arXiv:2602.03133v1 [math.RA] 3 Feb 2026

Sweedler 代数上的结合 Rota–Baxter 算子 H_4

MAXIM V. PODKORYTOV

ABSTRACT. 本文将 Sweedler 代数H_4 上的所有 Rota–Baxter 算子按共轭和对偶化进行分类。模去 H_4 的代数（反）自同构后，我们首先描述其子代数，然后分析 Rota–Baxter 算子的核。我们根据该核的维数进行分类，从而完整描述这类算子。最后一节的定理给出了算子的完整列表。

CONTENTS

引言 1
1. H_4的子代数 2. 核的维数为 3 3. 核的维数为 2 4. 核的维数为 1 5. 核的维数为 0 6. 对偶化 参考文献 3 5 6 10 14 15 18

INTRODUCTION

Rota–Baxter 算子最早见于 F. Tricomi 于 1951 年发表的一篇论文 [9]。随后，G. E. Baxter 在其 1960 年的著作中 [1], 进一步发展了这一概念；该概念源于对概率论中涨落理论的研究，并为 Spitzer 恒等式提供了代数基础。十年后，Gian-Carlo Rota 认识到它深远的组合意义，并将这一算子置于求和代数理论的核心 [8]。该恒等式

$$P(x)P(y) = P\big(P(x)y + xP(y) + \lambda xy\big),$$

如今称为权为 λ 的 Rota–Baxter 恒等式，此后已成为数学多个领域中的一种基本结构。第一部专门论述 Rota–Baxter代数的专著出版于 2011 [5]。

近年来，Rota–Baxter 算子理论得到了积极发展。2020 年，群上的 Rota–Baxter 算子这一概念被提出 [6], ，而在

日期：2026年2月4日。

同年，余交换 Hopf 代数上的 Rota–Baxter 算子定义也被给出 [3]。我们还提及近期的一些分类结果，这些结果专门描述特定代数上的此类算子：关于 $M_2(F)$，参见 [2], ；关于 $M_3(F)$，参见 [4]。当然，这并非所有致力于分类的研究成果；我们希望，对这一主题感兴趣的读者能在所引论文中找到更多参考文献。

Sweedler 代数 H_4 是由两个元素 x和 g 生成的四维代数，满足以下关系

$$x^2 = 0, \quad g^2 = 1, \quad \text{and} \quad gx = -xg.$$

标准基为 $\{1, g, x, gx\}$。

我们从主要定义开始。设 F 为一个域，且 $\mathrm{char}(F) \neq 2$，并设 A 为一个F-代数。

定义。线性算子 $R\colon A \to A$ 称为权为$\lambda \in F$ 的 Rota–Baxter 算子，当且仅当

$$R(a)R(b) = R(R(a)b + aR(b) + \lambda ab) \tag{RB}$$

对所有 a、$b \in A$均成立。

零算子和算子 $-\lambda\mathrm{id}$ 被称为平凡算子。我们回顾 Rota–Baxter 算子 [5] 的以下基本性质。设 R 是一个权为 λ 的 Rota–Baxter 算子。那么：(1) 算子 $-\lambda\,\mathrm{id} - R$ 也是一个权为 λ 的 Rota–Baxter 算子；(2) 对于任意（反）自同构 $\varphi\colon A \to A$，算子 $\varphi^{-1}R\varphi$ 仍是一个权为 λ 的 Rota–Baxter 算子。

在论文 [7], 中，给出了代数 H_4 上 Rota–Baxter 算子的刻画：

(a) $R(1) = 0$, $R(g) = 0$, $R(x) = -\lambda x$, $R(gx) = -\lambda gx$.(b) $R(1) = -\lambda 1$, $R(g) = -\lambda g$, $R(x) = 0$, $R(gx) = 0$.(c) $R(1) = -\lambda 1$, $R(g) = -\lambda g$, $R(x) = -\lambda x$, $R(gx) = -\lambda gx$.(d) $R(1) = 0$, $R(g) = -p_1\,1 + p_1\,g - \frac{(\lambda+p_1)(\lambda+p_1+p_2)}{p_3}\,x + \frac{(\lambda+p_1)(\lambda+p_2)}{p_3}\,gx$, $R(x) = -p_3\,1 + p_3\,g - (2\lambda + p_1 + p_2)\,x + (\lambda + p_2)\,gx$, $R(gx) = -p_3\,1 + p_3\,g - (\lambda + p_1 + p_2)\,x + p_2\,gx$.

(e) $R(1) = -\lambda 1$, $R(g) = (\lambda + p_1)\,1 + p_1\,g - \frac{(\lambda+p_1)(\lambda+p_1+p_2)}{p_3}\,x + \frac{(\lambda+p_1)(\lambda+p_2)}{p_3}\,gx$, $R(x) = p_3\,1 + p_3\,g - (2\lambda + p_1 + p_2)\,x + (\lambda + p_2)\,gx$, $R(gx) = p_3\,1 + p_3\,g - (\lambda + p_1 + p_2)\,x + p_2\,gx$.

(f) $R(1) = -\lambda 1$, $R(g) = \lambda 1 + p_1\,x + \frac{p_1 p_2}{\lambda + p_2}\,gx$, $R(x) = -(\lambda + p_1)\,x - p_2\,gx$, $R(gx) = (\lambda + p_2)\,x + p_2\,gx$.

(g) $R(1) = -\lambda 1$, $R(g) = \lambda 1 + \frac{\lambda}{p_2}\,x + \frac{(\lambda+p_1)}{p_2}\,gx$, $R(x) = -p_2 1 - p_2\,g - (2\lambda + p_1)\,x - (\lambda + p_1)\,gx$, $R(gx) = p_2 1 + p_2\,g + (\lambda + p_1)\,x + p_1\,gx$.

(h) $R(1) = \frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + p_1 x + p_2 gx,\ R(g) = \frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g - p_2 x + p_1 gx,$
$R(x) = -\frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda}{2}gx,\ R(gx) = -\frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda}{2}gx.$

本文的组织如下。第一节描述维数为 3 和 2 的所有子代数。在后续各节中，我们根据核的维数对 Sweedler 代数上的 Rota–Baxter 算子进行分类。在最后一节中，我们计算对偶算子，并给出在共轭和对偶化意义下 Rota–Baxter 算子的完整列表。注意，当且仅当 $p_1 = 0$ 时，算子 (h) 才是 Rota–Baxter 算子。

1. Subalgebras of H_4

设 A 是一个 F-代数。若 $S \subset A$，我们用 $\langle S\rangle$ 表示由集合S生成的子代数。此外，若元素 e_1、…、 $e_n \in A$ 线性无关且 $S = \{e_1, \dots, e_n\}$，我们就记作

$$\langle S\rangle = \langle e_1, \dots, e_n\rangle \quad \text{or} \quad \langle S\rangle = Fe_1 + \cdots + Fe_n.$$

下面我们开始描述子代数。

引理 1. 设 $L \subset H_4$ 是一个三维子代数。那么 L 是下列空间之一:

$$\langle 1 + \sigma g, x, gx\rangle, \quad \langle 1, g + y_3 x + y_4 gx, x + \sigma gx\rangle, \quad \langle 1, x, gx\rangle,$$

其中 $\sigma \in F$ 且 $\sigma^2 = 1$。

证明。令 $I = F1 + Fx + Fgx$。有两种情况：要么 $\dim(L \cap I) = 2$，要么 $\dim(L \cap I) = 3$。假设 $\dim(L \cap I) = 2$。因此，存在两个非零元素$e_1, e_2 \in L \cap I$，它们张成 $L \cap I$。选取 $e_3 = y_1 1 + y_2 g + y_3 x + y_4 gx \in H_4$，使得$L = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$。如果元素 e_1, e_2之一等于 1，不妨设 $e_1 = 1$，那么 $y_2 \neq 0$；否则将与 $\dim(L \cap I) = 2$ 矛盾。令 $e_2 = x_3 x + x_4 gx$。由于 $e_3 e_2 = x_4 x + x_3 gx$属于 L，因此 $x_4 = \sigma x_3$，$x_3 = \sigma x_4$。所以，$e_2 = x + \sigma gx$，$\sigma^2 = 1$。

现在设 $1 \notin L \cap I$。再次有 $y_2 \neq 0$；而 $y_1 \neq 0$，否则 $e_3^2 = 1$，但 $1 \notin L$。因此，$e_3 = y_1 1 + g + y_3 x + y_4 gx$ 且 $e_3^2 = (y_1^2 + 1)1 + 2y_1 g + 2y_1 y_3 x + 2y_1 y_4 gx$。所以，$y_1^2 + 1 = \sigma y_1$，$2y_1 = \sigma$，从而 $y_1^2 = 1$。令 $e_2 = x_1 1 + x_3 x + x_4 gx$。由于元素 $e_3 e_2 - e_2 e_3 = 2x_4 x + 2x_3 gx$ 属于 L 和 $1 \notin L \cap I$，于是 $e_1, e_2 \in \langle x,\ gx\rangle$。我们可以令 $e_1 = x$ 和 $e_2 = gx$。因此，我们得到子代数 $\langle 1 + \sigma g,\ x,\ gx\rangle$，$\sigma^2 = 1$。

若 $\dim(L \cap I) = 3$，则 $L = I = \langle 1, x, gx\rangle$。至此证明完毕。 □

引理 2. 设 $L \subset H_4$ 是一个二维子代数。则 L 是下列空间之一:

$$\langle 1 + \sigma g + y_3 x + y_4 gx, x + \mu gx\rangle, \quad \langle x, gx\rangle, \quad \langle 1, x_2 g + x_3 x + x_4 gx\rangle,$$

其中 $\sigma, \mu \in F$以及 $\sigma^2 = 1$、$\mu^2 = 1$。

证明。设 $I = F1 + Fx + Fgx$。有两种可能：要么 $\dim(L \cap I) = 1$，要么 $\dim(L \cap I) = 2$。先假设 $\dim(L \cap I) = 1$。那么存在一个非零元素 $e_1 \in L \cap I$。若 $e_1 = 1$，则显然有 $L = \langle 1, x_2 g + x_3 x + x_4 gx\rangle$。否则，写作$e_1 = x_1 1 + x_3 x + x_4 gx$，其中 $e_1 \neq 1$。选取 $e_2 = y_1 1 + y_2 g + y_3 x + y_4 gx \in H_4$ 使得

$L = \langle e_1, e_2\rangle$。我们可以假设 $y_2 \neq 0$ （并将 $y_2 = 1$ 归一化）；否则 $L \subseteq I$，这与 $\dim(L \cap I) = 1$ 矛盾。

现在，条件 $e_1^2 = \alpha e_1$ 导出

$$\begin{cases} x_1(x_1 - \alpha) = 0, \\ x_3(2x_1 - \alpha) = 0, \\ x_4(2x_1 - \alpha) = 0, \end{cases} \iff x_1 = \alpha = 0,$$

最后一个等价关系由 $e_1 \neq 1$ 得出。类似地，将 e_2^2 按 L 的基展开，得到 $e_2^2 = \beta e_2$，这迫使 $e_2 = 1 + \sigma g + y_3 x + y_4 gx$ 满足 $\sigma^2 = 1$。最后，要求 $e_1 e_2 \in L$ 可推出 $e_1 = x + \mu gx$ 满足 $\mu^2 = 1$。

现在假设 $\dim(L \cap I) = 2$。若 $1 \in L$，则得到 $L = \langle 1, x_2 x + x_3 gx\rangle$，这已包含在前一种情形中。若 $1 \notin L$，则 $L = \langle x, gx\rangle$。□

令 $\mathrm{Aut}(H_4)$ 为 H_4 （作为结合代数）的自同构群。证明任意 $\varphi \in \mathrm{Aut}(H_4)$ 在生成元 x 和 g 上的作用如下：

$$\varphi(g) = \varepsilon g + ax + bgx, \quad \varphi(x) = px + qgx,$$
$$a, b, p, q, \varepsilon \in F, \quad \varepsilon = \pm 1,\ p^2 - q^2 \neq 0.$$

由于 $\varphi(1) = 1$，因此 $\varphi(g)\varphi(g) = 1$。所以，$\varphi(g) = \varepsilon g + ax + bgx$, $a, b, \varepsilon \in F$ 和 $\varepsilon = \pm 1$。显然，$\varphi(x)\varphi(x) = 0$。因此，$\varphi(x) = px + qgx, p, q \in F$。最后，$\varphi(gx) = \varphi(g)\varphi(x) = \varepsilon qx + \varepsilon pgx$，且 $\det(\varphi) = p^2 - q^2 \neq 0$。

现在我们证明，在同构意义下，H_4恰有三个不同的三维子代数。事实上，由 $\varphi(g) = -g$, $\varphi(x) = x$ 定义的自同构将$\langle 1 + g, x, gx\rangle$ 与 $\langle 1 - g, x, gx\rangle$对应起来。在该自同构的作用下，子代数 $\langle 1, g, x - gx\rangle$ 与 $\langle 1, g + y_3 x + y_4 gx, x + \sigma gx\rangle$ 同构：

$$f(g) = g + y_3 x + y_4 gx, \ f(x) = \frac{1+\sigma}{2} x + \frac{\sigma - 1}{2} gx.$$

转向二维子代数，代数 $\langle 1 + \sigma g + y_3 x + y_4 gx, x - \sigma gx\rangle$ 通过自同构 f 与 $\langle 1 - g, x + gx\rangle$ 同构，其中自同构定义如下：

$$f(g) = -\sigma g + ax + bx, \quad f(x) = (1 - q)x + qgx,$$
$$a = (y_4 + \sigma y_3)q - \sigma y_3, \quad b = y_4 - (y_4 + \sigma y_3)q, \quad q \neq 2^{-1}.$$

类似地，子代数 $\langle 1 + \sigma g + y_3 x + y_4 gx, x + \sigma gx\rangle$ 在自同构 f 下与 $\langle 1 - g, x - gx\rangle^{\sim}$ 同构，其中自同构定义如下：

$$\widetilde{f}(g) = -\sigma g + ax + bgx, \quad \widetilde{f}(x) = (1 + q)x + qgx,$$
$$a = (y_4 - \sigma y_3)q - \sigma y_3, \quad b = y_4 + (y_4 - \sigma y_3)q, \quad q \neq -2^{-1}.$$

注意，子代数 $\langle 1 - g, x - gx\rangle$ 在反自同构 $\psi(g) = g$, $\psi(x) = x$ 下与 $\langle 1 - g, x + gx\rangle$ 同构。

接下来考虑形如 $\langle 1, x_2 g + x_3 x + x_4 gx\rangle$ 的子代数。由于对任意 $a, b \in k$，都有 $\langle 1, g\rangle \cong \langle 1, g + ax + bgx\rangle$，因此若 $x_2 \neq 0$，则 $\langle 1, x_2 g + x_3 x + x_4 gx\rangle \cong \langle 1, g\rangle$。

若 $x_2 = 0$，则该子代数同构于 $\langle 1, x + Cgx\rangle$ 或 $\langle 1, Cx + gx\rangle$。事实上，这两者彼此同构，并且我们有

$$\langle 1, x + Cgx\rangle \cong \langle 1, x - gx\rangle \iff C^2 = 1,$$
$$\langle 1, x + Cgx\rangle \cong \langle 1, x\rangle \iff C^2 \neq 1.$$

因此，我们得到了如下引理。

引理 3. 在同构意义下，H_4 包含如下二维子代数:

$$\langle 1 - g, x - gx\rangle, \quad \langle 1, g\rangle, \quad \langle 1, x - gx\rangle, \quad \langle 1, x\rangle, \quad \langle x, gx\rangle;$$

以及如下三维子代数:

$$\langle 1 - g, x, gx\rangle, \quad \langle 1, g, x - gx\rangle, \quad \langle 1, x, gx\rangle.$$

现在我们可以着手对 Rota–Baxter 算子进行分类。

2. Dimension of kernel is 3

这里及下文中，我们考虑非零权（$\lambda \neq 0$）的算子。

Theo注 1. 设 ker $R = \langle 1 - g, x, gx\rangle$. 则有如下算子 s:
(1) $R(g) = -\lambda 1$, (2) $R(g) = -\frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + \gamma_g x + \delta_g gx$, (3) $R(g) = \frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + \gamma_g x + \delta_g gx$.

证明. 设 $R(g) = \alpha_g 1 + \beta_g g + \gamma_g x + \delta_g gx$. 考虑关于数对 (g, g) 的 Rota–Baxter 恒等式:

$$\begin{array}{lllllll} \alpha_g(2\beta_g + \lambda) & = & \beta_g^2 - \alpha_g^2, & \beta_g(2\beta_g + \lambda) & = & 0, \\ \gamma_g(2\beta_g + \lambda) & = & 0, & \delta_g(2\beta_g + \lambda) & = & 0. \end{array}$$

显然，若 $2\beta_g + \lambda = 0$，则得到算子 (2) 和 (3)。否则，若 $2\beta_g + \lambda \neq 0$，则 $\beta_g = \gamma_g = \delta_g = 0$ and $\alpha_g + \lambda = 0$。因此得到算子 (1)。

考虑自同构

$$\varphi(g) = g - \frac{2\gamma_g}{\lambda}x - \frac{2\delta_g}{\lambda}gx, \ \varphi(x) = x.$$

下面证明，带有任意 γ_g 和 δ_g 的算子 (2) 和 (3)，与带有 $\gamma_g = \delta_g = 0$的算子 (2) 和 (3) 共轭。计算自同构 φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}(g) = g + \frac{2\gamma_g}{\lambda}x + \frac{2\delta_g}{\lambda}gx, \ \varphi^{-1}(x) = x.$$

显然，如果 R是算子 (2) 或 (3)，那么 $\varphi^{-1}R\varphi(g) = \pm\frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g$. □

定理 2. 设 ker $R = \langle 1, x, gx\rangle$。那么我们有以下算子：(1a) $R(g) = -\lambda 1 - \lambda g + \gamma_g x + \delta_g gx$, (1b) $R(g) = \lambda 1 - \lambda g + \gamma_g x + \delta_g gx$。

证明。显然，$0 = R(1)R(g) = R(R(g) + \lambda g)$。因此，$R(g) + \lambda g \in \ker R$。将 (RB) 应用于数对 (g, g)，得到 $\alpha_g^2 = \beta_g^2$。注意，在该自同构的作用下，(1a) 和 (1b) 属于同一轨道：

$$f(g) = -g + \frac{2\gamma_g}{\lambda}x, \quad f(x) = x.$$

事实上，首先，注意到 $f = f^{-1}$；其次，若 R 是算子 (1a)，则

$$\begin{aligned} f^{-1}Rf(g) = fRf(g) &= fR(-g + \frac{2\gamma_g}{\lambda}x) \\ &= f(\lambda 1 + \lambda g - \gamma_g x - \delta_g gx) \\ &= \lambda 1 - \lambda g + \gamma_g x + \delta_g gx. \end{aligned}$$

因此，我们得到算子 (1b)。

还要注意，在自同构下

$$\varphi(g) = g - \frac{\gamma_g}{\lambda}x - \frac{\delta_g}{\lambda}gx, \ \varphi(x) = x,$$

任意取 γ_g 和 δ_g 时，算子 (1a) 与取 $\gamma_g = \delta_g = 0$ 时的算子 (1a) 共轭。证明完毕。□

定理3. 设核 $R = \langle 1, g, x - gx\rangle$。则有以下算子：

(1a) $R(gx) = \alpha_{gx}1 - \alpha_{gx}g + \gamma_{gx}x - (\lambda + \gamma_{gx})gx$, (1b) $R(gx) = \alpha_{gx}1 + \alpha_{gx}g + \gamma_{gx}x - (\lambda + \gamma_{gx})gx$.

证明。将 (RB) 分别应用于数对 $(1, gx)$ 和 (gx, gx)，我们分别得到 $R(gx) + \lambda gx \in$ 核 R 和 $\alpha_{gx}^2 = \beta_{gx}^2$。因此，我们得到了算子 (1a) 和 (1b)。注意，在反自同构 $\psi(g) = -g$, $\psi(x) = x$ 的作用下，算子 (1a) 和 (1b) 互为共轭。证明至此结束。□

3. 核的维数为 2

定理4。设核 $R = \langle 1, g\rangle$。则我们有以下算子：

(1a) $\begin{array}{rcl} R(x) &=& \alpha_x 1 + \alpha_x g - \lambda x, \\ R(gx) &=& \alpha_x 1 + \alpha_x g - \lambda gx. \end{array}$ (1b) $\begin{array}{rcl} R(x) &=& \alpha_x 1 - \alpha_x g - \lambda x, \\ R(gx) &=& -\alpha_x 1 + \alpha_x g - \lambda gx. \end{array}$

(1c) $\begin{array}{rcl} R(x) &=& \alpha_x 1 - \alpha_x g - \lambda x, \\ R(gx) &=& \alpha_x 1 - \alpha_x g - \lambda gx. \end{array}$ (1d) $\begin{array}{rcl} R(x) &=& \alpha_x 1 + \alpha_x g - \lambda x, \\ R(gx) &=& -\alpha_x 1 - \alpha_x g - \lambda gx. \end{array}$

证明。设 $R(x) = \alpha_x 1 + \beta_x g + \gamma_x x + \delta_x gx$, $R(gx) = \alpha_{gx}1 + \beta_{gx}g + \gamma_{gx}x + \delta_{gx}gx$。我们断言 $R(x) + \lambda x = \alpha_x 1 + \beta_x g$ 和 $R(gx) + \lambda gx = \alpha_{gx}1 + \beta_{gx}g$。事实上，这可由 (RB) 得出，将其应用于数对 $(1, x)$ 和 $(1, gx)$：

$$R(R(x) + \lambda x) = 0, \quad R(R(gx) + \lambda gx) = 0.$$

将 (RB) 应用于数对 (x,x) 和 (gx,gx)，分别得到 $\alpha_x^2=\beta_x^2$ 和 $\alpha_{gx}^2=\beta_{gx}^2$。此外，由 (RB) 应用于数对 (x,gx) 和 (gx,x)，可得

$$\begin{cases}(\alpha_x-\beta_{gx})(\alpha_{gx}+\beta_x)=0,\\(\alpha_x+\beta_{gx})(\alpha_{gx}-\beta_x)=0,\\\beta_x^2-\beta_{gx}^2=0.\end{cases}$$

因此，由该方程组我们得到四个算子。注意，算子 (1a)、(1b) 与 (1c)、(1d) 在自同构 $\varphi(g)=-g$, $\varphi(x)=x$ 的作用下位于同一轨道。此外，算子 (1a) 与 (1c) 在反自同构$\psi(g)=g$, $\psi(x)=x$ 的作用下共轭。□

定理 5. 设核 $R=\langle 1,x\rangle$。则我们有如下算子：

$$\text{(1a)}\ \begin{array}{rcl}R(g)&=&-\lambda 1-\lambda g+\gamma_g x,\\R(gx)&=&\lambda x-\lambda gx.\end{array}\qquad \text{(1b)}\ \begin{array}{rcl}R(g)&=&\lambda 1-\lambda g+\gamma_g x,\\R(gx)&=&-\lambda x-\lambda gx.\end{array}$$

$$\text{(1c)}\ \begin{array}{rcl}R(g)&=&-\lambda 1-\lambda g+\gamma_g x,\\R(gx)&=&-\lambda x-\lambda gx.\end{array}\qquad \text{(1d)}\ \begin{array}{rcl}R(g)&=&\lambda 1-\lambda g+\gamma_g x,\\R(gx)&=&\lambda x-\lambda gx.\end{array}$$

证明。设 $R(g)=\alpha_g 1+\beta_g g+\gamma_g x+\delta_g gx$ 且 $R(gx)=\alpha_{gx}1+\beta_{gx}g+\gamma_{gx}x+\delta_{gx}gx$。首先，显然有 $R(g)=\alpha_g 1-\lambda g+\gamma_g x$ 且 $R(gx)=\alpha_{gx}1+\gamma_{gx}x-\lambda gx$。其次，将 (RB) 应用于数对 (g,g) 与 (gx,gx)，我们分别得到 $\alpha_g^2=\lambda^2$ 与 $\alpha_{gx}=0$。最后，将 Rota–Baxter 恒等式应用于数对 (g,gx)，得到 $\gamma_{gx}^2=\lambda^2$。综合所有比值，我们得到算子 (1a)、(1b)、(1c)、(1d)。

最后，注意算子 (1a)、(1b) 与 (1c)、(1d) 在自同构 $\psi(g)=-g$, $\psi(x)=-x$ 的作用下位于同一轨道。此外，算子 (1a) 与 (1c) 在反自同构 $f(g)=g$, $f(x)=x$ 的作用下共轭。而且，可以假定 $\gamma_g=0$，因为情形 (1a) 中具有任意 γ_g 的算子经由一个自同构与情形 (1a) 中具有 $\gamma_g=0$ 的算子共轭：

$$\varphi(g)=g-\frac{\gamma_g}{\lambda}x,\ \varphi(x)=x.$$ □

定理 6. 设核 $R=\langle 1,x-gx\rangle$。则我们有如下算子：

$$\text{(1a)}\ \begin{array}{rcl}R(g)&=&-\lambda 1-\lambda g+\gamma_g x-\gamma_g gx,\\R(gx)&=&-\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx.\end{array}\qquad \text{(1b)}\ \begin{array}{rcl}R(g)&=&\lambda 1-\lambda g+\gamma_g x-\gamma_g gx,\\R(gx)&=&-\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx.\end{array}$$

证明。由于 $1\in$ 核 R，设 $R(g)=\alpha_g 1-\lambda g+\gamma_g x-\gamma_g gx$ 且 $R(gx)=\alpha_{gx}1+\gamma_{gx}x-(\gamma_{gx}+\lambda)gx$。显然，$\alpha_g^2=\lambda^2$, $\alpha_{gx}=0$，这由将 Rota–Baxter 恒等式应用于数对 (g,g)、(gx,gx) 得出。最后，将 Rota–Baxter 恒等式应用于数对 (g,gx) 得到 $\gamma_{gx}=-\lambda/2$。于是，我们得到了算子 (1a) 和 (1b)。在反自同构 $\psi(g)=-g$, $\psi(x)=-x$ 的作用下，算子 (1a) 与 (1b) 共轭。

注意，我们可以假设 $\gamma_g=0$，因为任意 γ_g 的算子 (1a) 在以下自同构的作用下与 $\gamma_g=0$ 的算子 (1a) 共轭：

$$\varphi(g)=g-\frac{2\gamma_g}{\lambda}x,\ \varphi(x)=x.$$ □

定理 7. 设 ker $R = \langle x, gx\rangle$。那么我们有以下算子：

$$(1)\quad \begin{array}{rcl} R(1) &=& -\lambda 1,\\ R(g) &=& -\lambda g + \gamma_{gx}x + \delta_{gx}gx. \end{array} \qquad (2a)\quad \begin{array}{rcl} R(1) &=& -\frac{3\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + \gamma_{gx}x + \delta_{gx}gx,\\ R(g) &=& \frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + \gamma_{gx}x + \delta_{gx}gx. \end{array}$$

$$(2b)\quad \begin{array}{l} R(1) = -\frac{3\lambda}{2}1 + \frac{\lambda}{2}g - \gamma_{gx}x - \delta_{gx}gx,\\ R(g) = -\frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + \gamma_{gx}x + \delta_{gx}gx. \end{array}$$

证明。注意，只有对于数对 (1, 1)、(1, g)、(g, 1)、(g, g)，Rota–Baxter 恒等式才是非平凡的。设 $R(1) = \alpha_1 1 + \beta_1 g + \gamma_1 x + \delta_1 gx$, $R(g) = \alpha_g 1 + \beta_g g + \gamma_g x + \delta_g gx$。因此，将 (RB) 应用于数对 (1, 1) 和 (g, g)，可得

$$\begin{cases} \beta_1^2 - \alpha_1(\alpha_1+\lambda) &=& 2\beta_1\alpha_g,\\ \beta_1(2\beta_g+\lambda) &=& 0,\\ \lambda\gamma_1 + 2\beta_1\gamma_g &=& 0,\\ \lambda\delta_1 + 2\beta_1\delta_g &=& 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_g^2 + \alpha_1(2\beta_g+\lambda) &=& \beta_g^2,\\ \beta_1(2\beta_g+\lambda) &=& 0,\\ \gamma_1(2\beta_g+\lambda) &=& 0,\\ \delta_1(2\beta_g+\lambda) &=& 0. \end{cases}$$

接下来，结合数对 (1, g) 和 (g, 1) 对应的 Rota–Baxter 恒等式，可得

$$\begin{cases} \beta_1(\beta_g - \alpha_1) &=& (\alpha_1 + \beta_g + \lambda)\alpha_g,\\ \beta_1^2 + \beta_g(\beta_g+\lambda) &=& 0,\\ \beta_1\gamma_1 + (\beta_g+\lambda)\gamma_g &=& 0,\\ \beta_1\delta_1 + (\beta_g+\lambda)\delta_g &=& 0. \end{cases}$$

假设 $2\beta_g + \lambda \neq 0$。那么可得 $R(1) = -\lambda 1$。由上一个方程组可得 $\beta_g(\beta_g + \lambda) = 0$。若 $\beta_g = 0$，则 $\gamma_g = \delta_g = 0$。因此， $R(1)$ 和 $R(g)$ 线性相关。这与 ker $R = \langle x, gx\rangle$ 的事实矛盾。所以， $\beta_g = -\lambda$。此外，由上一个方程组可得 $\alpha_g = 0$。因此，我们得到算子 (1)。

现在设 $2\beta_g + \lambda = 0$。因此，我们得到 $\alpha_g^2 = \beta_g^2$ 和 $\beta_1^2 = \lambda^2/4$。由第一个方程组得到关于 α_1 的方程：$\alpha_1^2 + \lambda\alpha_1 - \lambda^2/4 + 2\beta_1\alpha_g = 0$。如果 $\beta_1 = \alpha_g$，那么$\alpha_1 = -\lambda/2$；因此， $R(1)$ 和 $R(g)$ 线性相关。矛盾。

设 $\beta_1 = -\alpha_g$。我们得到 $\alpha_1 = \lambda/2$ 或 $\alpha_1 = -\lambda - \lambda/2$。类似地，如果 $\alpha_1 = \lambda/2$，那么$R(1)$ 和 $R(g)$ 线性相关。因此， $\alpha_1 = -\lambda - \lambda/2$，并得到算子 (2a) 和 (2b)。算子 (2a) 和 (2b) 在自同构的作用下属于同一轨道：

$$f(g) = -g + \frac{4\gamma_{gx}}{\lambda}x,\ f(x) = x.$$

事实上，我们 对于算子 (1)，可以假设 $\gamma_{gx} = \delta_{gx} = 0$ ，因为在该自同构下

$$\varphi(g) = g - \frac{\gamma_{gx}}{\lambda}x - \frac{\delta_{gx}}{\lambda}gx,\ \varphi(x) = x,$$

任意 γ_{gx} 和 δ_{gx} 对应的算子 (1) 与 $\gamma_{gx} = \delta_{gx} = 0$ 对应的算子 (1) 共轭。相同的推理也适用于算子 (2a)；只需考虑以下自同构：

$$\psi(g) = g - \frac{2\gamma_{gx}}{\lambda}x - \frac{2\delta_{gx}}{\lambda}gx,\ \psi(x) = x. \qquad \square$$

定理 引理 8. 设核 $R = \langle 1 - g, x - gx\rangle$。则我们有以下算子：
(1) $R(g) = -\frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + \gamma_g x - \gamma_g gx, R(x) = -\frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda}{2}gx.$ (2) $R(g) = \frac{\lambda}{2}1 - \frac{\lambda}{2}g + \gamma_g x - \gamma_g gx, R(x) = -\frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda}{2}gx R(g) = -\lambda 1, R(gx) = -\beta_{gx}1 + \beta_{gx}g + \gamma_{gx}x - (\lambda + \gamma_{gx})gx.$
(3)

证明。设 $R(g) = \alpha_g 1 + \beta_g g + \gamma_g x + \delta_g gx$ 和 $R(gx) = \alpha_{gx}1 + \beta_{gx}g + \gamma_{gx}x + \delta_{gx}gx$。将 Rota–Baxter 恒等式应用于数对 (g, gx)，得到以下方程组：

$$(*) \qquad \begin{cases} (\alpha_g - \beta_g)\beta_{gx} + (\alpha_g + \beta_g + \lambda + \gamma_{gx} + \delta_{gx})\alpha_{gx} &= 0, \\ \beta_{gx}(2\beta_g + \lambda + \gamma_{gx} + \delta_{gx}) &= 0, \\ \beta_g\delta_{gx} - \beta_{gx}(\delta_g + \gamma_g) - \gamma_{gx}(\beta_g + \lambda + \gamma_{gx} + \delta_{gx}) &= 0, \\ \beta_g\gamma_{gx} - \beta_{gx}(\delta_g + \gamma_g) - \delta_{gx}(\beta_g + \lambda + \gamma_{gx} + \delta_{gx}) &= 0. \end{cases}$$

将 (RB) 应用于数对 (g, g) 和 (gx, gx)，得到

$$(**) \qquad \begin{cases} \beta_g^2 - \alpha_g^2 &= (2\beta_g + \lambda)\alpha_g, \\ 0 &= (2\beta_g + \lambda)\beta_g, \\ 0 &= (2\beta_g + \lambda)\gamma_g, \\ 0 &= (2\beta_g + \lambda)\delta_g, \end{cases} \quad \text{and} \quad \alpha_{gx}^2 = \beta_{gx}^2.$$

假设 $2\beta_g + \lambda \neq 0$。那么，由最后一个方程组可得 $\beta_g = \gamma_g = \delta_g = 0$，进而得到 $\alpha_g = -\lambda$。令 $\alpha_{gx} = \sigma\beta_{gx}$, $\sigma^2 = 1$。我们化简 $(*)$ 中的第一个和第二个方程，得到 $\beta_{gx}(\gamma_{gx} + \delta_{gx} + \lambda) = 0$ 以及 $\beta_{gx}(\gamma_{gx} + \delta_{gx} - \sigma\lambda) = 0$。因此，若 $\sigma = 1$，则 $\beta_{gx} = 0$。元素 γ_{gx} 或 δ_{gx} 中至少有一个非零，否则便会与 dim 核 $R = 2$ 这一事实矛盾。因此，由 $(*)$ 可得 $\gamma_{gx} + \delta_{gx} = -\lambda$。我们得到的算子是算子 (3) 的一个特例。若 $\sigma = -1$，则得到算子 (3)。

最后，令 $2\beta_g + \lambda = 0$。显然，$\alpha_g^2 = \beta_g^2$；这是由（$**$）得到的。将 Rota–Baxter 恒等式应用于数对（gx, g），得到

$$(\beta_g - \alpha_g)\beta_{gx} + (\beta_g - \alpha_g + \lambda + \gamma_{gx} + \delta_{gx})\alpha_{gx} = 0.$$

用（$*$）中的第一个等式减去最后一个等式，得到：$2\alpha_g(\alpha_{gx} + \beta_{gx}) + \lambda\beta_{gx} = 0$。因此，令 $\alpha_{gx} = \sigma\beta_{gx}$ 和 $\alpha_g = \mu\beta_g$，其中 $\sigma^2 = \mu^2 = 1$。于是，我们得到（$\sigma + \mu + 1$）$\beta_{gx} = 0$。因此，$\beta_{gx} = 0$。此外，由（$*$）可得：

$$(\gamma_{gx} + \delta_{gx})(\gamma_{gx} + \delta_{gx} + \lambda) = 0, \quad (\gamma_{gx} + \delta_{gx})(\gamma_{gx} - \delta_{gx}) = 0.$$

将 Rota–Baxter 恒等式应用于数对（x, 1），得到

$$\beta_g\delta_{gx} + \gamma_{gx}(\lambda - \beta_g + \gamma_{gx} + \delta_{gx}) = 0.$$

因此，若 $\gamma_{gx} + \delta_{gx} = 0$，则 $-2\lambda\gamma_{gx} = 0$。由此，$\gamma_{gx} = 0$ 和 $\delta_{gx} = 0$。这与算子核的维数为 2 的假设矛盾。因此，$\gamma_{gx} + \delta_{gx} \neq 0$和 $\gamma_{gx} = \delta_{gx} = -\lambda/2$。我们几乎已经得到了算子 (1) 和 (2)。还需注意，将 (RB) 应用于有序对 (1, 1) 可推出 $(\gamma_g + \delta_g)R(gx) = 0$。所以，$\gamma_g + \delta_g = 0$。

注意，对于任意 γ_g ，算子 (1) 和 (2) 在自同构作用下共轭

$$\varphi(g) = g - \frac{2\gamma_g}{\lambda}x + \frac{2\gamma_g}{\lambda}gx,\ \varphi(x) = x,$$

对于算子 (1) 和 (2)，其中 $\gamma_g = 0$。 □

4. Dimension of kernel is 1

若 ker R 的维数为 1，则 im R 的维数为 3。

The理 9。设 im $R = \langle 1-g, x, gx\rangle$。则有以下算子 :

$$(1)\quad \begin{array}{llll} R(1) &= -\frac{\lambda}{2}(1-g)+\gamma_g x+\delta_g gx, & R(x) &= -\lambda x,\\ R(g) &= \frac{\lambda}{2}(1-g)+\gamma_g x+\delta_g gx, & R(gx) &= -\lambda gx. \end{array}$$

$$(2)\quad \begin{array}{llll} R(1) &= \frac{\lambda}{2}(1-g)+\gamma_g x+\delta_g gx, & R(x) &= -\lambda x,\\ R(g) &= \frac{\lambda}{2}(1-g)-\gamma_g x-\delta_g gx, & R(gx) &= -\lambda gx. \end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{llll} R(1) &= 0, & R(x) &= -\lambda x,\\ R(g) &= \lambda(1-g), & R(gx) &= -\lambda gx. \end{array}$$

证明。设 $R(1) = \alpha_1(1-g)+\gamma_1 x+\delta_1 gx$, $R(g) = \alpha_g(1-g)+\gamma_g x+\delta_g gx$, $R(x) = \alpha_x(1-g)+\gamma_x x+\delta_x gx$, $R(gx) = \alpha_{gx}(1-g)+\gamma_{gx}x+\delta_{gx}gx$。考虑数对 (g,g) 的 Rota–Baxter 恒等式 (RB):

$$\begin{aligned} R(g)R(g) &= R(R(g)g + gR(g) + \lambda 1),\\ 2\alpha_g R(g) &= R(2\alpha_g g - 2\alpha_g 1 + \lambda 1),\\ 0 &= (2\alpha_g - \lambda)R(1). \end{aligned}$$

我们有两种可能：要么 $2\alpha_g - \lambda = 0$，要么 $R(1) = 0$。先假设 $R(1) = 0$。那么 ker $R = k1$。数对 $(1,g)$、$(1,x)$ 和 $(1,gx)$ 的 Rota–Baxter 恒等式给出：

$$R(R(g)+\lambda g) = 0,\quad R(R(x)+\lambda x) = 0,\quad R(R(gx)+\lambda gx) = 0,$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} R(g)+\lambda g = \alpha 1,\\ R(x)+\lambda x = \beta 1,\\ R(gx)+\lambda gx = \gamma 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_g = \alpha = \lambda,\ \gamma_g = \delta_g = 0,\\ \alpha_x = 0 = \beta,\ \gamma_x = -\lambda,\ \delta_x = 0,\\ \alpha_{gx} = 0 = \gamma,\ \gamma_{gx} = 0,\ \delta_{gx} = -\lambda. \end{cases}$$

因此，我们得到算子 (3)。现在假设 $2\alpha_g - \lambda = 0$。考虑差 $R(g)R(x) - R(x)R(g)$，我们得到:

$$\alpha_x\alpha_1 = 0,\quad \alpha_x\gamma_1 = 0,\quad \alpha_x\delta_1 = 0.$$

由此可知 $\alpha_x = 0$，否则，若 $\alpha_x \neq 0$，则 $R(1) = 0$。因此，由 $R(g) + \lambda g = \alpha 1$，我们将得到 $-\lambda/2 = -\lambda$，这与假设矛盾。故，$\alpha_x = 0$。分别对数对 (x, gx) 和 $(1, g)$ 应用 Rota–Baxter 恒等式 (RB)，可得:

$$\alpha_{gx} = \alpha_x,\quad \text{and}\quad \alpha_1^2 = \lambda^2/4.$$

分别考虑数对 (1, x) 和 (x, 1) 对应的恒等式，可得：

$$\begin{cases} R(R(x)+\lambda x)=\alpha_1(\gamma_{gx}+\delta_x)x+\alpha_1(\delta_{gx}-\gamma_x)gx, \\ R(R(x)+\lambda x)=\alpha_1(\delta_x-\gamma_{gx})x+\alpha_1(\gamma_x-\delta_{gx})gx, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \gamma_{gx}=0, \\ \gamma_x=\delta_{gx}. \end{cases}$$

对数对 (1, gx) 和 (gx, 1) 重复相同的推理，我们得到 $\delta_x = 0$。因此，我们有：

$$(\gamma_x+\lambda)R(x)=0, \quad (\gamma_x+\lambda)R(gx)=0.$$

由于该算子的核维数为 1，因此可得 $\gamma_x \neq 0$，进而得到$\gamma_x = -\lambda$。为完成证明，考虑数对 (1, 1) 对应的 Rota–Baxter 恒等式。我们得到： $2\alpha_1\gamma_g + \lambda\gamma_1 = 0$, $2\alpha_1\delta_g + \lambda\delta_1 = 0$. 因此，得到算子 (1) 和 (2)。

最后注意，在自同构

$$\varphi(g) = g + \frac{2\gamma_g}{\lambda}x + \frac{2\delta_g}{\lambda}gx,\ \varphi(x) = x,$$

下，具有任意 γ_g 和 δ_g 的算子(1)与具有 $\gamma_g = \delta_g = 0$的算子 (1) 共轭。算子 (2) 的情形也相同；只需考虑自同构

$$\psi(g) = g - \frac{2\gamma_g}{\lambda}x - \frac{2\delta_g}{\lambda}gx,\ \psi(x) = x. \qquad \square$$

T定理 10. 令 $\operatorname{im} R = \langle 1, x, gx\rangle$。则有以下算子：

$$\text{(1a)} \quad \begin{array}{llll} R(1) & = & -\lambda 1, & R(x) & = & -\lambda x, \\ R(g) & = & -\lambda 1+\gamma_g x+\delta_g gx, & R(gx) & = & -\lambda gx. \end{array}$$

$$\text{(1b)} \quad \begin{array}{llll} R(1) & = & -\lambda 1, & R(x) & = & -\lambda x, \\ R(g) & = & \lambda 1+\gamma_g x+\delta_g gx, & R(gx) & = & -\lambda gx. \end{array}$$

证明. 令 $R(1) = \alpha_1 1 + \gamma_1 x + \delta_1 gx$, $R(g) = \alpha_g 1 + \gamma_g x + \delta_g gx$, $R(x) = \alpha_x 1 + \gamma_x x + \delta_x gx$, $R(gx) = \alpha_{gx} 1 + \gamma_{gx} x + \delta_{gx} gx$。考虑数对 ($x$, x) 和 (gx, gx) 的 Rota–Baxter 恒等式 (RB)：

$$R(x)R(x) = 2\alpha_x R(x), \quad R(gx)R(gx) = 2\alpha_{gx} R(gx).$$

由此可得 $\alpha_x = \alpha_{gx} = 0$。

现在考虑数对 (1, 1) 和 (g, g) 的 Rota–Baxter 恒等式 (RB)。我们得到：

$$\begin{cases} \alpha_g^2 + \lambda\alpha_1 = 0, \\ \gamma_1 = \delta_1 = 0, \end{cases} \qquad \alpha_1(\alpha_1 + \lambda) = 0.$$

注意到 $\alpha_1 \neq 0$。事实上，假设 $\alpha_1 = 0$；则 $\ker R = k1$ and $\alpha_g = 0$。在这种情况下，要么$R(g)$ 与 $R(x)$ 和 $R(gx)$ 线性相关，要么 $R(x)$ 和 $R(gx)$ 线性相关。这与核的维数为 1 矛盾。因此， $\alpha_1 = -\lambda$，所以 $\alpha_g^2 = \lambda^2$。

最后，数对 (1, g)、(1, x) 和 (1, gx) 满足的 Rota–Baxter 恒等式推出：

$$R(R(g)+\lambda g) = 0, \quad R(R(x)+\lambda x) = 0, \quad R(R(gx)+\lambda gx) = 0.$$

由于核的维数为 1，元素 $R(g)+\lambda g$ 和 $R(x)+\lambda x$ 必须线性相关。因此， $R(x) + \lambda x = 0$, 因为显然不存在非零标量可以使它们线性相关,

否则便会使它们线性相关。类似地，$R(gx)+\lambda gx=0$。注意，(1a) 和 (1b) 在自同构的作用下属于同一轨道：

$$f(g)=-g-\frac{2\gamma_g}{\lambda}x,\quad f(x)=x.$$

还要注意，任意 γ_g 和 δ_g 对应的算子 (1a)，与 $\gamma_g=\delta_g=0$ 对应的算子 (1a) 在以下自同构下共轭

$$\varphi(g)=g+\frac{\gamma_g}{\lambda}x+\frac{\delta_g}{\lambda}gx,\ \varphi(x)=x.$$

证明到此结束。 □

定理11. 设 $\mathrm{im}\,R=\langle 1,g,x-gx\rangle$。则有以下算子：

$$\text{(1a)}\quad \begin{array}{llll} R(1) &= -\lambda 1, & R(x) &= -\beta_{gx}1+\beta_{gx}g+\gamma_{gx}(x-gx),\\ R(g) &= -\lambda g, & R(gx) &= -\beta_{gx}1+\beta_{gx}g+(\gamma_{gx}+\lambda)(x-gx).\end{array}$$

$$\text{(1b)}\quad \begin{array}{llll} R(1) &= -\lambda 1, & R(x) &= \beta_{gx}1+\beta_{gx}g+\gamma_{gx}(x-gx),\\ R(g) &= -\lambda g, & R(gx) &= \beta_{gx}1+\beta_{gx}g+(\gamma_{gx}+\lambda)(x-gx).\end{array}$$

$$\text{(2a)}\quad \begin{array}{llll} R(1) &= -\frac{3\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g+\gamma_g(x-gx), & R(x) &= -\frac{\lambda}{2}(x-gx),\\ R(g) &= \frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g-\gamma_g(x-gx), & R(gx) &= \frac{\lambda}{2}(x-gx).\end{array}$$

$$\text{(2b)}\quad \begin{array}{llll} R(1) &= -\frac{3\lambda}{2}1+\frac{\lambda}{2}g+\gamma_g(x-gx), & R(x) &= -\frac{\lambda}{2}(x-gx),\\ R(g) &= -\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g+\gamma_g(x-gx), & R(gx) &= \frac{\lambda}{2}(x-gx).\end{array}$$

证明. 设 $R(1)=\alpha_1 1+\beta_1 g+\gamma_1(x-gx)$，$R(g)=\alpha_g 1+\beta_g g+\gamma_g(x-gx)$，$R(x)=\alpha_x 1+\beta_x g+\gamma_x(x-gx)$，$R(gx)=\alpha_{gx}1+\beta_{gx}g+\gamma_{gx}(x-gx)$。将 Rota–Baxter 恒等式 (RB) 分别应用于数对 (g,g)、(x,x) 和 (gx,gx)，得到：

$$(\beta_g^2-\alpha_g^2)1=(2\beta_g+\lambda)R(1),\quad \alpha_x^2=\beta_x^2,\quad \alpha_{gx}^2=\beta_{gx}^2.$$

我们考虑两种情况：$2\beta_g+\lambda=0$ 和 $2\beta_g+\lambda\neq 0$。先假设 $2\beta_g+\lambda\neq 0$。则 $R(1)=\alpha 1$，由数对 (1, 1) 的 Rota–Baxter 恒等式可得$\alpha(\alpha+\lambda)=0$。若 $\alpha=0$，则核 $R=k1$，且 $R(R(x)+\lambda x)=0$，这意味着$R(x)+\lambda x=\beta 1$，从而得到 $\gamma_x=-\lambda$，$\gamma_x=0$，矛盾。因此，$\alpha=-\lambda$，即$R(1)=-\lambda 1$。

现在，考虑数对 $(1,g)$ 和 $(1,x)$ 的 Rota–Baxter 恒等式，我们得到：

$$R(R(g)+\lambda g)=0,\quad R(R(x)+\lambda x)=0.$$

因此 $\beta(R(g)+\lambda g)=\gamma(R(x)+\lambda x)$，其中 $\beta\neq 0$ 或 $\gamma\neq 0$。若 $\gamma\neq 0$，则 $\beta\gamma_g=\gamma_x+\lambda$，$\beta\gamma_g=\gamma_x$，这意味着 $\lambda=0$，矛盾。若 $\beta\neq 0$，则 $\gamma_g=\gamma\gamma_x+\gamma\lambda$,$\gamma_g=\gamma\gamma_x$，这意味着 $\gamma=0$，因此 $R(g)=-\lambda g$。

由于 $R(x)+\lambda x$ 和 $R(gx)+\lambda gx$ 线性相关，因此存在 $\widetilde{\alpha},\beta$ 使得

$$\widetilde{\alpha}(R(x)+\lambda x)=\widetilde{\beta}(R(gx)+\lambda gx).$$

由此得到方程组：

$$\begin{cases}\widetilde{\alpha}\gamma_x+\widetilde{\alpha}\lambda=\widetilde{\beta}\gamma_{gx},\\ -\widetilde{\alpha}\gamma_x=-\widetilde{\beta}\gamma_{gx}+\widetilde{\beta}\lambda,\end{cases}\Longrightarrow\lambda(\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta})=0\Longrightarrow\widetilde{\alpha}=\widetilde{\beta}.$$

因此，$R(x)+\lambda x=R(gx)+\lambda gx$，这给出 $\gamma_{gx}=\gamma_x+\lambda$，$\alpha_x=\alpha_{gx}$，$\beta_x=\beta_{gx}$. 由此我们得到了算子 (1a) 和 (1b)。

现在假设 $2\beta_g+\lambda=0$。那么 $\alpha_g^2=\beta_g^2$。考虑数对 $(1,x)$ 和 (g,x) 对应的 Rota–Baxter 恒等式。我们得到：

$$\begin{cases}\beta_x(\beta_1-\alpha_g)=(\alpha_1+\gamma_x+\lambda)\alpha_x+(\beta_1-\gamma_x)\alpha_{gx},\\ \beta_x(\gamma_x+\frac{\lambda}{2})+(\beta_1-\gamma_x)\beta_{gx}=0,\\ \beta_x(\gamma_1-\gamma_g)=\gamma_x(\beta_1+\lambda+\gamma_x)+(\beta_1-\gamma_x)\gamma_{gx},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_x(\alpha_1+\frac{\lambda}{2})=(\gamma_x-\alpha_g)\alpha_x-(\gamma_x+\frac{\lambda}{2})\alpha_{gx},\\ \beta_x(\beta_1-\gamma_x)+(\gamma_x+\frac{\lambda}{2})\beta_{gx}=0,\\ \beta_x(\gamma_g-\gamma_1)=(\gamma_x+\frac{\lambda}{2})(\gamma_{gx}-\gamma_x),\end{cases}$$

分别。将每个方程组中的第二个和第三个方程相加，得到：

$$\begin{cases}(2\beta_1+\lambda)(\beta_x+\beta_{gx})=0,\\ (2\beta_1+\lambda)(\gamma_x+\gamma_{gx})=0.\end{cases}$$

类似地，考虑数对 $(x,1)$ 和 (x,g)，我们得到：

$$\begin{cases}(2\beta_1-\lambda)(\beta_x+\beta_{gx})=0,\\ (2\beta_1-\lambda)(\gamma_x+\gamma_{gx})=0.\end{cases}$$

因此，$\beta_x+\beta_{gx}=0$ 和 $\gamma_x+\gamma_{gx}=0$。考虑数对 $(x,1)$ 对应的 Rota–Baxter 恒等式：

$$\begin{cases}\beta_x(\beta_1-\alpha_g)=(\alpha_1+\gamma_x+\lambda)\alpha_x-(\beta_1+\gamma_x)\alpha_{gx},\\ \beta_{gx}(\gamma_x+\beta_1)-(\frac{\lambda}{2}+\gamma_x)\beta_x=0,\\ \beta_x(\gamma_1+\gamma_g)=-\gamma_x(\lambda-\beta_1+\gamma_x)+(\beta_1+\gamma_x)\gamma_{gx}.\end{cases}$$

将此与先前关于 $(1,x)$ 的方程组相结合，我们得出：

$$\beta_1\alpha_{gx}=0,\ \beta_1\beta_{gx}=0,\ \gamma_1\beta_{gx}=0.$$

假设 $\beta_1=0$。那么 $\gamma_1\neq0$，否则 $R(1)=\alpha 1$，这将意味着 $R(g)=-\lambda g$，与 $2\beta_g+\lambda=0$ 这一事实矛盾。因此，$\beta_{gx}=\beta_x=\alpha_x=\alpha_{gx}=0$。考虑数对 $(1,g)$ 的 Rota–Baxter 恒等式的第二个坐标，我们有 $\beta_g(\beta_g+\lambda)=0$。矛盾。因此 $\beta_1\neq0$。我们有 $\beta_{gx}=\beta_x=\alpha_x=\alpha_{gx}=0$，且 $\ker R=\langle x+gx\rangle$。显然，$\gamma_x\neq0$，这意味着 $\gamma_x=-\lambda/2$。最后，数对

(1, 1) 和 (1, g) 的 Rota–Baxter 恒等式给出如下结果:

$$\begin{cases}(2\alpha_1+\lambda)(\alpha_g+\beta_1)=0,\\ \lambda^2-4\beta_1^2=0,\\ (\lambda-2\beta_1)(\gamma_1+\gamma_g)=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1(\lambda+\alpha_1)+2\alpha_g\beta_1-\beta_1^2=0,\\ \lambda\gamma_1-2\beta_1\gamma_g=0.\end{cases}$$

显然， $2\alpha_1+\lambda\neq 0$，否则我们将得到 $R(1)$ 与 $R(g)$ 线性相关，这将意味着 dim ker $R=2$。因此， $\alpha_g=-\beta_1$ 和 $(\alpha_1+\lambda/2)^2=\lambda^2$。我们得到了算子 (2a) 和 (2b)。

算子 (1a) 和 (1b) 在反自同构 $\psi(g)=-g$, $\psi(x)=-x$. 下互为共轭。算子 (2a) 和 (2b) 在反自同构 $\psi(g)=-g$, $\psi(x)=x$. 下也互为共轭。

注意，在自同构下

$$\varphi(g)=g-\frac{2\gamma_g}{\lambda}x+\frac{2\gamma_g}{\lambda}gx,\ \varphi(x)=x,$$

任意 γ_g 下的算子 (2a) 与 $\gamma_g=0$ 下的算子 (2a) 共轭。 □

5. Dimension of kernel is 0

定理 12. 设 ker $R=0$。则有以下算子:

(1) $R(1)=-\lambda 1$, $R(x)=-\lambda x$, $R(g)=-\lambda g$, $R(gx)=-\lambda gx$.

(2a) $R(1)=-\frac{3\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g+\gamma_g x+\delta_g gx$, $R(x)=-\lambda x$, $R(g)=-\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g-\gamma_g x-\delta_g gx$, $R(gx)=-\lambda gx$.

(2b) $R(1)=-\frac{3\lambda}{2}1+\frac{\lambda}{2}g+\gamma_g x+\delta_g gx$, $R(x)=-\lambda x$, $R(g)=-\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g+\gamma_g x+\delta_g gx$, $R(gx)=-\lambda gx$.

证明。由于$(\beta_g^2-\alpha_g^2)1=(2\beta_g+\lambda)R(1)$，对$(g,g)$应用(RB)，可得两种情况：要么 $2\beta_g+\lambda=0$，要么 $2\beta_g+\lambda\neq 0$。如果 $2\beta_g+\lambda\neq 0$，那么 $R(1)=-\lambda 1$。因此$R(g)+\lambda g=0$, $R(x)+\lambda x=0$, $R(gx)+\lambda gx=0$。我们得到了算子(1)。

令 $2\beta_g+\lambda=0$。则 $\alpha_g^2=\beta_g^2$。考虑表达式 $R(1)R(x)-R(x)R(1)$ 和$R(1)R(gx)-R(gx)R(1)$。我们有

$$\begin{cases}\beta_1\alpha_{gx}=0,\\ \beta_1\beta_{gx}=0,\\ \beta_x\delta_1=\beta_1(\delta_x-\gamma_{gx}),\\ \beta_x\gamma_1=\beta_1(\gamma_x-\delta_{gx}),\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_1\alpha_x=0,\\ \beta_1\beta_x=0,\\ \beta_{gx}\delta_1=\beta_1(\delta_{gx}-\gamma_x),\\ \beta_{gx}\gamma_1=\beta_1(\gamma_{gx}-\delta_x).\end{cases}$$

假设 $\beta_1=0$。由于元素 γ_1 或 δ_1 中至少有一个非零，因此我们有 $\beta_x=\beta_{gx}=0$和 $\alpha_x=\alpha_{gx}=0$。考察 (RB) 恒等式在有序对 $(1,g)$ 下的第二个坐标，可得 $\beta_g(\beta_g+\lambda)=0$。矛盾。因此 $\beta_1\neq 0$。我们有 $\alpha_x=\beta_x=\alpha_{gx}=$

$\beta_{gx}=0$ 和 $\delta_x=\gamma_{gx}$, $\delta_{gx}=\gamma_x$。比较表达式 $R(1)R(x)-R(g)R(x)$ 和$R(1)R(x)+R(g)R(x)$, 我们得到

$$(\gamma_x-\gamma_{gx})(\lambda+\gamma_x-\gamma_{gx})=0,\quad (\gamma_x+\gamma_{gx})(\lambda+\gamma_x+\gamma_{gx})=0.$$

显然， γ_x 不能等于 γ_{gx} 或 $-\gamma_{gx}$，否则 $R(x)$与 $R(gx)$之间将线性相关。因此， $\gamma_x=-\lambda$ 且 $\gamma_{gx}=0$。最后，对数对 (1, 1) 和 $(1,g)$应用 Rota–Baxter 恒等式，得到:

$$\begin{cases}(2\alpha_1+\lambda)(\alpha_g+\beta_1)=0,\\ \lambda^2-4\beta_1^2=0,\\ \lambda(\gamma_g-\delta_1)+\beta_1(\delta_g-\gamma_1)=0,\\ \lambda\gamma_1-2\beta_1(\gamma_g-\delta_1)-\lambda\delta_g=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1(\lambda+\alpha_1)+2\alpha_g\beta_1-\beta_1^2=0,\\ \lambda\gamma_1-2\beta_1\gamma_g=0,\\ \lambda\delta_1-2\beta_1\delta_g=0.\end{cases}$$

显然， $2\alpha_1+\lambda\neq 0$，否则$R(1)$与 $R(g)$之间将线性相关。因此， $\alpha_g=-\beta_1$ 且（$\alpha_1+\lambda/2)^2=\lambda^2$。我们得到了算子 (2a) 和 (2b)，它们在自同构的作用下共轭:

$$f(g)=-g+\frac{4\gamma_g}{\lambda}x,\quad f(x)=-x.$$

此外，注意到对于任意的 γ_g 和 δ_g，算子 (2a) 在自同构的作用下与 $\gamma_g=\delta_g=0$ 对应的算子 (2a) 共轭

$$\varphi(g)=g-\frac{2\gamma_g}{\lambda}x-\frac{2\delta_g}{\lambda}gx,\ \varphi(x)=x.$$ □

6. Dualization

我们将算子 $-\lambda\,\mathrm{id}-R$ 称为算子 R 的对偶算子。正如证明中直接得出的那样，我们得到的大多数算子都与参数无关。因此，计算它们的对偶算子既直接又简便。不过，也有一些算子依赖于某些参数。现在我们考察这些依赖参数的算子，并确定它们的对偶算子。考虑算子:

$$\begin{array}{rclrcl}R(1)&=&0,&R(x)&=&\alpha_x1+\alpha_xg-\lambda x,\\ R(g)&=&0,&R(gx)&=&\alpha_x1+\alpha_xg-\lambda gx\end{array}$$

及其对偶算子

$$\begin{array}{rclrcl}R(1)&=&-\lambda1,&R(x)&=&-\alpha_x1-\alpha_xg,\\ R(g)&=&-\lambda g,&R(gx)&=&-\alpha_x1-\alpha_xg.\end{array}$$

显然，如果 $\alpha_x=0$，那么对偶算子就是定理 7 中的某一个算子。如果 $\alpha_x\neq 0$，那么对偶算子的核为 2 维，其形式为 $\langle 1+g+\gamma x+\delta gx、\ x-gx\rangle$。其核同构于 $\langle 1-g、\ x-gx\rangle$。因此，当 $\beta_{gx}\neq 0$ 时，该对偶算子与定理 8 中的算子（3）共轭。

定理5和定理6中的算子也有类似的情况：它们的对偶分别与定理 8 中带有 $\beta_{gx}=0$ and $\gamma_{gx}\neq-\lambda/2$ 或 $\gamma_{gx}=-\lambda/2$ 的算子 (3) 共轭。

最后，考虑定理 8 中的算子 (1)：

$$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(x) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx, \\ R(g) & = & -\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(gx) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx \end{array}$$

及其对偶

$$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\frac{\lambda}{2}1+\frac{\lambda}{2}g, & & R(x) & = & -\frac{\lambda}{2}x+\frac{\lambda}{2}gx, \\ R(g) & = & \frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(gx) & = & \frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx. \end{array}$$

该算子与自身对偶，因为其对偶算子与定理 8 中的算子 (1) 共轭。最后，我们给出 Sweedler 代数 H_4 上所有非平凡 Rota–Baxter 算子的完整列表，按共轭和对偶化分类。

定理。除共轭和对偶化外，得到 Sweedler 代数上的以下非平凡 Rota–Baxter 算子：

(1) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & 0, & & R(x) & = & \alpha_x 1+\alpha_x g-\lambda x, \\ R(g) & = & 0, & & R(gx) & = & \alpha_x 1+\alpha_x g-\lambda gx, \quad \alpha_x\neq 0. \end{array}$$

(2) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & 0, & & R(x) & = & 0, \\ R(g) & = & -\lambda 1-\lambda g, & & R(gx) & = & -\lambda x-\lambda gx. \end{array}$$

(3) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & 0, & & R(x) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx, \\ R(g) & = & -\lambda 1-\lambda g, & & R(gx) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx. \end{array}$$

(4) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\lambda 1, & & R(x) & = & 0, \\ R(g) & = & -\lambda g, & & R(gx) & = & 0. \end{array}$$

(5) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\frac{3\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(x) & = & 0, \\ R(g) & = & \frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(gx) & = & 0. \end{array}$$

(6) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(x) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx, \\ R(g) & = & -\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(gx) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx. \end{array}$$

(7) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & \frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(x) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx, \\ R(g) & = & \frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(gx) & = & -\frac{\lambda}{2}x-\frac{\lambda}{2}gx. \end{array}$$

(8) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\lambda 1, & & R(x) & = & 0, \\ R(g) & = & -\lambda 1, & & R(gx) & = & 0. \end{array}$$

(9) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(x) & = & 0, \\ R(g) & = & -\frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(gx) & = & 0. \end{array}$$

(10) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & \frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(x) & = & 0, \\ R(g) & = & \frac{\lambda}{2}1-\frac{\lambda}{2}g, & & R(gx) & = & 0. \end{array}$$

(11) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & 0, & & R(x) & = & 0, \\ R(g) & = & -\lambda 1-\lambda g, & & R(gx) & = & 0. \end{array}$$

(12) $$\begin{array}{rclcrcl} R(1) & = & -\lambda 1, & & R(x) & = & \alpha_{gx} 1-\alpha_{gx} g-\lambda x, \\ R(g) & = & -\lambda 1, & & R(gx) & = & \alpha_{gx} 1-\alpha_{gx} g-\lambda gx, \quad \alpha_{gx}\neq 0. \end{array}$$

相关 代数上的 Rota–Baxter 算子 H_4 1 7

(13) $R(1) = -\lambda 1, \quad R(x) = -\frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda}{2}gx,$
$R \qquad\qquad R \qquad\qquad - \quad - \quad (g)$
$= -\lambda g, (gx) = -\frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda}{2}gx R(1) = -\lambda 1, \quad R$
(14) $(x) = 0, R(g) = -\lambda g, \quad R(gx) = \lambda x - \lambda gx.$

推论。来自 [7]（另请参阅引言）的 Rota–Baxter 算子具有以下性质：
(i) (a) 和 (b) 互为对偶，(ii) (c) 是平凡算子，(iii) (d) 与算子 (1) 共轭，(iv) (e) 与算子 (12) 共轭，(v) (f) 与算子 (3) 的对偶共轭，(vi) (g) 与算子 (1) 的对偶共轭，(vii) (h) 与算子 (7) 共轭。

References

[1] 格伦·E·巴克斯特。“一个解可由简单代数恒等式得到的分析问题”。载于：《太平洋数学杂志》10.3 (1960)，第 731–742 页。[2] 皮拉尔·贝尼托、弗谢沃洛德·古巴列夫和亚历山大·波日达耶夫。“二次代数上的 Rota–Baxter 算子”。载于：《地中海数学杂志》15.5 (2018 年 8 月)。ISSN：1660-5454。DOI：10.1007/s00009-018-1234-5。URL：http://dx.doi.org/10.1007/s00009-018
[3] 马克西姆·冈察洛夫。“余交换Hopf代数上的Rota–Baxter 算子”。载于：《代数杂志》582（2021年9月），第39–56页。ISSN：0021-8693。DOI：10.1016/j.jalgebra.2021.04.0URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.04.024。[4] 马克西姆·冈察洛夫、弗谢沃洛德·古巴列夫。“三阶矩阵代数上非零权的Rota–Baxter 算子”。载于：《线性与多重线性代数》70.6（2020年4月）第1055–1080页。ISSN：1563-5139。DOI：10.1080/03081087.2020.1751036。URL：http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2020.1751036。[5] 郭力。《Rota–Baxter代数引言》。萨默维尔，马萨诸塞州；北京，2012。[6] 郭力、郎宏雷、盛云鹤。“Rota–Baxter李代数的积分化与几何化”。载于：《数学进展》387（2021年8月），第107834页。ISSN：0001-8708。DOI：10.1016/j.aim.2021.107834。URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2021.1078[7] 马天水等。Turaev的Hopf群（余）代数上的Rota–Baxter 算子 I：基本定义及相关代数结构。2022。[8] Gian-Carlo Rota。“Baxter代数与组合恒等式。I”。载于：《美国数学会通报》75.2（1969），第325–329页。[9] 弗朗切斯科·G·特里科米。“论有限希尔伯特变换”。英文。载于：《数学季刊》，牛津第二辑2（1951），第199–211页。ISSN：0033-5606。DOI：10.1093/qmath/2.1.199。