arXiv:2602.03136v1 [math.AP] 3 Feb 2026

有界指标下的相变：与 De Giorgi猜想的相似之处

Enric Florit-Simon

Abstract. De Giorgi 的一个著名猜想受极小曲面 Bernstein 问题的类比启发，断言在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中， $d \leq 7$下 Allen–Cahn 方程的单调解具有刚性。

我们证明，对于一般的有界莫尔斯指标解，也存在与 De Giorgi猜想非常相似的结论，其强度远超极小曲面类比所能暗示的程度：具体而言，在 $\mathbb{R}^4$ 中，任何具有有界能量密度的 Allen–Cahn 方程有限指标解都是一维的；并且，若稳定解的分类成立，则对所有 $4 \leq n \leq 7$也同样成立。

作为一项几何应用，在闭四维流形中，具有有界能量和有界指标的相变具有光滑的过渡层，其表现类似于极小超曲面。

因此，相变在高维中表现出显著的刚性。这与三维情形形成鲜明对比：在三维情形中，Del Pino–Kowalczyk–Wei 开创性的研究反而表明，存在大量具有有限指标（和有限能量密度）的非平凡整体解。作者猜想，这类解的端必定彼此平行，且为平面端或悬链面状端，并据此提出了这一框架下与 De Giorgi猜想相对应的猜想。我们在有界能量密度的假设下证实了这一图景。

目录

1 引言 **2**
1.1 极小曲面与相变 .21.2 猜想图景 .31.3 主要结果 .41.4 证明概述 .6

2 文献中的已有结果 **8**
2.1 关于临界点的若干一般结果 .82.2 稳定解的曲率估计 .92.3 平坦设定下的 Wang–Wei.10

3 超曲面平坦度的环形改进 10
3.1 设定与主要结果 .103.2 归约到迭代结果 .113.3 建立迭代结果——命题 3.6 的证明 .14

4 有限指标 Allen–Cahn 解的结构17
4.1 图像性.174.2 粘合近似的改进.19

5 主要结果的证明23
5.1 $4 \leq n \leq 7$ 的刚性——定理 1.1 和 1.2 的证明.235.2 闭 4 维流形中的行为——推论 1.3 的证明.255.3 $n = 3$ 的结构——定理 1.4 的证明.25

参考文献 **31**

1 引言

1.1 极小曲面与相变

极小曲面是面积泛函的临界点，也是几何优化中最基本的模型之一。因此，变分分析与几何中的一个核心问题，便是极小曲面的存在性、正则性及其行为。

一个密切相关的模型是Allen–Cahn（Allen-Cahn方程）泛函，于20世纪70年代作为二元合金的相场模型引入 [AC72]。设

$$\mathcal{E}^{\varepsilon}(u,\Omega)=\frac{1}{\sigma_{n-1}}\int_{\Omega}\left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^{2}+\frac{1}{\varepsilon}W(u)\right)dx, \tag{1}$$

其中 $u:\Omega\to\mathbb{R}$，$\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ 为开集，且 σ_{n-1} 定义于（11）。本文采用显式双阱势$W(u)=\frac{1}{4}(1-u^{2})^{2}$。

临界点 u_{ε}（$\mathcal{E}^{\varepsilon}$ 的）满足Allen–Cahn 方程：

$$-\varepsilon\Delta u_{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}W'(u_{\varepsilon})=0. \tag{2}$$

作为一种一般性的观点，人们预期过渡层 $\{|u_{\varepsilon}|\le 0.9\}$ 在 $\varepsilon\to 0$时趋于极小超曲面，可能是在广义意义下。这一深刻联系构成著名的De Giorgi猜想的核心[Gio78]——在此设定下，它平行于关于极小图的伯恩斯坦猜想——而其在变分法、相变以及 Γ-收敛等现代理论发展中的重要性，无论如何强调都不为过：

猜想A (De Giorgi)。设 $3\le n\le 7$，并设 $u:\mathbb{R}^{n+1}\to[-1,1]$ 是满足 $\partial_{x_{n+1}}u>0$ 的 *Allen–Cahn* 方程的解。那么，u 是一维的。

情形 $n=2$ 已在以下文献中得到解决：[GG98]；[AC00]。

本文旨在研究并阐明第 1.2 节回顾的部分猜想图景，涉及它与极小曲面的联系。

我们在第 1.3 节陈述主要结果。我们证实了一些长期以来备受期待的类比，同时也给出了迄今为止在这一背景下与极小曲面理论的背离 最有力的实例，尤其是在高维情形。基于这些新证据，我们在第1.3节提出一个统一的“有限指标De Giorgi猜想”——它显著强化了4至7维中的德乔治原始猜想，我们认为这一猜想很可能成立。

为了引出我们的结果，若干重要进展值得着重指出。

- 该理论从能量极小者与 Γ-收敛的视角出发，Modica–Mortola的工作是最早的例子之一 [MM77]。更近以来，受颇具影响的De Giorgi猜想 [Gio78],推动，由Caffarelli–C´ordoba与Savin的工作表明，能量极小者的正则性在维数上界以内复现了面积极小超曲面的正则性 7 [CC95; CC06; Sav09]。8维中极小者刚性的否定对应由 Pacard–Wei与Liu–Wang–Wei [PW13; LWW17]借助粘接构造建立。相关技巧导致了De Giorgi猜想在9维中的否定结果，这由Del Pino–Kowalczyk–Wei的工作 [PKW11], 给出，同时也得到整体解的许多其他例子[PKW13]。

- 早期理论的另一项重要成果，是莫迪卡发现了一个适用于一般临界点[Mod85a；Mod87]。随后，哈钦森、米濑川和维克拉马塞克拉建立了该理论与广义极小曲面理论（即平稳积分变分）之间的深刻联系 [Hut86；HT00；Ton05；TW12], ，并借助了面积正则性理论中的重大突破 [Wic14]。

- 从几何角度来看，近年来，围绕丘成桐猜想（关于闭流形中极小超曲面的存在性）的研究蓬勃发展。这一研究始于 Gaspar 和 Guaraco 极其简单的构造：他们构造了极小极大解——这些解自然满足能量和莫尔斯指标的界——且处于 Allen–Cahn 层次 [Gua18；GG18；GG19]。当下最迫切的问题之一，是更深入地理解这类解。Wang–Wei 和 Chodosh–Mantouldis 在[WW19a；WW19b；CM20], 中取得了重要进展，而 Serra 与作者近期的工作见 [FS25]。

本文在很大程度上受到这些后续发展的推动，并充分运用了 [WW19a；WW19b；CM20] 中的方法。我们研究成果中的另一个共同主题（见第 1.4 节概述）是超越 尺度不变估计 所适用的范围，从而利用极小超曲面的自然尺度与所谓 Toda 系统解的自然尺度之间的相互作用（在某些情况下则是 不匹配）；Toda 系统刻画了

过渡层之间的相互作用）。这使我们得以突破 Allen–Cahn理论所特有的一些根本性障碍——其中一部分障碍早已在 [FS25] 中被指出。

1.2 猜想图景

我们回顾若干有影响的猜想及其进展，并始终强调它们与极小曲面理论的联系。

我们回顾，莫尔斯指标——解 u_ε 关于（2）在 Ω 中——是

$$\sup\left\{\dim E\colon E\subset C_c^1(\Omega) \text{ 是一个线性子空间，且 } Q(\eta,\eta)<0 \text{ 对所有 } \eta\in E\setminus\{0\}\right\},$$

其中

$$Q(\eta,\eta)=\frac{1}{\sigma_{n-1}}\int_\Omega\left(\varepsilon|\nabla\eta|^2+\frac{1}{\varepsilon}W''(u_\varepsilon)\eta^2\right)dx\,. \tag{3}$$

正如我们即将说明的，稳定解——即那些具有零指标的解——预期是高度刚性的，至少在低维数下如此；另一方面，具有无穷指标的解则极为灵活，因为它们的零水平集可以具有任意拓扑的紧连通分支 [EP16]。因此，人们预期莫尔斯指标是复杂性的一个适当测度。

除非另有说明，我们始终考虑满足$\varepsilon=1$ 的 Allen–Cahn 方程解 $u\colon\mathbb{R}^n\to[-1,1]$（并用 $\mathcal{E}$ 表示其能量，而非 $\mathcal{E}^1$）：

$$-\Delta u+W'(u)=0\,. \tag{4}$$

一个由来已久的猜想（参见 [Wan21，问题 6] 和 [PKW09； PKW12； CW18]），它与极小超曲面理论中如今已成为经典的结果（[CSZ97； LW02]）相类似，是：

猜想B（有限指标蕴含有限端）。设 $n\geq 3$，且设 $u\colon\mathbb{R}^n\to[-1,1]$ 是 *Allen–Cahn* 方程的有限*Morse*指标解。那么，u 有有限多个端，也就是说，存在某个 $R_0>0$，使得 $\{u=0\}$ 在 $\mathbb{R}^n\setminus B_{R_0}$中有有限多个连通分支。

而情形[1] $n=2$ 如今已成为一个定理，该结果出自一篇杰出的论文 [WW19a]。

注（丘成桐猜想）。在二维情形中发展出的方法，已经产生了更广泛而深远的应用，彰显了解决猜想 B 的意义。一个突出的例子是，*[WW19a]* 中的证明，其主要步骤之一是对满足适当层化假设的稳定解作出精确描述。*Chodosh* 和 *Mantoulidis* 在突破性论文 *[CM20]*，中将其加强并推广至三维；借此，他们首次解决了 *Marques–Neves* 关于极小曲面的 *Allen–Cahn* 逼近的重数一猜想和莫尔斯指标猜想。这在一般情形下，为丘成桐关于闭三维流形中存在无穷多个极小曲面的关键猜想 *[Yau82]*带来了一个强形式。关于最终解决丘成桐猜想的相关进展，参见 *[MN16； IMN18； LMN18； Zho20； Son23]*及其中的参考文献。

在极小超曲面的情形下，实际上已知的结果要丰富得多。将 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的点记为 x'，因此 $\mathbb{R}^n$ 中的点具有 $x=(x',x_n)$ 的形式。在 [SSY75； SS81] 和 [Sch83； And84]，的基础上， [Tys89] 的工作表明（另见 [Fis85] 关于 $n=3$的情形）：

定理 C。设 $3\leq n\leq 7$。设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^n$ 是一个指标有限的嵌入的极小超曲面，满足面积$(\Sigma\cap B_R)\leq CR^{n-1}$，其中 C，且对所有 $R>0$ 均成立。那么，存在某些 $R_0>0$ 和 $N\in\mathbb{N}$，以及常数 b_i、c_i，对每个 $i=1$、...、N 均成立，使得：经过一次旋转后，我们可以写成

$$\Sigma\setminus\left(\overline{B'_{R_0}}\times[-R_0,R_0]\right)=\bigcup_{i=1}^N\operatorname{graph} f_i\,, \tag{5}$$

其中 $f_1<\ldots<f_N$。此外，若 $n=3$，则有

$$f_i=b_i+c_i\log|y|+O(|y|^{-1})\,,$$

而若 $4\leq n\leq 7$，则有

$$f_i=b_i+c_i|y|^{3-n}+O(|y|^{2-n})\,.$$

[1]在 [Wan21]中声称， *assuming* 稳定解的刚性方面 $\mathbb{R}^3$， [WW19a； GWW20] 中的技术可用于证明猜想B（即端的有限性），同样适用于 $n=3$。另一方面， [Wan21] 中还解释了这些技术无法应用于高维。

备注（面积密度界）。面积增长条件在常见应用中通常都能满足。然而，研究表明，在“经典”情形下，该条件实际上是多余的 $n=3$，见 *[CP79; FS80; Pog81]* 以及 *[Gul86; Fis85; Oss64]*。更近一些，这一点连同稳定伯恩斯坦猜想——即在 $\mathbb{R}^n$ 中，所有稳定极小超曲面均为超平面的分类结论——也已对 $n=4$、*5*、*6*得到证明，见 *[CL24; CLMS; Maz24]*（另见*[CL23; CMR24]*）。

值得指出的是，*Allen–Cahn*方程稳定整体解的分类——通常称为稳定（或强）*De Giorgi*猜想；该猜想特别意味着，在多一个维度时，德乔治原始猜想也成立：*[JM04; Sav09]*——而在 $n=3$中，这个问题却仍远未解决。不过，参见 *[FS20; CFFS25]*，其中针对若干与该问题密切相关的变体给出了肯定结果。

自然会想到，Allen–Cahn情形下是否也存在定理C 的适当类比。例如，我们记录 [PKW13第 127], 页中的猜想 (1)。作者提出该猜想，作为这一框架下 De Giorgi猜想的平行版本（另见 [PKW09; PKW12]）：

猜想D (DelPino–Kowalczyk–Wei)。若 u *[是* $\mathbb{R}^3$*]* 中的*Allen–Cahn*方程的一个解，具有有限*Morse*指标，并且$\nabla u(x) \neq 0$ 在一个有界集合之外成立，那么在一个大球之外，u 的每个水平集都必须有有限个连通分支；每个连通分支都渐近于一个平面或一个悬链面。经过坐标系旋转后，所有这些连通分支都是关于同一对变量的函数图像。

1.3 主要结果

我们的第一个结果是在四维情形下对 De Giorgi猜想的完整平行版本，从而打破了与极小超曲面的类比。

定理 1.1 (分类，$\mathbb{R}^4$)。设 $u:\mathbb{R}^4\to[-1,1]$ 是 *Allen–Cahn* 方程的有限指标解，满足 $\mathcal{E}(u,B_R)\le CR^3$，其中常数为 C，且对所有 $R>0$均成立。那么，u 是一维的。
*I*换言之，u 要么恒等于 ±1，要么具有如下形式：$\tanh\left(\frac{e\cdot x-s_0}{\sqrt{2}}\right)$ 其中 $e\in\mathbb{S}^3$ 是单位向量，$s_0\in\mathbb{R}$为常数。

事实上，我们在维数为 $4\le n\le 7$时得到了一个尖锐的条件性结果：

定理 1.2 （条件分类）。固定 $n\in\mathbb{N}$，满足 $4\le n\le 7$，并假设 （$\star$）在下文中对 $\mathbb{R}^n$ 成立。设$u:\mathbb{R}^n\to[-1,1]$ 为 *Allen–Cahn* 方程的有限指标解，且 $\mathcal{E}(u,B_R)\le CR^{n-1}$ 对某个常数 C及所有 $R>0$ 成立。则 u 是一维的。

> 设 $u:\mathbb{R}^n\to[-1,1]$ 为 *Allen–Cahn* 方程的稳定解，且 $\mathcal{E}(u,B_R)\le CR^{n-1}$
> 对某个常数 C 及所有 $R>0.$ 成立。则 u 是一维的。 ($\star$)

下述（$\star$）中的分类结果对 $n\le 3$ 成立，由 [AAC01; AC00]给出。最近的文章 [FS25] 由 Serra 与作者完成，证实（$\star$）对 $n=4$ 亦成立，从而表明定理 1.1 可由定理 1.2 推出。

基于这些证据，我们认为提出以下猜想并非异想天开：

猜想 E (有限指标De Giorgi猜想)。设 $4\le n\le 7$，且令 $u:\mathbb{R}^n\to[-1,1]$ 为 *Allen–Cahn* 方程的有限*Morse*指标解。那么，u 是一维的。

据我们所知，文献中从未提出过这一猜想，这与猜想 B等较弱的变体不同。不过，我们可以指出另外两项已有成果，它们可视为支持该猜想的有力证据，而且与本文尤为相关：

- 如今，已知许多三维有限指标极小曲面例子（以及相应的 Allen–Cahn 解[PKW13; APW15; GLW17]）。另一方面，在维数 $n\ge 4$ 中，已知的极小超曲面例子已经少得惊人；在其中的有限指标例子中，我们特别指出高维悬链面（它是轴对称的）以及通过拼接方法得到的 Fakhi–Pacard例子 [FP00]。在相变背景下，论文 [APW16] 构造了 Allen–Cahn 方程的轴对称解，其零水平集是高维悬链面的对数扰动。然而，研究表明，这些解在维数 $4\le n\le 10$中反而具有无穷指标。

- 在 [GWW20], 中，作者研究了 $\mathbb{R}^n$中满足$3\le n\le 10$的 Allen–Cahn 方程的一般轴对称解。自然的例子包括上述文章中构造的悬链面解——我们回顾一下，在极小超曲面的情形中，唯一具有轴对称性的完备、连通、嵌入的极小超曲面正是（广义）悬链面。

[GWW20] 中的结果证实，所有这类例子中观察到的行为，在有限指标情形下也适用于轴对称解这一类：事实上，在 $4 \le n \le 10$ 三维情形中，作者证明这类解只有有限多个端；而在维数B 和 E中，他们证明任何这类解都必定是一维的。特别是，这证实了轴对称情形下维数不超过 10 时的猜想E。需要强调的是，至少对于猜想E而言，限制 $n \le 7$ 一般来说是必要的：例如，在 $\mathbb{R}^8$ 中存在能量极小解（因此尤其是有限指标解），其过渡水平集渐近于 Simons 锥的 Bombieri–De Giorgi–Giusti 叶状分解中的一片叶[Sim68；BDG69], 参见 [PW13；LWW17]。

一个几何应用W e 记录 d a di 直接应用 li

定理 1.1的应用，而这在三维情形中似乎毫无希望。从本质上说，这表明，在四维中，具有有界能量和指标的解的过渡层[2]总是表现得像光滑的极小超曲面。

推论 1.3（闭 4 维流形中的行为）。设 M^4 是一个闭的[3]，四维黎曼流形。设 u_ε 是其上的 ε-*Allen–Cahn* 方程的一个解，且

$$\mathcal{E}^\varepsilon(u_\varepsilon, M) := \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_M \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) \le E_0$$

莫尔斯指标有界于 I_0。

那么，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M, E_0, I_0) > 0$，使得：如果 $\varepsilon \le \varepsilon_0$，那么

$$\{u_\varepsilon = t\} \quad \textit{is a smooth hypersurface for every} \quad |t| \le 0.9 \,.$$

事实上，存在某个 $c = c(M, E_0, I_0) > 0$，使得 $|\nabla u_\varepsilon| \ge \frac{c}{\varepsilon}$ 在 $\{|u_\varepsilon| \le 0.9\}$中。*A*

iven $\Lambda \ge 1$, *up to maki*$_{ng\ \varepsilon_0\ sma}$ *ller—dependi*^{ng} 现在 *a* l等等 Λ—*the following hold:*

此外，*g*

- **缓慢曲率退化：**我们有 $\mathcal{A}_{u_\varepsilon} \le \frac{1}{\Lambda \varepsilon}$ 在 $\{|u_\varepsilon| \le 0.9\}$。 —
- **片层分离：**对于每个 $p \in \{|u_\varepsilon| \le 0.9\}$，令 $t = u_\varepsilon(p)$，集合 $\{u_\varepsilon = t\} \cap B_{\Lambda\varepsilon}(p)$ 在法坐标中由单个连通图像构成。

上面的第一条要点表明，对于满足推论中条件 u_ε 且有 $\varepsilon \to 0$的序列，其曲率集中（“泡”）的唯一可能模型，是 $\mathbb{R}^4$中的一个有界指标极小超曲面。探究能否由此得出更多几何结论将颇有意义；例如，一个自然的问题是，能否根据解的能量和指标来控制水平集的拓扑，这与[CKM17]或 [BS18]中的结果相呼应。

三维情形

如上所述，先前结果所揭示的高维行为不仅与极小超曲面理论大相径庭，也与三维 *Allen–Cahn*理论本身截然不同——在该理论中，人们已通过拼接方法构造出大量具有有限指标和密度的解。

事实上，对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意一个完备、非退化、嵌入的有限指标极小曲面，根据[PKW13]，都存在一个具有相同指标的整体艾伦–卡恩解，其零水平集是该曲面的对数扰动。特别是，所有这类例子都有有限个平行端；根据构造，这些端渐近于一个平面或一个悬链面，因此作者提出了猜想 D (另见综述 [PKW09；PKW12])。

我们的最终结果证实了这一猜想对于具有二次能量增长的解成立，验证了其与极小曲面之间的类比，并表明对于 C，存在与定理 $n = 3$ 更为接近的对应结果。

定理 1.4 ($\mathbb{R}^3$中的结构)。设 $u : \mathbb{R}^3 \to [-1, 1]$ 是一个 *Allen–Cahn* 方程的有限指标解，满足$\mathcal{E}(u, B_R) \le CR^2$，其中常数为 C，且对所有 $R > 0$均成立。那么，u 有有限个平行端，这些端要么是平面状的，要么是悬链面状的。更确切地说，存在某些 $R_0 > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$，以及常数 b_i, c_i，对每个 $i = 1, ..., N$均成立，使得：经过一次旋转后，我们可以写成

$$\{u = 0\} \setminus \left(\overline{B'_{R_0}} \times [-R_0, R_0] \right) = \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{graph} f_i \,, \tag{6}$$

其中 $f_1 < ... < f_N$，

$$f_i = b_i + c_i \log |x'| + O(|x'|^{-\alpha}) \quad \textit{for some} \quad \alpha > 0 \,,$$

且对于每个 $i = 1,..., \bar{N} - 1$，都有 $|c_{i+1} - c_i| > \sqrt{2}$。

[2]例如，在 [Gua18；GG18]。[3]即紧致且无边界。

一个广为人知的相关问题（参见 [GLW17; PKW12] 以及 [PKW13 第 127] 页中的猜想 (2)）——我们在此不予讨论——是证明，具有两个“正则”端（或指标为一）的 $\mathbb{R}^3$ 中的解具有轴对称性，这与 [Sch83] 类似。我们希望本文的结果能为研究这一问题提供一个起点。

1.4 证明概述

我们着重说明，尽管定理1.2 和1.4 如所述具有最优性，为何仍可得出这两个结论。2.10。

考虑 $B_R \subset \mathbb{R}^n$ 中 Allen–Cahn 方程的一个稳定解，其能量密度有界，并假设它的零水平集分解为若干近乎平行层 Γ_i，且

$$|\mathrm{II}_{\Gamma_i}| = O(\frac{1}{R}) \quad \text{in} \quad B_{R/2}\,; \tag{7}$$

已知当 $n \le 7$ 且 $\star$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中成立时，这一点总是成立。

中 [WW19b] 工作的一个重要部分在于证明：令 H_i 表示 Γ_i 的平均曲率，并令 $d_{\Gamma_i,\Gamma_{i+1}}$ 表示适当的（带符号）距离函数，则有如下 Toda型系统

$$H_i = \kappa_0 \left(e^{-\sqrt{2}d_{\Gamma_i,\Gamma_{i-1}}} - e^{-\sqrt{2}d_{\Gamma_i,\Gamma_{i+1}}} \right) + Err, \quad \text{where} \quad Err = O(\frac{1}{R^2})\,. \tag{8}$$

一般而言，这个加性误差是最优的。通过层分离估计， [WW19b] 中的最终结论是，$e^{-\sqrt{2}d_{\Gamma_i,\Gamma_{i-1}}} + e^{-\sqrt{2}d_{\Gamma_i,\Gamma_{i+1}}} = O(\frac{1}{R^2})$ 也成立。

因此，在这一点上，处理该方程

$$H = O(\frac{1}{R^2}) \tag{9}$$

反而只是等价于(8)，并且最优，如所述。特别地，不同连通分支之间的相互作用信息——我们曾从(8)中读出——在此之后便丢失了。

由此得到的一个主要认识是：利用稳定性所提供的估计来论证，例如(9)，仅在以远离原点的点为中心的球上——这在此类问题中是惯常做法——**不可能**使我们进而得出[4] 有限指标解在维数 $4 \le n \le 7$ 中的惊人刚性结果（定理1.4 中的精确渐近行为亦然）！ 有鉴于此，下面简要概述我们如何仍然得到这些结果：

- 设 $u\colon \mathbb{R}^n \to [-1,1]$， $n \le 7$，为一个具有有限指标的整体解，且 $\mathcal{E}(u,\ B_R) \le CR^{n-1}$ 对所有 $R > 0$成立，并假设 ($\star$)成立。有限指标条件等价于远离原点处的稳定性，进而推出(9)，适用于 u 在远离原点的球上的零水平集。

- Simons 分类 [Sim68]—应用于 $\{u = 0\}$ 的吹胀缩放（它们是稳定极小锥）——从而得出 $\{u = 0\}$ 在大尺度上是平坦的。
- 通过在环域上的平坦性改进迭代（针对偏微分方程（9）），我们进而证明了此类吹胀的唯一性，并将 $\{u = 0\}$ （远离一个大球的部分）分解为定义在同一个超平面上的函数图像的并集$f_1 < \ldots < f_N$。这个简单却强有力的想法可以应用于许多问题，但我们在文献中尚未发现相关用法：事实上，作者最初是从 X. Fern´andez-Real 和 J. Serra 那里听说这一想法的，当时讨论的是[CFFS25]。因此，我们将在 [FFS] 中给出这一技术的通用版本；不过，就本文而言，我们将在自成一体的第3节中，针对偏微分方程（9）推导这一结果（采用一种相关但不同的迭代式证明）。

- 此外，这种迭代还为 f_i的增长 f_i 给出了强次线性界；也就是说，$O(|x|^\delta)$的增长为 $\delta > 0$，对任意 $\delta > 0$均成立。这基本上仅凭（9）就已达到最优，但仍远未达到所期望的行为。
- 然而，我们可以借助 C^α WW19b [中的平均曲率估计]进行迭代提升，从而得到 $|\mathrm{II}_{\{u=0\}}| \lesssim |x|^{\delta-2}$；它将（7）中的曲率估计提升了近乎一个完整的幂次。值得注意的是，这一估计超出了“尺度不变”范围。

不过，上述所有结果也都可以在极小超曲面情形中得到；事实上，其结论要强得多，因为目前我们不得不受限于条件（9）这一苛刻限制。因此，这只是一个起点，为接下来运用纯粹的 *Allen–Cahn*理论做准备：

- 重新仔细考察 th　　拼接论证[5] 中 [WW19b; WW19a], 在 $\{u =$　　$0\}$

[4]例如，在 $\mathbb{R}^4$中就有有限指标的非平凡极小超曲面例子，[5]例如高维悬链面。幸运的是， [WW19b和WW19a] 中所需的相当多修改，已在 [GWW20]中就轴对称情形作了概述。

表明， u 可以通过“一维 Allen–Cahn 解的叠加”构造的“试探解”来更好地逼近，其效果优于一般“尺度不变”情形下所能达到的最佳逼近。

- WW19b 中论证的全部力量 [WW19b] 在这一情形下随即导出

$$\Delta f_i \simeq H_i = \kappa_0 \left(e^{-\sqrt{2}(f_i - f_{i-1})} - e^{-\sqrt{2}(f_{i+1} - f_i)} \right) + Err' ,$$

其中 $Err' = O(\frac{1}{|x'|^{2+1/8}})$ 现在确实是低阶的——不仅如此，我们还为这个偏微分方程组得到了一个相应的稳定性条件，同样只差一个低阶误差。换言之，各层之间的**相互作用**再次成为主导项。这是第 4节的主要结果。

达到这一点后，我们现在的目标是超越上述系统解的自然尺度 $\Delta f_i \simeq \frac{1}{|x'|^2}$。我们根据 n 的取值采用了不同的论证方式。

- 在 $4 \le n \le 7$ 的情形下，我们的论证如下：
  – 已知 Liouville 方程 $\Delta v = e^{-v}$ 在 3 至 9 维中不允许存在在球外稳定的解 [DF09]。得益于图像性和改进后的误差（即“低阶”误差），令 $v = f_{i+1} - f_i$，便可在此处复现 Dancer–Farina 的同一证明，从而在端数多于一个（即如果 $N > 1$）的情况下得到矛盾。

  – 因此，必然有 $N = 1$。另一方面，这很容易推出 u 在无穷远处的能量密度为 1。由此可知，根据 Wang 的 Allard 型定理（见 u， [Wan17] 或定理 2.5），它必为一维的。
- 在 $n = 3$ 的情形下，我们改用以下论证：
  – 在大环域 $B'_R \setminus B'_{R_0}$ 上取支撑的线性截断函数对稳定性进行检验，并令 $\overline{R \to \infty}$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B'_{2R_0}}} e^{-\sqrt{2}(f_{i+1} - f_i)} \le C . \tag{10}$$

  –固定 $i \in \{1, ..., N\}$；由 Toda 系统可得 $\Delta f_i \in L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B'_{2R_0})$。这看起来似乎只是相较于 $|\Delta f_i| \le \frac{C}{|x|^2}$ 的微小改进；另一方面，我们已经打破了方程的自然尺度。

  – 于是我们可以定义“试探函数”势

$$f_i^a(y) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B'_{2R_0}}} (\log|y - z| - \log|z|) \, \Delta f_i(z) \, dz .$$

  例如， [CL91]中就用到了这种“重整化技巧”。令 $c_i^a := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B'_{2R_0}} \Delta f_i \in \mathbb{R}$，便容易推出

$$f_i^a = (c_i^a + o(1)) \log|y| \quad \text{as} \quad |y| \to \infty .$$

  –令 $f_i^b := f_i - f_i^a$，于是可知 $\Delta f_i^b = 0$。先验而言， f_i^b 可以是任意调和函数；另一方面，它还具有次线性增长（因为 f_i 和 f_i^a 都如此）。
  – 一种加强 版的环域中平坦性改进迭代[6] 则表明，实际上

$$f_i^b = b_i^b + c_i^b \log|y| + O(|y|^{-\beta}) \quad \text{as} \quad |y| \to \infty$$

  对每个 $\beta \in (0, 1)$。
  –由于 $f_i = f_i^a + f_i^b$，这表明定理 1.4中所述的渐近性成立，至于 f_i^a 的展开式，则还需要进一步改进。为此，我们需要回过头来研究不同层之间的相互作用。
  – 首先，我们立刻可知 $|c_{i+1} - c_i| \ge \sqrt{2}$，这仅仅是由（10）中相互作用的可积性得出的。要完成证明，我们需要说明该不等式是严格的：这样一来，相互作用的可积性就会以代数速率改进，从而很容易得到 f_i^a 的精确展开式。

  – 最后，通过仔细考察 Toda 系统的结构以及在此情形下定义 $|c_{i+1} - c_i| = \sqrt{2}$ 的积分，可以得出 f_i^a 确实绝不可能发生。一个关键想法是，最上层和最下层是“特殊的”：它们分别是次调和和超调和的，因为根据（8）它们满足符号相反的方程；这实际上“压缩”了所有中间层，最终阻止了临界相互作用。

致谢。 作者谨向 Xavier Fern´andez-Real 和 Joaquim Serra 致以谢意；作者最初是从他们那里了解到在环域中进行平坦性改进迭代这一思想。作者也感谢 Hardy Chan、Marco Guaraco 和 Kelei Wang 就本文结果所进行的富有见地的讨论。

[6]注意， Δv_i^b 现在不再受固定速率的限制（与例如（9）不同）。

作者获得了欧洲研究委员会根据第948029号资助协议提供的支持。

2 文献中的先前结果

2.1 关于临界点的一些一般结果

引理 2.1（莫迪卡不等式，[Mod85a]）。设 $u:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上的有界 *Allen-Cahn*解。那么，$|u| \le 1$，且除非 $u \equiv \pm 1$，否则不等式是严格的。此外，

$$\frac{|\nabla u|^2(x)}{2} \le W(u(x))\,.$$

在本文中，除非另有说明，我们均假设 $u:\ \mathbb{R}^n \to (-1,\ 1)$ 是定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上的 Allen-Cahn方程 解，以便使用Modica不等式。令

$$\sigma_{n-1} := \omega_{n-1}\int_{-1}^{1}\sqrt{2W(s)}\,ds\,,\quad \text{where } \omega_{n-1} \text{ is the volume of the unit ball in } \mathbb{R}^{n-1}. \tag{11}$$

我们将半径为 $r>0$ 的球上的能量密度 定义为

$$\mathbf{M}_r(u) := \frac{1}{r^{n-1}}\mathcal{E}(u, B_r)\,. \tag{12}$$

更一般地，我们记$\mathbf{M}_r(u,\ x_0) := \mathbf{M}_r(u(\cdot - x_0))$，并且只要根据上下文可以明确，我们就省略记号中的 u。

注 2.2. 对于 u 是 ε-Allen-Cahn方程的解这一情形，我们自然定义 $\mathbf{M}^{\varepsilon}_r(u) := \frac{1}{r^{n-1}}\mathcal{E}^{\varepsilon}(u,\ B_r) = \mathbf{M}^{r/\varepsilon}(u(\varepsilon x))$。除非另有说明，我们始终考虑 $\varepsilon = 1$。

引理 2.3（单调性公式，[Mod85b]）。设 $u:\ \mathbb{R}^n \to [-1,1]$ 是定义在整个 $\mathbb{R}^n$上的 *Allen-Cahn*解。则 $\mathbf{M}_r$关于 r单调不减。更准确地说，

$$\frac{d}{dr}\mathbf{M}_r(u) = \frac{1}{r^n}\int_{B_r}\frac{1}{\sigma_{n-1}}\left[W(u) - \frac{|\nabla u|^2}{2}\right]dx + \frac{1}{r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\frac{1}{\sigma_{n-1}}(x\cdot\nabla u)^2\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,. \tag{13}$$

我们称 u 具有有界能量密度，若 $\mathbf{M}_\infty(u) := \lim_{r\to\infty}\mathbf{M}_r(u) < \infty$。特别是，定理1.1、1.2 和1.4 中的能量增长假设，恰好等价于具有有界能量密度。

定义 2.4（单调一维解）。定义 $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下

$$g(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\,. \tag{14}$$

Wang针对Allen–Cahn情形下的平稳变分流形，发展了类似于Allard正则性理论的理论。特别是，他得到了以下定理，从而可以为Savin的结果 [Sav09]提供一种新的证明。

定理 2.5 ([Wan17], Allen-Cahn方程的Allard型定理)。设 $u:\ \mathbb{R}^n \to [-1,1]$ 是*Allen-Cahn*方程的一个解。那么，存在 $\delta = \delta(n) > 0$ 使得若 $\mathbf{M}_\infty(u) \le 1+\delta$，则 u 要么是 ± 1，要么具有如下形式 $g(a\cdot x + b)$ 其中 $a\in\mathbb{S}^{n-1}$ 且$b\in\mathbb{R}$。

在全文中，我们采用以下记号：给定一点 $x\in\mathbb{R}^n$，记 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 为其前$n-1$ 个坐标，因此 $x = (x', x_n)$。此外，给定集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 和函数 $g:\Omega\to\mathbb{R}$，我们用 graph g 表示 $\Omega\times\mathbb{R}$ 中满足 $x_n = g(x')$ 的点集。令 $\mathcal{C}_R := B'_R\times[-R,R]$，其中 $B'_R\subset\mathbb{R}^{n-1}$。

最后，我们回顾以下标准引理：

引理 2.6 (指数衰减)。设 $u:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为一个 *Allen–Cahn*解，并假设

$$\{|u|\le 0.85\}\cap\mathcal{C}_{4R}\subset\{|x_n|\le\delta R\}\,,$$

其中 $\delta\le\frac{1}{2}$。那么，存在仅依赖于维数的常数 C 和 $c_0>0$，使得

$$\sup_{\mathcal{C}_{2R}\cap\{|x_n|\ge 2\delta R\}}\left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + W(u)\right] \le Ce^{-c_0\delta R}\,. \tag{15}$$

2.2 稳定解的曲率估计

Let

$$\mathcal{A}^2(u) = \begin{cases} \frac{|D^2u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u|^2} & \text{if } \nabla u \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise}; \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{A}(u) = \left(\mathcal{A}^2(u)\right)^{1/2}. \tag{16}$$

容易看出，如果 $\nabla u(x) \neq 0$，那么 $\mathcal{A}^2(u)(x) = |\mathrm{II}_{\{u=u(x)\}}|^2(x) + |\nabla^T \log |\nabla u||^2(x)$，其中 $\mathrm{II}_{\{u=u(x)\}}$ 是水平集 $\{u = u(x)\}$ 的第二基本形式，而 ∇^T 表示沿 $\{u = u(x)\}$ 切向方向的梯度。以下这种（较弱的）稳定性不等式形式是众所周知的：

命题 2.7 (Sternberg–Zumbrun 不等式，[SZ98])。设 $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 *A–C* 的稳定解，并且$\eta \in C_c^1(\Omega)$。则，

$$\int_\Omega \mathcal{A}^2 \eta^2 \, |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla \eta|^2 |\nabla u|^2 \, . \tag{17}$$

定义 2.8 (层化假设)。设 $u : B_R \to (-1,1)$ 是一个稳定的 ε-Allen-Cahn解。若 u 满足 B_R 中的层化假设（常数为 $C_1 > 0$），则称其满足

$$\varepsilon |\nabla u| \geq \frac{1}{C_1} \quad \text{and} \quad R|\mathcal{A}_u| \leq C_1 \quad \text{in } \{|u| \leq 0.9\} \cap B_R. \tag{18}$$

S由于 $\mathcal{A}$ 控制水平集的曲率，因此有以下标准引理 :

引理 2.9。在定义 2.8的设定下，假设 $u(0) = t \in [-0.9, 0.9]$。存在 $\delta \in (0,1)$ 和 C_2，它们依赖于 C_1 和 n，使得在选取合适的欧几里得坐标系后，以下结论成立：设 $\{\Gamma_i^t\}_{i=1}^N$ 表示与 $\{u = t\} \cap \mathcal{C}_{\delta R}$ 相交的 $B_{\delta^2 R}$ 的连通分支。则存在 $f_1^t < \ldots < f_N^t$，$f_i^t \in C^\infty(B'_{\delta R})$，使得

$$\Gamma_i^t = \operatorname{graph} f_i^t \quad in \quad \mathcal{C}_{\delta R} \quad and \quad |Df_i^t| + R|D^2 f_i^t| \leq C_2 \, .$$

Wang 与 Wei 证明，先验 C^2 界可以提升为 $C^{2,\vartheta}$ 界，并进一步得到改进的分离与平均曲率估计。

定理 2.10 (C^2 蕴含 $C^{2,\vartheta}$, [WW19b]). 设 $u : B_R \subset \mathbb{R}^n \to (-1,1)$ 为稳定的 ε-*Allen–Cahn*解，并假设层化假设在 B_R 对某个 C_1 成立。特别地，引理 2.9 的结论成立。

则对每一个 $\vartheta \in (0, 1)$ 存在额外依赖于 ϑ 的 C_2 与 $\delta_0 > 0$，使得若 $\frac{\varepsilon}{R} \leq \delta_0$，则 –

$$\|D^2 f_i^t\|_{L^\infty} + [D^2 f_i^t]_{C^\vartheta} \leq \frac{C_2}{R} \, . \tag{19}$$

此外，令 $\mathrm{H}[f] := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)$ ~~表示平均曲~~率算子，

$$\|\mathrm{H}[f_i^t]\|_{L^\infty} + \left[\mathrm{H}[f_i^t]\right]_{C^\vartheta} \leq \frac{\varepsilon C_2}{R^2} \, . \tag{20}$$

另外，层之间的分离满足

$$f_{i+1}^t - f_i^t \geq \frac{1+\vartheta}{2} \sqrt{2} \varepsilon \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right). \tag{21}$$

注 2.11. 我们强调，本文绝大多数内容都将考虑 $\varepsilon = 1$ 。

定理 2.10 是一个先验结果。然而，若进一步假设（$\star$），则稳定解确实满足局部层叠假设。值得强调的是，与极小超曲面的情形不同，这一事实并非显然，其证明需要运用定理 2.10 本身。

定理 2.12 （稳定性猜想与层叠）。固定 $n \in \mathbb{N}$，其中 $n \leq 7$。假设（$\star$）在 $\mathbb{R}^n$中成立。那么，以下结论成立：

设 u： $B_R \to$ （-1，1）是一个稳定的 ε-*Allen–Cahn*解，且$\mathbf{M}_R \leq C_0$。那么，存在仅依赖于 C_0的 C_1 和 $\delta_0 > 0$，使得若 $\frac{\varepsilon}{R} \leq \delta_0$ ，则 u 满足 中常数为 C_1的层化假设。

证明。参见 [FS25 定理 1 的证明。4] 或 [WW19b 推论 1 的证明。3]。 □

2.3 Wang–Wei：平坦情形

为方便起见，我们将定理 2.10 改写为平坦的大尺度形式。

定理 2.13 ([WW19b] 平坦情形下)。 设 $n \le 10$。设 u： $B_R \to (-1,\ 1)$ 是一个稳定的 ***Allen–Cahn*** 解，并假设在 B_R 中满足层化假设，其中 C_1。设 $\delta_1 > 0$ 以及 $\theta \in (0,\ 1)$。那么，存在 C_2， R_0 和 $c_0 > 0$，它们依赖于 C_1， θ，使得以下结论成立。

进一步假设

$$\{u = 0\} \subset \{|e_n \cdot x| \le \delta_2 R\} \quad in \quad B_R$$

对于某个 $\delta_2 \in (0, c_0)$ 以及 $R \ge R_0$。那么，存在某个 $N \in \mathbb{N}$ 使得：

- 存在 C^∞ 个图像 f_i： $B'_{\frac{3}{5}R} \to [-R/8, R/8]$，$f_1 < ... < f_N$，使得 $\{u = 0\} \cap \mathcal{C}_{\frac{3}{5}R} = \bigcup_{i=1}^N$ 图像 f_i。
- 估计式（19）–（21）对 f_i成立。

Proof. 由引理2.9 与定理2.10直接得出，只需使 $\delta_2 > 0$ 充分小。 □

我们还收集一些有用的附加性质。

引理 2.14 （附加性质）。 设 $\delta_1 > 0$。在定理*2.13*的设定下，至多再使 $\delta_2 > 0$ 更小且R_0 更大，还依赖于 δ_1，下列结论也成立：

- 这些图像满足 $\|\nabla f_i\|_{L^\infty} \le \delta_1$。
- $\{|u| \le 0.9\} \subset \{|e_n \cdot x| \le \delta_2 R + C_2\}$ 在 $\mathcal{C}_{R/2}$中成立。
- 我们有 $|\mathbf{M}^{R/2}(u) - N| \le \delta_1 N$。

证明。 参见 [FS25，引理 4。9]此处给出了简短证明。 □

3 超曲面的环域平坦性改进

本节针对偏微分方程 (9) 建立一项平坦性改进结果。如第1.4节所述， [FFS]中提出了极小超曲面的一般版本；我们在此采用一种相关但不同的证明策略，该策略基于嵌套外部区域上的迭代陈述（见命题 3.6）。

3.1 设定与主要结果

为简化记号，本节全文采用以下一般框架：

定义 3.1 （基本假设）。 给定：

- 一个整数 $n \ge 3$。
- 正的常数 C_0， R_0。
- 一个非空的嵌入超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0/2}$，满足 $\overline{\Sigma \setminus \Sigma} \subset \partial B_{R_0/2}$，使得

$$|x||\mathrm{II}_\Sigma| + |x|^2|\mathrm{H}_\Sigma| \le C_0\,. \tag{22}$$

给定 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$， $\mathcal{R}_e(E)$ 表示将 E 通过把 e_n 旋转到 e的旋转所得到的像。O
我们的 ma i主要结果lt in thi小节tion is the following:

命题 3.2 (主要结果). 存在某个 $\varepsilon_0 > 0$，它依赖于 n、C_0，使得以下结论成立。假设对于每个 $R \ge 8R_0$，都存在某个 $e_R \in \mathbb{S}^{n-1}$，满足

$$\Sigma \cap (B_{8R} \setminus \overline{B_{R/8}}) \subset \{|e_R \cdot x| \le \varepsilon_0 R\}\,.$$

那么，存在某个 $\widetilde{R}_0 \ge 16R_0$，它依赖于 n、C_0、R_0，以及某些 $e_\infty \in \mathbb{S}^{n-1}$、 $N \in \mathbb{N}$ 和光滑函数f_i：$\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_{\widetilde{R}_0} \to \mathbb{R}$，其中 $i = 1$、...、 N，使得

$$\mathcal{R}_{e_\infty}(\Sigma) \setminus \left(\overline{B'_{\widetilde{R}_0}} \times [-\widetilde{R}_0, \widetilde{R}_0]\right) = \bigcup_{i=1}^N \operatorname{graph} f_i\,.$$

此外，给定 $\alpha \in (0,\ 1)$，存在取决于 n、C_0、R_0、α 的 C_α，使得

$$|f_i(x')| + |x'||\nabla f_i| \le C_\alpha |x'|^\alpha\,. \tag{23}$$

3.2 化归为迭代结果

我们从一个简单的引理开始：在较大的环域中具有受控曲率和较小高度，意味着在较小的环域上具有图像性。我们将反复使用这一点。

引理 3.3 (图像性引理)。 设 $1 < R_1 < R_2 < R_3$ 和 C_0。那么，存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(R_1, R_2, R_3, C_0, n) > 0$，其中 $R_2 + \varepsilon_0 < R_3$，使得以下结论成立。

假设 Σ 是一个嵌入超曲面，满足 $(\Sigma \setminus \Sigma) \cap (B_{R_3} \setminus \overline{B_{R_3^{-1}}}) = \emptyset$,

$$|\mathrm{II}_{\widetilde{\Sigma}}| \le C_0 \quad in \quad B_{R_3} \setminus \overline{B_{R_3^{-1}}}\,,$$

and

$$\widetilde{\Sigma} \cap (B_{R_3} \setminus \overline{B_{R_3^{-1}}}) \subset \{|x_n| \le \varepsilon_0\}\,.$$

Then

$$\widetilde{\Sigma} \cap (B_{R_1} \setminus \overline{B_{R_1^{-1}}}) \subset (B'_{R_2} \setminus \overline{B'_{R_2^{-1}}}) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\,,$$

并且存在某个 $N \in \mathbb{N}$ 和某个光滑的 $f_i\colon\ B'_{R_2} \setminus \overline{B'_{R_2^{-1}}} \to [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$，使得

$$\widetilde{\Sigma} \cap \Big((B'_{R_2} \setminus \overline{B'_{R_2^{-1}}}) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\Big) = \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{graph} f_i\,.$$

证明。 **步骤 1**。 包含关系。

我们可以直接看出 $\Sigma \cap (B_{R_1} \setminus \overline{B_{R_1^{-1}}}) \subset (B'_{R_2} \setminus \overline{B'_{R_2^{-1}}}) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$，只需取

$$\varepsilon_0 \le \min\{\sqrt{R_1^{-2} - R_2^{-2}}, \frac{1}{2}(R_3 - R_2)\}\,.$$

事实上，若 $x \in \widetilde{\Sigma} \cap (B_{R_1} \setminus B_{R_1^{-1}})$，则 $|x| \ge R_1^{-1}$，并且根据假设还有 $|x_n| \le \varepsilon_0 \le \sqrt{R_1^{-2} - R_2^{-2}}$；于是我们可以计算

$$|x'| = \sqrt{|x|^2 - |x_n|^2} \ge \sqrt{R_1^{-2} - (\sqrt{R_1^{-2} - R_2^{-2}})^2} = R_2^{-1}\,.$$

步骤 2. 图像性。

与引理 2.9 完全相同，由那里的第二基本形式界可知存在 $c_0 = c_0(R_1, R_2, R_3, C_0, n) > 0$，其中 $R_2 + \varepsilon_0 + 2c_0 < R_3$ 且 $R_2^{-1} - 2c_0 > R_3^{-1}$，使得：给定 $x \in \widetilde{\Sigma} \cap (B'_{R_2} \setminus B'_{R_2^{-1}}) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$——因此 $B_{2c_0}(x) \subset (B_{R_3} \setminus B_{R_3^{-1}})$——我们可以将与 $B_{c_0}(x)$ 相交的 Σ 的所有连通分支写成有限个相对于某个方向 e_x 的图像的并集。注意，有限性仅仅是因为局部存在无限多个连通分支会与嵌入性矛盾。

现在，根据 ε_0-平坦度假设，只要将 $\varepsilon_0 > 0$ 取得足够小（具体取值取决于 c_0），我们便可立即看出，实际上可以取上面的 $e_x = e_n$。此外，仅通过插值，只要进一步减小 ε_0，就能使图像的斜率小于任意给定的 $\delta > 0$。

对于 $x \in (B_{R_2} \setminus B'_{R_2^{-1}}) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ 这些图像。考虑最大定义域 $\Omega_i \subset (B'_{R_2} \setminus B'_{R_2^{-1}})$，我们得到相应的 $f_i\colon\ \Omega_i \to [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$，使得

$$\widetilde{\Sigma} \cap \Big((B'_{R_2} \setminus \overline{B'_{R_2^{-1}}}) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\Big) = \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{graph} f_i\,.$$

我们声称，对每个 $i = 1, ..., N$，都有 $\Omega_i = (B'_{R_2} \setminus B'_{R_2^{-1}})$。事实上，这直接来自 $(B'_{R_2} \setminus B'_{R_2^{-1}})$ 的连通性：$(B'_{R_2} \setminus B'_{R_2^{-1}})$ 中每个 f_i 的最大定义集既是开集（由 Σ 的嵌入性以及 $|\nabla f_i| \le \delta$ 这一事实可知），也是闭集（因为 $(\Sigma \setminus \Sigma) \cap (B_{R_3} \setminus B_{R_3^{-1}}) = \emptyset$）。 □

我们可以立即推出以下虽小但重要的一步，它表明 Σ 不会在二进尺度之间来回“折返”：

引理 3.4 (ε_0-平坦度蕴含有限螺旋端)。 存在某个 $\varepsilon_0 > 0$，取决于 n、C_0，使得下述结论成立。假设对于每个 $R \ge 8R_0$，都存在某个 $e_R \in \mathbb{S}^{n-1}$，满足

$$\Sigma \cap (B_{8R} \setminus \overline{B_{R/8}}) \subset \{|e_R \cdot x| \le \varepsilon_0 R\}\,.$$

那么，下述结论成立：

- **端的有限性：** $\Sigma \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_{16R_0}) = \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i$ 对某个 $N \in \mathbb{N}$成立，其中 Σ_i 是连通的。
- **螺旋结构：** 对每个 $R \geq 16R_0$， $\Sigma_i \cap \partial B_R$ 都非空。此外， $\Sigma_i \cap (B_{2R} \setminus B_{R/2})$ 是一个单一图形片，具体来说：
  - $\mathcal{R}_{e_R}(\Sigma_i) \cap (B_{2R} \setminus \overline{B_{R/2}}) \subset (B'_{2R} \setminus \overline{B'_{R/4}}) \times [-\varepsilon_0 R, \varepsilon_0 R]$.
  - 存在某个光滑的 $f_i \colon B'_{2R} \setminus B'_{R/4} \overline{\to [-}\varepsilon_0 R, \varepsilon_0 R]$ ，使得

$$\mathcal{R}_{e_R}(\Sigma_i) \cap \Big((B'_{2R} \setminus \overline{B'_{R/4}}) \times [-\varepsilon_0 R, \varepsilon_0 R] \Big) = \operatorname{graph} f_i \,.$$

证明。 我们直接得到

$$\mathcal{R}_{e_R}(\Sigma) \cap (B_{2R} \setminus \overline{B_{R/2}}) \subset (B'_{2R} \setminus \overline{B'_{R/4}}) \times [-\varepsilon_0 R, \varepsilon_0 R] \,,$$

只需考虑 $\widetilde{\Sigma}_R := \frac{1}{R}\mathcal{R}_{e_R}(\Sigma)$,–应用引理 3.3(例如取 $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 8$，并利用 (22) 来界定 $|\mathrm{II}_{\widetilde{\Sigma}_R}| \leq 8C_0$ 在 $B_8 \setminus B_{1/8}$中的取值)，然后再缩放回去。

此外——假设 $\Sigma \cap (B_{2R} \setminus B_{R/2}) \neq \emptyset$——这也给出了某个 $N_R \in \mathbb{N}$，它是有限的，但此时可能依赖于 R，以及光滑的 $f_i \colon B'_{2R} \setminus B'_{R/4} \to [-\varepsilon_0 R, \varepsilon_0 R]$ 对于每个 $i = 1, .., N_R$，使得

$$\mathcal{R}_{e_R}(\Sigma) \cap \Big((B'_{2R} \setminus \overline{B'_{R/4}}) \times [-\varepsilon_0 R, \varepsilon_0 R] \Big) = \bigcup_{i=1}^{N_R} \operatorname{graph} f_i \,.$$

剩下的工作是将不同的尺度联系起来。如果 $\Sigma \setminus \overline{B_{16R_0}}$ 为空，引理显然成立；因此假设 $\Sigma \setminus B_{16R_0} \neq \emptyset$，特别是存在某个 $\overline{R} \geq 16R_0$ 使得 $\Sigma \cap \partial B_{\bar{R}} \neq \emptyset$。现在可以看出，事实上，对每个 $R \geq 16R_0$， $\Sigma \cap \partial B_R$ 都非空：

¯反设对于某个 $R > R$，这一结论不成立，并令 R^* 为满足这一条件的半径的下确界。由于$\bar{\Sigma} \setminus \Sigma \subset \partial B_{R_0/2}$，我们可知 $\Sigma \cap \partial B_{R^*} \neq \emptyset$。根据上面的论证，

$$\Sigma \cap \partial B_{R^*} \subset \Sigma \cap (B_{2R_*} \setminus \overline{B_{R^*/2}}) \subset (B'_{2R^*} \setminus \overline{B'_{R^*/4}}) \times [-2\varepsilon_0 R^*, 2\varepsilon_0 R^*] \,,$$

并且我们可以写成

$$\mathcal{R}_{e_{R^*}} \Sigma \cap \Big((B'_{2R^*} \setminus \overline{B'_{R^*/4}}) \times [-2\varepsilon_0 R^*, 2\varepsilon_0 R^*] \Big)$$

它是以 $B'_{2R^*} \setminus B'_{R^*/4}$ 为定义域的图像之并集。但这些图像是连通的，而且显然也包含某个满足 $|x| \geq 2R^*$ 的 $x \in \Sigma$。这表明，对所有 $R \in [R^*, 2R^*]$，都有 $\Sigma \cap \partial B_R \neq \emptyset$，这与 R^* 作为下确界的定义矛盾。¯对于 $16R_0 \leq R < R$，同样的证明也成立——只需令 ε_0 足够小，并改为考虑上确界。

最后请注意，对于任意一对重叠的局部图形分解，我们自然必须有匹配的分解，这使我们能够在不同尺度间识别不同的片；由此可知，上面的 N_R 关于 R 连续，因此为常数，且等于某个 $N \in \mathbb{N}$。于是，我们可以将每个局部图像识别为某些全局定义的连通分支 $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{N}$ 的一部分。引理中的两条结论直接由我们先前的讨论得出。

□

为简便起见，我们 假设 Σ 从现在起是连通的； 根据引理 3.4 ，只需考虑 Σ_i 和 $16R_0$ 来代替 Σ 和 R_0。

我们尚不知道 Σ 在一个球之外的全局图像性，因为 e_R 目前可能会旋转；因此，我们在此之前都采用外在陈述。命题 3.2 将直接由以下内容推出：

命题 3.5 (ε_0-平坦度蕴含衰减)。 给定 $\alpha \in (0,1)$，存在某个 $\varepsilon_0 > 0$，依赖于 n, C_0, R_0, α，使得以下结论成立。假设对于每个满足 $2^{k+1} \geq R_0$ 的 $k \in \mathbb{N}$ ，都存在某个 $e_k \in \mathbb{S}^{n-1}$ ，使得

$$\Sigma \cap (B_{2^{k+3}} \setminus \overline{B_{2^{k-3}}}) \subset \{|e_k \cdot x| \leq \varepsilon_0 2^k\} \,.$$

那么，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ ，都存在 $C > 0$ 和某个 $\widetilde{e}_k \in \mathbb{S}^{n-1}$ ，使得

$$\Sigma \cap (B_{2^{k+3}} \setminus \overline{B_{2^{k-3}}}) \subset \{|\widetilde{e}_k \cdot x| \leq C\varepsilon_0 2^{\alpha k}\} \,.$$

现在，为了得到这一结果，我们将进一步把它归结为另一个外在陈述，这也是证明的技术核心：一种“平坦性改进”型迭代。要找到恰当的陈述相当棘手，因为每一步都需要更新关于不同尺度的不同信息。

命题 3.6 (主要迭代)。给定 $\alpha \in (0,1)$，存在 k_0、$K \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，它们都取决于 n 和 α，使得以下结论成立。设 $\delta = 2^{\alpha-1}$。假设我们给定：

- 某个基准尺度 $k_1 \in \mathbb{N}$，满足 $k_1 \geq K$。
- 某个“最佳平坦度” $\varepsilon > 0$，满足 $2_{(\alpha-1)^{k_1}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$。
- 对所有 $k \geq k_1 - k_0$，取向量 $e_k \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得以下条件成立：– $k_1 - k_0$ 与 k_1之间的超额衰减：– 最佳平坦度的保持：

$$|x \cdot e_k| \leq \delta^{k-k_1}\varepsilon 2^k \text{ for all } x \in \Sigma \cap (B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}), \quad k_1 - k_0 \leq k \leq k_1 .$$

$$|x \cdot e_k| \leq \varepsilon 2^k \text{ for all } x \in \Sigma \cap (B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}), \quad k_1 + 1 \leq k .$$

于是，我们有如下结论：

- 设新的基准尺度为 $k_1' := k_1 + 1 \in \mathbb{N}$，其满足 $k_1' \geq K$。
- 设新的“最佳平坦度”为 $\varepsilon' = \delta\varepsilon > 0$，其满足 $2_{(\alpha-1)^{k_1'}} \leq \varepsilon' \leq \varepsilon_0$。
- 于是，对于所有 $k \geq k_1' - k_0$，存在一些新的向量 $e_k' \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得以下结论成立：– $k_1' - k_0$ 与 k_1'之间的超额衰减：– 最佳平坦度的保持：

$$|x \cdot e_k'| \leq \delta^{k-k_1'}\varepsilon' 2^k \text{ for all } x \in \Sigma \cap (B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}), \quad k_1' - k_0 \leq k \leq k_1' .$$

$$|x \cdot e_k'| \leq \varepsilon' 2^k \text{ for all } x \in \Sigma \cap (B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}), \quad k_1' + 1 \leq k .$$

注 3.7. 换句话说，每当我们有一大段尺度区间上的平坦度衰减，并且进一步假设最佳平坦度随后在所有更大的尺度上一直保持不变，那么平坦度就会在额外的一个尺度上继续衰减；此外，这种改进后的平坦度也会传播到所有更大的尺度。特别地，如果命题 3.6 的假设对某个初始平坦度和尺度成立，那么实际上可以按需迭代任意多次。

命题 3.6 将在下一节中证明。现在，我们说明命题 3.5 如何由命题 3.6推出，以及命题 3.2 如何由命题 3.5推出。

命题 *3.5*的证明（假设命题 *3.6*）。固定 $\alpha \in (0,1)$。设 $k_0, K \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 由命题 3.6给出，并令 $\delta = 2^{\alpha-1}$。根据假设（命题 3.5），我们有

$$\Sigma \cap (B_{2^{k+3}} \setminus \overline{B_{2^{k-3}}}) \subset \{|e_k \cdot x| \leq \varepsilon_0 2^k\} \quad \text{for every} \quad k \geq \lceil \log_2 R_0 \rceil . \tag{24}$$

现在显然该如何继续：

- 令 $k_1 := \max\{K, k_0 + \lceil \log_2 R_0 \rceil\}$，于是 $k_1 \geq K$。
- 适当增大 k_1 后，我们还有 $2_{(\alpha-1)^{k_1}} \leq \varepsilon_0$。
- 由于（根据定义） $k_1 - k_0 \geq \lceil \log_2 R_0 \rceil$，由（24）可得

$$|x \cdot e_k| \leq \varepsilon_0 2^k \quad \text{for all} \quad x \in \Sigma \cap (B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}) \quad \text{and} \quad k \geq k_1 - k_0 .$$

  – 由于这包含范围 $k_1 + 1 \leq k$，因此满足“最佳平坦度的保持”条件。
  – 此外，由于这包含了范围 $k_1 - k_0 \leq k \leq k_1$，我们显然也有“超额衰减”条件，即 $|x \cdot e_k| \leq \delta^{k-k_1}\varepsilon_0 2^k$，这仅仅是因为在此范围内 $\delta^{k-k_1} \geq 1$。

这意味着命题 3.6 的假设得到满足。对该命题进行迭代，令 $k_{1,l} := k_1 + l$ 且$\varepsilon_l := \delta^l \varepsilon_0$, $l \in \mathbb{N}$，“最佳平坦度的保持”部分在第 l 次迭代时给出一个向量 $\widetilde{e}_{k_{1,l}}$，使得

$$|x \cdot \widetilde{e}_{k_{1,l}}| \leq \varepsilon_l 2^{k_{1,l}} = \delta^l \varepsilon_0 2^{k_{1,l}} \quad \text{for all} \quad x \in \Sigma \cap (B_{2^{k_{1,l}+1}} \setminus \overline{B_{2^{k_{1,l}-1}}}) .$$

令 $C := \delta^{-k_1}\varepsilon_0$，它不依赖于 l，我们可以将其改写为

$$|x \cdot \widetilde{e}_{k_{1,l}}| \leq C\delta^{k_{1,l}} 2^{k_{1,l}} \quad \text{for all} \quad x \in \Sigma \cap (B_{2^{k_{1,l}+1}} \setminus \overline{B_{2^{k_{1,l}-1}}}) ,$$

或者（由于 $\delta = 2^{\alpha-1}$）

$$|x \cdot \widetilde{e}_{k_{1,l}}| \leq C 2^{\alpha k_{1,l}} \quad \text{for all} \quad x \in \Sigma \cap (B_{2^{k_{1,l}+1}} \setminus \overline{B_{2^{k_{1,l}-1}}}) ,$$

这显然证明了命题 3.5。 □

命题 3.2的证明（假设命题 3.5成立）。根据假设，存在 $\widetilde{e}_k \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$满足 $2^k \geq 8R_0$，都有

$$\Sigma \cap (B_{2^{k+3}} \setminus \overline{B_{2^{k-3}}}) \subset \{|\widetilde{e}_k \cdot x| \leq C\varepsilon_0 2^{\alpha k}\}. \tag{25}$$

回想一下，根据引理 3.4，只需将每个 Σ_i 分别处理，即可证明命题3.2 在 Σ是单个连通部分的情况下成立，也就是说，满足其中的第二个项目。

这里需要作一点说明：确切地说，这将证明存在某个 $e_{\infty,\,i}$ 满足命题 3.2的结论，其中用 Σ_i 替代 Σ；唯一需要注意的是，$e_{\infty,\,i}$ 原则上可能依赖于 i。不过，我们随即就能看出，仅凭嵌入性，$e_{\infty,\,i}$ 实际上必定全都相等。

步骤 1. 对系数求和。

将 25）应用于 k 和 $k+1$，特别可得

$$\Sigma \cap (B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}) \subset \{|\widetilde{e}_k \cdot x| \leq C\varepsilon_0 2^{\alpha k}\} \cap \{|\widetilde{e}_{k+1} \cdot x| \leq C\varepsilon_0 2^{\alpha(k+1)}\}. \tag{26}$$

那么，局部 （由引理 3.4得出的） Σ 的图像性以及三角不等式很容易推出 t

$$|\widetilde{e}_{k+1} - \widetilde{e}_k| \leq \frac{C2^{\alpha k}}{2^k} = C2^{(\alpha-1)k}.$$

那么，给定 $k_0 \in \mathbb{N}$，且满足 $2^{k_0} \geq 8R_0$，我们得到

$$\sum_{k \geq k_0} |\widetilde{e}_{k+1} - \widetilde{e}_k| \leq \sum_{k \geq k_0} C2^{(\alpha-1)k} \leq C_\alpha 2^{(\alpha-1)k_0},$$

特别地，序列 $\widetilde{e}_k$ 是柯西序列。这表明存在某个 $e_\infty \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得

$$|e_\infty - \widetilde{e}_{k_0}| \leq \sum_{k \geq k_0} |\widetilde{e}_{k+1} - \widetilde{e}_k| \leq C_\alpha 2^{(\alpha-1)k_0}, \quad \text{thus} \quad \Sigma \cap (B_{2^{k+3}} \setminus \overline{B_{2^{k-3}}}) \subset \{|e_\infty \cdot x| \leq CC_\alpha 2^{\alpha k}\}. \tag{27}$$

换言之，$\{e_\infty \cdot x = 0\}$ 是 Σ 的（唯一）吹下切锥。

步骤 2。 图像性。

由（27），现在只需应用引理 3.4，但将常方向 $\widetilde{e}_\infty$（代替 e_R）。这表明 $\mathcal{R}_{e_\infty}(\Sigma) \setminus \left(B'_{\widetilde{R}_0} \times [-\widetilde{R}_0, \widetilde{R}_0]\right)$ 是某个 f 的图像：$\mathbb{R}^{n-1} \setminus B'_{\widetilde{R}_0} \to \mathbb{R}$。此外，结合（25）和（27），我们得到

$$\mathcal{R}_{e_\infty}(\Sigma) \cap (B_{2^{k+3}} \setminus \overline{B_{2^{k-3}}}) \subset \{|x_n| \leq CC_\alpha 2^{\alpha k}\}, \quad \text{thus} \quad |f(x')| \leq CC_\alpha |x'|^\alpha. \tag{28}$$

最后，结合（28）以及极小图方程的标准椭圆估计（利用 $|x|^2|H_\Sigma| \leq C_0$），我们可以将（28）加强为

$$|f| + |x'||\nabla f| \leq C_\alpha |x'|^\alpha$$

如所需。 □

3.3 建立迭代结果——命题3.6的证明

对于在较大环域上近似调和且具有受控增长的函数，我们需要以下简单引理。

引理 3.8（调和近似）。固定 $\lambda, \alpha \in (0, 1)$。存在 $\delta_0 \in (0, \lambda]$，其取值依赖于 λ, α, n，使得下述结论成立。设 $v: B_{\frac{1}{\delta_0}} \setminus B_{\delta_0} \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 满足：

- $|\mathrm{Tr}(A(x')D^2 v)| \leq \delta_0$，其中 $\|A - \mathrm{Id}\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{\delta_0}} \setminus B_{\delta_0})} \leq \delta_0$。
- $\|v\|_{L^\infty(B_{2\rho} \setminus B_\rho)} \leq \rho^{2-\alpha}$，对于 $1 \leq \rho \leq \frac{1}{\delta_0}$。
- $\|v\|_{L^\infty(B_{2\rho} \setminus B_\rho)} \leq \rho^\alpha$，对于 $\delta_0 \leq \rho \leq 1$。

那么存在 $a \in \mathbb{R}^{n-1}$，使得 $\|v - a \cdot x\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{\lambda}} \setminus B_\lambda)} \leq \lambda$。

证明。我们采用反证法。若不存在这样的 $\delta_0 > 0$，考虑序列$\delta_{0,\,i} = \frac{1}{i} \to 0$ 则必须存在定理假设中所对应的 v_i，但使得

$$\text{no } a \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ satisfies } \|v_i - a \cdot x\|_{L^\infty(B_2 \setminus \overline{B_{1/2}})} \leq \lambda \text{ for any } i \text{ in the sequence.} \tag{29}$$

对于 i 足够大时， v_i 满足 $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 界，由标准的 Cordes–Nirenberg 估计 [Cor56; Nir54]。由 Ascoli–Arzel`a，一个子序列局部收敛到某个极限 v_∞，属于 $C^{1,\alpha}$，它是 $\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$上拉普拉斯方程的一个——粘性（得益于 C^0_{loc}收敛，因而为强）——解。此外， v_∞ 在 $|x|\to 0$ 时的增长小于 $|x|^\alpha$，在 $|x|\to\infty$时小于 $|x|^{2-\alpha}$。

根据 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 中关于调和函数的通常刘维尔定理（例如可由分离变量法推出），增长假设意味着 $v_\infty = a\cdot x$，其中某个 $a\in\mathbb{S}^{n-1}$。事实上，拉普拉斯算子在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的基本解不能是 v_∞ 中的一项，因为它在 0 处发散；二次或更高阶项也不能对 v_∞ 有贡献，因为它们在无穷远处的增长快于 $|x|^{2-\alpha}$。

但是， $B_2\setminus B_{1/2}$ 一致收敛到 v_∞，这与（29）矛盾，只要 $\delta_{0,i}$ 足够小。 □

预备知识：重新缩放与局部图形性

为方便起见，我们先考虑 $\widetilde{\Sigma} := \frac{1}{2^{k_1}}\Sigma$。

注记 3.9。 原有假设——尺度从 $-k_0$ **到** ∞ ——现在变为：

- $|x||\mathrm{II}_{\widetilde{\Sigma}}|\le C$
- $|x|^2|H[\widetilde{\Sigma}]|\le 2^{-k_1}$
- We have
  - Excess decay between $-k_0$ and 0:
$$|x\cdot\widetilde{e}_k|\le\delta^k\varepsilon 2^k \text{ for all } x\in\widetilde{\Sigma}\cap(B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}),\quad -k_0\le k\le 0\,. \tag{30}$$
  - Preservation of best flatness:
$$|x\cdot\widetilde{e}_k|\le\varepsilon 2^k \text{ for all } x\in\widetilde{\Sigma}\cap(B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}),\quad 1\le k\,. \tag{31}$$

引理 3.10 (局部图形表示引理)。 存在某些 $c_0>0$ 和 C_2，它们仅依赖于 n、 k_0 和 C_0，使得下述结论成立。假设 $\varepsilon\le c_0$。那么，存在某个 f： $B'_{2^{k_0-1}}\setminus B'_{2^{-k_0+1}}\to\mathbb{R}$，使得

$$\mathcal{R}_{\widetilde{e}_0}(\widetilde{\Sigma})\cap\Big((B'_{2^{k_0-1}}\setminus\overline{B'_{2^{-k_0+1}}})\times[-2^{k_0-1},2^{k_0-1}]\Big)=\operatorname{graph} f\,, \tag{32}$$

with

$$f(x')\le C_2\varepsilon|x'|^\alpha \quad \textit{for} \quad 2^{-k_0+1}\le|x'|\le 1$$

and

$$f(x')\le C_2\varepsilon|x'|\log(|x'|+1) \quad \textit{for} \quad 1\le|x'|\le 2^{k_0-1}\,.$$

此外，

$$\mathcal{R}_{\widetilde{e}_0}(\widetilde{\Sigma})\cap(B_{2^{k_0-1}}\setminus\overline{B_{2^{-k_0+2}}})\subset(B'_{2^{k_0-1}}\setminus\overline{B'_{2^{-k_0+1}}})\times[-2^{k_0-1},2^{k_0-1}]\,.$$

证明。 不失一般性， $\widetilde{e}_0=e_n$。

我们首先考察 虑 $-k_0+1\le k\le 0$。应用（30），其中取（$k-1$）及 k，我们特别可以推出 t

$$\widetilde{\Sigma}\cap(B_{2^k}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}})\subset\{|\widetilde{e}_{k-1}\cdot x|\le\delta^{k-1}\varepsilon 2^{k-1}\}\cap\{|\widetilde{e}_k\cdot x|\le\delta^k\varepsilon 2^k\}\,. \tag{33}$$

˜然后，由 的局部图形性（来自引理 3.4）以及三角不等式容易得到

$$|\widetilde{e}_{k+1}-\widetilde{e}_k|\le\frac{C\delta^k\varepsilon 2^k}{2^k}=C\delta^k\varepsilon\,,\quad -k_0\le k\le 0\,.$$

类似地，可得

$$|\widetilde{e}_{k+1}-\widetilde{e}_k|\le\frac{C\varepsilon 2^k}{2^k}=C\varepsilon\,,\quad 1\le k\,.$$

然后，利用 $|x\cdot\widetilde{e}_0|\le|x\cdot\widetilde{e}_k|+|x||\widetilde{e}_k-\widetilde{e}_0|$，对相应的几何级数求和以界定 $|\widetilde{e}_k-\widetilde{e}_0|$，我们推得

$$|x\cdot\widetilde{e}_0|\le C\delta^k\varepsilon 2^k \quad \text{for all} \quad x\in\widetilde{\Sigma}\cap(B_{2^k}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}) \quad \text{and} \quad -k_0\le k\le 0\,, \tag{34}$$

$$|x\cdot\widetilde{e}_0|\le C\varepsilon k 2^k \quad \text{for all} \quad x\in\widetilde{\Sigma}\cap(B_{2^k}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}) \quad \text{and} \quad 1\le k\,. \tag{35}$$

固定了 k_0 及所有其他参数后，只需利用引理 3.3，即可证明图形性断言（32）及相应的包含关系，前提是令 $\varepsilon_0>0$ 足够小（回想一下，根据假设， $\varepsilon\le\varepsilon_0$）。最后， （34）–（35）恰好给出了 f的增长条件。

□

迭代的证明
最后，我们可以给出：

命题 3.6 的证明。 如上所述，我们考虑 $\widetilde{\Sigma} := \frac{1}{2^{k_1}}\Sigma$ 代替 Σ，它满足注记 3.9 中的假设。此外，经过旋转，我们还可以（并且确实）假设，对于 $k=0$，有 $\widetilde{e}_0 = e_n$。
根据引理 3.10，只要 $\varepsilon_0 > 0$ 足够小，就存在某个 $f: B'_{2^{k_0-1}} \setminus B'_{2^{-k_0+1}} \to \mathbb{R}$ 使得

$$\widetilde{\Sigma} \cap \left((B'_{2^{k_0-1}} \setminus \overline{B'_{2^{-k_0+1}}}) \times [-2^{k_0-1}, 2^{k_0-1}] \right) = \operatorname{graph} f\,, \tag{36}$$

with

$$f(x') \le C_2\varepsilon |x'|^\alpha \quad \text{for} \quad 2^{-k_0+1} \le |x'| \le 1 \tag{37}$$

and

$$f(x') \le C_2\varepsilon |x'| \log |x'| \le C_2\varepsilon |x'|^{2-\alpha} \quad \text{for} \quad 1 \le |x'| \le 2^{k_0-1}\,. \tag{38}$$

令 $\lambda > 0$，其（通用）取值将在末尾给出。令 $\delta_0 = \delta_0(\lambda, \alpha, \beta, n) \in (0, \lambda]$ 由引理 3.8 给出。

我们分几个步骤进行论证。
步骤 1。线性化。
根据一致曲率界假设，只要将 ε_0（关于 δ_0、n、k_0、C_0）取得更小的值，利用（37）–（38）进行标准插值即可得到 $|\nabla f| \le \delta_0$ 在 $2^{-k_0+2} \le |x'| \le 2^{k_0-2}$中。注意到

$$H[\widetilde{\Sigma}](x', f(x')) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right)(x') = \operatorname{Tr}(A(x')D^2 f)\,,$$

其中 $A(x')$ 是由以下连通分支组成的 $n \times n$ 矩阵

$$A_{ij}(x') = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\partial_i f \partial_j f}{(1+|\nabla f|^2)^{3/2}}\,.$$

将 ε_0 取得更小后，由于 ∇f 的界，我们看到

$$|A(x') - \mathrm{Id}| \le \delta_0 \quad \text{in} \quad 2^{-k_0+2} \le |x'| \le 2^{k_0-2}\,.$$

定义 垂直缩放 $v(x') = \frac{f(x')}{C_2\varepsilon}$，因此（根据备注 3.9中关于 $H[\widetilde{\Sigma}]$ 的估计）我们得

$$\left|\operatorname{Tr}(A(x')D^2 v)\right| = \left| \frac{H[\widetilde{\Sigma}](x', f(x'))}{C_2\varepsilon} \right| \le C\frac{2^{-k_1}}{2^{-2k_0}\varepsilon} \le C(k_0)\frac{2^{-k_1}}{\varepsilon}\,.$$

利用假设 $\varepsilon \ge 2^{(\beta-1)k_1}$，我们随后可以界定

$$\left|\operatorname{Tr}(A(x')D^2 v)\right| \le C(k_0)2^{-\beta k_1}\,.$$

我们希望应用引理 3.8 于 v。注意到，由于 $v(x') = \frac{f(x')}{C_2\varepsilon}$，（37）–（38）转化为

$$v(x') \le |x'|^\alpha \quad \text{for} \quad 2^{-k_0+1} \le |x'| \le 1 \tag{39}$$

and

$$v(x') \le |x'|^{2-\alpha} \quad \text{for} \quad 1 \le |x'| \le 2^{k_0-1}\,. \tag{40}$$

令 $k_0 := \lceil |\log_2 \delta_0| \rceil + 2$；特别地，$2^{-k_0+2} \le \delta_0 \le \frac{1}{\delta_0} \le 2^{k_0-2}$。然后选取足够大的 K——同时也依赖于 k_0——使得 $C(k_0)2^{-\beta K} \le \delta_0$，从而（由于按假设有 $k_1 \ge K$）我们得到

$$\left|\operatorname{Tr}(A(x')D^2 v)\right| \le \delta_0\,. \tag{41}$$

综合以上所有内容，我们看到引理 3.8 的假设均已满足，因此我们得到 $a \in \mathbb{R}^{n-1}$，使得$\|v - a\cdot x'\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{\lambda}} \setminus B_\lambda)} \le \lambda$。
等价地：

$$\|f - \bar{a}\cdot x'\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{\lambda}} \setminus \overline{B_\lambda})} \le C_2\varepsilon\lambda \quad \text{for some} \quad \bar{a} \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{42}$$

步骤 2. 更新系数。
我们将选取 $\lambda \le 1/4$，因此（根据步骤 1 中的选择）也选取 $\delta_0 \le \lambda \le 1/4$ 和 $k_0 = \lceil |\log_2 \delta_0| \rceil + 2 \ge 4$。**定义** $e'_{k'_1}$：由于（根据（37）–（38））我们有 $|f(x')| \le 16C_2\varepsilon$ 在 $\frac{1}{4} \le |x'| \le 4$ 中，我们立即看出 $|\bar{a}| \le C_3\varepsilon$。令 $e'_{k'_1} := \frac{(-\bar{a},1)}{|(-\bar{a},1)|}$。

~现在，根据引理 3.10，我们有 $\Sigma\cap(B_4\setminus\overline{B_{1/4}})\subset$图像 f。但这样一来，我们可以界定

$$|x\cdot e'_{k'_1}|=|(x',f(x'))\cdot\frac{(-\bar a,1)}{|(-\bar a,1)|}|\le|f(x')-\bar a\cdot x'|\le C_2\varepsilon\lambda\quad\text{for any}\quad x\in\widetilde{\Sigma}\cap(B_4\setminus\overline{B_{1/4}})\,. \tag{43}$$

步骤 3。 k'_1-k_0 与 k'_1之间的超额衰减。

回忆一下，我们设定了 $k'_1=k_1+1$ 和 $\varepsilon'=\delta\varepsilon$。最后取 $\lambda=\min\{2\delta C_2^{-1},1/4\}$，并回忆 $\Sigma=2^{k_1}\widetilde{\Sigma}$，可得

$$|x\cdot e'_{k'_1}|\le(\varepsilon 2\delta)2^{k_1}=\varepsilon' 2^{k'_1}\text{ for all }x\in\Sigma\cap(B_{2^{k'_1+1}}\setminus\overline{B_{2^{k'_1-1}}})\,. \tag{44}$$

现在，对于$k\le k'_1-1$，我们则选择直接保留 $e'_k:=e_k$。利用（44）处理 $k=k'_1$，并直接对尺度$k'_1-k_0\le k\le k'_1-1$应用命题3.6 中的超额衰减假设，可得

$$|x\cdot e'_k|\le C'\delta^{k-k'_1}\varepsilon' 2^k\text{ for all }x\in\Sigma\cap(B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}),\ k'_1-k_0\le k\le k'_1\,.$$

这恰好表明，我们已经证明了尺度k'_1-k_0 与k'_1之间的超额衰减，正如所需。**步骤 4**。 最佳平坦度的保持。

任取 $k''_1\ge k_1+1$。

断言。 命题3.6 的假设以相同的 ε 和 e_k 成立，但用 k''_1 替代 k_1。事实上：

- We have $k''_1\ge k_1+1\ge K$.
- We also have $2^{(\alpha-1)k''_1}\le 2^{(\alpha-1)k_1}\le\varepsilon\le\varepsilon_0$.
- The same $e_k\in\mathbb{S}^{n-1}$, with $k\ge k''_1-k_0$ now, satisfy:
  - Excess decay between k''_1-k_0 and k''_1:
  $$|x\cdot e_k|\le\delta^{k-k_1}\varepsilon 2^k\le\delta^{k-k''_1}\varepsilon 2^k\text{ for all }x\in\Sigma\cap(B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}),\quad k''_1-k_0\le k\le k''_1\,.$$
  - Preservation of best flatness:
  $$|x\cdot e_k|\le\varepsilon 2^k\text{ for all }x\in\Sigma\cap(B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}),\quad k''_1+1\le k\,.$$

但这意味着，我们可以用 k''_1 代替 k_1，再次应用上面的步骤 1 到 3。步骤 3 的结论随即给出某个新的 $e'_{k''_1+1}\in\mathbb{S}^{n-1}$ 的存在，使得

$$|x\cdot e'_{k''_1+1}|\le\varepsilon' 2^{k''_1+1}\text{ for all }x\in\Sigma\cap(B_{2^{k''_1+1}}\setminus\overline{B_{2^{k''_1-1}}})\,.$$

由于 $k''_1\ge k_1+1$是任意的，这恰好说明最佳平坦度 ε'得以保持，从而完成命题 3.6的证明。

□

4 有限指标 Allen–Cahn 解的结构

4.1 图像性

本节的主要结果是：

命题 4.1。 设 $3\le n\le 7$。设 $u:\ \mathbb{R}^n\to[-1,1]$ 是 *Allen-Cahn*方程的有限指标解，且具有有界能量密度。假设($\star$) 在 $\mathbb{R}^n$中成立。

于是，存在 一些 $R_0>0$、$e\in\mathbb{S}^{n-1}$ 和 $N\in\mathbb{N}$，它们都依赖于 u，使得以下结论成立：

存在 N光滑函数 $f_i:\ \mathbb{R}^{n-1}\setminus B'_{R_0}\to\mathbb{R}$、$\overline{f_1<\ldots<f_N}$，使得

$$\mathcal{R}_e(\{u=0\})=\bigcup_i\operatorname{graph}f_i\quad in\quad\mathbb{R}^n\setminus(\overline{B'_{R_0}}\times[-R_0,R_0])\,.$$

此外，给定 $\alpha>0$，存在 C，它还依赖于 α，使得

$$|f_i|+|x||Df_i|+|x|^2|D^2f_i|\le C|x|^\alpha\,. \tag{45}$$

在第 4.2 节中，我们将利用 $\{u=0\}$ 的二阶平坦性（由（45）给出），证明 u 本身可由一维 Allen–Cahn 解的叠加很好地近似，从而得到一个误差很小的椭圆系统（Toda），其对象为 f_i。

Allen–Cahn 设定。

引理 4.2。 在命题 *4.1*的情形下，存在 C_1 和 R_0，以及一个连续性模 ω，使得以下结论成立：

- 稳定性。

$$u \text{ is a stable solution to } A\text{–}C \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{R_0}}.$$

- 密度界。

$$\mathbf{M}_R(u) \le C_1 \qquad \text{for every} \quad R > 0. \tag{46}$$

- 层化假设。

$$|\mathcal{A}|(x) \le \frac{C_1}{|x|} \quad \text{and} \quad |\nabla u| \ge \frac{1}{C_1} \quad \text{in} \quad \{|u| \le 0.9\} \setminus \overline{B_{R_0}}. \tag{47}$$

- 大尺度平坦性。

$$\mathcal{R}_{e_R}(\{u = 0\}) \cap (B_{8R} \setminus \overline{B_{R/8}}) \subset \{|x_n| \le \omega(R^{-1})R\} \quad \text{for some} \quad e_R \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad \text{given} \quad R \ge R_0. \tag{48}$$

- 密度下界。

$$\mathbf{M}_\infty - \omega(R^{-1}) \le \mathbf{M}_{\omega(R^{-1})R}(y) \le \mathbf{M}_\infty \quad \text{for all} \quad y \in \{e_R \cdot x = 0\} \cap (B_{8R} \setminus \overline{B_{R/8}}), \quad \text{with } e_R \text{ from (48)}. \tag{49}$$

证明。有限指标条件意味着存在某个 R_0，使得 u 在 $\mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}$中是稳定的：否则，对每一个 $i \in \mathbb{N}$，我们都会找到某个 $\eta_i \in C_c^1(\mathbb{R}^n \setminus B_{2^i})$，使得在（3）的记号下，$Q(\eta_i, \eta_i) < 0$。于是——由于这些$\eta_i$ 具有紧支集——我们会找到一个无穷子序列η_{i_k}，使得它们的支集两两不交，并且$Q(\eta_{i_k}, \eta_{i_k}) < 0$。这很容易表明，对任何作为这些 η_{i_k} 的非平凡有限线性组合而得到的 η，都有 $Q(\eta, \eta) < 0$，从而得出矛盾。

第二　　条成立，因为 $\mathbf{M}_\infty(u) < \infty$，且我们有单调性公式（引理 2.3）　　.

然后，定理 2.12 表明，在远离原点的任意足够大的球内，层化假设均成立；只需将 R_0 增大，并相应地选择 C_1，即可得到第三条。

通过反证法得到大尺度平坦性性质 (48)：假设存在一个序列$R_k \to \infty$，使得 (48) 对 $R = R_k$不成立。考虑 $\widetilde{u}_k(x) := u(R_k x)$，它们是满足$\varepsilon_k = \frac{1}{R_k}$的 ε_k-Allen-Cahn方程的解。由定理 2.10，在远离原点处应用该定理，可知水平集 $\{\widetilde{u_k} = 0\}$ 局部满足一致的面积、C^2和$^\alpha$ 估计。于是，Arzel`a–Ascoli 定理给出它们的子列在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中局部 C^2 收敛到极限子流形 Σ_∞；由 (20)，该子流形是极小的。由 $\mathbf{M}_R(u)$ 的单调性，容易看出 Σ_∞ 具有恒定的面积密度，且等于 $\mathbf{M}_\infty(u)$，因此它是一个锥。此外，将 (17) 取极限可得，它在原点之外实际上是稳定的。接着，Simons 分类 [Sim68] 表明 Σ_∞ 实际上是一个超平面；由于$\{\widetilde{u}_k = 0\}$ 在 $\overline{B_{16}} \setminus B_{1/16}$ 中收敛到 Σ_∞，令e_{R_k} 为该超平面的法向量，再缩放回去，便得到矛盾。

最后，(49) 可由相同的反证论证再加上一个简单的比较得到；完整细节见 [FS25，命题 3。10]

□

设 $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ 是 $\mathbb{R}^n \setminus B_{R_0/2}$ 中 $\{u = 0\}$ 的（可能可数无穷多个）连通分支的一个枚举，并设 $\Sigma := \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$。

引理 4.3. 假设 $\mathbf{M}_\infty(u) > 0$。那么，Σ 满足定义 *3.1* 中的假设。此外，给定 $\varepsilon_0 > 0$，只要将 R_0 取得足够大，以下结论成立：给定 $R \ge R_0$，存在某个 $e_R \in \mathbb{S}^{n-1}$ 满足

$$\Sigma \cap (B_{8R} \setminus \overline{B_{R/8}}) \subset \{|e_R \cdot x| \le \varepsilon_0 R\}. \tag{50}$$

证明。由隐函数定理（由于 (47)，我们可以应用该定理），Σ 在 $\mathbb{R}^n \setminus B_{R_0/2}$ 中相对闭且嵌入。

此外，由于 u 满足　fi层化假设　　(再次由　(47))，定理2.10 给出某个　　C_0 使得（第二基本形式与）平均曲率界在（22）中对 Σ 成立。非空性可立即由例如对引理 2.14 中第三条的简单应用以及假设 $\mathbf{M}$

最后，（50）直接由$^\infty(u) > 0$（48）得出。

□

命题*4.1*的证明。若 $\mathbf{M}_\infty(u) = 0$，则 $u \equiv \pm 1$，由单调性公式可知，结论显然成立。否则，根据引理 4.3，我们可以对 3.2 Σ应用命题。由此可得，Σ_i 是一个有限集合 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$，并且存在某个固定的 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$，使图形性断言成立。此外，给定 $\alpha > 0$，存在 C，它还依赖于 α，使得

$$|f_i(x')| + |x'||Df_i| \le C|x'|^\alpha.$$

然后，利用标准的极小图方程 Schauder 型自举估计以及定理 ¨给出的 $\mathrm{H}[f_i]$ 的 Hölder 界（见（2.10 （20））。 □

注记 4.4。 结合引理 2.14 和 (49) 还可知 N 是有限的；事实上，再结合 (45) 中的次线性增长，可得 $N = \mathbf{M}_\infty(u)$。

4.2 拼接近似的改进

本节中，我们均假设处于命题 4.1的设定下。我们指出，常数 $R_0 > 0$将取为足够大，并且可能随行变化。

主要结果。 本节旨在证明（参见 [WW19b；GWW20] 以了解普适常数 κ_0的精确取值）：

命题 4.5 (关于 da 系统与稳定性)。 由命题 $\{f_i\}_{i=1}^N$ *4.1* 的解满足 *Toda* 型系统

$$\Delta f_i = \kappa_0 \left(e^{-\sqrt{2}(f_i - f_{i-1})} - e^{-\sqrt{2}(f_{i+1} - f_i)} \right) + O\left(|x'|^{-2-\frac{1}{8}} \right) \quad in \quad \mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B'_{R_0}}, \tag{51}$$

其中我们将 $e^{-\sqrt{2}(f_1 - f_0^-)} \equiv 0$ 和 $e^{-\sqrt{2}(f_{N+1} - f_N)} \equiv 0$解释为。

此外，它们满足以下相应的稳定性条件：设 $i \in \{2, ..., N\}$ 和 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \setminus B'_{R_0})$。那么，

$$2\sqrt{2}\kappa_0 \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B'_{R_0}}} e^{-\sqrt{2}(f_i - f_{i-1})} \eta^2 \, dx' \le \left(1 + C R_0^{-\frac{1}{8}} \right) \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B'_{R_0}}} |\nabla \eta|^2 \, dx' + C \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B'_{R_0}}} \eta^2 |x'|^{-2-\frac{1}{8}} \, dx'. \tag{52}$$

改进的曲率估计。 令 II_i 表示 Γ_i ： = 图像 f_i的第二基本形式。由命题4.1可特别推出[7] ：

$$|\mathrm{II}_i(x')| \le C|x'|^{-3/2} \quad \forall |x'| \ge R_0 \,, \tag{53}$$

换言之，我们将 Wang–Wei 曲率界（其衰减幂次为 -1）改进为更强的衰减，从而打破了尺度不变性。事实上，我们还可以将这一界推广至完整的 A–C 第二基本形式及其高阶导数：

引理 4.6。 我们有 $\mathcal{A} + |\nabla \mathcal{A}| \le C|x|^{-3/2}$ 在 $\{|u| \le 0.9\} \setminus \overline{B_{R_0}}$ 中，尤其有 $|\mathrm{II}_i| + |\nabla \mathrm{II}_i| \le C|x|^{-3/2}$。

这里 $\nabla \mathcal{A}$表示函数 $\mathcal{A}$ 的通常梯度（回顾（16）），而 $\nabla \mathrm{II}_i$ 表示张量 II_i 在超曲面 Γ_i 上定义处的内蕴协变导数。

证明。 **步骤 1**。 Allen-Cahn方程第二基本形式。
我们首先将（53）加强为 A–C 第二基本形式的一个界，即

$$\mathcal{A} \le C|x|^{-3/2} \quad \text{in} \quad \{|u| \le 0.9\} \setminus \overline{B_{R_0}}. \tag{54}$$

设 $x \in \{|u| \le 0.9\} \setminus \overline{B_{R_0}}$，并设 $R = |x|/2$。我们在固定球 $B_R(x)$ 中进行论证；通过适当增大 R_0，我们知道（53）成立。

现在，根据 [WW19b] 中的估计（目前仅使用界（**47**），即层化假设），我们知道 $u = g_* + \phi$，其中 g_* 是一个试探函数近似解，并且

$$\|\phi\|_{C^{2,\alpha}} \le C|x|^{-2}.$$

现在我们可以在过渡层 $\{|u| \le 0.9\}$ 上计算 ∇u 和 $\nabla^2 u$，论证方式与 [WW17 第 45] 页中的二维情形相同。具体而言，考虑相对于层 Γ_i 的费米坐标，完全仿照 [WW17],，使得 y_k（其中 $k = 1, ..., n-1$）参数化其中一个 Γ_i，而 z 则参数化相对于 Γ_i 的法向方向——需要指出的是，为方便读者，在本引理证明之后，我们将重新整理并详细回顾整个费米坐标设定。在 [WW17 第 45], 页的计算中，将 $\frac{\partial}{\partial y}$ 换成 $\frac{\partial}{\partial y_k}$（其中 $k = 1, ..., n-1$；因为我们讨论的是任意维数），即可得到

$$\nabla u = (-1)^\alpha g_i' \frac{\partial}{\partial z} + O(|x|^{-2}) \quad \text{and} \quad \nabla^2 u = g_i'' \frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial z} + (-1)^i g_i' \nabla \frac{\partial}{\partial z} + O(|x|^{-2}),$$

其中 g_i' 和 g_i''是对一维艾伦–卡恩解 g的导数作适当平移后得到的函数，其中心基本位于 Γ_i。

[7]事实上，我们得到 $|\mathrm{II}_i(x')| \le C_\alpha |x'|^{-2+\alpha}$ 对任意 $\alpha > 0$，但为具体起见，我们采用固定幂次 $|x'|^{-3/2}$ 于下文。[8]此处我们遵循 arXiv 版本，而非 [WW19a]，因其包含该论证的全部细节。

现在，借助（53）中的改进界，并采用 [WW17] 中的相应记号，我们可以估计

$$|\mathrm{II}_i(y,z)| \le C|\mathrm{II}_i(y,0)| \le C|x|^{-3/2} \qquad \text{and} \qquad \left|\nabla \frac{\partial}{\partial z}\right| \le C|\mathrm{II}_i(y,z)| \le C|x|^{-3/2}\,.$$

相较于 [WW17]，中所采用的仅使用尺度不变估计 $|\mathrm{II}_i(y,0)| \le C|y|^{-1}$ 的论证，这就是唯一真正的修改之处。

于是我们得到

$$\nabla^2 u = g_i'' \frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial z} + O(|x|^{-3/2})\,,$$

由上述结果可知

$$\mathcal{A}^2 = \frac{|\nabla^2 u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2}{|\nabla u|^2} = O(|x|^{-3})$$

正如所需。

步骤 2。 高阶界。

我们采用与 [WW19a 的引理 8 类似的论证。1] 根据（47），$\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 在 $\{|u| \le 0.9\} \setminus B_{R_0}$ 中定义良好且光滑。定义 $B := \nabla \nu$，即向量场 ν 的微分矩阵；用此记号，我们于是有 $|B| = \mathcal{A}$。

我们希望找出一个 B 满足的方程，以便将估计从 (54) 提升到高阶导数。现在，通过直接计算可得

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla \nu) = |\nabla u|^2 |\nabla \nu|^2 \nu\,. \tag{55}$$

对方程求导，得到如下 Simons 型方程：

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla B) = |\nabla u|^2 |B|^2 B + |\nabla u|^2 \nabla |B|^2 \otimes \nu + |B|^2 \nabla |\nabla u|^2 \otimes \nu + |\nabla u|^2 \nabla^2 \log |\nabla u|^2 \cdot B. \tag{56}$$

现在注意到，$|\nabla u|$ 在 $\{|u| \le 0.9\} \setminus B_{R_0}$ 中有正的上下界，且任意阶导数均一致有界。因此我们立即得到，(56) 右端的所有项在范数意义下均可由 $O(|B|) = O(\mathcal{A}$ 控制；于是由 (54) 可得

$$|\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla B)| \le C|x|^{-3/2} \quad \text{in} \quad \{|u| \le 0.9\} \setminus \overline{B_{R_0}}\,. \tag{57}$$

结合 (54) 和 (57)，利用标准的内部梯度估计——在半径虽小但固定的球上——可得

$$|\nabla B| \le C|x|^{-3/2} \quad \text{in} \quad \{u = 0\} \setminus \overline{B_{2R_0}} \tag{58}$$

同样成立，只要令 R_0 足够大。

最后，要改为对 $|\nabla \mathrm{II}|$ 作界，只需注意到

$$|\nabla \mathrm{II}| \le |\nabla B| + |\mathrm{II}||B|\,, \tag{59}$$

然后将其与（58）以及步骤 1 中的界结合起来。

具体而言，此处 $\nabla \mathrm{II}$ 表示水平集上张量 II 的内蕴协变导数，而 ∇B 表示 B 的欧几里得微分，与前文相同。因此，只要 ∇u 不为零，就有如下公式：

$$(\nabla_Z \mathrm{II})(X,Y) = (\nabla_Z B)(X,Y) + \mathrm{II}(Z,X)B(\nu,Y)\,,$$

这很容易验证 根据张量协变导数的标准定义，并由此可得（59）。 □

费米坐标。我们引入相对于 Γ_i 的费米坐标。采用 [WW19b] 中的记号会很方便；因此，在本节中，$(y,\ z)$ 在 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ 和 $z \in \mathbb{R}$ 下始终表示相对于 Γ_i 的费米坐标。给定 $x \in \mathbb{R}^n$ 在 Γ_i 的一个邻域内的点，若在这些坐标下它恰好写作 $(y,\ z)$，则：

- $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ 满足：$(y,\ f_i(y)) \in \Gamma_i$ 是 x 的最近点投影。注意，这与先前定义的 x' 不同；我们回顾一下，后者表示将任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 投影到前 $n-1$ 个坐标上。
- z 是 Γ_i 到 x 的有向距离，其中 Γ_i 上方为正。

现在，由于 Γ_i 是 f_i 的图像，我们将使用 $y \mapsto (y, f_i(y))$ 作为 Γ_i 的参数化。Γ_i 在 $(y, f_i(y))$ 处的向上单位法向量为

$$N_i(y) := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f_i(y)|^2}}\,(-\nabla f_i(y),\,1)\,.$$

或许更简洁但等价地说，x 与 (y,z) 之间的对应关系此时即为 $x = (y, f_i(y)) + zN_i(y)$。

现在，仅由（53），即曲率估计，这些坐标在开集 $\{(y,z)$中是良定义的：$|z|<c_F|y|,\ |y|>R_0\}$ 对某个 $c_F>0$。

对于每个 z，Γ_i^z 表示由所有到 Γ_i 的有向距离恰好为 z的点构成的光滑超曲面。稍微滥用一下记号，我们用 $\mathrm{II}_i(z,t)$ 表示其第二基本形式，并用$H_i(z,t)$ 表示其平均曲率。按照 [WW19b，第 11-13], 页中的论证，我们有：

- **平均曲率展开：**
$$H_i(y,z)=H_i(y,0)+O\left(|z||\mathrm{II}_i|^2(y,0)\right)=H_i(y,0)+O\left(|z||y|^{-3}\right).$$
- **费米坐标中的拉普拉斯算子：**记 $\Delta_{i,\ z}$ 为作用在 Γ_i^z上的拉普拉斯（-贝尔特拉米）算子，
$$\Delta=\Delta_{i,z}-H_i(y,z)\partial_z+\partial_{zz}.$$
- **作用在 Γ_i^z上的拉普拉斯算子：**设 φ 是一个仅依赖于 y 的 C^2 函数；则
$$|\Delta_{i,z}\varphi(y)-\Delta_{i,0}\varphi(y)|\le C|z||\mathrm{II}_i|\left(|\nabla^2\varphi(y)|+|\nabla\varphi(y)|\right)\le C|y|^{-3/2}|z|\left(|\nabla^2\varphi(y)|+|\nabla\varphi(y)|\right). \tag{60}$$

距离的记号

- 给定满足 $|x'|>R$的 x，令 d_i 表示到 Γ_i的距离。
- 我们设定 $\mathcal{M}_i:=\{|d_i|<|d_{i-1}|$ 以及$|d_i|<|d_{i+1}|\}$。

此外，

- 对于 $|y|>R$，令 $D_i^{\pm}(y)$ 表示 $(y,f_i(y))\in\Gamma_i$ 到 $\Gamma_{i\pm1}$ 的距离。
- 记 $D_i(y):=\min\{D_i^+(y)\ D_i^-(y)\}$。
- 集合 $M(y):=\max_i\max_{|\widetilde{y}|\ge|y|}e^{-\sqrt{2}D_i(\widetilde{y})}$。

根据 f_i 和 ∇f_i 在（45）中的界，Γ_i 和 Γ_{i+1} 的高度相近且几乎平行。通过简单比较，例如参见 [WW19a，引理 8。3], 我们得到：

引理 4.7. 对于任意 $|x|>R_0$,
$$\begin{cases}D_i^+(y)=f_{i+1}(y)-f_i(y)+O(|y|^{-1/6}),\\ D_i^-(y)=f_i(y)-f_{i-1}(y)+O(|y|^{-1/6}).\end{cases}$$

最优逼近

这完全摘自 [GWW20]。

回顾 (14) 中 g 的定义；我们需要一个截断版本。取一个截断函数 $\zeta\in C_c^\infty(-2,\ 2)$，使得 $\zeta\equiv1$ 属于 $(-1,\ 1)$，且 $|\zeta'|+|\zeta''|\le16$。对于所有足够大的 $|y|$（为简化记号，方便时省略对 $|y|$ 的依赖）
$$\bar g(t)=\zeta(8(\log|y|)t)g(t)+[1-\zeta(8(\log|y|)t)]\,\mathrm{sgn}(t),\quad t\in(-\infty,+\infty).$$
特别地，$\bar g\equiv1$属于 $(16\log|y|,\ +\infty)$，且 $\bar g\equiv-1$属于 $(-\infty,\ -16\log|y|)$。

那么，$\bar g$是一个 一个一维 Allen–Cahn 方程的近似解，其含义是
$$\bar g''(t)=W'(\bar g(t))+\bar\xi(t),$$
其中 $\mathrm{spt}(\bar\xi)\subset\{8\log|y|<|t|<16\log|y|\}$，且 $|\bar\xi|+|\bar\xi'|+|\bar\xi''|\le C|y|^{-4}$。

在下文中，为方便起见，我们假设 u 在 $-1)^i$ 与 Γ_i 之间和 Γ_{i+1}同号。与 [GWW20，引理 4.3],完全相同，我们有：

引理 4.8. 对于任意满足 $|y|>R_0$ 的 $y\in\mathbb{R}^{n-1}$（可能需要扩大 R_0）以及 $i\in\{1,...,N\}$，存在唯一的$h_i(y)$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得在相对于 Γ_i 的费米坐标中，
$$\int_{-\infty}^{+\infty}[u(y,z)-g_*(y,z)]\bar g'(z-h_i(y))\,dz=0,$$
其中，对每个 i，我们在 $\mathcal{M}_i$ 中定义
$$g_*(y,z):=g_i+\sum_{j=1}^{i-1}\left[g_j-(-1)^j\right]+\sum_{j=i+1}^{N}\left[g_j+(-1)^jj\right],$$
并且在相对于 Γ_j 的费米坐标 (y,t) 中，
$$g_j(y,z):=\bar g((-1)^j[z-h_j(y)]).$$
此外，对于任意 $i\in\{1,...,N\}$，我们有
$$\lim_{|y|\to+\infty}\left(|h_i(y)|+|\nabla h_i(y)|+|\nabla^2h_i(y)|+|\nabla^3h_i(y)|\right)=0;$$

同样地，定义近似误差 $\phi := u - g_*$，我们有

$$\lim_{|y|\to+\infty} \sup_z \left(|\phi_i(y,z)| + |\nabla\phi_i(y,z)| + |\nabla^2\phi_i(y,z)| + |\nabla^3\phi_i(y,z)|\right) = 0;$$

关于 Γ_i 的费米坐标中，ϕ 的方程可写为

$$\begin{aligned}\Delta_{i,z}\phi - H_i(y,z)\partial_z\phi + \partial_{zz}\phi = W''(g_*)\phi + \mathcal{N}(\phi) + \mathcal{I} + (-1)^i g_i'\mathcal{R}_{i,1} - g_i''\mathcal{R}_{i,2}\\ + \sum_{j\neq i}[(-1)^j g_j'\mathcal{R}_{j,1} - g_j''\mathcal{R}_{j,2}] - \sum_j \xi_j,\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{N}(\phi) = W'(g_*+\phi) - W'(g_*) - W''(g_*)\phi = O(\phi^2)$$

and

$$\mathcal{I} = W'(g_*) - \sum_j W'(g_j)\,,$$

而对于每个 j，在关于 Γ_j 的费米坐标中，

$$\xi_j(y,z) = \bar{\xi}((-1)^j(z - h_j(y)))\,,$$

and

$$\mathcal{R}_{j,1}(y,z) := H_j(y,z) + \Delta_{j,z}h_j(y)\,, \quad \mathcal{R}_{j,2}(y,z) := |\nabla_j h_j(y)|^2\,.$$

如 [W W19b，引理 4。6], 由于 $u = 0$ 在 Γ_i中，h_i 可以通过 ϕ 以下方式进行控制。

引理 4.9。对于每个 i 和 $R > R_0$，我们有

$$\|h_i\|_{C^{2,1/2}(\{|y|>R\})} \le C\left(\|\phi\|_{C^{2,1/2}(\{|y|>R\})} + M(R)\right),$$

以及改进后的切向导数界

$$\|\nabla_y h_i\|_{C^{1,1/2}(\{|y|>R\})} \le C\left(\|\nabla_y\phi\|_{C^{1,1/2}(\{|y|>R\})} + R^{-1/6}M(R)\right).$$

Toda 系统

根据 [WW19b，第 5],节可得如下 Toda 系统:

$$H_i + \Delta_{i,0}h_i = \kappa_0\left(e^{-\sqrt{2}D_i^-} - e^{-\sqrt{2}D_i^+}\right) + Err_i, \tag{61}$$

其中 κ_0 是一个普适常数，而 Err_i 是一个高阶误差项。更准确地说，[WW19b，引理 5.1] 在我们的情形下变为:

引理 4.10. 对于任意 $|y| > R_0$,

$$\begin{aligned}|Err_i(y)| \le C\Big[&|y|^{-3} + |y|^{-\frac{7}{2}}M(|y| - 100\log|y|) + M(|y| - 100\log|y|)^{\frac{7}{6}}\\ &+ \max_\beta\left(\|H_\beta + \Delta_{\beta,0}h_\beta\|^2_{C^{1/2}(\{\widetilde{y}\,:\,|\widetilde{y}|>|y|-100\log|y|\})} + \|\phi\|^2_{C^{2,1/2}(\{\widetilde{y}\,:\,|\widetilde{y}|>|y|-100\log|y|\})}\right)\Big].\end{aligned}$$

当然，我们再次利用引理 4.6 中的改进界来得到 $O(|y|^{-3})$ 项。

关于 ϕ 的估计。

完全按照 [WW19b 第 6]，节中的方法进行论证，我们得到如下结论。

引理 4.11。存在两个常数 C，使得对于所有足够大的 R，

$$\begin{aligned}&\max_i \|H_i + \Delta_{i,0}h_i\|_{C^{1/2}(\{|y|>R\})} + \|\phi\|_{C^{2,1/2}(\{|y|>R\})}\\ &\le \frac{1}{2}\Big(\max_i \|H_i + \Delta_{i,0}h_i\|_{C^{1/2}(\{|y|>R-100\log R\})}\\ &\quad + \|\phi\|_{C^{2,1/2}(\{|y|>R-100\log R\})}\Big) + CM(R - 100\log R) + CR^{-3}.\end{aligned}$$

不等式右侧第一项前的常数 $1/2$ 使我们能够对有限个二进尺度进行迭代，并得出：只要将 R_0 取大一些，就有

$$|H_i(y) + \Delta_{i,0}h_i(y)| + \|\phi\|_{C^{2,1/2}(\{\widetilde{y}\,:\,|\widetilde{y}|>|y|\})} \le C\left[|y|^{-3} + M(|y| - 100\log|y|)\right] \quad \forall\,|y| \ge R_0. \tag{62}$$

根据 [WW19b，命题 10，分离误差1], 满足 $M(|y|) \le C|y|^{-2}$。然后，应用（62），取 R_0 充分大，可得

$$|H_i(y) + \Delta_{i,0} h_i(y)| + \|\phi\|_{C^{2,1/2}(\{\widetilde{y} \,:\, |\widetilde{y}|>|y|\})} \le C|y|^{-2}.$$

此外，根据 ϕ，我们可以得到 [WW19b命题 7 中1]的水平导数的更优界：

$$\|\nabla_y \phi\|_{C^{1,1/2}(\{\widetilde{y} \,:\, |\widetilde{y}|>|y|\})} \le C|y|^{-2-1/7}. \tag{63}$$

鉴于引理4.9，（63）也给出了对 h 的改进：

$$\|\nabla_y h_i\|_{C^{1,1/2}(\{\widetilde{y} \,:\, |\widetilde{y}|>|y|\})} \le C|y|^{-2-1/7}.$$

特别地，这给出了 h的拉普拉斯算子大小的界。代入（61），并利用引理4.7 比较层间距，我们得到

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f_i}{\sqrt{1+|\nabla f_i|^2}}\right) = \kappa_0\left(e^{-\sqrt{2}(f_i - f_{i-1})} - e^{-\sqrt{2}(f_{i+1}-f_i)}\right) + O\left(|y|^{-2-\frac{1}{8}}\right).$$

由于 $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f_i}{\sqrt{1+|\nabla f_i|^2}}\right) = \Delta f_i + O(|\nabla f_i|^2 ||D^2 f_i|)$，利用（45）最终得到

$$\Delta f_i = \kappa_0\left(e^{-\sqrt{2}(f_i - f_{i-1})} - e^{-\sqrt{2}(f_{i+1}-f_i)}\right) + O\left(|y|^{-2-\frac{1}{8}}\right).$$

这证明了（51）。随后，（52）中的稳定性条件可仿照 [WW19b命题 81], ，利用我们已经推导出的改进结果得出。至此，命题4.5 的证明以及本节内容均告完成。

5 主要结果的证明

5.1 $4 \le n \le 7$ —定理 1.1 和 1.2 的证明

定理 1.1 将直接由定理 1.2推出，因为 [FS25] 中的主要结果恰好断言 (⋆) 对 $n = 4$成立。

剩下要证明定理 1.2。固定 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $4 \le n \le 7$，并假设 (⋆) 在 $\mathbb{R}^n$中成立。令 $u\colon \mathbb{R}^n \to [-1,1]$ 为 Allen–Cahn 方程的一个有限指标解，其中 $\mathcal{E}(u,\ B_R) \le CR^{n-1}$ 对某个常数 C 以及所有$R > 0$成立。

我们沿用第 4.1–4.2 节中的相同设定和记号。特别地，我们有命题 4.1和 4.5。

若 $N = 1$，则很容易得出结论（我们将在证明末尾说明这一点）。因此，暂且假设 u 至少有两个端，即 $N \ge 2$——我们要证明这会导致矛盾。

Farina 积分估计

考虑两个相邻端 Γ_i和 $\Gamma_{i-1}, i \in \{2, ..., N\}$。令 $v_i := f_i - f_{i-1}$，它依赖于 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$。将 51 式中的 (i和 $i-1$代入并作差，得到不等式

$$\Delta v_i(y) \le 2\kappa_0 e^{-\sqrt{2}v_i(y)} + O(|y|^{-2-1/8}) \quad \text{in } \mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B_{R_0}}.$$

用 $V_i := e^{-\sqrt{2}v_i}$ 表示，可得

$$-\Delta V_i \le 2\sqrt{2}\kappa_0 V_i^2 - V_i^{-1}|\nabla V_i|^2 + O(|y|^{-2-1/8})V_i \quad \text{in } \mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{B_{R_0}}.$$

我们采用 [Far07] 中的论证（另见 [DF09; Wan19; GWW20]），并得到相互作用的积分估计：令 $q > 0$ 和 $\eta \in C_0^\infty($ $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_{R_0}$。将 V_i 的方程乘以 $V_i^{2q-1}\eta^2$，再分部积分，我们得到 d

$$(2q-1)\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q-2}|\nabla V_i|^2\eta^2 dy + 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q-1}\eta\nabla V_i\cdot\nabla\eta(y)dy \le 2\sqrt{2}\kappa_0\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q+1}\eta^2 dy$$
$$-\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q-2}|\nabla V_i|^2\eta^2 dy + C\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q}\eta^2|y|^{-2-1/8}dy.$$

对第二个积分进行分部积分并合并各项，

$$2q\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q-2}|\nabla V_i|^2\eta^2 dy \le 2\sqrt{2}\kappa_0\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q+1}\eta^2 dy$$
$$+ C\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}} V_i^{2q}\left[|\nabla\eta|^2 + \eta|D^2\eta| + \eta^2|y|^{-2-1/8}\right]dy. \tag{64}$$

另一方面，将 $V_i^q\eta$ 作为测试函数代入（52）：

$$2\sqrt{2}\kappa_0\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q+1}\eta^2dy\le q^2\left(1+CR_0^{-\frac{1}{8}}\right)\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q-2}|\nabla V_i|^2\eta^2dy$$
$$+C\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q}\left[|\nabla\eta|^2+\eta^2|y|^{-2-1/8}\right]dy. \tag{65}$$

结合（64）和（65），可得

$$\left[2q-q^2\left(1+CR_0^{-\frac{1}{8}}\right)\right]\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q-2}|\nabla V_i|^2\eta^2dy$$
$$\le C\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q}\left[|\nabla\eta|^2+\eta|D^2\eta|+\eta^2|y|^{-2-1/8}\right]dy\,.$$

若 $q<2$，只需将 R_0 取得足够大，我们便可找到某个 $C(q)<+\infty$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q-2}|\nabla V_i|^2\eta^2dy$$
$$\le C(q)\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q}\left[|\nabla\eta|^2+\eta|D^2\eta|+\eta^2|y|^{-2-1/8}\right]dy\,.$$

将其代回（65），

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q+1}\eta^2dy\le C(q)\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q}\left[|\nabla\eta|^2+\eta|D^2\eta|+\eta^2|y|^{-2-1/8}\right]dy. \tag{66}$$

假设 $0\le\eta\le1$。于是我们可以将 η 替换为 η^m，其中 $m\ge5$；对（¨）应用霍尔德不等式，得到

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}V_i^{2q+1}\eta^2dy\le C(q)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_0}}}\left[|\nabla\eta|^2+|D^2\eta|+|y|^{-2-1/8}\right]^{2q+1}dy\right)^{\frac{1}{2q+1}}. \tag{67}$$

任取 $R>2R_0$，取 $\eta_R\in C_c^\infty(R_0,2R)$ 使得 $0\le\eta_R\le1$，$\eta_R\equiv1$ 属于（$2R_0,R$），且 $|\nabla\eta_R|^2+|D^2\eta_R|\le CR^{-2}$属于（$R_0,2R$）。将 $\eta_R(|x|)$ 代入（67），得到

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{2R_0}}}V_i^{2q+1}dy\le C+CR^{(n-1)-2(2q+1)}.$$

由关于 n 的假设，我们可以取 $q\in(0,2)$，使得 $2q+1=(n-1)/2$。将 $R\to+\infty$ 代入不等式后，得到

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{2R_0}}}V_i^{(n-1)/2}dy\le C.$$

我们强调，这个可积性估计打破了 Toda 系统的自然尺度 $V_i=O(|x|^{-2})$。

由 $N\ge2$ 导出矛盾。

由上述估计，特别可以推得，给定 $\delta>0$，存在某个 R_δ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B_{R_\delta}}}V_i^{n/2}dy\le\delta\,.$$

然后，如 Dancer–Farina [DF09], 中的一个 Harnack型不等式（见 [Ser64; Tru67], ，并将其应用于 V_i所满足的微分不等式）可直接推出 $|y|^2V_i(y)\le C\delta$ 对所有足够大的 $|y|$ 都成立。由于 $\delta>0$ 是任意的，这表明

$$e^{-\sqrt{2}v_i(y)}=o(|y|^{-2})\quad\text{as}\quad y\to\infty\,.$$

于是，如 [DF09]中那样，这就导出了矛盾：

- 界 $e^{-\sqrt{2}v_i(y)}=o(|y|^{-2})$ 蕴含——因为 $\Delta v_i\le e^{-\sqrt{2}v_i(y)}+O(|y|^{-2-1/8})$—— $\Delta v_i\le o(|y|^{-2})$ 也成立。
- Th这表明，对于径向平均函数 $\bar v_i$，沿射线积分可得

$$\bar v_i\le\delta\log|y|+C_\delta(1+|y|^{-n-3})\,,$$

对任意 $\delta>0$ 均成立。

- 但这样一来，$e^{-\sqrt{2}\bar v_i(y)}\ge c_\delta|y|^{-\delta}$，选择 $\delta<2$ 显然会导致矛盾 h

$$e^{-\sqrt{2}\bar v_i(y)}\le\max_{\{z:|z|=|y|\}}e^{-\sqrt{2}v_i(z)}\le C|y|^{-2}\,.$$

带有 $N=1$ 的分类。

前面的论证证实了 u 确实只有一个端，即 $N=1$。于是，u 的一维对称性可例如如下得到：根据备注4.4 中的讨论，我们进而推出$\mathbf{M}_\infty(u)=1$。然而，王的Allard型结果（记录于定理2.5中）表明，u 是一维的，正如所需。

5.2 闭 4 维流形中的行为——推论1.3

我们首先回顾，在黎曼情形下，A–C方程的解满足一个局部单调性公式（带有受控误差），见 [Gua18，附录 B]。特别地，这表明存在某个 Λ——其仅取决于 M和能量界 E_0——使得 $\mathbf{M}_r(u_{\varepsilon_i},p):=\frac{1}{r^{n-1}}\int_{B_r(p)}\frac{1}{\sigma_{n-1}}\left[\varepsilon|\nabla u_{\varepsilon_i}|^2+\frac{1}{\varepsilon}W(u_{\varepsilon_i})\right]\le\Lambda$ 对每个 $p\in M$和$r>0$均成立。这将使我们能够进行重标度论证，同时确保在所有所关注的尺度上能量密度都有界。

步骤 1. 梯度下界。

反设存在一个子序列 $\varepsilon_i\to 0$ 和某个 $p_i\in M$，使得

$$|u_{\varepsilon_i}|(p_i)\le 0.9\quad\text{and}\quad|\nabla u_{\varepsilon_i}|(p_i)<\frac{1}{i\varepsilon_i}\,. \tag{68}$$

令 g表示 M的度量，并考虑重标度流形 $\widetilde{M}_i:=(M,\ \widetilde{g}_i)$，其中 $\widetilde{g}_i:=\varepsilon_i^{-1/2}g$。在以 p_i 为中心的黎曼法坐标中（事实上，也可以取任意点序列），M_i 的度量在 C^k_{loc}中收敛——对任意 $k\in\mathbb{N}$而言——到整个 $\mathbb{R}^n$上的欧几里得度量。

令 $\widetilde{u}_i$ 表示函数 u_{ε_i}，并将其视为定义在 $\widetilde{M}_i$，现在它们是参数为 1 的 Allen-Cahn方程的解。此外，$\mathbf{M}_r(\widetilde{u}_i,\ p_i)\le\Lambda$ 也成立，此时同样将其视为定义在 $\widetilde{M}_i$ 上。此外，由 (68) 可得 $|\widetilde{u}_i|(p_i)\le 0.9$ 且 $|\nabla\widetilde{u}_i|(p_i)<\frac{1}{i}$。

现在，由于 $|\widetilde{u}_i|\le 1$，且它们都满足（4），我们得到一致的 C^3 界 $\widetilde{u}_i$（由标准的 C^3 半线性椭圆方程自举估计可知）。然后，经过以 p_i为中心的黎曼正规坐标变换后，Arzel`à-Ascoli定理给出一个子序列，它在 C^2_{loc}（$\mathbb{R}^n$）中收敛到 $\widetilde{u}_\infty$，这是定义在整个$\mathbb{R}^n$上的Allen-Cahn方程有界解，并且满足

$$\mathbf{M}_\infty(\widetilde{u}_\infty)=\lim_{r\to\infty}\lim_{i\to\infty}\mathbf{M}_r(\widetilde{u}_i,p_i)\le\Lambda\qquad\text{yet}\qquad|\widetilde{u}_\infty|(0)\le 0.9\quad\text{and}\quad|\nabla\widetilde{u}_\infty|(0)=0\,.$$

最后，容易看出 $\widetilde{u}_\infty$ 具有有限莫尔斯指标，事实上其指标不超过 C_0，与 $\widetilde{u}_i$一样。于是，由定理1.4，再结合 $|\widetilde{u}_\infty|(0)\le 0.9<1$这一事实，我们可推得 $\widetilde{u}_\infty=g(a\cdot x+b)$，其中 a取适当的值，b。然而$|\nabla\widetilde{u}_\infty|(0)=g'(b)\neq 0$，这就产生了矛盾。

步骤 2. 证明 $\mathcal{A}_{u_\varepsilon}$ 的界。

由于我们想证明 ε_i 足够小时的渐近估计，因此可以假设 $\varepsilon_i\to 0$。现在，根据步骤 1，我们尤其知道，只要 $|t|\le 0.9$ 且 i 足够大，$\{u_{\varepsilon_i}=t\}$ 就是光滑的。反设存在一个解的子序列（不重新标记），使得渐近估计不成立。这意味着，对于某个 $\delta>0$，存在 $p_i\in\{|\widetilde{u}_i|\le 0.9\}$，使得 $\varepsilon_i\mathcal{A}_{u_{\varepsilon_i}}(p_i)\to\infty$。

于是我们再次考虑步骤 1 中的重标度流形 $\widetilde{M}_i:=(M,\ \varepsilon_i^{-1/2}g)$，以及与之关联且满足 $\mathcal{A}_{\widetilde{u}_i}(p_i)\ge\delta$ 的 $\widetilde{u}_i$。通过以 p_i为中心的黎曼正规坐标，利用 Arzel`a–Ascoli 定理取极限，我们得到一个解 $\widetilde{u}_\infty$，它在整个 $\mathbb{R}^n$ 上满足 Allen-Cahn方程。此外，该解具有有界指标和能量密度，因为 $\widetilde{u}_i$ 也具有这些性质。如步骤 1 中那样，对于某个合适的 a，b，有 $\widetilde{u}_\infty=g(a\cdot x+b)$。另一方面，它必然满足 $\mathcal{A}_{\widetilde{u}_\infty}(0)\ge\delta$；结合 $\mathcal{A}_g\equiv 0$，这就导出了矛盾。

步骤 3. 片层分离的证明。

给定 $\Lambda\ge 1$，根据前面的步骤，存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于给定的 $\varepsilon\le\varepsilon_0$ 和 $t\in[-0.9,0.9]$，以下结论成立：给定 $p\in\{u_\varepsilon=t\}$，水平集 $\{u_\varepsilon=t\}$ 在 $B_{2\Lambda\varepsilon}(p)$ 中分解为若干个沿法坐标平行的图像。

再次运用重缩放论证，如同前面的步骤，我们由此推得——只要将 ε_0 取得足够小——事实上只有一个图像能够穿过 $B_{\Lambda\varepsilon}(p)$，因为 $\{g(a\cdot x+b)=t\}\subset\mathbb{R}^n$ 由单个超平面构成。

5.3 $n=3$ ——定理 1.4 的结构——证明

我们沿用 第 4.2 节和 5.1 中的设定和记号，再将讨论范围限制为 $n=3$。

若 $N=1$，则 u 实际上是一维的，正如定理1.2证明的最后部分所示。因此，我们假设$N\ge 2$。

层间相互作用的可积性

设 $R>4R_0$。我们首先使用标准的线性截断函数 $\eta_R\in C^1_c(B_{2R}\setminus B_{R_0})$ 测试稳定性（即 (52)），满足$\eta_R\equiv 1$ 在 $\overline{B_R\setminus B_{2R_0}}$ 且 $|\nabla\eta_R|\le CR^{-1}$。这表明，对任意 $i\in\{2,\dots,N\}$，

$$\int_{B'_R\setminus\overline{B'_{2R_0}}}e^{-\sqrt{2}(f_i-f_{i-1})}\,dy\le C\int_{B'_{2R}\setminus\overline{B'_{R_0}}}\frac{1}{R^2}\,dy+C\int_{B'_{2R}\setminus\overline{B'_{R_0}}}|y|^{-2-\frac{1}{8}}\,dy\le C\,,$$

其中 C 与 R无关。令 $R\to\infty$趋于无穷，我们便得出

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B'_{2R_0}}} e^{-\sqrt{2}(f_i-f_{i-1})}\,dx' \le C \quad \text{for every} \quad i=2,\dots,N\,. \tag{69}$$

现固定 $i\in\{1,\dots,N\}$。在（51）中对这一固定的 i值进行积分，并利用（69）以及 $|y|^{-2-\frac{1}{8}}$在 $\mathbb{R}^2$中的可积性，我们得出

$$\Delta f_i = h_i \qquad \text{for some } h_i\in(L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\overline{B'_{2R_0}})\,. \tag{70}$$

很难从稳定性中再获得更多信息。尽管如此，关于 f_i 的前述信息已经会强烈约束它们的结构。

单层结构

第一个想法受 [CL91], 启发，是将 $f_i=v_i^a+v_i^b$ 分解为

$$v_i^a(y):=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B'_{2R_0}}}(\log|y-z|-\log|z|)|h(z)\,dz$$

以及 $v_i^b:=f_i-v_i^a$。

注意到，$\int\log|z|\,h(z)\,dz$“只是一个重整化常数”。另一方面，它完全可能是无穷大——定义 v_i^a 的积分只有在将其被积函数作为一个整体加以考虑时，才可以看出是收敛的（利用对 h的可积性假设，以及 $|\log|y-z|-\log|z||\le C\frac{|y|}{|z|}\le C$对于 $|z|\ge 2|y|$ 这一事实）。

容易看出，令 $c_i^a:=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B'_{2R_0}}h\in\mathbb{R}$，我们有

$$v_i^a(y)=(c_i^a+o(1))\log|y| \quad \text{as} \quad |y|\to\infty\,.$$

这仍与第5.3节所需的渐近性相去甚远。不过，此时我们可以得到 v_i^b 的更精确渐近行为。注意到 $v_i^b=f-v_i^a$ 满足 $\Delta v_i^b=0$，也就是说，它是调和函数，因此不再受拉普拉斯算子界的限制。先验地，v_i^b 可以是任意调和函数；另一方面，根据 v 的增长界以及 v_i^a 的渐近性，我们还知道 $|v_i^b(y)|\le C|y|^{1/2}$。

通过环带中的平坦性改进策略，我们将证明：

命题 5.1。设 $w:\ \mathbb{R}^2\setminus B'_{2R_0}\to\mathbb{R}$ 是满足 $|w(y)|\le C|y|^{1/2}$ 的调和函数。那么，存在 b, $c\in\mathbb{R}$，使得 $w=b+c\log|y|+O(|y|^{-\alpha})$ 对每个 $\alpha\in(0,1)$ 都成立。

我们将在本节末尾证明命题 5.1。现在，我们说明如何由此得出结论：

首先，将命题 5.1 应用于 $w=v_i^b$，我们可以推出存在 b_i^b, $c_i^b\in\mathbb{R}$ 使得

$$v_i^b(y)=b_i^b+c_i^b\log|y|+O(|y|^{-\alpha})\,. \tag{71}$$

剩下的工作是改进 v_i^a 的渐近性。令 $c_i:=c_i^a+c_i^b$；我们要证明 $c_{i+1}-c_i>\sqrt{2}$。

分离界

由于 $e^{-\sqrt{2}(v_{i+1}-v_i)}$ 可积，并且

$$e^{-\sqrt{2}(v_{i+1}-v_i)}=e^{-\sqrt{2}(c_{i+1}-c_i+o(1))\log|y|}\,,$$

我们直接得到 $c_{i+1}-c_i\ge\sqrt{2}$。

反设至少有一对相邻层不满足严格界，并令$i_1=\min\{i:\ c_{i+1}-c_i=\sqrt{2}\}$ 和 $i_2=\min\{i>i_1:\ c_{i+1}-c_i>\sqrt{2}\}$。于是这些层满足

$$e^{-(v_{i_1}-v_{i_1-1})}=O(|y|^{-2-\alpha}) \quad \text{and} \quad e^{-(v_{i_2+1}-v_{i_2})}=O(|y|^{-2-\alpha}) \quad \text{for some} \quad \alpha>0\,, \tag{72}$$

并且对每个 $i\in\{i_1,\dots,i_2-1\}$，都有 $c_{i+1}-c_i=\sqrt{2}$。

我们断言存在如下单侧界

$$v_{i_1}(y)\ge c_{i_1}\log|y|-C \quad \text{and} \quad v_{i_2}(y)\le c_{i_2}\log|y|+C\,.$$

事实上，请注意——由（51）和（72）——顶层 f_{i_2} 满足 $\Delta f_{i_2}=\kappa_0 e^{-\sqrt{2}(f_{i_2}-f_{i_2-1})}+O(|y|^{-2-\alpha})$，其具有

右侧的正首项。记

$$\begin{aligned} v_{i_2}^a(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B'_{2R_0}}} (\log|y-z| - \log|z|)\Delta v_{i_2}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\log|y| \int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B'_{2R_0}}} \Delta v_{i_2}\, dz + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B'_{2R_0}}} \log\frac{|y-z|}{|y||z|}\ \Delta v_{i_2}\, dz \\ &= c_{i_2}^a \log|y| + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B'_{2R_0}}} \log\frac{|y-z|}{|y||z|}\ \left[\kappa_0 e^{-\sqrt{2}(f_{i_2}-f_{i_2-1})} + O(|y|^{-2-\alpha})\right] dz\, dz \\ &\le c_{i_2}^a \log|y| + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B'_{2R_0}}} \log\frac{|y-z|}{|y||z|}\ \kappa_0 e^{-\sqrt{2}(f_{i_2}-f_{i_2-1})}\, dz + C\,. \end{aligned}$$

我们可以假设 $R_0 \ge 2$，从而只需考虑 $|z|$，$|y| \ge 2$。但随后，仿照 [Lin98中引理2的论证，1], 我们可以给出界

$$\frac{|y-z|}{|y||z|} \le \frac{|y|+|z|}{|y||z|} \le \frac{|y||z|}{|y||z|} = 1\,,$$

从而有 $\log \frac{|y-z|}{|y||z|} \le 0$，这表明

$$v_{i_2}^a(y) \le c_{i_2}^a \log|y| + C\,, \quad \text{or} \quad v_{i_2} \le c_{i_2}\log|y| + C$$

即为所求。v_{i_1} 的下界可类似得到。

我们继续进行反证论证：
通过 $v_i(y) = c_i \log|y| + Err_i(y)$定义 $Err_i(y)$。单侧界表明

$$Err_{i_2} \le C \quad \text{and} \quad Err_{i_1} \ge -C\,. \tag{73}$$

另一方面，由（69）可见，对任意 $i \in \{i_1, ..., i_2 - 1\}$,

$$\begin{aligned} +\infty > \int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B_{R_0}}} e^{-\sqrt{2}(v_{i+1}-v_i)} &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B_{R_0}}} e^{-\sqrt{2}[(c_{i+1}-c_i)\log|y| + (Err_{i+1}-Err_i)]} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B_{R_0}}} \frac{1}{|y|^2} e^{-\sqrt{2}(Err_{i+1}-Err_i)}\,. \end{aligned}$$

定义测度 $\mu(A) := \int_A \frac{1}{|y|^2}$, $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_{R_0}}$。特别是，上述结果表明，对于任意 $M > 0$，我们有

$$\begin{aligned} \mu(\{y : (Err_{i+1} - Err_i)(y) \le M\}) &= \mu(x : \{e^{-\sqrt{2}(Err_{i+1}-Err_i)(y)} \ge e^{-\sqrt{2}M}\}) \\ &\le e^{\sqrt{2}M} \int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{B_{R_0}}} \frac{1}{|y|^2} e^{-\sqrt{2}(Err_{i+1}-Err_i)} \\ &< \infty\,. \end{aligned}$$

因此，根据并集界

$$\mu\left(\{y : (Err_{i+1} - Err_i)(y) \le M \quad \text{for some} \quad i \in \{i_1, ..., i_2 - 1\}\}\right) < \infty \quad \text{as well};$$

因为 $\frac{1}{|y|^2}$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}$ 上不可积，或者等价地，$\mu(\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}) = \infty$,

给定 $M > 0$，存在 $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}$ 使得 $(Err_{i+1} - Err_i)(y) > M \quad \forall i \in \{i_1, ..., i_2 - 1\}$。这尤其意味着，对于这个 y，我们有

$$(Err_{i_2} - Err_{i_1})(y) = \sum_{i=i_1}^{i_2-1} (Err_{i+1} - Err_i)(y) > M\,.$$

但是，由于（根据（73））我们有一致有界性 $Err_{i_2} - Err_{i_1} \le C$，而 $M > 0$ 可以任意大，因此产生矛盾。

改进 v_i^a

既然我们知道 $c_{i+1} - c_i > \sqrt{2}$ 对每个 $i \in \{1, ..., N-1\}$，根据 v_i 的渐近性，我们得出 $e^{-\sqrt{2}(v_{i+1}-v_i)} = O(|y|^{-2-\alpha})$, 其中某个 $\alpha > 0$。然后，由 (51) 以及定义 v_i^a的积分，我们很容易推得

$$v_i^a = b_i^a + c_i^a \log|x| + O(|y|^{-\alpha})\,,$$

令 $b_i := b_i^a + b_i^b$，结合所声称的 v_i^b的渐近性，便可得出定理 1.4。

悬链面平坦性改进

接下来要证明命题 5.1。主要思路是运用第 i3 节中的环域迭代的增强版本，它允许在每个尺度上存在对数函数（以及常函数）。在这种情况下，我们完整的衰减陈述如下：

命题 5.2 (次线 性蕴含衰减)。 设 $v\colon \mathbb{R}^2 \setminus B'_{2R_0} \to \overline{\mathbb{R}}$ 为调和函数。设 $\varepsilon > 0$，并假设 *th* *at*

$$|v(x')| \le \varepsilon |x'| \quad in \quad \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B'_{2R_0}}\,.$$

给定 $\alpha \in (0,\ 1)$，存在 $C = C(\alpha,\ R_0) > 0$，以及某些 $\widetilde{a}_k \in \mathbb{R}^2$ 和 $\widetilde{b}_k,\ \widetilde{c}_k \in \mathbb{R}$，对每个满足 $2^k \ge 4R_0$ 的 $k \in \mathbb{N}$，都有

$$|v(x') - \widetilde{a}_k \cdot x' - \widetilde{b}_k - \widetilde{c}_k \log|x'|| \le C\varepsilon 2^{-\alpha k} \quad in \quad B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}\,.$$

与第 3 节一样，我们将把这一结果归结为一种“平坦性改进”型迭代。

命题 5.3 （主要迭代）。 给定 $\alpha \in (0,1)$，存在依赖于 n 和 α 的 $k_0, K \in \mathbb{N}$，使得以下结论成立。设 $\delta = 2^{-\alpha-1}$。假设给定：

- 某个基准尺度 $k_1 \in \mathbb{N}$，满足 $k_1 \ge K$。
- 某个“最佳平坦度” $\varepsilon > 0$，满足 $2^{(-\alpha-1)^{k_1}} \le \varepsilon$。
- 某些 $a_k \in \mathbb{R}^2$ 和 $b, c \in \mathbb{R}$，对所有 $k \ge k_1 - k_0$均成立，使得以下条件成立：– $k_1 - k_0$ 与 k_1之间的超额衰减：$|v(x$.– 最佳平坦度的保持：$') - a_k \cdot x' - b_k - c_k \log|x'|| \le \delta^{k-k_1}\varepsilon 2^k$ *for all* $x' \in B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}$, $k_1 - k_0 \le k \le k_1$

$$|v(x') - a_k \cdot x' - b_k - c_k \log|x'|| \le \varepsilon 2^k \ \textit{for all}\ x' \in B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}, \quad k_1 + 1 \le k\,.$$

那么，我们有以下结论：

- 设定新的基准尺度 $k_1' := k_1 + 1 \in \mathbb{N}$，其满足 $k_1' \ge K$。
- 设定新的“最佳平坦度” $\varepsilon' = \delta\varepsilon > 0$，其满足 $2^{(\alpha-1)^{k_1'}} \le \varepsilon'$。
- 接下来，存在一些新的 $a_k' \in \mathbb{R}^2$ 和 b_k'，$c_k' \in \mathbb{R}$ 对所有 $k \ge k_1' - k_0$，使得以下条件成立：
  – $k_1' - k_0$ 与 k_1'之间的超额衰减：– 最佳平坦度的保持：$|v(x') - a_k' \cdot x' - b_k' - c_k' \log|x'|| \le \delta^{k-k_1}\varepsilon' 2^k$ *for all* $x' \in B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}$, $k_1' - k_0 \le k \le k_1'$.

$$|v(x') - a_k' \cdot x' - b_k' - c_k' \log|x'|| \le \varepsilon' 2^k \ \textit{for all}\ x' \in B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}, \quad k_1' + 1 \le k\,.$$

我们首先说明命题5.2 如何由命题5.3推出，以及命题5.1如何由命题 5.2推出。

命题 *5.2* 的证明（假设命题 *5.3* 成立）。取 $\alpha \in (0,1)$。设 $k_0, K \in \mathbb{N}$ 由命题 5.3 给出，并令 $\delta = 2^{-\alpha-1}$。根据假设（命题 5.2），我们有

$$|v(x')| \le \varepsilon 2^k \quad \text{in} \quad (B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}) \quad \text{for every} \quad k \ge \lceil \log_2 R_0 \rceil\,. \tag{74}$$

现在显然可以继续进行：

- 令 $k_1 := \max\{K, k_0 + \lceil \log_2 R_0 \rceil\}$，于是 $k_1 \ge K$。
- 适当增大 k_1 后，我们还有 $2^{(\alpha-1)^{k_1}} \le \varepsilon$。
- 只需令 a_k, b_k, c_k 等于 0。由定义可知，$k_1 - k_0 \ge \lceil \log_2 R_0 \rceil$，由（74）可立即看出，$k_1 - k_0 \le k \le k_1$ 的超额衰减以及 $k_1 + 1 \le k$ 的最佳平坦度的保持（最佳平坦度为 ε）。

这意味着命题 5.3 的假设均已满足。对该命题进行迭代，令 $k_{1,l} := k_1 + l$ 和$\varepsilon_l := \delta^l\varepsilon$, $l \in \mathbb{N}$，“最佳平坦度的保持”部分给出——在第 l 次迭代时——系数$\widetilde{a}_{k_{1,l}} \in \mathbb{R}^2$ 和$\widetilde{b}_{k_{1,l}}, \widetilde{c}_{k_{1,l}} \in \mathbb{R}$，使得

$$|v(x') - \widetilde{a}_{k_{1,l}} \cdot x' - \widetilde{b}_{k_{1,l}} - \widetilde{c}_{k_{1,l}} \log|x'|| \le \varepsilon_l 2^{k_{1,l}} = \delta^l \varepsilon 2^{k_{1,l}} \quad \text{in} \quad B_{2^{k_{1,l}+1}} \setminus \overline{B_{2^{k_{1,l}-1}}}\,.$$

令 $C := \delta^{-k_1}$，它不依赖于 l，我们可以将其改写为

$$|v(x') - \widetilde{a}_{k_{1,l}} \cdot x' - \widetilde{b}_{k_{1,l}} - \widetilde{c}_{k_{1,l}} \log|x'|| \le C\varepsilon \delta^{k_{1,l}} 2^{k_{1,l}} \quad \text{in} \quad B_{2^{k_{1,l}+1}} \setminus \overline{B_{2^{k_{1,l}-1}}}\,,$$

或者（因为 $\delta = 2^{-\alpha-1}$）

$$|v(x') - \widetilde{a}_{k_{1,l}} \cdot x' - \widetilde{b}_{k_{1,l}} - \widetilde{c}_{k_{1,l}} \log|x'|| \le C\varepsilon 2^{-\alpha k_{1,l}} \quad \text{in} \quad B_{2^{k_{1,l}+1}} \setminus \overline{B_{2^{k_{1,l}-1}}},$$

这显然证明了命题 5.2。 □

假设命题 *5.2* 成立，证明命题 *5.1*。条件 $|v(x')| \le C|x'|^{1/2}$ 显然意味着存在R_0，使得 $|v(x')| \le |x'|$ 属于 $\mathbb{R}^2 \setminus B_{R_0}$。

于是，命题 5.2 给出 $\widetilde{a}_k \in \mathbb{R}^2$ 以及 b_k，$\widetilde{c}_k \in \mathbb{R}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 满足

$$|v(x') - \widetilde{a}_k \cdot x' - \widetilde{b}_k - \widetilde{c}_k \log|x'|| \le C2^{-\alpha k} \quad \text{in} \quad B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}. \tag{75}$$

步骤 1。 系数比较。

我们将证明

$$|a_{k+1} - a_k| \le C2^{(-\alpha-1)k} \log 2^k, \quad |b_{k+1} - b_k| \le C2^{-\alpha k} \log 2^k, \quad |c_{k+1} - c_k| \le C2^{-\alpha k}. \tag{76}$$

为此，考虑（75）中的两个相邻尺度。于是，由三角不等式可得

$$|(\widetilde{a}_{k+1} - \widetilde{a}_k) \cdot x' + (\widetilde{b}_{k+1} - \widetilde{b}_k) + (\widetilde{c}_{k+1} - \widetilde{c}_k) \log|x'|| \le C2^{-\alpha k} \quad \text{in} \quad B_{2^k} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}. \tag{77}$$

特别地，我们发现

$$|(\widetilde{b}_{k+1} - \widetilde{b}_k) + (\widetilde{c}_{k+1} - \widetilde{c}_k) \log|x'|| \le C2^{-\alpha k} \quad \text{in} \quad \{(\widetilde{a}_{k+1} - \widetilde{a}_k) \cdot x' = 0\} \cap (B_{2^k} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}),$$

因此（在区域的内外边界上以 x' 为测试函数），我们得到

$$|(\widetilde{b}_{k+1} - \widetilde{b}_k) + (\widetilde{c}_{k+1} - \widetilde{c}_k) \log 2^k| \le C2^{-\alpha k} \quad \text{and} \quad |(\widetilde{b}_{k+1} - \widetilde{b}_k) + (\widetilde{c}_{k+1} - \widetilde{c}_k) \log 2^{k-1}| \le C2^{-\alpha k}.$$

结合这两个条件，我们看到

$$|\widetilde{c}_{k+1} - \widetilde{c}_k| \le C2^{-\alpha k} \quad \text{and} \quad |(\widetilde{b}_{k+1} - \widetilde{b}_k)| \le C2^{-\alpha k} \log 2^k. \tag{78}$$

最后，以（77）作为测试函数，并取满足（$x' \in B_{2^k} \setminus B_{2^{k-1}}$）的某个 $\widetilde{a}_{k+1} - \widetilde{a}_k \cdot x' = |\widetilde{a}_{k+1} - \widetilde{a}_k||x'|$，再利用（78），我们也得到了 $|\widetilde{a}_{k+1} - \widetilde{a}_k|$ 的界，从而完成了（76）的证明。

步骤 2。 对系数求和。

由（76），给定 $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k \ge k_0} |\widetilde{c}_{k+1} - \widetilde{c}_k| \le C_\alpha 2^{-\alpha k_0}.$$

令 $\bar{\alpha} = \max\{\alpha/2, 1 - 2(1-\alpha)\}$；关键仅在于 $\bar{\alpha} < \alpha$，但仍有 $\bar{\alpha} \to 1$，因为 $\alpha \to 1$。于是我们可以得到上界

$$|\widetilde{a}_{k+1} - \widetilde{a}_k| \le C_\alpha 2^{(-\bar{\alpha}-1)k_0} \quad \text{and} \quad |b_{k+1} - b_k| \le C2^{-\alpha k} \log 2^k \le C2^{-\bar{\alpha} k},$$

从而得到

$$\sum_{k \ge k_0} |\widetilde{a}_{k+1} - \widetilde{a}_k| \le C_\alpha 2^{(-\bar{\alpha}-1)k_0} \quad \text{and} \quad \sum_{k \ge k_0} |\widetilde{b}_{k+1} - \widetilde{b}_k| \le C_\alpha 2^{-\bar{\alpha} k_0}.$$

现在，上述结果特别表明，序列 $\widetilde{a}_k, b_k, \widetilde{c}_k$ 是柯西序列。这说明存在某个 $\widetilde{a}_\infty \in \mathbb{R}^2$ 和 $b_\infty, \widetilde{c}_\infty \in \mathbb{R}$，使得

$$|\widetilde{a}_\infty - \widetilde{a}_k| \le C_\alpha 2^{(-\alpha-1)k}, \quad |\widetilde{b}_\infty - \widetilde{b}_k| \le C_\alpha 2^{-\bar{\alpha} k}, \quad |\widetilde{c}_\infty - \widetilde{c}_k| \le C_\alpha 2^{-\alpha k}. \tag{79}$$

代入（75），可推得

$$|v(x') - \widetilde{a}_\infty \cdot x' - \widetilde{b}_\infty - \widetilde{c}_\infty \log|x'|| \le C2^{-\bar{\alpha} k} \quad \text{in} \quad B_{2^{k+1}} \setminus \overline{B_{2^{k-1}}}.$$

这恰好意味着 $v = \widetilde{a}_\infty \cdot x' + \widetilde{b}_\infty + \widetilde{c}_\infty \log|x'| + O(|x'|^{-\bar{\alpha}})$。由于我们假设 $|v(x')| \le C|x'|^{1/2}$，因此立即可知实际上 $\widetilde{a}_\infty \equiv 0$。最后，由于当 $\alpha \to 1$ 时 $\bar{\alpha} \to 1$，在适当改变 α 的取值后，我们便完成了证明。

□

命题 5.3的证明。

接下来我们证明命题 5.3。首先，引理 3.8 的类似结果为：

引理 5.4（调和近似）。 设 $\lambda > 0$ 与 $\alpha \in (0,1)$。存在依赖于 λ、α、β 的 $\delta_0 > 0$，使得以下结论成立。设 $v : B_{\frac{1}{\delta_0}} \setminus B_{\delta_0} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足：

- v 是调和的。
- $\|v\|_{L^\infty(B_{2\rho} \setminus B_\rho)} \le \rho^{1+\alpha}$，对于 $1 \le \rho \le \frac{1}{\delta_0}$。

- $\|v\|_{L^\infty(B_{2\rho}\setminus B_\rho)} \le \rho^{-\alpha}$，对于 $\delta_0 \le \rho \le 1$。

那么存在 $a \in \mathbb{R}^2$ 和 $b, c \in \mathbb{R}$，使得 $\|v - a\cdot x - b - c$对数$|x|\|_{L^\infty(B_2\setminus B_{1/2})} \le \lambda$。——

证明。 沿用引理 3.8证明中的相同论证，我们将该引理归结为对满足与 v相同增长条件的调和函数 v_∞：$\mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ 进行分类。不同之处在于，应用于 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 中满足当前增长假设的调和函数的刘维尔型分类——例如可由分离变量法得到——因为这表明 $v_\infty = a\cdot x + b + c$ 对数 $|x|$，其中 a，b，c。与引理 3.8 的不同之处在于，常函数和对数 $|x|$ 是 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 中的调和函数，其增长速度慢于 $|x|^{-\alpha}$，当 $|x|\to 0$时，因此它们现在可以纳入 v_∞的展开式中。 □

预备知识：重新缩放

为方便起见，我们先考虑新函数 $\widetilde{v} := \frac{1}{2^{k_1}} v(2^{k_1}x)$。 —

注 5.5. 原来的假设——现适用于从 $-k_0$ **到** ∞ 的尺度——变为：对于某些适当的新系数 $\sim\widetilde{a}_k$，b_k，$\widetilde{c}_k$：

- 在 $-k_0$ 与 0 之间的超额衰减：

$$|\widetilde{v}(x') - \widetilde{a}_k\cdot x' - \widetilde{b}_k - \widetilde{c}_k\log|x'|| \le \delta^k\varepsilon 2^k \text{ in } B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}},\quad -k_0\le k\le 0\,. \tag{80}$$

- 最佳平坦度的保持：

$$|\widetilde{v}(x') - \widetilde{a}_k\cdot x' - \widetilde{b}_k - \widetilde{c}_k\log|x'|| \le \varepsilon 2^k \text{ in } B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}},\quad 1\le k\,. \tag{81}$$

引理 5.6. 设 f： $B_{2^{k_0}}\setminus\overline{B_{2^{-k_0}}}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x') := \widetilde{v}(x') - \widetilde{a}_0\cdot x' - \widetilde{b}_0 - \widetilde{c}_0\log|x'|\,, \tag{82}$$

它也是调和的。

存在依赖于 C_2 k_0 的，使得

$$f(x') \le C_2\varepsilon|x'|^{-\frac{1+\alpha}{2}} \quad for \quad 2^{-k_0}\le|x'|\le 1 \tag{83}$$

and

$$f(x') \le C_2\varepsilon|x'|\log^2(|x'|+1) \quad for \quad 1\le|x'|\le 2^{k_0}\,. \tag{84}$$

证明。 令 $\alpha_* = \frac{1+\alpha}{2} > \alpha$。接着，完全按照证明命题 5.1 成立（假设命题 5.2 成立）时的论证，我们得到：

$$|\widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_k| \le C_\alpha\varepsilon 2^{(-\alpha_*-1)k}\,,\quad |\widetilde{b}_0 - \widetilde{b}_k| \le C_\alpha\varepsilon 2^{-\alpha_* k}\,,\quad |\widetilde{c}_0 - \widetilde{c}_k| \le C_\alpha\varepsilon 2^{-\alpha k} \quad \text{for every} \quad -k_0\le k\le 0\,,$$

and

$$|\widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_k| \le C_\alpha\varepsilon\log^2 2^k\,,\quad |\widetilde{b}_0 - \widetilde{b}_k| \le C_\alpha\varepsilon 2^k\log 2^k\,,\quad |\widetilde{c}_0 - \widetilde{c}_k| \le C_\alpha\varepsilon 2^k \quad \text{for every} \quad 1\le k\,.$$

代入（80）–（81），可推出

$$|v(x') - \widetilde{a}_0\cdot x' - \widetilde{b}_0 - \widetilde{c}_0\log|x'|| \le C\varepsilon_0 2^{-\alpha_* k} \quad \text{in} \quad B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}$$

and

$$|v(x') - \widetilde{a}_0\cdot x' - \widetilde{b}_0 - \widetilde{c}_0\log|x'|| \le C\varepsilon_0 2^k\log^2 2^k \quad \text{in} \quad B_{2^{k+1}}\setminus\overline{B_{2^{k-1}}}\,.$$

回忆 f 的定义，我们立即得到（83）–（84）。 □

最后，我们可以给出：

命题的证明 5.3。 与上文一样，我们考虑 $\widetilde{v}(x) := \frac{1}{2^{k_1}} v(2^{k_1}x)$，以此代替 v，它满足备注 5.5中的假设。令 f：$B'_{2^{k_0}}\setminus B'_{2^{-k_0}}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x') := \widetilde{v}(x') - \widetilde{a}_0\cdot x' - \widetilde{b}_0 - \widetilde{c}_0\log|x'|\,.$$

根据引理 5.6,

$$f(x') \le C_2\varepsilon|x'|^{-\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{for} \quad 2^{-k_0}\le|x'|\le 1 \tag{85}$$

and

$$f(x') \le C_2|x'|\log^2(|x'|+1) \le C_2|x'|^{1+\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{for} \quad 1\le|x'|\le 2^{k_0}\,. \tag{86}$$

定义垂直缩放 $F(x') = {}^{f}{}_{(x')\,C_2\varepsilon}$，它也是调和的。我们想将引理 5.4 应用于 F。注意，(85)–(86) 转化为

$$F(x') \le |x'|^{-\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{for} \quad 2^{-k_0} \le |x'| \le 1$$

and

$$F(x') \le |x'|^{1+\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{for} \quad 1 \le |x'| \le 2^{k_0}\,.$$

令 $\lambda > 0$ 为待选参数。令 $\delta_0 = \delta_0(\lambda,\ \alpha,\ \beta,\ n) \in (0,\ \lambda]$ 由引理 5.4给出。

设 $k_0 := \lceil \log_2 \delta_0 \rceil$；特别地，$2^{-k_0} \le \delta_0 \le \frac{1}{\delta_0} \le 2^{k_0}$。注意，引理 5.4 的假设均满足（例如用 $\frac{1+\alpha}{2}$ 替代 α）。因此，我们可以得到适当的 $a,\ b,\ c$，使得 $\|F - a\cdot x' - b - c\log|x'|\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{\lambda}}\setminus B_\lambda)} \le \lambda$。等价地：

$$\|f - \bar a\cdot x' - \bar b - \bar c\log|x'|\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{\lambda}}\setminus \overline{B_\lambda})} \le C_2\varepsilon\lambda \quad \text{for some} \quad \bar a\in\mathbb{R}^2 \text{ and } \bar b,\bar c\in\mathbb{R}.$$

回忆一下，我们设定了 $k_1' = k_1 + 1$ 和 $\varepsilon' = \delta\varepsilon$。在上一步中取 $\lambda = \min\{2\delta C_2^{-1}, 4\}$，并回忆 f 和 $\tilde v(x)$ 的定义，可得

$$\|v - a'_{k_1'}\cdot x' - b'_{k_1'} - c'_{k_1'}\log|x'|\|_{L^\infty(B_4\setminus\overline{B_{\frac14}})} \le (\varepsilon 2\delta)2^{k_1} = \varepsilon' 2^{k_1'} \quad \text{for some new} \quad a'_{k_1'}\in\mathbb{R}^2 \text{ and } b'_{k_1'}, c'_{k_1'}\in\mathbb{R}.$$

现在，对于 $k \le k_1' - 1$，我们改为仅保留 $(a'_k, b'_k, c'_k) := (a_k, b_k, c_k)$。这表明 $k_1' - k_0 \le k \le k_1'$ 的超额衰减条件，然后我们得出 $k \ge k_1' + 1$ 的最佳平坦度的保持部分，只需应用相同的推理，但以 $k_1'' := k$ 代替 k_1，正如命题 3.6 证明的最后一步那样。

□

参考文献

[AAC01] G. Alberti、L. Ambrosio 和 X. Cabr´e. “关于 E. De Giorgi 一个由来已久的猜想：一般非线性项下三维情形的对称性及局部极小性”。载于：Acta Appl. Math. 65.1-3（2001），第 9–33 页。[AC00] L. Ambrosio 和 X. Cabr´e. “ $\mathbb{R}^3$ 中半线性椭圆方程的整体解及 De Giorgi猜想”。载于：J. Amer. Math. Soc. 13（2000），第 725–739 页。[AC72] S. Allen 和 J. Cahn. “具有次近邻相互作用的有序二元合金中的基态结构”。载于：Acta Metall. 20（1972），第 423–433 页。[And84] M. T. Anderson. “通过高斯映射紧化欧几里得空间中的极小子流形”。预印本，未发表手稿。1984。URL：https://www.math.stonybrook.edu/~anderson/ compactif.pdf。[APW15] O. Agudelo、M. del Pino 和 J. Wei. “Allen–Cahn 方程的具有多个悬链面端的解，定义于 $\mathbb{R}^3$”。载于：J. Math. Pures Appl. 103.1（2015），第 142–218 页。[APW16] O. Agudelo、M. del Pino 和 J. Wei. “高维悬链面、Liouville 方程与 Allen–Cahn 方程”。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 2016.23（2016），第 7051–7102 页。[BDG69] E. Bombieri、E. De Giorgi 和 E. Giusti. “极小锥与 Bernstein 问题”。载于：Invent. Math. 7（1969），第 243–268 页。[BS18] R. Buzano 和 B. Sharp. “具有有界指标和面积的极小超曲面的定性与定量估计”。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 370.6（2018），第 4373–4399 页。[CC06] L. Caffarelli 和 A. C´ordoba. “相变：中间层的一致正则性”。载于：J. Reine Angew. Math. 593（2006），第 209–235 页。[CC95] L. Caffarelli 和 A. C´ordoba. “奇异摄动问题的一致收敛”。载于：Comm. Pure Appl. Math. 48（1995），第 1–12 页。[CFFS25] H. Chan、X. Fern´andez-Real、A. Figalli 和 J. Serra. 三维中自由边界 Allen–Cahn 问题和 Bernoulli 问题的整体稳定解是一维的。2025。arXiv：2503.21245。[CKM17] O. Chodosh、D. Ketover 和 D. Maximo. “具有有界指标的极小超曲面”。载于：Invent. Math. 209.3（2017），第 617–664 页。[CL23] O. Chodosh 和 C. Li. “R^4中的稳定各向异性极小超曲面”。载于：Forum Math. Pi 11（2023），论文编号 e3，共 22 页。

[CL24] O. Chodosh 和 C. Li. “ $\mathbb{R}^4$中的稳定极小超曲面”。载于：《数学学报》233（2024），第 1–31 页。[CL91] W. Chen 和 C. Li. “某些非线性椭圆方程解的分类”。载于：《杜克数学杂志》63.3（1991），第 615–622 页。[CLMS] O. Chodosh、C. Li、P. Minter 和 D. Stryker. “$\mathbb{R}^5$中的稳定极小超曲面”。载于：《数学年刊》（第 2 辑）（）。即将出版。[CM20] O. Chodosh 和 C. Mantoulidis. “三维流形上的极小曲面与 Allen–Cahn 方程：指标、重数与曲率估计”。载于：《数学年刊》（第 2 辑）191.1（2020），第 213–328 页。[CMR24] G. Catino、P. Mastrolia 和 A. Roncoroni. “稳定极小超曲面的两个刚性结果”。载于：《几何与泛函分析》34.1（2024），第 1–18 页。.[Cor56] Heinrich Otto Cordes. “关于多于两个变量的二阶拟线性微分方程的第一类边值问题”。载于：Math. Ann. 131（1956），第 278–312 页。[CP79] M. do Carmo 和 C. K. Peng. “ $\mathbb{R}^3$ 中的稳定完备极小曲面是平面”。载于：Bull. Amer. Math. Soc.（新系列）1（1979），第 903–906 页。[CSZ97] H. Cao、Y. Shen 和 S. Zhu. “ $\mathbb{R}^n$中稳定极小超曲面的结构”。载于：Math. Res. Lett. 4（1997），第 637–644 页。[CW18] H. Chan 和 J. Wei. “关于 De Giorgi猜想：近期进展与未决问题”。载于：Sci. China Math. 61.11（2018），第 1925–1946 页。[DF09] N. Dancer 和 A. Farina. “关于 $-\Delta u = e^u$ 在 $\mathbb{R}^N$上的解的分类：紧集之外的稳定性及其应用”。载于：《美国数学会会刊》137.4（2009），第 1333–1338 页。[EP16] A. Enciso 和 D. Peralta-Salas. “具有任意紧拓扑水平集的 Allen–Cahn 方程有界解”。载于：Anal. PDE 9.6（2016），第 1433–1446 页。[Far07] A. Farina. “ $-\Delta u = e^u$ 在 $\mathbb{R}^N$上的稳定解”。载于：C. R. Math. 345.2（2007），第 63–66 页。[FFS] X. Fern´andez-Real、E. Florit-Simon 和 J. Serra. “环域中的平坦性改进”。即将出版。[Fis85] D. Fischer-Colbrie. “关于三维流形中具有有限莫尔斯指标的完备极小曲面”。载于：Invent. Math. 82.1（1985），第 121–132 页。[FP00] S. Fakhi 和 F. Pacard. “具有指定有限个平面端的极小超曲面的存在性结果”。载于：Manuscripta Math. 103（2000），第 465–512 页。[FS20] A. Figalli 和 J. Serra. “关于边界反应的稳定解：维数$4 + 1$下的 De Giorgi型结果”。载于：Invent. Math. 219（2020），第 153–177 页。[FS25] E. Florit-Simon 和 J. Serra. 关于 $\mathbb{R}^4$中具有有界能量密度的 Allen–Cahn 方程稳定解。2025。arXiv：2509.02739。[FS80] D. Fischer-Colbrie 和 R. Schoen. “非负标量曲率三维流形中完备稳定极小曲面的结构”。载于：Comm. Pure Appl. Math. 33（1980），第 199–211 页。[GG18] P. Gaspar 和 M. Guaraco. “闭流形上的 Allen–Cahn 方程”。载于：Calc. Var. Partial Differential Equations 57.4（2018），第 1–42 页。[GG19] P. Gaspar 和 M. Guaraco. “相变谱的 Weyl定律与极限界面的密度”。载于：《几何与泛函分析》29.2（2019），第 382–410 页。[GG98] N. Ghoussoub 和 C. Gui. “关于 De Giorgi猜想及若干相关问题”。载于：Math. Ann. 311（1998），第 481–491 页。[Gio78] E. De Giorgi. “泛函与算子的收敛问题”。载于：非线性分析新方法国际会议论文集。罗马，1978，第 131–188 页。[GLW17] C. Gui、Y. Liu 和 J. Wei. “ $\mathbb{R}^3$中的 Allen–Cahn 方程双端解”。载于：《数学进展》320（2017），第 926–992 页。[Gua18] M. Guaraco. “相变的极小极大方法与嵌入极小超曲面的存在性”。载于：《微分几何杂志》108.1（2018），第 91–133 页。[Gul86] R. Gulliver. “完备极小曲面的指标与全曲率”。载于：几何测度论与变分法。纯数学研讨会论文集 44。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1986，第 207–211 页。

[GWW20] C. Gui、K. Wang 和 J. Wei. “有限莫尔斯指标的 Allen–Cahn 方程轴对称解”。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 373.5 (2020)，第 3649–3668 页。[HT00] J. E. Hutchinson 和 Y. Tonegawa. “van der Waals–Cahn–Hilliard 理论中相界面的收敛”。载于：Calc. Var. Partial Differential Equations 10.1 (2000)，第 49–84 页。[Hut86] J. E. Hutchinson. “变分流形的第二基本形式及曲率极小曲面的存在性”。载于：Indiana Univ. Math. J. 35.1 (1986)，第 45–71 页。[IMN18] K. Irie、F. C. Marques 和 A. Neves. “一般度量下极小超曲面的稠密性”。载于：《数学年刊》(2) 187.3 (2018)，第 963–972 页。[JM04] D. Jerison 和 R. Monneau. “关于在高维中构造一个反例以否定 De Giorgi猜想”。载于：Ann. Mat. Pura Appl. 183.4 (2004)，第 439–467 页。[Lin98] C.-S. Lin. “R^n 中一个共形不变四阶方程解的分类”。载于：Comment. Math. Helv. 73.2 (1998)，第 206–231 页。[LMN18] Y. Liokumovich、F. C. Marques 和 A. Neves. “体积谱的 Weyl定律”。载于：《数学年刊》(2) 187.3 (2018)，第 933–961 页。[LW02] P. Li 和 J. Wang. “有限指标的极小超曲面”。载于：Math. Res. Lett. 9.1 (2002)，第 95–103 页。[LWW17] Y. Liu、K. Wang 和 J. Wei. “维数为 $n \geq 8$ 时 Allen–Cahn 方程的全局极小解”。载于：J. Math. Pures Appl. 108 (2017)，第 818–840 页。[Maz24] L. Mazet. “ $\mathbb{R}^6$ 中的稳定极小超曲面”。2024。arXiv: 2405.14676。[MM77] L. Modica 和 S. Mortola. “一个 Γ-收敛的例子”。载于：Boll. Un. Mat. Ital. B. (5) 14 (1977)，第 285–299 页。[MN16] F. C. Marques 和 A. Neves. “极小极大极小超曲面的莫尔斯指标与重数”。载于：Camb. J. Math. 4.4 (2016)，第 463–511 页。[Mod85a] L. Modica. “非线性泊松方程的梯度界与刘维尔定理”。载于：Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985)，第 679–684 页。[Mod85b] L. Modica. “半线性椭圆方程整体解的能量单调性”。载于：《偏微分方程与变分法》。Birkh¨auser Boston, Inc., 1985，第 843–850 页。[Mod87] L. Modica. “相变的梯度理论与极小界面判据”。载于：Arch. Rational Mech. Anal. 98 (1987)，第 123–142 页。[Nir54] L. Nirenberg. “拟共形映射的一种推广及其在椭圆偏微分方程中的应用”。载于：《偏微分方程理论文集》。第 33 卷。Ann. of Math. Stud. 普林斯顿大学出版社，1954，第 95–100 页。[Oss64] R. Osserman. “ E^3 和 E^n中的极小曲面的整体性质”。载于：《数学年刊》(2) 80 (1964)，第 340–364 页。[PKW09] M. del Pino、M. Kowalczyk 和 J. Wei. “Allen–Cahn 方程的整体解与完备嵌入极小曲面”。载于：Rev. Un. Mat. Argentina 50.2 (2009)，第 95–107 页。[PKW11] M. del Pino、M. Kowalczyk 和 J. Wei. “关于维数为 $N \geq 9$ 时的 De Giorgi猜想”。载于：《数学年刊》(2) 174.3 (2011)，第 1485–1569 页。[PKW12] M. del Pino、M. Kowalczyk 和 J. Wei. “关于 De Giorgi猜想及其后续发展”。载于：《美国国家科学院院刊》109.18 (2012)，第 6845–6850 页。[PKW13] M. del Pino、M. Kowalczyk 和 J. Wei. “Allen–Cahn 方程的整体解与 $\mathbb{R}^3$中有限全曲率的完备嵌入极小曲面”。载于：《微分几何杂志》93.1 (2013)，第 67–131 页。[Pog81] A. Pogorelov. “关于极小曲面的稳定性”。载于：Dokl. Akad. Nauk SSSR 260 (1981)，第 293–295 页。[PW13] F. Pacard 和 J. Wei. “8维中的 Allen-Cahn 方程稳定解与极小锥”。载于：J. Funct. Anal. 264.5 (2013)，第 1131–1167 页。[Sav09] O. Savin. “相变中平坦水平集的正则性”。载于：《数学年刊》(2) 169.1 (2009)，第 41–78 页。

[Sch83] R. Schoen. “极小曲面的唯一性、对称性与嵌入性”。载于：《微分几何杂志》18.4 (1983)，第 791–809 页。[Ser64] J. Serrin. “拟线性方程解的局部行为”。载于：《数学学报》111 (1964)，第 247–302 页。[Sim68] J. Simons. “黎曼流形中的极小簇”。载于：《数学年刊》(2) 88 (1968)，第 62–105 页。[Son23] A. Song. “闭流形中无穷多个极小超曲面的存在性”。载于：《数学年刊》(2) 197.3 (2023)，第 859–895 页。[SS81] R. Schoen 和 L. Simon. “稳定极小超曲面的正则性”。载于：Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981)，第 741–797 页。[SSY75] R. Schoen、L. Simon 和 S. T. Yau. “极小超曲面的曲率估计”。载于：《数学学报》134 (1975)，第 275–288 页。[SZ98] P. Sternberg 和 K. Zumbrun. “严格凸区域中相界面的连通性”。载于：Arch. Rational Mech. Anal. 141.4 (1998)，第 375–400 页。[Ton05] Y. Tonegawa. “关于奇异摄动问题的稳定临界点”。载于：Comm. Anal. Geom. 13.2 (2005)，第 439–459 页。[Tru67] N. Trudinger. “关于 Harnack 型不等式及其在拟线性椭圆方程中的应用”。载于：Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967)，第 721–747 页。[TW12] Y. Tonegawa 和 N. Wickramasekera. “van der Waals–Cahn–Hilliard 理论中的稳定相界面”。载于：J. Reine Angew. Math. 668 (2012)，第 191–210 页。[Tys89] J. Tysk. “极小超曲面的指标有限性与总标量曲率”。载于：《美国数学会会刊》105.2 (1989)，第 429–435 页。[Wan17] K. Wang. “Savin 定理（关于 Allen–Cahn 方程）的一个新证明”。载于：J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19 (2017)，第 2997–3051 页。[Wan19] K. Wang. “Toda 系统的稳定解与有限莫尔斯指标解”。载于：J. Differential Equations 268.1 (2019)，第 60–79 页。[Wan21] K. Wang. “半线性椭圆方程稳定解与有限莫尔斯指标解的近期进展”。载于：Electron. Res. Arch. 29.6 (2021)，第 3805–3816 页。[Wic14] N. Wickramasekera. “稳定余维一整流 varifold 的一般正则性理论”。载于：《数学年刊》(2) 179.3 (2014)，第 843–1007 页。[WW17] K. Wang 和 J. Wei. “有限莫尔斯指标推出有限个端”。2017。arXiv: 1705.06831。[WW19a] K. Wang 和 J. Wei. “有限莫尔斯指标推出有限个端”。载于：Comm. Pure Appl. Math. 72.5 (2019)，第 1044–1119 页。[WW19b] K. Wang 和 J. Wei. “过渡层的二阶估计”。载于：《数学进展》358 (2019)。第 106856 号。[Yau82] S.T. Yau，编。《微分几何研讨会》。第 102 卷。Ann. Math. Stud. 普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，1982。[Zho20] X. Zhou. “关于极小极大理论中的重数一猜想”。载于：《数学年刊》(2) 192.3 (2020)，第 767–820 页。

Enric Florit-Simon数学系，苏黎世联邦理工学院¨苏黎世，雷米街¨101号，8092 苏黎世¨，瑞士电子邮箱地址：enric.florit@math.ethz.ch