局部一致收敛（见 [21], , 另见 [11]）；若 u 是 C^∞ 强多次调和函数，则 $u_k \to u$ 在 C^∞ 中收敛（见 [28]）。由于 Levi 形式 $i\partial\bar\partial u_k$ 弱收敛至 $i\partial\bar\partial u$, 这一推论表明定理 1.2(iii) 中的 估计必定是最优的。事实上， $i\partial\bar\partial u_k$ 有一致上界且有 正下界，当且仅当 $i\partial\bar\partial u$ 也满足同样的条件。很自然地会问，这两个最优界能否彼此独立。例如，若 u 是强多次调和函数，是否必然存在 一致正下界，使得 $i\partial\bar\partial u_k$? 同样， $i\partial\bar\partial u$ 有上界是否意味着 也有相应的一致上界？很自然地可以预期，这一上界对于建立 Mabuchi 空间中凯勒度量的弱测地线量子化的 $C^{1,\alpha}$-收敛是必要的；目前，这一点只在环面情形下得到证明 [40] （参见 [41, 15, 8, 43]。

1.3. 非极化拉东测度的凯勒量子化。 在凯勒量子化中，可以考虑的最一般的退化势空间是 ω-多次调和势空间：

$$\mathrm{PSH}_\omega := \{\varphi : X \to [-\infty,\infty) \ \text{ s.t. } \ \omega_\varphi \geq 0 \ \text{ as currents}\}$$

遗憾的是，由于 $\varphi \in \mathrm{PSH}\omega$ 可能具有正的 Lelong 数，式 (1) 中的内积 $H^k_\varphi(s,\ s')$ 对所有 $s,\ s' \in H^0(X,\ L^k)$ 并不都有意义。为了使式 (1) 始终有意义，我们需要要求对所有 k, $e^{-k\varphi}$ 都（局部）可积。Skoda [44] （另见 [24], 第 35 页）证明，若某个多次调和函数 u 在点 z 处的 Lelong 数小于 1，则 e^{-2u} 在 z 附近可积。这意味着，我们的要求等价于 φ 在每一点处的 Lelong 数都为零。

PSH_ω 的一个自然子类，是有望在其上开展凯勒量子化的空间 $\mathcal{E}_\omega \subset \mathrm{PSH}_\omega$，即全质量势空间。该空间由 Guedj 和 Zeriahi 在 [32] 中引入。回顾一下，若势 $\varphi \in \mathrm{PSH}_\omega$ 的非多极复 Monge–Ampère 测度满足

$$\int_X \omega_\varphi^n = \int_X \omega^n.$$

首先，由于势 $\varphi \in \mathcal{E}_\omega$的 Lelong 数为零，因此在此情形下，(2)、(3)、(4) 中的所有概念 K^k_φ、P^k_φ、 M^j_φ都有意义，从而可以进行量子化。其次，类 $\mathcal{E}_\omega$ 最重要的特点是，这一势空间是右端项为非极化Radon测度的 Calabi–Yau 问题的自然解空间。具体而言，若 ν 是 X 上的非极化 Radon测度，且满足 $\int_X \nu = \int_X \omega^n$ ，那么根据 [32, 25] ，存在唯一的 $\varphi_\nu \in \mathcal{E}$ 满足 $\int_X \varphi_\nu \omega^n = 0$ ，并且

$$\omega^n_{\varphi_\nu} = \nu.$$

因此，可以相应地引入第 k 级的光滑量子测度：

$$M^k_\nu := M^k_{\varphi_\nu}$$

自然会希望，当 k趋于无穷时，这些测度能够量子化测度 ν。我们的最后一个主要结果证实了这一点，它可以视为对经典 Bouche–Catlin–Lu–Tian–Ruan–Zelditch 定理 [13, 42, 14, 49, 35]的广泛推广：

定理 1.4。 若 ν 是定义在 X 上的非极化*Radon*测度，且满足 $\int_X \nu = \int_X \omega^n$，则当 $k \to \infty$时，$M^k_\nu \rightharpoonup \nu$弱收敛。

据我们所知，目前可得的此类最一般结果是 Berman–Witt Nyström [6]（参见 [7]）的结果，但它仅适用于 φ_ν 连续的情形。我们的第一个发现是，借助 [5] 中的其他思路，[6] 的论证同样适用于 φ_ν 仅有界（或具有有限能量）的情形。当然，$\mathcal{E}_\omega$ 中的典型元素既非有界，也不具有有限能量[32, 例 2.14]。这正是主要难点；我们通过将定理 3.2 的最优估计与 Berndtsson 量子比较原理的全质量版本 [9], 相结合，克服了这一难点，从而证明了定理 1.4。

若读者熟悉部分Bergman核与部分Bergman测度（如 [16, 20]中所述），则可对任意 $\varphi \in$ 多次调和ω定义 M^k_φ 。由 [20, 定理1.1], 可知，M^k_φ 弱收敛到 ω^n_φ 的一个必要条件是 φ 具有 $\mathcal{I}$-良好奇异型（在 [47]的意义下）。这是否也是充分条件是一个有趣的问题，我们将在续篇中回到这一问题。

1.4. **致谢**。 多年来，我们感谢Robert Berman、Bo Berndtsson、Dan Coman、Eleonora Di Nezza、Siarhei Finski、Yu-Chi Hou、László Lempert、Johannes Testorf、Mingchen Xia和Kewei Zhang就本文主题进行的讨论。本研究的大部分工作是在第一作者于2024/25学年访问马里兰大学期间完成的。他对那里的热情接待和富有启发的研究氛围深表感谢。第一作者部分得到国家科学中心（NCN）项目编号2023/51/B/ST1/01312的资助。第二作者部分得到西蒙斯研究员及美国国家科学基金会项目DMS-2405274的资助。

2. 预备知识

2.1. **局部 Bergman 核的比较**。 我们回顾一个关于区域 Ω 的 Bergman核以及包含于其中的球的 Bergman核的著名局部化结果。证明以标准方式使用赫尔曼德估计。

引理 2.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为有界伪凸域，且 u 在 Ω 上多次调和。假设$z_0 \in \Omega$，$v \in \mathbb{C}^n$ 且 $D_r(z_0) \Subset \Omega$，其中 $D_r(z_0)$ 是以 z_0为中心、半径为 r的球或多圆盘。存在 $C = C(n, r, \mathit{diam}(\Omega))$ 使得

$$K_{\Omega,u}(z_0) \le K_{D_r(z_0),u}(z_0) \le C K_{\Omega,u}(z_0), \tag{9}$$

$$\widetilde{K}_{\Omega,u}(z_0; v) \le \widetilde{K}_{D_r(z_0),u}(z_0; v) \le C \widetilde{K}_{\Omega,u}(z_0; v). \tag{10}$$

证明。 我们用 C 表示可能不同的、依赖于所需量的常数（后文也将沿用这一约定）。我们只证明 (9) 的估计，因为 (10) 的估计几乎可以同样论证。第一个不等式是显然的。为证明第二个不等式，我们可以假设 $z_0 = 0$, $D_r = D_r(0)$，并考虑带有 $\int_{D_r} |f|^2 e^{-u} d\lambda \le 1$的 $f \in \mathcal{O}(D_r)$。设$\rho \in C^\infty_c(D_r)$为截断函数，使得 $\rho|_{D_{r/2}} = 1$ 且 $|\nabla\rho| \le 10/r$。利用赫尔曼德的$\bar{\partial}$-估计，我们可以构造一个光滑函数 $\gamma \in C^\infty(\Omega)$，它求解 $\bar{\partial}\gamma = f\bar{\partial}\rho$ 并满足估计：

$$\int_\Omega |\gamma|^2 e^{-u-2n\log|z|}(1+|z|^2)^{-2} d\lambda \le \int_\Omega |\nabla\rho|^2 |f|^2 e^{-u-2n\log|z|} d\lambda \le C \int_{D_r} |f|^2 e^{-u} d\lambda \le C.$$

左侧积分的有限性意味着 $\gamma(0) = 0$，因此 $F := f\rho - \gamma \in \mathcal{O}(\Omega)$ 满足

$$F(0) = f(0) \quad \text{and} \quad \int_\Omega |F|^2 e^{-u} d\lambda \le C.$$

□

2.2. **局部 Bergman 核与 Kähler Bergman 核的比较**。在本小节中，设 (X,ω) 是一个紧致 Kähler 流形，其上带有一个正 Hermitian 线丛 (L,h)，其曲率为 $\Theta(h) = -i\partial\bar\partial \log h = \omega$。

我们首先给出 Kähler Bergman 度量的如下公式，它是 (6) 的 Kähler 类比。证明是标准的，并由局部情形推广而来（[11, 定理 2.7]）。

引理 2.2. 设 $\varphi \in \mathcal{E}_\omega$、$p \in X$ 和 $v \in T_pX$。我们有如下公式：

$$\omega_{P^k_\varphi}\big|_p(v,v) = \frac{\widetilde{K}^k_\varphi(p;v)}{kK^k_\varphi(p)}, \tag{11}$$

其中

$$\widetilde{K}^k_\varphi(p;v) = \sup_{s\in H^0(X,L^k),\ s(p)=0,\ H^k_\varphi(s,s)\le 1} h^k(\partial s_p(v),\partial s_p(v))$$

并且 $\partial s_p\colon T_pX \to L^k_p$ 是 s 在其临界点 p 处的“雅可比映射”。

证明. 设 $e_1,\dots,e_{N_k}$ 是 $H^0(X,L^k)$ 关于 H^k_φ 的一个标准正交基，使得对 $j\ge 2$ 有 $e_j(p) = 0$，且对 $j\ge 3$ 有 $\partial(e_j)_p(v) = 0$。我们考虑 p 附近的一个坐标图 U。在该坐标图中，我们可以将 $e_j|_U$ 视为全纯函数，而 $h|_U$ 是一个取正值的函数。利用 (2)，我们得到

$$\omega_{P^k_\varphi}|_U = \frac{i}{k}\partial\bar\partial\Big(\sum_{j=1}^{N_k}|e_j|^2\Big)$$

限制到值 p 并代入向量 $v\in T_pX$：

$$\omega_{P^k_\varphi}|_p(v,v) = \frac{1}{k}\frac{|\frac{\partial e_1}{\partial v}(p)|^2}{|e_0(p)|^2} = \frac{1}{k}\frac{h^k((\partial e_1)_p(v),(\partial e_1)_p(v))}{K^k_\varphi(p)}, \tag{12}$$

其中在最后一步，我们将分子和分母都乘以 h^k。这立即表明，右端大于等于（11）式的左端。反过来，令 $s\in H^0(X,L^k)$，其中 $H^k_\varphi(s,s)\le 1$ 且 $s(p) = 0$。利用上述标准正交基，我们可以写成 $s = \sum_{j=2}^{N_k} s_je_j$，其中 $\sum_{j=2}^{N_k}|s_j|^2\le 1$。于是

$$\frac{1}{k}h^k(\partial s_p(v),\partial s_p(v)) = |s_1|^2\frac{1}{k}h^k(\partial(e_1)_p(v),\partial(e_1)_p(v)) \le \frac{1}{k}h^k(\partial(e_1)_p(v),\partial(e_1)_p(v)).$$

将此不等式除以 $h^k(e_0(p)\ e_0(p))$，并与（12）式比较后，我们得到（11）式的左端大于等于右端。□

引理 2.1 的证明依赖于这样一个事实：平凡线丛在 $\mathbb{C}^n$ 中的区域上具有正曲率。在一般的复流形上，情况不再如此。尽管如此，仍可将引理 2.1 的一个变体推广到流形上，这将在凯勒量子化的背景下发挥重要作用：

引理 2.3. 假设 $\varphi\in\mathcal{E}_\omega$ 满足 $\omega_\varphi \ge a\omega$，其中某个 $a>0$。固定 $p\in X$，并令 $P(p,3)\subset X$ 为一个（多）半径为3、以 p 为中心的坐标多圆盘，使得 $h|_{P(p,3)} = e^{-g}$，其中某个 $g\in C^\infty(P(p,3))$。那么存在一个正数常数 C，它依赖于该坐标多圆盘和 ω，使得对任意 $k\ge C/a$ 及 $z\in P(p,1)$，在 z 处，*Kähler* 核与局部 *Bergman* 核之间满足以下估计：

$$K^k_\varphi(z) \le K_{P(z,1),k\varphi+kg-\log(\det(2\omega))}(z)e^{-kg(z)} \le \Big(1+\frac{C}{(ka)^{1/2}}\Big)K^k_\varphi(z), \tag{13}$$

$$\widetilde{K}_{\varphi}^{k}(z;v) \le \widetilde{K}_{P(z,1),k\varphi+kg-\log(\det(2\omega))}(z,v)e^{-kg(z)} \le \left(1+\frac{C}{(ka)^{1/2}}\right)\widetilde{K}_{\varphi}^{k}(z;v), \tag{14}$$

其中 $\det(2\omega)$ 是厄米矩阵 $2\partial_j\partial_{\bar{k}}g$ 和 $v \in T_zX$ 的行列式。

证明。 我们只证明（13）中的不等式，因为（14）的论证几乎相同。设 $f \in H^0(X,\ L^k)$。那么，$f|_{P(z,\ 1)} \in \mathcal{O}(P(z,\ 1))\ \simeq H^0(P(z,\ 1)\ L^k)$，并且有如下不等式

$$\int_{P(z,1)} |f|^2 e^{-k(g+\varphi)+\log(\det(2\omega))}d\lambda = \int_{P(z,1)} h^k(f,f)e^{-k\varphi}\omega^n \le \int_X h^k(f,f)e^{-k\varphi}\omega^n.$$

这就得到了（13）中的第一个不等式。

对于另一个不等式，我们考虑满足估计条件 $f \in \mathcal{O}(P(z,1))\ \simeq H^0(P(z,1)\ L^k)\int_{P(z,1)}$ $|f|^2e^{-k(g+\varphi)+\log(\det(2\omega))}d\lambda \le 1$。与局部情形一样，我们找到一个适当的截断函数$\rho \in C_c^\infty(P(z,$ 1))，使其在 $P(z,1/2)$ 上等于 1，并试图找到一个光滑截面 $\gamma \in C^\infty(X,L^k)$，满足$\bar{\partial}\gamma = f\bar{\partial}\rho$，使得 $\gamma(z) = 0$ 且 $\int_X h^k(\gamma,\gamma)e^{-k\varphi}\omega^n$ 可控。为此，我们选取足够大的 k，使得在 $P(z,1)$ 上有 $k\omega_\varphi - i\partial\bar{\partial}(\log(\det(2\omega)) + 2n\rho\log\ |\cdot - z|) > \frac{ka}{2}\omega$。这对 $k \ge C/a$ 是可行的。

我们对丛 $L^k = (L^k \otimes K_X^*)$ 应用 Hörmander定理 $\otimes K_X$ [24, 推论 5.3],，并在必要时增大 C，得到:

$$\begin{aligned}\int_X h^k(\gamma,\gamma)e^{-k\varphi}\omega^n &\le \int_X h^k(\gamma,\gamma)e^{-k\varphi-\rho\log|\cdot-z|^{2n}}\omega^n \le \frac{2}{ka}\int_X |\nabla^\omega\rho|_\omega^2 h^k(f,f)e^{-k\varphi-\rho\log|\cdot-z|^{2n}}\omega^n \\ &\le \frac{C}{ka}\int_{P(z,1)} h^k(f,f)e^{-k\varphi}\omega^n \le \frac{C}{ka}.\end{aligned}$$

这意味着 $F = \rho f - \gamma \in H^0(X,\ L^k)$、 $F(z) = f(z)$，并且

$$\int_X h^k(F,F)e^{-k\varphi}\omega^n \le \left(1+\left(\frac{C}{ka}\right)^{1/2}\right)^2.$$

由于当 k 足够大时，$(C/ka)^{1/2}$ 支配 C/ka，因此得到估计 (13)。 □

2.3. **Berndtsson量子化比较原理**。我们将需要 Berndtsson量子化比较原理的全质量版本 [9, 定理 1.1]。由于原始表述采用了略有不同的假设，我们也附上一个简要论证:

定理 2.4. 设 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{E}_\omega$。则

$$\int_{\{\psi\le\varphi\}} M_\varphi^k \le \int_{\{\psi\le\varphi\}} M_\psi^k. \tag{15}$$

证明。由于在 X 上 $\psi \le \max(\varphi,\ \psi)$，且在集合 $\{\psi \ge \varphi\}$ 上 $\psi = \max(\varphi,\ \psi)$，我们注意到

$$\mathbb{1}_{\{\psi\ge\varphi\}} M_\psi^k \le \mathbb{1}_{\{\psi\ge\varphi\}} M_{\max(\varphi,\psi)}^k. \tag{16}$$

对上述测度积分，在集合 $\{\psi > \varphi\}$ 上，由总质量相等可得 t

$$\int_{\{\psi\le\varphi\}} M_\psi^k \ge \int_{\{\psi\le\varphi\}} M_{\max(\varphi,\psi)}^k.$$

利用对称性，(16) 还给出:

$$\mathbb{1}_{\{\psi\le\varphi\}} M_\varphi^k \le \mathbb{1}_{\{\psi\le\varphi\}} M_{\max(\varphi,\psi)}^k.$$

对该不等式积分并将其与前一个不等式结合，即得（15）。 □

上述论证成立的唯一要求是， $H^k_\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 和 $H^k_\psi(\cdot,\ \cdot)$ 在 $H^0(X,\ L^k)$ 上有定义。因此，假设 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{E}_\omega$ 可以进一步放宽为 Lelong 数为零的 ω-多次调和函数。

3. $C^{1,\bar{1}}$ 伯格曼势的估计

3.1. **局部情形**。

定理 *1.2* 的证明。 我们从定理 2.1]中提取论证，证明 (7) 中的第一个估计。或许令人惊讶的是，只需要用到 u的次调和性。对于 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^2 e^{-u} d\lambda &\geq \int_{B_r} |f|^2 e^{-u} d\lambda = \int_0^r \int_{\partial B_\rho} |f|^2 e^{-u} d\sigma\, d\rho \\ &\geq \int_0^r |\partial B_\rho| \exp\left(\frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{\partial B_\rho} (\log|f|^2 - u) d\sigma\right) d\rho \\ &\geq |f(z)|^2 \int_0^r |\partial B_\rho| \exp\left(-\frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{\partial B_\rho} u d\sigma\right) d\rho,\end{aligned} \tag{17}$$

其中，第二个不等式由詹森不等式得出，第三个不等式则源于 $\log\ |f|^2$ 的次调和性。因此

$$K_{\Omega,u}(z) \leq K_{B_r,u}(z) \leq \left(\int_0^r |\partial B_\rho| \exp\left(-\frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{\partial B_\rho} u d\sigma\right) d\rho\right)^{-1}.$$

若对于某个 $A \geq 1,\ \Delta u \leq 4nA$ 成立，则 $u - A|\cdot - z|^2$ 是超调和的，因此

$$\frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{\partial B_\rho} u d\sigma \leq u(z) + A\rho^2. \tag{18}$$

我们得到

$$K_{\Omega,u}(z) \leq e^{u(z)}\left(2n\omega_{2n}\int_0^r \rho^{2n-1} e^{-A\rho^2} d\rho\right)^{-1} = e^{u(z)} A^n \left(n\omega_{2n}\int_0^{Ar^2} s^{n-1} e^{-s} ds\right)^{-1},$$

其中， ω_k 表示 $\mathbb{R}^k$中单位球的体积。这给出了式 (7) 的第一个估计。

为证明式 (7) 的第二个估计，我们需要以下引理：

引理 3.1. 设 $f \in \mathcal{O}(B_r)$，其中 $B_r = B(0,r)$，且 $f(0) = 0$和 $\partial f(0) \neq 0$。那么，存在某个维数常数 $C_n > 0$ 使得

$$\int_{\partial B_\rho} \log|f|^2 d\sigma_\rho - \log\rho^2 \geq \sup_{|v|=1} \log\left(C_n|\partial f(0)\cdot v|^2\right),\quad \rho \in (0,r).$$

这里， $d\sigma_\rho$ 是 $\partial B(0,\rho)$上的标准表面积概率测度。当 $n = 1$时，该结果直接由 $\log\ |f(z)|/|z|$ 在圆盘 $P(0,r)$ 上是次调和函数，以及在此情形下的 $C_1 = 1$ 得出。

证明。经过正交变量变换后，我们可以假设 $\partial f(0) = \lambda dz_1$，其中 $\lambda = |\partial f(0)| = \sup_{||v||=1} |\partial f(0)(v)|$。固定 $\rho \in (0,r)$。暂时固定 $v \in \partial B_\rho$。利用证明前关于单变量函数 $\xi \to \log\ |f(\xi v)|^2/|\xi v|^2$ 的观察，可得

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \log\frac{|f(\xi v)|^2}{|\xi v|^2} dV(\xi) \geq \log\left|\partial f(0)\frac{v}{|v|}\right|^2 = 2\log|\lambda| + 2\log\frac{|v_1|}{|v|},$$

其中 $\mathbb{D}$ 是单位圆盘。现在我们对两边关于 $d\sigma_\rho(v)$ $v \in \partial B_\rho$ 积分，得到

$$\int_{\partial B_\rho}\int_{\partial\mathbb{D}} \log\frac{|f(\xi v)|^2}{|\xi v|^2} dV(\xi)d\sigma_\rho(v) \geq 2\log|\lambda| + 2\int_{\partial B_\rho} \log\frac{|v_1|}{|v|} d\sigma_\rho(v).$$

对左端使用富比尼定理，并对右端作变量替换，我们得到

$$\int_{\partial B_\rho} \log|f(z)|^2 d\sigma_\rho - \log\rho^2 \geq 2\log|\lambda| + 2\int_{\partial B_1} \log|v_1| d\sigma_1(v) = \log\big(C_n|\partial f(0)|^2\big).$$

□

定理 *1.2* 的证明（续）取满足 $f(z) = 0$ 的 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$。我们可以假设 $z = 0$ 与$\|v\| = 1$。在 (17) 的不等式中使用引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^2 e^{-u} d\lambda &\geq \int_{B_r} |f|^2 e^{-u} d\lambda = \int_0^r \int_{\partial B_\rho} |f|^2 e^{-u} d\sigma\, d\rho \\ &\geq \int_0^r |\partial B_\rho| \exp\left(\frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{\partial B_\rho} (\log|f|^2 - u) d\sigma\right) d\rho \\ &\geq C_n|\partial f(0)\cdot v|^2 \int_0^r \rho^2 |\partial B_\rho| \exp\left(-\frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{\partial B_\rho} u d\sigma\right) d\rho.\end{aligned}$$

现在与前面类似地使用 (18)，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{\Omega,u}(z;v) &\leq \frac{1}{C_n}\left(\int_0^r \rho^2 |\partial B_\rho| \exp\left(-\frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{\partial B_\rho} u d\sigma\right) d\rho\right)^{-1} \\ &\leq \frac{e^{u(z)} A^{n+1}}{C_n}\left(n\omega_{2n}\int_0^{Ar^2} s^{n+1} e^{-s} ds\right)^{-1}.\end{aligned}$$

这就给出了 (7) 中的第二个估计。

(ii) 引理 2.1 蕴含

$$K_{\Omega,u}(z) \geq \frac{1}{C} K_{B_r,u}(z), \qquad \widetilde{K}_{\Omega,u}(z;v) \geq \frac{1}{C}\widetilde{K}_{B_r,u}(z;v)$$

对于某个 $C = C(n, r, \mathrm{diam}(\Omega))$。经过仿射变换后，我们可以假设$z = 0$, $v = (0,\ldots,0,1)$。

式 (8) 的估计将由以下版本的大泽–竹腰定理推出：第一个估计可通过对 $m = 0$ 使用该定理 n 次得到，第二个估计则可通过对 $m = 1$ 使用一次、对 $m = 0$ 使用 $n - 1$ 次得到（见下文针对单位多圆盘陈述的推论 3.4）。

定理 3.2. 假设Ω 在 $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{D}$ 中是伪凸的，且 $u - a|z_n|^2$ 在Ω 中对某个$a \geq 0$是多次调和的。则对每个 $f \in \mathcal{O}(\Omega')$，其中$\Omega' = \Omega \cap \{z_n = 0\}$，以及 $m = 0$、1、2、.....，可以找到$F \in \mathcal{O}(\Omega)$，使得对 $z' \in \Omega'$，

$$\frac{\partial^j F}{\partial z_n^j}(z', 0) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^m F}{\partial z_n^m}(z', 0) = m! f(z') \tag{20}$$

and

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-u} d\lambda \le C_a \int_{\Omega'} |f|^2 e^{-u} d\lambda,$$

其中

$$C_a = \int_{\mathbb{D}} |\zeta|^{2m} e^{-a|\zeta|^2} d\lambda = \frac{\pi}{a^{m+1}} \int_0^a \rho^m e^{-\rho} d\rho. \tag{21}$$

注 3.3. 由于其中的上确界

$$K^{(m)}_{\mathbb{D},a|\zeta|^2}(0) = \sup\left\{ \frac{|f^{(m)}(0)|^2}{\int_{\mathbb{D}} |f|^2 e^{-a|\zeta|^2} d\lambda} \colon f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}),\ f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0 \right\}$$

在 $f = \zeta^m$处取得，我们看到定理 3.2 中的常数对于每个 $a \ge 0$ 和$m = 0,1,2,\ldots$都是最优的

推论 3.4. 假设 $u - a|z|^2$ 在单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 内是多次调和的，其中某个 $a \ge 0$成立。那么对于 $v = (1, 0, \ldots, 0)$，我们有：

$$K_{\mathbb{D}^n,u}(0) \ge \frac{a^n}{\pi^n (1 - e^{-a})^n} e^{u(0)} \ge \frac{a^n}{\pi^n} e^{u(0)},$$
$$\widetilde{K}_{\mathbb{D}^n,u}(0; v) \ge \frac{a^{n+1}}{\pi^n (1 - e^{-a})^n} e^{u(0)} \ge \frac{a^{n+1}}{\pi^n} e^{u(0)}.$$

¯定理 3.2 将用 [10]中提出的方法证明。我们将使用其中如下的 ∂-估计：

定理 3.5. 设 $\alpha \in L^2_{loc,(0,1)}(\Omega)$ 是伪凸域 Ω 中 $\mathbb{C}^n$上的一个 $\bar\partial$-闭形式。假设 φ 在 Ω内是多次调和的，$\psi \in W^1_{,loc}{}^2(\Omega)$ 局部有上界，且它们满足 $|\bar\partial\psi|^2_{i\partial\bar\partial\varphi} \le H$，其中 $H \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ 满足：$H < 1$ 在 Ω 内，且 $H \le \delta < 1$ 在 $\operatorname{supp}\alpha$上。那么存在$U \in L^2_{loc}(\Omega)$，使其满足 $\bar\partial U = \alpha$，并且

$$\int_\Omega |U|^2 (1 - H) e^{2\psi - \varphi} d\lambda \le \frac{1 + \sqrt{\delta}}{1 - \sqrt{\delta}} \int_\Omega |\alpha|^2_{i\partial\bar\partial\varphi} e^{2\psi - \varphi} d\lambda. \tag{22}$$

定理 *3.2* 的证明。通过逼近，我们可以假设 Ω 有界且光滑，φ 光滑且强多次调和，并且 f 在 Ω′ 附近有定义。

对于充分小的 $\varepsilon > 0$，我们选取 $\chi = \chi_\varepsilon \in C^{0,1}([-\infty, 0])$，使得 $\chi(-\infty) = 1$ 且 $\chi(t) = 0$对于 $t \ge t_\varepsilon$：$= 2\log\ \varepsilon$。则

$$\alpha = \bar\partial\big(f(z') z_n^m \chi(2\log|z_n|)\big) = \frac{f(z') z_n^m \chi'(2\log|z_n|)}{\bar z_n} d\bar z_n$$

在 Ω 和 $\operatorname{supp}\alpha \subset \{|z_n \le \varepsilon\} = \{t \le t_\varepsilon\}$ 中是良定义的，其中我们使用记号 $t = 2\log\ |z_n|$。我们将把定理 3.5 应用于这个 α 以及权

$$\varphi = 2(m+1)\log|z_n| + h(2\log|z_n|) + u - a|z_n|^2$$
$$\psi = g(2\log|z_n|),$$

其中，$h = h_\varepsilon \in C^{1,1}((-\infty, 0])$ 以及 $h' \ge 0$、$h'' \ge 0$ 和 $g = g_\varepsilon \in C^{0,1}((-\infty, 0])$ 将在后文确定。我们有

$$|\bar\partial\psi|^2_{i\partial\bar\partial\varphi} \le \frac{(g'(2\log|z_n|))^2}{h''(2\log|z_n|)} =: H$$

and

$$|\alpha|^2_{i\partial\bar\partial\widetilde\varphi} \le \frac{|f(z')|^2|z_n|^{2m}(\chi'(2\log|z_n|))^2}{h''(2\log|z_n|)}. \tag{23}$$

在 $\{t > t_\varepsilon\}$ 上，函数 h, g 将以如下方式定义：

$$e^{-u} = (1-H)e^{2\psi-\varphi}.$$

这等价于

$$\left(1 - \frac{(g')^2}{h''}\right) e^{2g-h-(m+1)t+ae^t} = 1. \tag{24}$$

从 [10] 得到的经验之一是，为了处理（24），可以使用代换 $g = \log h'$。于是（24）变为

$$(e^{-h})'' = e^{(m+1)t-ae^t}.$$

我们选择由下式给出的解 h_0， g_0

$$e^{-h_0(t)} = \int_t^0 \int_x^0 e^{(m+1)y-ae^y}\,dy\,dx, \qquad g_0 = \log h_0'. \tag{25}$$

为后文使用，注意到

$$h_0'(t_\varepsilon)e^{-h_0(t_\varepsilon)} = -(e^{-h_0})'(t_\varepsilon) = \int_{t_\varepsilon}^0 e^{(m+1)y-ae^y}dy = \frac{1}{a^{m+1}}\int_{a\varepsilon^2}^a \rho^m e^{-\rho}d\rho. \tag{26}$$

在 $\{t > t_\varepsilon\}$ 上，我们通过 h_0， g_0定义 h， g。

在 $\{t \le t_\varepsilon\}$ 上，它们的定义方式使得 $H = (g')^2/h'' = \varepsilon$ 且 $g = h + const$。这些条件实际上确定了它们：

$$h(t) := \begin{cases} -\varepsilon\log(A + t_\varepsilon - t) + B, & t \le t_\varepsilon, \\ h_0(t), & t > t_\varepsilon, \end{cases}$$

$$g(t) := \begin{cases} -\varepsilon\log(A + t_\varepsilon - t) + \widetilde B, & t \le t_\varepsilon, \\ g_0(t), & t > t_\varepsilon. \end{cases}$$

由于 $h \in C^{1,1}$, $g \in C^{0,1}$，这些常数由下式确定：

$$h_0(t_\varepsilon) = -\varepsilon\log A + B, \quad h_0'(t_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{A}, \quad g_0(t_\varepsilon) = -\varepsilon\log A + \widetilde B. \tag{27}$$

回顾一下， α 的支集包含在 $\{|z_n| \le \varepsilon\}$ 内。因此，由于 (23)，当 $\varepsilon \to 0$ 时，(22) 右端的上极限由下式控制：

$$\widetilde C \int_{\Omega'} |f|^2 e^{-u} d\lambda,$$

其中，常数 $\widetilde C$ 是在进行变量代换 $t = \log|z_n|^2$ 后，并利用极坐标计算下列积分得出的：

$$\begin{aligned} \widetilde C &= \pi \limsup_{\varepsilon\to0} \frac{1+\sqrt\varepsilon}{1-\sqrt\varepsilon} \int_{\{|z_n|\le\varepsilon\}} \frac{(\chi'(\log|z_n|^2))^2}{h''(\log|z_n|^2)|z_n|^2} e^{2g((\log|z_n|^2))-h(\log|z_n|^2)+ae^{\log|z_n|^2}} dV(z_n) \\ &= \pi \limsup_{\varepsilon\to0} \frac{1+\sqrt\varepsilon}{1-\sqrt\varepsilon} \int_{-\infty}^{t_\varepsilon} \frac{(\chi')^2}{h''} e^{2g-h+ae^t} dt \\ &= \pi \limsup_{\varepsilon\to0} \frac{e^{2\widetilde B - B}}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{t_\varepsilon} (\chi')^2 (A + t_\varepsilon - t)^{2-\varepsilon} dt \end{aligned} .$$

现在我们选取 χ 的一个特定取值，使得当 $t \geq t_\varepsilon$ 时， $\chi(-\infty) = 1$、 $\chi(t) = 0$ ，并且

$$\chi'(t) = -\frac{1}{\int_{-\infty}^{t_\varepsilon}(A + t_\varepsilon - l)^{\varepsilon-2}dl}(A + t_\varepsilon - t)^{\varepsilon-2}, \quad t \leq t_\varepsilon.$$

对于这样的 χ，我们将得到

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= \pi \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{2\widetilde{B}-B}}{\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{t_\varepsilon}(A + t_\varepsilon - t)^{\varepsilon-2}dt\right)^{-1} \\ &= \pi \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{A^{1-\varepsilon}e^{2\widetilde{B}-B}}{\varepsilon} \\ &= \pi \limsup_{\varepsilon\to 0} e^{2g_0(t_\varepsilon)-h_0(t_\varepsilon)-\log h_0'(t_\varepsilon)} \\ &= \pi \limsup_{\varepsilon\to 0} h_0'(t_\varepsilon)e^{-h_0(t_\varepsilon)} \\ &= C_a\end{aligned}$$

由 (27)、(25) 和 (26) 得到，其中 C_a 由 (21) 给出。

¯因此，若 $U := U_\varepsilon$ 是由定理 3.5 给出的 $\partial U = \alpha$ 的解，那么 $F = F_\varepsilon = fz_n^m\chi - U \in \mathcal{O}(\Omega)$。由于在 Ω' 附近有 $(1 - H)e^{2\psi-\varphi} \geq const|z_n|^{-2(m+1)}(-\log |z_n|)^{-\varepsilon}$，所以可知 U在 Ω' 上消失到 m阶，从而得到 (19) 和 (20)。

由于 F_ε 的 L^2 积分在 Ω 的紧子集上有界， F_ε 在 Ω 中局部一致有界，因此它存在一个子列收敛到 Ω 中的全纯函数，并满足所需估计。□

3.2. **紧 Kähler 情形**。现在我们证明 Kähler 量化的类似估计。在本小节中，设 (X, ω) 是一个紧致 Kähler 流形，并令 (L, h) 表示 ¯上的一个正 Hermitian 线丛，其曲率形式满足 $\Theta(h) = -i\partial\bar\partial \log h = \omega$。

定理 3.6。 设 $\varphi \in \mathcal{E}_\omega$ 以及 $v \in T_zX$、 $z \in X$。存在常数 $C = C(X, \omega)$ ，使得以下结论成立

(*i*) 若 $\varphi \in C^{1,\bar1}(X)$ 则对所有 $k \geq 1$ 均有

$$K_\varphi^k \leq Ce^{k\varphi}k^n(1 + \sup_X |\Delta\varphi|^n),$$

$$\widetilde{K}_\varphi^k(z; v) \leq Ce^{k\varphi}k^{n+1}(1 + \sup_X |\Delta\varphi|^{n+1})\omega(v, v).$$

(*ii*) 若 $\omega_\varphi \geq a\omega > 0$ ，则对所有 $k \geq \frac{C}{a}$ 均有：

$$K_\varphi^k \geq \frac{1}{C}e^{k\varphi}a^nk^n,$$

$$\widetilde{K}_\varphi^k(z; v) \geq \frac{1}{C}e^{k\varphi}a^{n+1}k^{n+1}\omega(v, v).$$

证明。 (i) 和 (ii) 中的估计都直接由定理 1.2 和引理 2.3 得出。事实上，由于 X的紧性，引理 2.3 对所有 $z \in X$、 $v \in T_zX$均适用。还需注意， (i) 中使用的不等式 (13) 和 (14) 中的第一组不等式不需要假设 $\omega_\varphi \geq a\omega$。□

利用 (11) ，我们现在得到定理 1.1。

4. Monge–Ampère能量的量子化

我们先回顾一下 [26, 27] 中与 Monge–Ampère能量及其量子版本相关的一些概念。用 $\mathcal{H}^k$ 表示$H^0(X,\ L^k)$上正定Hermitian形式的空间，并用 $I_k:\ \mathcal{H}^k \to \mathbb{R}$ 表示量子Monge–Ampère能量：

$$I_k(G) = -\frac{(2\pi)^n}{k^{n+1}}\big(\log\det G - \log\det H_0^k\big),$$

与 [26, 27], 相比，我们的表达式包含一个额外的 $(2\pi)^n$因子。这一差异源于我们对归一化的选择

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_k}{k^n} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_X \omega^n =: \frac{V}{(2\pi)^n},$$

其中 $N_k = \dim H^0(X,\ L^k)$。按照 $I:\ \mathrm{PSH}_\omega \cap L^\infty \to \mathbb{R}$，我们将 Monge–Ampère能量定义为：

$$I(\varphi) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\int_X \varphi\omega_\varphi^j \wedge \omega^{n-j}.$$

这是一个单调泛函，即 $\psi \le \varphi$ 蕴含 $I(\psi) \le I(\varphi)$，从而可以将 I 的定义扩展到 PSH_ω：

$$I(\psi) = \inf_{\varphi\in\mathrm{PSH}_\omega\cap L^\infty,\psi\le\varphi} I(\varphi).$$

自然地，$I(\varphi) = \infty$ 对于某个 φ成立，我们将 $\mathcal{E}^1_\omega$ ——有限能量势的空间——记为 I的有限值域：

$$\mathcal{E}^1_\omega := \{\varphi \in \mathrm{PSH}_\omega \ \text{ s.t. } \ I(\varphi) > -\infty\}.$$

这是一个相当标准的结果：$\mathcal{E}^1_\omega \subset \mathcal{E}_\omega$ [32]。

文献 [5, 定理3.5] 中证明了（将Donaldson在光滑情形下的结果推广，参见 [4]），I_k 通过Hilbert映射 $\mathcal{E}^1_\omega \to \mathcal{H}^k$（回顾式(1)）在 $\mathcal{E}^1_\omega$ 上量化了 I：

命题4.1 ([5])**.** 对于任意 $\varphi \in \mathcal{E}^1_\omega$，有 $\lim_{k\to\infty} I_k(H^k_\varphi) = I(\varphi)$。

我们还需要以下这一命题的扰动版本，其渊源可追溯至 [6]:

命题 4.2。设 $\varphi \in \mathcal{E}^1_\omega$且 $f \in C^\infty(X)$。则 $I_k(H^k_{\varphi+f}) \to I(P(\varphi+f))$。

在上述陈述中，$P(\chi)$表示准拟次调和函数 χ的包络：

$$P(\chi) := \sup\{\varphi \in \mathrm{PSH}_\omega,\ \ \varphi \le \chi\}. \tag{28}$$

证明。取 $u_l \in \mathcal{H}_\omega$，满足 $u_l \searrow u$ [12]。我们有 $P(\varphi+f) \le \varphi+f \le \varphi_l+f$，因此由 H^k 和 I_k 的单调性可得

$$H^k_{P(\varphi+f)} \ge H^k_{\varphi+f} \ge H^k_{\varphi_l+f} \tag{29}$$

（作为厄米形式）以及

$$I_k(H^k_{P(\varphi+f)}) \le I_k(H^k_{\varphi+f}) \le I_k(H^k_{\varphi_l+f}). \tag{30}$$

令 $k\to\infty$ 代入 (30)，并使用 [4, 定理 A] 以及命题 4.1，可得

$$I(P(\varphi+f)) \le \liminf_{k\to\infty} I_k(H^k_{\varphi+f}) \le \limsup_{k\to\infty} I_k(H^k_{\varphi+f}) \le I(P(\varphi_l+f)).$$

令 $l\to\infty$，由于 $I(P(\varphi_l+f)) \searrow I(P(\varphi+f))$，我们得到所需结果。 □

证明定理 1.4 的第一步是考虑有限能量函数的情形：

定理 4.3. 假设 $\varphi \in \mathcal{E}^1_\omega$。那么 $M^k_\varphi \to \omega^n_\varphi$ 弱收敛。

论证遵循 [6] 中建立的框架。文中论证了，对于任意 $\varphi \in \mathcal{H}_\omega$ 和 $f \in C^\infty(X)$，映射 $\mathbb{R} \ni t \to I_k(H^k_{\varphi+tf}) \in \mathbb{R}$ 是凹函数。由于 $\mathcal{E}^1_\omega$ 的势的 Lelong 数均为零，且可由 $\mathcal{H}_\omega$ 中的元素递减逼近，因此对于任意 $\varphi \in \mathcal{E}^1_\omega$，$t \to I_k(H^k_{\varphi+tf})$ 实际上是凹函数。利用初等论证可以证明，映射 $t \to I(P(\varphi+tf))$ 也是凹函数，因为 I [32] 也是凹函数。

关于这些映射的导数，经过简单计算并结合 [4]（综述见[18,命题 4.32]），可得

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I_k(H^k_{\varphi+tf}) = \int_X f M^k_\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I(P(\varphi+tf)) = \int_X f\omega^n_\varphi \tag{31}$$

定理 4.3 的证明。 令 $f \in C^\infty(X)$。由命题 4.2 $I_k(H^k_{\varphi+tf})$，对任意$t \in \mathbb{R}$，有 $\to I(P(\varphi+tf))$。现在我们断言 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} I_k(H^k_{\varphi+tf}) \to \frac{d}{dt}\big|_{t=0} I(P(\varphi+tf))$。利用（31）即可完成证明。

利用凹性，对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\frac{I_k(H^k_{\varphi+\varepsilon f}) - I_k(H^k_\varphi)}{\varepsilon} \le \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I_k(H^k_{\varphi+tf}) \le \frac{I_k(H^k_{\varphi-\varepsilon f}) - I_k(H^k_\varphi)}{-\varepsilon}.$$

由命题 4.2

$$\begin{aligned}\frac{I(P(\varphi+\varepsilon f)) - I(\varphi)}{\varepsilon} &\le \liminf_{k\to\infty} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I_k(H^k_{\varphi+tf}) \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} I_k(H^k_{\varphi+tf}) \le \frac{I(P(\varphi-\varepsilon f)) - I(\varphi)}{-\varepsilon}.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，并利用（31），即可完成证明。 □

5. Radon 测度的量子化

我们首先给出一个由引理 2.3 和推论 3.4 得出的结果。它可以视为不等式 $\omega^n_\varphi \ge a^n\omega^n$ 的量子类比，该不等式在 $\omega_\varphi \ge a\,\omega$ 时成立。

命题 5.1. 假设 $\varphi \in \mathcal{E}_\omega$ 满足：对某个 $a > 0$，有 $\omega_\varphi \ge a\omega$。那么存在某个 $\varepsilon_k = \varepsilon_k(a,\omega) \searrow 0$，使得

$$M^k_\varphi \ge (1-\varepsilon_k)a^n\omega^n.$$

证明。 令 $p \in X$ 和 $\varepsilon > 0$。通过对 p 处正规坐标的各分量进行缩放，存在一个坐标多圆盘 $P(p,3)$，使得对某个 $\beta > 0$，有 $\omega(p) = \beta i\partial\bar\partial|z|^2\big|_p$，并且

$$(1-\varepsilon)\beta i\partial\bar\partial|z|^2 \le \omega \le (1+\varepsilon)\beta i\partial\bar\partial|z|^2$$

在 $P(p,3)$ 中（稍微不严谨地说，我们将坐标多圆盘 $P(p,3)$ 视为同时属于 $\mathbb{C}^n$ 和 X 的一个 $^-$ 子集）。我们还可以假设对某个 $g \in C^\infty(P(p,3))$，有 $\omega|_{P(p,3)} = i\partial\partial g$。因此，存在 k_0，它取决于 ε、a、ω 以及我们的坐标多圆盘 $P(p,3)$，使得在 $P(p,2)$ 上，对 $k \ge k_0$

$$i\partial\bar\partial(g+\varphi-\frac{1}{k}\log(\det(2\omega)) \ge a(1-2\varepsilon)\beta i\partial\bar\partial|z|^2.$$

现在，对于任意 $q \in P(p,1)$，我们使用推论 3.4 在 $P(q,1) \subset P(p,2)$ 上的估计，得到：

$$K_{P(q,1),kg+k\varphi-\log(\det(2\omega))}e^{-(kg+k\varphi-\log(\det(2\omega)))}(q) \ge k^n\frac{a^n}{\pi^n}(1-2\varepsilon)^n\beta^n.$$

由引理 2.3，存在常数 C，它还依赖于 ε、a、ω 和 $P(p,3)$，使得

$$\begin{aligned}\frac{(2\pi)^n}{k^n}K_\varphi^k e^{-k\varphi}\det(\omega)(q) &\geq \left(1+Ck^{-1/2}\right)^{-1}\frac{\pi^n}{k^n}K_{P(q,1),kg+k\varphi-\log(\det(2\omega))}e^{-kg-k\varphi+\log(\det(2\omega))}(q)\\ &\geq \left(1+Ck^{-1/2}\right)^{-1}(1-2\varepsilon)^n a^n\beta^n\\ &\geq \left(1+Ck^{-1/2}\right)^{-1}a^n\frac{(1-2\varepsilon)^n}{(1+\varepsilon)^n}\det(\omega)(q),\qquad k\geq k_0.\end{aligned}$$

这意味着

$$M_\varphi^k \geq \left(1+Ck^{-1/2}\right)^{-1}a^n\frac{(1-2\varepsilon)^n}{(1+\varepsilon)^n}\omega^n$$

在 $P(p,1)$ 上。由紧性可知，对于 $k\geq k_0$，该结论在 X 上成立，其中 C 依赖于 a、ε 和 ω，因此

$$M_\varphi^k \geq a^n\frac{(1-2\varepsilon)^n}{(1+\varepsilon)^{n+1}}\omega^n,\qquad k\geq k_0=k_0(a,\varepsilon,\omega).$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，结论得证。 □

下面的估计是相应不等式 $\frac{1}{2^n}\omega_\varphi^n \leq \omega_{\varphi/2}^n$，的量子版本，其中$\varphi\in\mathcal{E}_\omega$ 由非极化复 Monge-Ampère 测度 [32]的多重线性推出。它可由 Finski 非常一般的 L^∞ Ohsawa–Takegoshi 定理 [29,定理 1.10] 推出。这里我们给出另一种基于经典凯勒量子化的直接证明:

命题 5.2。 设 $\varphi\in\mathcal{E}_\omega$。那么存在某个 $\varepsilon_k\searrow 0$，使得

$$\frac{(1-\varepsilon_k)}{2^n}M_\varphi^k \leq M_{\varphi/2}^{2k}.$$

证明。 回顾

$$K_0^k = \sup_{s\in H^0(X,L^k),\ \int_X h^k(s,s)\omega^n\leq 1} h^k(s,s).$$

由 Catlin-Lu-Tian-Zelditch 定理可知，$\frac{(2\pi)^n}{k^n}K_0^k \rightrightarrows 1$ 在 X 上成立。因此存在$D_k\searrow 1$，使得对每个 $p\in X$ 都存在 $s_p\in H^0(X,L^k)$，满足

$$\frac{1}{D_k}k^n\frac{1}{(2\pi)^n}\leq h^k(s_p,s_p)(p)\quad\text{and}\quad h^k(s_p,s_p)(x)\leq D_k k^n\frac{1}{(2\pi)^n},\ x\in X. \tag{32}$$

设 $\sigma\in H^0(X,L^k)$，其中 $\int_X h^k(\sigma,\sigma)e^{-k\varphi}\omega^n\leq 1$。则 $\chi_{\sigma,p}:=\frac{(2\pi)^{n/2}}{D_k^{1/2}k^{n/2}}s_p\otimes\sigma\in H^0(X,L^{2k})$ 满足

$$\frac{1}{D_k^2}h^k(\sigma,\sigma)(p)\leq h^{2k}(\chi_{\sigma,p},\chi_{\sigma,p})(p)\quad\text{and}\quad\int_X h^{2k}(\chi_{\sigma,p},\chi_{\sigma,p})e^{-k\varphi}\omega^n\leq 1.$$

由 Bergman测度的定义 (4) 以及 Bergman 核的极值定义 (2)，所求不等式 $\frac{1}{2^nD_k^2}M_\varphi^k\leq M_{\varphi/2}^{2k}$ 随之成立。 □

下一个技术性结果将使我们能够把定理 1.4 的一般情形归结为定理 4.3 中已经处理的有限能量情形:

命题 5.3。 设 $\varphi\in\mathcal{E}_\omega$。对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $c<0$，使得

$$\limsup_{k\to\infty}\int_{\{\varphi\leq c\}}M_\varphi^k\leq\varepsilon. \tag{33}$$

证明。 我们可以假设 $\varphi \le 0$。固定 $\alpha > 1$。回顾一下，根据 [19, 命题 2.15] 的论证， $P(\alpha\varphi) \in \mathcal{E}_\omega$ 。具体而言，这一最后结果表明，当 $\varphi \in \mathcal{E}^p_\omega$ 时 $P(\alpha\varphi) \in \mathcal{E}^p_\omega$ ，但对于任意类 $\mathcal{E}^\chi_\omega$，同样的初等证明也适用；这些类穷尽了 $\mathcal{E}_\omega$([32,命题 2.2])。我们有

$$\{\varphi \le c\} \subset \Big\{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi) \le \frac{\varphi}{2} + \frac{c}{2}\Big\}.$$

这由以下事实可得： $\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi) \le \varphi \le \varphi/2 + c/2$ 在集合 $\{\varphi \le c\}$ 上。因此，我们可以利用命题 5.2 和定理 2.4 得到

$$\begin{aligned}(34)\qquad \frac{1-\varepsilon_k}{2^n}\int_{\{\varphi\le c\}} M_\varphi^k &\le \int_{\{\varphi\le c\}} M_{\varphi/2}^{2k} \le \int_{\{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)\le \frac{\varphi}{2}+\frac{c}{2}\}} M_{\varphi/2}^{2k}\\ &\le \int_{\{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)\le \frac{\varphi}{2}+\frac{c}{2}\}} M_{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)}^{2k} \le \int_{\{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)\le \frac{c}{2}\}} M_{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)}^{2k}.\end{aligned}$$

显然，我们有 $\omega_{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)} \ge (1-\frac{1}{\alpha})\omega_\varphi$ 命题 5.1 现在推出

$$M^{2k}_{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)} \ge (1-\widetilde{\varepsilon}_k)\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)^n\omega^n.$$

利用这一点，我们可以继续对 (34) 进行估计：

$$\begin{aligned}\frac{1-\varepsilon_k}{2^n}\int_{\{\varphi\le c\}} M_\varphi^k &\le \int_X M^{2k}_{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)} - \int_{\{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)>\frac{c}{2}\}} M^{2k}_{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)}\\ &\le \frac{(2\pi)^n N_k}{k^n} - (1-\widetilde{\varepsilon}_k)\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)^n\int_{\{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)>\frac{c}{2}\}}\omega^n.\end{aligned}$$

存在 $c = c(\varphi,\alpha) < 0$，使得 $\int_{\{\frac{1}{\alpha}P(\alpha\varphi)>\frac{c}{2}\}}\omega^n \ge (1-\frac{1}{\alpha})\int_X\omega$。由于 $\frac{(2\pi)^n N_k}{k^n} \to \int_X\omega^n$，我们得到

$$(35)\qquad \limsup_{k\to\infty}\int_{\{\varphi\le c\}} M_\varphi^k \le 2^n\Big(1-\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)^{n+1}\Big)\int_X\omega^n.$$

现在我们可以选择 $\alpha > 1$ ，使得右侧不超过 ε。 □

现在我们可以完成定理 1.4 的证明：

定理 5.4. 设 $\varphi \in \mathcal{E}_\omega$。则当 $k \to \infty$ 时， $M_\varphi^k \to \omega_\varphi^n$ 弱收敛。

证明。 我们可以假设 $\varphi \le 0$。令 $\varepsilon_m := 1/m$ 和 $c_m \to -\infty$ 由前一个命题给出。于是利用 (16)，我们可以写成

$$\begin{aligned}M_\varphi^k &= \mathbb{1}_{\{\varphi\le c_m\}}M_\varphi^k + \mathbb{1}_{\{\varphi>c_m\}}M_\varphi^k\\ &\le \mathbb{1}_{\{\varphi\le c_m\}}M_\varphi^k + \mathbb{1}_{\{\varphi>c_m\}}M^k_{\max(\varphi,c_m)}\\ &\le \mathbb{1}_{\{\varphi\le c_m\}}M_\varphi^k + M^k_{\max(\varphi,c_m)}.\end{aligned}$$

因此，由定理 4.3 和 (33)，我们得到任意弱极限 μ of M_φ^k 都受$\mu_{c_m} + \omega^n_{\max(\varphi,c_m)}$控制，其中 μ_{c_m} 在 X 上的总质量小于 $\varepsilon_m = 1/m$。令 $m \to \infty$，由于 $\omega^n_{\max(\varphi,c_m)} \to \omega^n_\varphi$ 弱收敛于 [32], ，我们得出 $\mu \le \omega^n_\varphi$。由于总质量相等，必有 $\mu = \omega^n_\varphi$，这正是所需结论。 □

参考文献

[1] R. Berman, 《射影流形上线丛的 Bergman 核与平衡测度》, 《美国数学杂志》 131 2009 1485 1524 ( ), – R. Berman、B. Berndtsson, 《Kähler 度量空间上 K-能量的凸性及极值度量的唯一性》, [2] J. Amer. Math. Soc. 30 2017 1165 1196 ( ), – R. Berman、B. Berndtsson、J. Sjöstrand, 《正线丛 [3] Bergman 核渐近的直接方法》, 《阿克塔数学》 46 2008 197 217 ( ), – R. Berman、S. Boucksom, 《全纯截面之球的增长与平衡能量》, 《数学发明》 [4] 181 2010 337 394 ( ), – R. Berman、G. Freixas i Montplet, 《奇异埃尔米特线丛与尖形式的算术Hilbert-Samuel定理》, [5] Compos. Math. 150 2014 1703 1728 ( ), – R. Berman、D. Witt Nyström, 《线丛高次幂的 Bergman测度收敛》, [6] arXiv:0805.2846[7] R. J. Berman、S. Boucksom 和 D. Witt Nyström, 《Fekete点与复流形上趋近平衡测度的收敛》, Acta Mathematica 207.1（2011）, 第 1–27 页。[8] B. Berndtsson, 《凯勒度量空间中与测地线相关的概率测度》, 载于《代数与解析微局部分析》, 395–419, Springer Proc. Math. Stat., 269, 施普林格, Cham, 2018。[9] B. Berndtsson, 《Bergman 核的比较原理》, 载于《分析与几何相遇：献给 Mikael Passare 的纪念文集》, 编者 M. Andersson、J. Boman、C. Kiselman、P. Kurasov、R. Sigurdsson, 《数学新趋势》, 第 121 126, 2017 –页, 施普林格; Z. Błocki, 《吹田猜想与 Ohsawa–Takegoshi延拓定理》, 《数学发明》 [10] 193 2013 149 158 ( ), – Z. Błocki, [11] 《多复变选题》, 马里兰大学 2025 年春季课程, 见 http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki [12] Z. Błocki、S. Kołodziej, 《流形上多重次调和函数的正则化》, Proc. Amer. Math. Soc. 135 2007 2089 2093 ( ), – T. Bouche, 《正线丛 Fubini–Study 度量的收敛》, Ann. Inst. Fourier 40 (1990 117 130), – [13] D. Catlin, 《Bergman 核与 Tian 定理》, 载于《多复变分析与几何》, 第 40 [14] 1 23, 1999 届谷口研讨会论文集, [15] 编者 G. Komatsu、M. Kuranishi, 第 – 页, Birkhäuser; X.X. Chen、S. Sun, 《凯勒度量空间（V）——凯勒量子化》, 载于《度量与微分几何》, 19–41, Progr. Math., 297, Birkhäuser/Springer, 巴塞尔, 2012。[16] D. Coman、X. Ma、G. Marinescu, 《正规凯勒空间上线丛序列的等分布》, Geom. Topol. 21（2017）, 第 2 期, 923–962。[17] 285 2015 182 219 T. Darvas, 《有限能量类的 [18] Mabuchi几何》, Adv. Math. ( ), – T. Darvas, 《凯勒流形上的几何多重位势理论》, 载于《复几何进展》, 编者 Y.A. Rubinstein、B. Shiffman, Contemp. Math. 735, 1 104, 2019 第 – 页, 美国数学会; T. Darvas、C.H. Lu、Y.A. Rubinstein, [19] 《几何多重位势理论中的量子化》, Comm. Pure Appl. Math. 73 2020 1100 1138 ( ), – T. Darvas、M. Xia, 《伪有效线丛的体积与部分平衡》, Geom. and Topol. 28（2024）, 第 [20] 4 期, 1957–1993。[21] J.-P. Demailly, 《闭正电流的正则化与相交理论》, J. Algebraic Geom. 1（1992）, 361–409[22] T.-C. Dinh、X. Ma、V.-A. Nguyên, 《正线丛 Bergman 核的渐近行为》, Pacific J. Math. 289 2017 71 89 ( ), – J.-P. Demailly, 《复解析与微分几何》, 见 https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr//~demailly/ [24] J.-P. Demailly, 《代数几何中的解析方法》, 高等教育出版社, 《现代数学综述》, 第 [25] [23] , 2010 卷; S. Dinew, 《 $\mathcal{E}\ X\ \omega$ 256 2009 2113 2122 (,)中的唯一性》, 《泛函分析杂志》 （）, – S. K. [26] Donaldson, 《数量曲率与射影嵌入，I》, 《微分几何杂志》 59 2001 479 522 ( ), – S. K. Donaldson, [27] 56 2005 345 356 《数量曲率与射影嵌入，II》, Quart. J. Math. ( ), – [28] 227 2002 211 M. Engliš, 《加权伯格曼核与量子化》, Comm. Math. Phys. ( ), – 241 [29] S. Finski, 《半经典 Ohsawa-Takegoshi 延拓定理与正交Bergman核的渐近》, J. Differential Geom. 128（2024）, 第 2 期, 639–721。[30] S. Finski, 《Bernstein-Markov测度与Toeplitz理论》, arXiv:2506.01610。[31] Q. Guan、X.Y Zhou, 《乘子理想层的强开性与最优 L^2 延拓》, Sci. China Math. 60（2017）, 967–976

[32] V. Guedj, A. Zeriahi，拟多重次调和函数的加权 *Monge-Amp‘ere* 能量，《泛函分析杂志》 250 2007 442 482 ( )，– D. Gilbarg, N. Trudinger，二阶椭圆偏微分方程，数学经典丛书，施普林格，[33] 2001[34]Y. He, J. Testorf, X. Wang，*Ross-Witt Nyström* 对应与 *Ohsawa-Takegoshi* 延拓，arXiv:2311.03840v5[35] Z. Lu，关于 *Tian–Yau–Zelditch* 渐近展开的低阶项，《美国数学杂志》122 (2000)，235–273。2007[36] X. Ma, G. Marinescu，全纯 *Morse* 不等式与 *Bergman* 核，数学进展丛书 254，Birkhäuser，[37] T.T.H. Nguyen, X. Wang，关于 *Ohsawa* 的一则评论：与 *Berndtsson-Lempert* 方法相关的 L^2- 全纯延拓，《阿克塔数学》 60 2022 173 182 ( )，– T. Ohsawa，关于全纯函数的延拓 *VIII*——关于 *Guan* 和 *Zhou* 定理的一则评论，《国际数学杂志》28 (2017)，文章编号 1740005，12 页。[38] L^2 [39] L^2 195 1987 197 204 T. [40] Ohsawa, K. Takegoshi，关于全纯函数的延拓，《数学杂志》( )，– J. Song, S. Zelditch，环面簇上的 Kähler 度量空间中的 Bergman 度量与测地线。《分析与偏微分方程》3 (2010)，第 3 期，295–358。[41] D.-H. Phong, J. Sturm，Kähler 势空间中的 Monge-Ampere 算子与测地线，《数学发明》166 (2006)，第 1 期，125—149。[42] 6 1998 589 631 W.-D. Ruan，典范坐标与 *Bergman* 度量，《分析与几何通讯》( )，– Y.A. Rubinstein, S. Zelditch，环面簇上的 Kähler 度量空间中的调和映射的 Bergman 逼近。《辛几何杂志》8 (2010)，第 3 期，239–265。[43] [44] H. Skoda，有限阶或无限阶解析子集，其中 $\mathbb{C}^n$，《法国数学会通报》100 (1972)，353–408[45] G Székelyhidi，极值 *Kähler* 度量导论。数学研究生教材丛书 152，美国数学会，2014[46] G. Tian，关于代数流形上的一类极化 *Kähler* 度量，《微分几何杂志》 32 1990 99 130 ( )，– M. Xia，向量丛上的非多重次极化积与 *Chern-Weil* 公式，《数学年刊》( )，3239–3316[47] 390 2024 [48] 33 1987 109 158 S.-T. Yau，几何中的非线性分析，《数学教学》( )，– S. Zelditch，*Szegő* 核与 *Tian* 定理，《国际数学研究通告》6 (1998)，317–331[49]

雅盖隆大学，数学研究所，克拉科夫，波兰 zbigniew.blocki@uj.edu.pl

马里兰大学，数学系，大学公园市，美国 tdarvas@umd.edu