arXiv:2602.03150v1 [math.NT] 3 Feb 2026

关于 Matula 树化的一点注记

par

Dominique Manchon

摘要。— 我们简要介绍 Matula 树化在研究自然数上 Möbius 函数与 Liouville 函数的求和函数方面的一种应用。

摘要。— 我们简要介绍 Matula 树化在研究 Möbius 函数与 Liouville 函数部分和方面的一种应用。

目录

1. 引言.1 2. 关于素数的若干不等式.3 3. 自然数与树.5 4. Möbius 函数与 Liouville 函数的求和函数研究.6 附录 A：比值 $p_k p_l/p_{kl}$ 的数值表.8 附录 B：从 1 ` 到 1000 的整数的树化.9 附录 C：一个对 1000 以内无平方因子整数进行配对的例子 . . . . . 15 附录 D：从 1 ` 到 199.17 附录 E：从 1 ` 到 96，含平方因子.17 附录F：从 1 ` 到 1000，含平方因子.18 通过根的融合得到素数的几种方法.21 参考文献.21

1. 引言

在 B. Riemann 发表著名论文的两年前， [**27**] 他在论文中首次提出了以其名字命名的假设（黎曼ζ函数的所有非平凡零点，其实部都等于 1/2，这一点尚属猜想），A. Cayley 引入了有根树，旨在研究仿射空间上的向量场。 [**9**]他所引入的对应关系，如今已能用向量场空间以及由树张成的向量空间上的前李代数结构来充分理解， [**10, 15**], 并且在数值分析中得到了意想不到的应用。 [**4**]

有根树是一种连通有向图，我们假设其顶点数有限；除一个特殊顶点——根——没有入边外，每个顶点都恰有一条入边。我们将有根树画成根在下、边由下向上定向的形式。有根森林是有限个有根树构成的集合，其中允许重复。

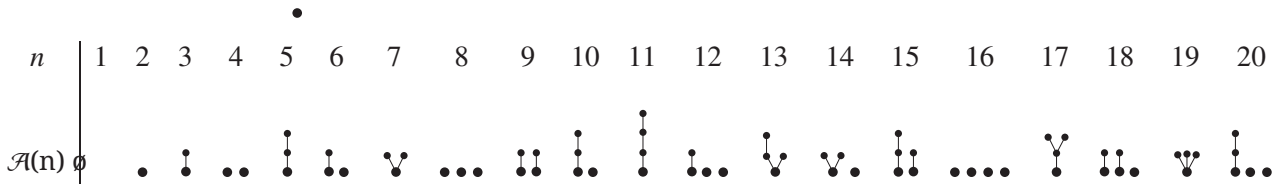
据我们所知，最先 `把有根树´引入数论´的是 D. W. Matula，他在 1968 [**24, 25**], 构造了交换幺半群的一个同构 $\mathcal{A}$ ¨，即非零自然数集合$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$与有根树森林集合 $\mathcal{F}$ ´之间的同构，每个

素因子对应 `于构成该森林的一棵树(1)。Matula 的文章写得`极为`简练´（至多约十五行），起初似乎未引起注意´。这一对应关系曾 ´´被重新发现´，尤其是由 D. F. Goebel [**19**], 、P. Cappello [**6**], 以及 J. Sousselier 重新发现，后者给出了相当详细的阐述´´´ [**31**]。还可以提到 L. Alexandrov [**1**], ，以及更近´的 R. G. Batchko [**2**]。这些作者探讨了相近的概念，尽管树并未明确出现在他们的工作中。不过，这一双射曾 ´´被推广´，推广者是 S. B. Elk、I. Gutman 和 A. Ivić´，时为1993年；在一篇文章中`，这些作者用它来为有机化学中的烷烃分子´ C_nH_{2n+2} 编码 [**16**]。“Matula数”（“Matula 数”）这一表述即在此时出现 `。值得注意的是，一棵给定有根树的许多特征´´´都可以转写到相应的 Matula数上 [**12, 21**]。与量子力学的联系曾´ ´´被提出´´于 [**26**]。

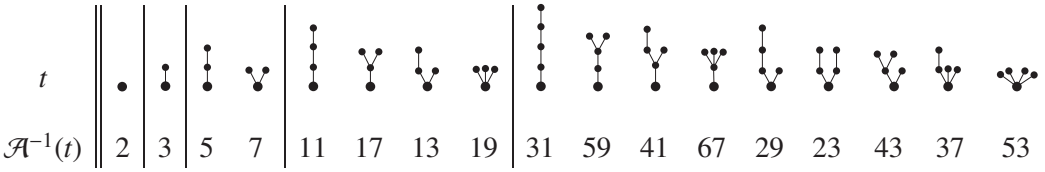
Matula同构递归定义为 $\mathcal{A}(1) = \emptyset$（空森林），以及：

$$\mathcal{A}(p_n) = B_+(\mathcal{A}(n)), \tag{1}$$

其中，o`u $p_n$ d´ 表示第 n 个素数，o`u B_+ 是从森林到树的典范双射，其做法是为森林中的所有树添加一个共同的根。按照约定，B_+ 将空森林映射为仅有一个顶点的树。下面列出不超过 20 的整数及其对应的森林：



下面列出 以 1、2、3、4 和 5 个顶点为根的树，以及与它们对应的素数，这些素数分别..... 齿：



有一些在线应用可以提供与某个整数对应的树，例如 [**11**] 可查询从 1 `到十亿的数。对树进行初等剪切后，我们便可以将一个素数关联到两个素因子的乘积；根据剪切方式不同，这样做有多种可能。反过来，我们可以将第一棵树嫁接到第二棵树的某个顶点上（例如根节点），从而由两个素数构造出一个素数。这就是两棵树的 Butcher积 $(s, t) \mapsto s \circ\!\!\rightarrow t$ [**4**]的定义。例如：



所有带根树构成的集合在 Butcher积下形成一种简化的前李代数结构，称为 NAP（即“非结合置换”）[**22**]。更确切地说，它是由一个生成元自由生成的 NAP 幺半群 `，因此每棵树都可以写成树 ´的迭代 Butcher积，而且这种写法本质上是唯一的(2)。

我们将通过树化 $\mathcal{A}$把自然数的全序(3) 传递到 $\mathcal{F}$ 上。关于 Butcher积 `应用于数论的第一个结果是以下不等式：

(1)在最初的表述中，Matula 对应将每个数与一棵树相对应。我们选择将其与把构成该树的所有分支嫁接到根上后得到的森林相对应。(2)类似地，由树生成的 K-向量空间（其中 K 是一个域）是由一个生成元生成的自由前李代数。前李结构由将第一棵树嫁接到第二棵树任意顶点上的所有方式之和给出，而不局限于嫁接到根上。值得注意的是，NAP 结构是集合性的，而前李结构不是，因为它要求对树作形式线性组合。(3)自然数的自然良序给出了最小的可数无限序数。它与森林集合上的自然良序截然不同；后者将森林集合对应到满足条件的最小序数，换言之，即。森林上的这一良序源自每个序数的 Cantor 标准形。参见例如。

命题1。— 对于任意一对树 $(s,\ t)$ 除´外 (,) 和 (,) , 有:

(2) $$s\circ\!\!\rightarrow t > st.$$

该命题由一个更一般的结果推出，即:

命题1（Gutman-Ivić [**20**]）。——对于所有 a、n $\in \mathbb{N}^*$, a ≥ 2，但 n $= 1$ 且 a $= 2$、3、4 时除外。

命题1可由此立即推出：只考虑前 a 个数并应用树化即可。命题2是 Massias、Robin 和 Dusart [**23, 14**]关于函数 n $\mapsto p_n$ 的精细上下界的推论（改进了 Rosser 和 Schoenfeld [**28**]先前的结果）。为方便读者，我们在此重新给出证明。

带根树的集合还配有一种结合且交换的运算，即融合积；它通过将两棵树的根融合为一个根而得到。例如:

(3) 

Massias、Robin 和 Dusart 的上下界还可用于得到一系列关于融合积的不等式:

命题3。——我们有不等式 s $\vee$ t $<$ st，除非 {s, t} = {  , } 或 {s, t} = {  ,  }。换言之 $p_{mn} < p_m p_n$，除非 {m, n} = {3, 4} 或 {m, n} = {4, 4}。

莫比乌斯函数 μ 定义如下：若 k 含有至少一个平方因子，则 μ(k).....；若 k 的素因子两两不同，则 μ(k).....，其中.....表示 k 的素因子个数。它是积性函数。刘维尔函数是完全积性函数，定义为.....，其中.....表示 k 的素因子个数。等式

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k^s}, \qquad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda(k)}{k^s}$$

展示了这些函数对于研究黎曼ζ函数的重要性。应用命题 1 和 3，我们概述一种对 Möbius 函数和 Liouville 函数的求和函数绝对值取上界的方法:

(4) $$M(n) := \sum_{k=1}^{n} \mu(k), \qquad L(n) := \sum_{k=1}^{n} \lambda(k)$$

将 1 到 n 之间的数按成对的形式排列 {a, b}，使得 μ(a) + μ(b) = 0 或 λ(a) + λ(b) = 0。在此说明，我们并未得到任何能够改善我们对函数 ζ 认识的结果。不过，消去这样构成的数对 {a, b} 后，对于所有小于几百的 n，|M(n)| 和 |L(n)| 的值之小显而易见。我们希望这样已经表明，Matula 树化或许不只是一种单纯的趣闻。

2. 关于素数的若干不等式

本节的目的是证明命题 2 和命题 3。我们将从以下上下界出发（Massias 和 Robin 的定理 A，经 P. Dusart 改进）:

(5) $$n(\log n + \log\log n - 1) \leq p_n \leq n\left(\log n + \log\log n - 1 + 1.8\frac{\log\log n}{\log n}\right)$$

对所有 n $\geq$ 13。请注意，(5) 中由 P. Dusart 给出的下界对所有 n ≥ 2 都成立。还请注意，文献 [**13**] 使用了一个稍不精确的此上下界版本，以证明对应于一类特定树和森林的 Matula数的极值性质；作者将这类树和森林称为二叉毛虫（binary caterpillars）。

2.1. 命题2的证明。——函数 x $\mapsto$ log log x/ log x 在 x $= e^e \simeq 15.1542...$ 处取得最大值。该最大值为 $e^{-1} = 0,3678....$ 因此，由 (5) 可得对任意 n $\geq$ 13 的上下界:

(6) $$n(\log n + \log\log n - 1) \leq p_n \leq n(\log n + \log\log n - 0.337).$$

因此，对任意 a ≥ 2 和 n $\geq$ 13，有:

$$ap_n \leq an\log n + an\log\log n - 0.337an,$$

而:

$$\begin{aligned} p_{an} &\geq an\log(an) + an\log\log(an) - an \\ &\geq an\log n + an\log\log n + an(\log a - 1). \end{aligned}$$

因此 $p_{an} \geq ap_n$ d`es 得到 $\log a \geq 0.663$，即 $a \geq 1.9406$.....所以任意 $a \geq 2$ 均满足条件。现在只需考察 n 介于 1 和 12 之间的情形。固定这样一个 n。在 $p_{(a-1)n}$ 和 p_{an} 之间（包括端点）有 $n+1$ 个素数。

引理 4。——假设数对 (a, n) 不同于 (2, 1)。那么对于任意素数 q，模 q 意义下至少存在一个剩余类不出现在 $n+1$– 元组 $\{p_{(a-1)n}、p_{(a-1)n+1}、.....、p_{an}\}$ 中。

证明。——假设存在一个素数 q 与该断言矛盾。则必有 $n+1 \geq q$。由于剩余类 0 ´出现在序列 $\{p_{(a-1)n}、p_{(a-1)n+1}、.....、p_{an}\}$ 中，存在 $j \in \{0,.....、n\}$ 使得 $q = p_{(a-1)n+j}$。因此 $n+1 \geq p_{(a-1)n+j}$，除非 $a = 2$ 且 $n \in \{1, 2\}$，否则这是不可能的。模 2 的所有剩余类都出现在 $\{p_1, p_2\} = \{2, 3\}$ 中，但模 2 的 0 不出现在 $\{p_2, p_3\} = \{3, 5\}$ 中，这就将需要排除的数对集合 `缩减为单元素集合 {(2, 1)}。□

差值 $p_{an} - p_{(a-1)n}$ 因此大于由连续的“足够大”的素数组成的 n 元组的最小长度 c(n)（[**30**, A 008407]）。当 $n \leq 12$ 时，$c(n) \geq p_n$，如下表所示:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_n	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
$c(n)$	2	6	8	12	16	20	26	30	32	36	42	48

因此，只要 a 不等于 2，就有 $p_{an} > ap_n$ d`。最后，$p_2 < 2p_1$, $p_3 < 3p_1$ 且 $p_4 < 4p_1$, ，但显然 $p_5 > 5p_1$，因此对任意 $a \geq 5$，都有 $p_a > ap_1$。至此命题2得证。命题1是其直接推论。

2.2. 命题3的证明。— 再次使用上下界（6）：当 $k \geq 14$ 且 $l \geq 14$ 时，只需证明不等式:

$$(\log k + \log\log k - 1)(\log l + \log\log l - 1) - (\log k + \log l + \log\log(kl) - 0.337) \geq 0. \tag{7}$$

令 $K = \log k$，$L = \log l$，不等式写作 $f(K)\,f(L) - f(K+L) + 0.663 \geq 0$，其中 $f(x) = x + \log x - 1$ 在 $[\log 14, +\infty[$ 上单调递增。因此，函数 $(K, L) \mapsto f(K)\,f(L) - f(K+L) + 0.663$ 在 $K = L = \log 14$ 处达到最小值，并且有:

$$(\log 14 + \log\log 14 - 1)^2 - (2\log 14 + \log(2\log 14) - 0.337) = 0.205... \geq 0, \tag{8}$$

因此，对于 $k, l \geq 14$，有 $p_k p_l \geq p_{kl}$。注意，如果将 14 替换为 13，不等式 (8) 就不再成立。当 $k \leq 13$ 且 $l \geq 13$ 时，有

$$\begin{aligned} p_{kl} &\leq kl(\log k + \log l + \log(\log k + \log l) - 0.337)\ \text{et} \\ p_k p_l &\geq p_k l(\log l + \log\log l - 1), \end{aligned}$$

因此最终:

$$\begin{aligned} p_k p_l - p_{kl} &\geq l((p_k - k)\log l + p_k\log\log l - k\log\log(kl) - k\log k - p_k + 0.337k) \\ &\geq l\Big((p_k - k)\log l + p_k\log\log l - k\log\big((\log l)(1 + \frac{\log k}{\log l})\big) - k\log k - p_k + 0.337k\Big) \\ &\geq l\Big((p_k - k)\log l + p_k\log\log l - k\log\log l - k\frac{\log k}{\log l} - k\log k - p_k + 0.337k\Big) \\ &\geq l\Big((p_k - k)(\log l + \log\log l - 1) - k(\frac{\log k}{\log l} + \log k + 0.663)\Big). \end{aligned}$$

$k = 1$ ´的情形显然，考察 $[13, +\infty[$ 上的函数:

$$l \mapsto f_k(l) := (p_k - k)(\log l + \log\log l - 1) - k(\frac{\log k}{\log l} + \log k + 0.663)$$

当 $2 \geq k \geq 13$ 时，函数 f_k 单调递增。显式数值计算得出 $f_2(21) < 0 < f_2(22)$、$f_3(21) < 0 < f_3(22)$ 以及 $f_4(23) < 0 < f_4(24)$。接下来有 $f_5(13) > 0$、$f_6(14) < 0 < f_6(15)$、$f_8(13) < 0 < f_8(14)$，最终对于 $k = 7$、9、10、11、12 和 13，有 $f_k(13) > 0$。附录中列出了 $p_k p_l$ 的数值以及

p_{kl} 的数值（以比值 $p_k p_l/p_{kl}$ 的形式表示），对应于尚待考察的情形 `，即 l 在 1 至 13 之间的 {k、l 对，以及 $l \geq 14$ 且 $f_k(l) < 0$ 的各对。利用对称性，只需考虑 $k \leq l$ 的情形：所有列出的数对的比值都小于 1，只有两个例外数对 $\{3,4\}$ 和 $\{4,4\}$；至此，命题3的证明完成。

2.3. J. Sousselier 猜想的证明。——对于任意整数 $n \geq 2$，Jean Sousselier 猜想有如下不等式（“预备猜想”，[**31**]）：

$$\frac{p_n}{n} \leq \frac{P_{p_n}}{p_n}. \tag{9}$$

当 $n = 2$、3、4、5 时，不等式 (9) 显然成立。当 $n \geq 6$ 时，只需使用 Rosser 和 Schoenfeld 的上下界 [**28**]:

$$\log n \leq \frac{p_n}{n} \leq \log n + \log\log n. \tag{10}$$

由此立´即推´出:

$$\log n \leq \frac{p_n}{n} \leq \log n + \log\log n = \log(n \log n) \leq \log p_n \leq \frac{p_{p_n}}{p_n},$$

这就证明了 (9)。

2.4. 关于素数的另一个不等式。——
命题 5。— 对任意整数 $n \geq 12$，有:

$$p_n > 3n. \tag{11}$$

证明。— 不等式 p´n log n 给出了 n´时的证明（使用 e´.08...）。考察前二十个素数可知，该不等式实际上对 $n_n \geq$ 时已成立。´

从树的角度来看，可以由此推´出，一棵t `只有一条分支的树总是严格大于´森林 `t。′

也`可以这样定′义：t ´t =，除非 t ′○→  或  。例如 =，设  。 

3. 自然数与树

3.1. 树上的非结合置换结构。— 非结合置换幺半群（或“NAP 幺半群”）[**15, 22**] 是一个集合 E，配备一个二元内部运算 ►，满足:

$$x \blacktriangleright (y \blacktriangleright z) = y \blacktriangleright (x \blacktriangleright z). \tag{12}$$

“左交换”一词有时用来代替 NAP。除了阿贝尔幺半群这一显而易见的例子外，原型是带有 Butcher 积的有根树集合。更确切地说，$(\mathcal{T}, \circ\!\!\rightarrow)$ 是由一个生成元自由生成的 NAP 幺半群。关系式 (12) 表明，将分支嫁接到根上的次序并不重要。

3.2. 再论 Matula-Goebel-Cappello 树化。——使用引言中定义的树化，可以将 Butcher 积转移到正整数上，从而使素数集合具有 NAP 幺半群结构。两个素数 q 和 p 的 Butcher 积定义如下:

$$p_m \circ\!\!\rightarrow p_n = p_{p_m n}. \tag{13}$$

NAP $\mathcal{P}$ 幺半群¨的自由性´与单生成性´´表现为：每个素数都可表为$p_1 = 2$的迭代´´且适当加括号´´的 Butcher积，该表达式´在模关系(12)下是唯一的。Butcher积与全序相容，`即若$q \leq q'$且$r \leq r'$，则$q \circ\!\!\rightarrow r \leq q' \circ\!\!\rightarrow r'$。然而，正如P. Cappello所指出的´，[**6**], 顶点数

不是树的递增函数：事实上 $\mathcal{A}(53) =$ 和 $\mathcal{A}(59) =$ 有五个顶点，而 

(4)更确切地说是“右交换的”`，因为上述作者使用记作 ◄, 的右变体 `´，其中关系(12)被´替换为(x ◄y) ◄z = (x ◄z) ◄y。

$\mathcal{A}(47)$ =  有六个。对于所有大于或等于 12 的素数 ´n´，不等式 $p_n > 3n$ （命题 5）给出了这一现象的一个例子：´事实上`，对于任意 $n$，只要它是大于或等于 12 的素数，´就有 `：事实上，$\mathcal{A}(3n)$ 比 `多一个顶点 $\mathcal{A}(p_n)$。

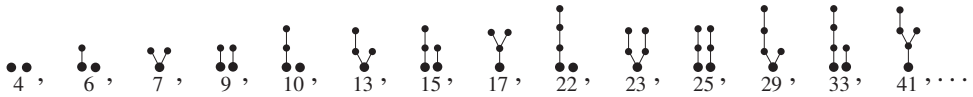
3.3. 顶点、边与叶子。——Gutman-Ivi´c-Matula 函数 $n \mapsto v(n)$ 将整数 n 映射为其森林 $\mathcal{A}(n)$ 中顶点总数，该函数完全可加。R. de la Bret`eche 和 G. Tenenbaum [**5**] 对它进行了详细研究。记 a(n) 为森林 $\mathcal{A}(n)$ 中边的总数，f (n) 为森林 $\mathcal{A}(n)$ 中叶子的总数。函数 a 和 f 也都是完全可加函数，而 n 的因子数由下式给出：

$$\|n\| = v(n) - a(n). \tag{14}$$

1 是唯一没有叶子的数。只有一个叶子的数构成 Wilson 超素数序列（“Wilson 素数序列”，[**30**,A 007097]）：



前几个有 ` 两片叶子的数是：



关于通过树化在整数上定义的各种函数的最新综述，请参见 [**12**]。

3.4. 一个分级。— 定义非零自然数 n 的次数 $\delta(n)$ 为 $\delta(n) = v(n) + a(n)$。换言之：

$$\delta(n) = 2v(n) - \|n\|. \tag{15}$$

次数是完全可加的。容易看出，对于任意整数 m，次数为 ´m 的整数 n 的集合是有限的。下面列出次数为 ≤ 5 的整数及其对应的森林：

Degré 0 : 1. Degré 1 :  . Degré 2 :  .

Degré 3 :  , . Degré 4 :  , . Degré 5 :  ,  ,  , .

特别是，度数´与 δ 因子的个数具有相同的奇偶性´。再举几个例子，

 13 的度数´为  7，47 的度数´为 11，  57 的度数´为 10，  2597 的度数´为 19。可以看出，融合积和剪去一条分支都会使度数´降低´一个单位，因为前者会删除一个顶点，后者会删除一条边´。

4. 莫比乌斯函数与李乌维尔函数的求和函数研究

本节的目的是为任意整数 n 得到 |M(n)| 的一个上界；如果可能，希望比将每个不含平方因子的偶数与其一半配对所得到的平凡上界 $|M(n)| \leq n/4$ 更精确，甚至比非平凡上界 $|M(n)| = o(n)$ 更精确；后者等价于素数定理[**29, 17**]。其原理如下：尽可能多地在 $\{1, ...n\}$ 范围内，将不含平方因子的数配成数对 (k, l)，使得 $\mu(k) + \mu(l) = 0$。然后，通过统计未能配对的数，得到所需的上界。为数 k 寻找配对对象 l（其中 $l < k$）的一种方法，是切断 k 的树中的一条分支；或者换言之，合并森林中的两棵树（避开前文提到的少数例外），同时注意不要引入平方因子。显然，只有当 k 至少有两个素因子时，第二种操作才可行。

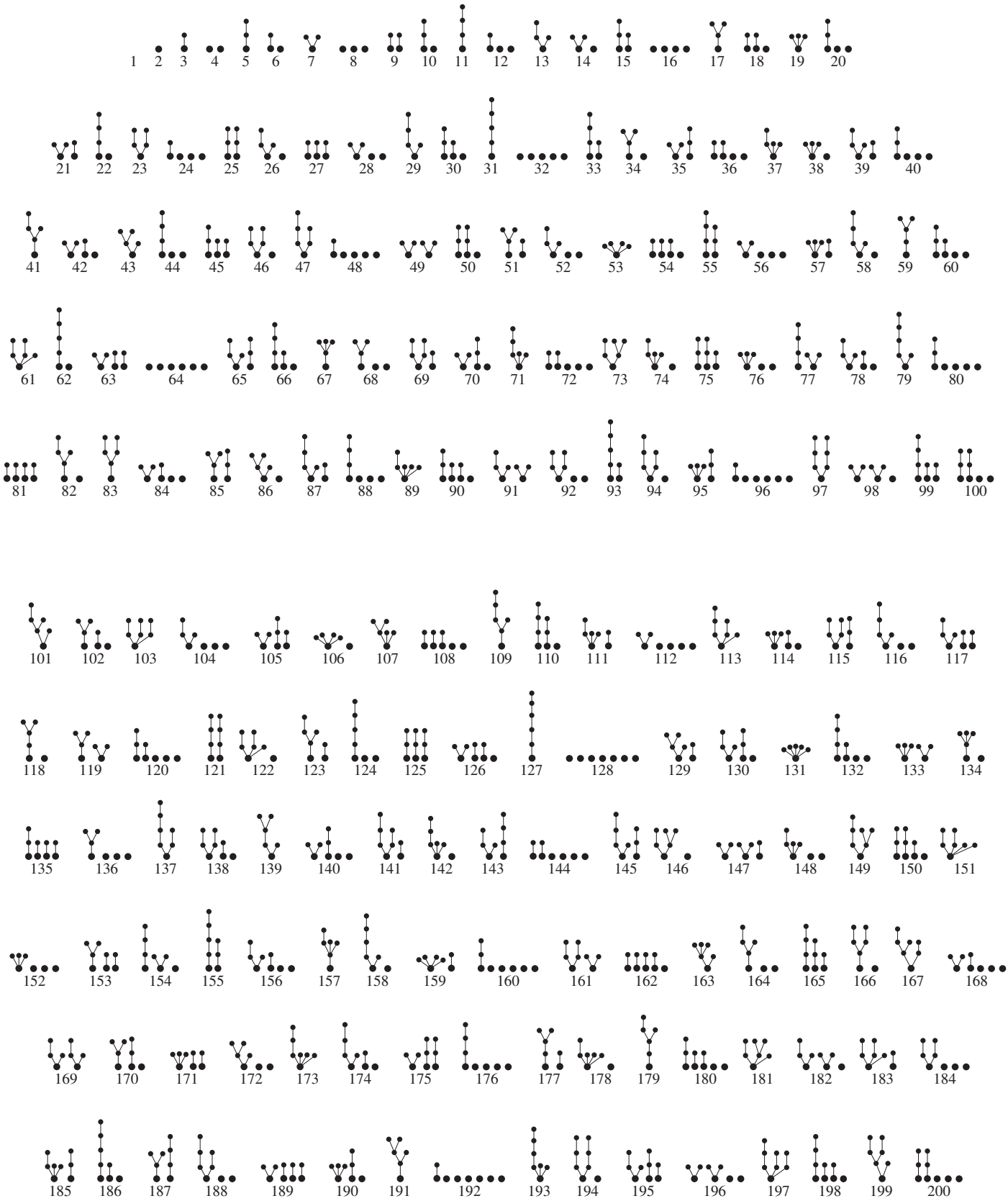
对于刘维尔函数的求和函数 L，原理完全相同 `，只是我们不必考虑平方因子。

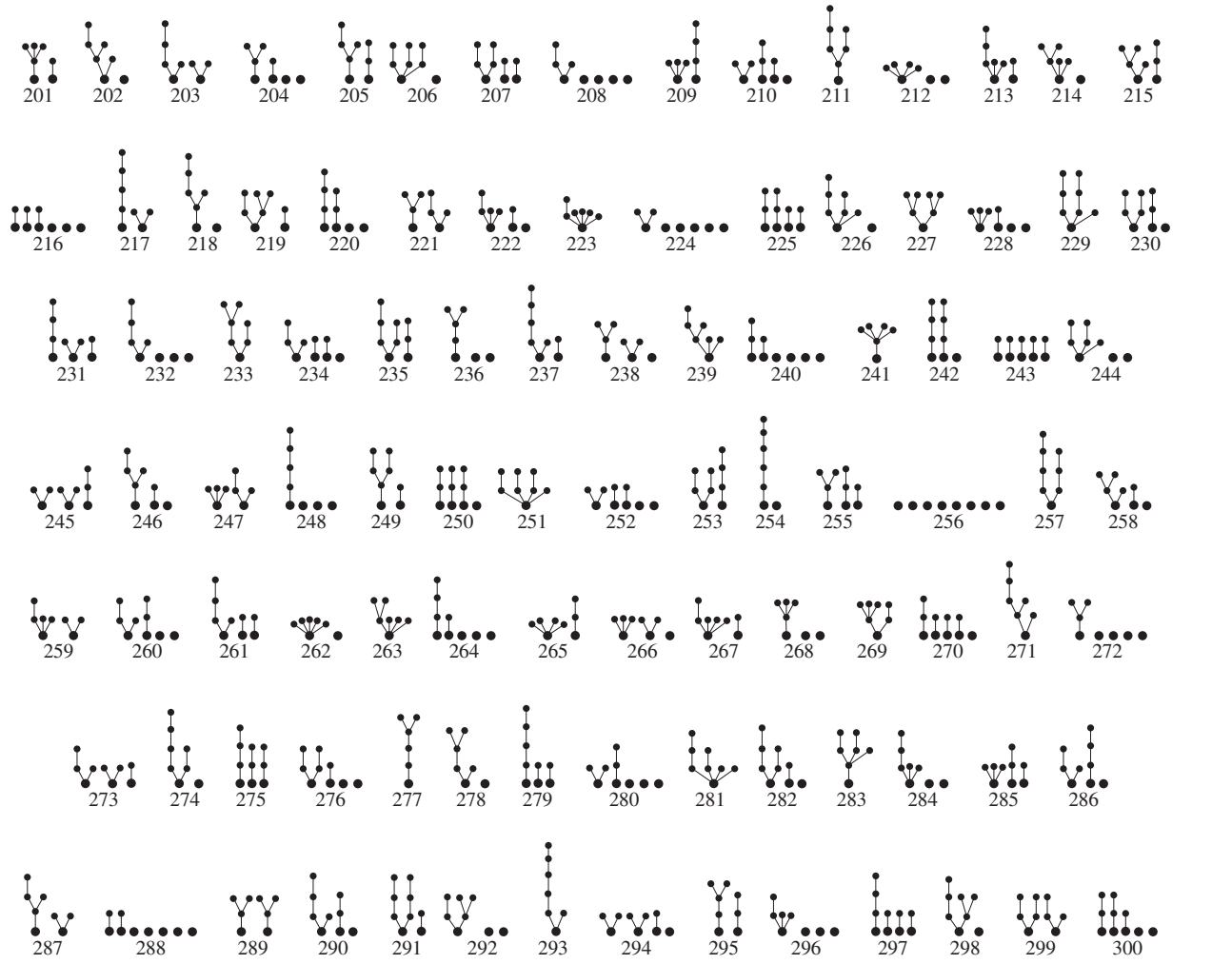
很快就会遇到许多困难。最明显的一点是，待剪去的分支或待合并的树有多种选择。想要进行多次配对时，还会立即出现另一个问题：可能所有可与一个单独留下的数 k 配对的对象 l，都已经是先前组成的某一对的成员。下面给出的 n 较小取值的例子（附录 C）似乎表明这种方法确实有效，但原因仍有待解释……

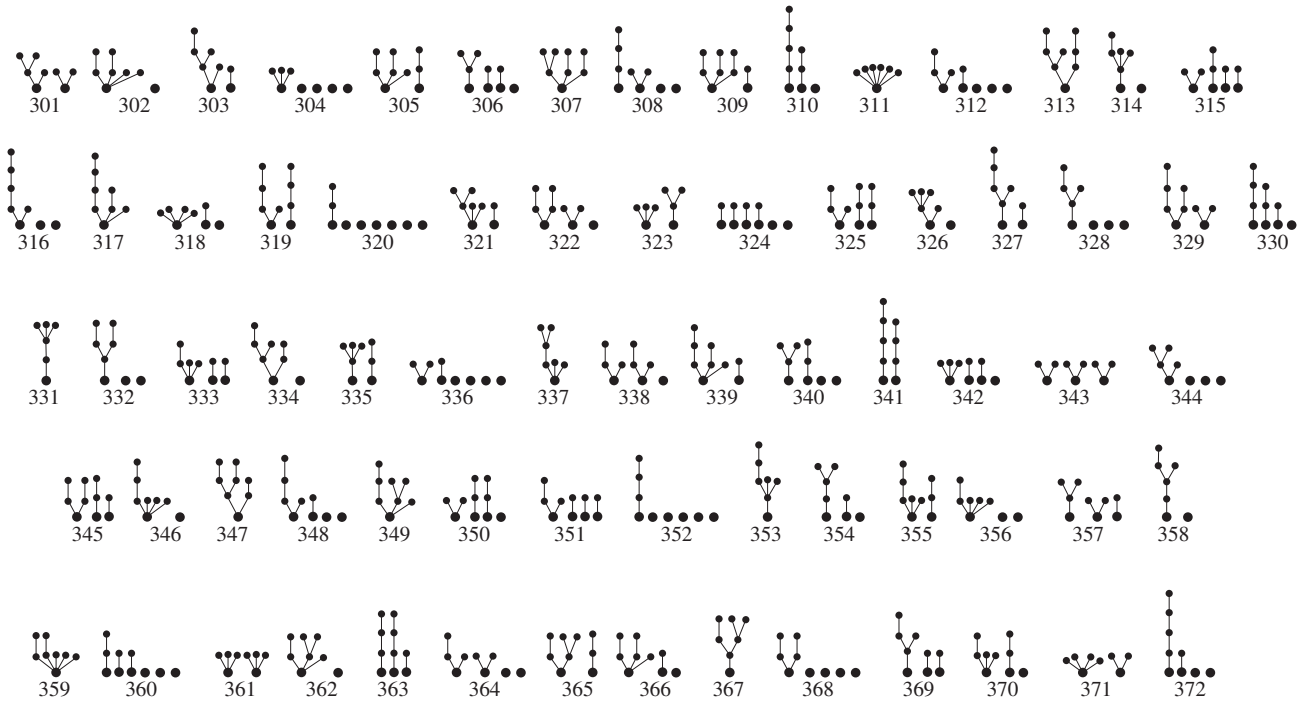
附录 A：比值 $p_k p_l / p_{kl}$ 的数值表

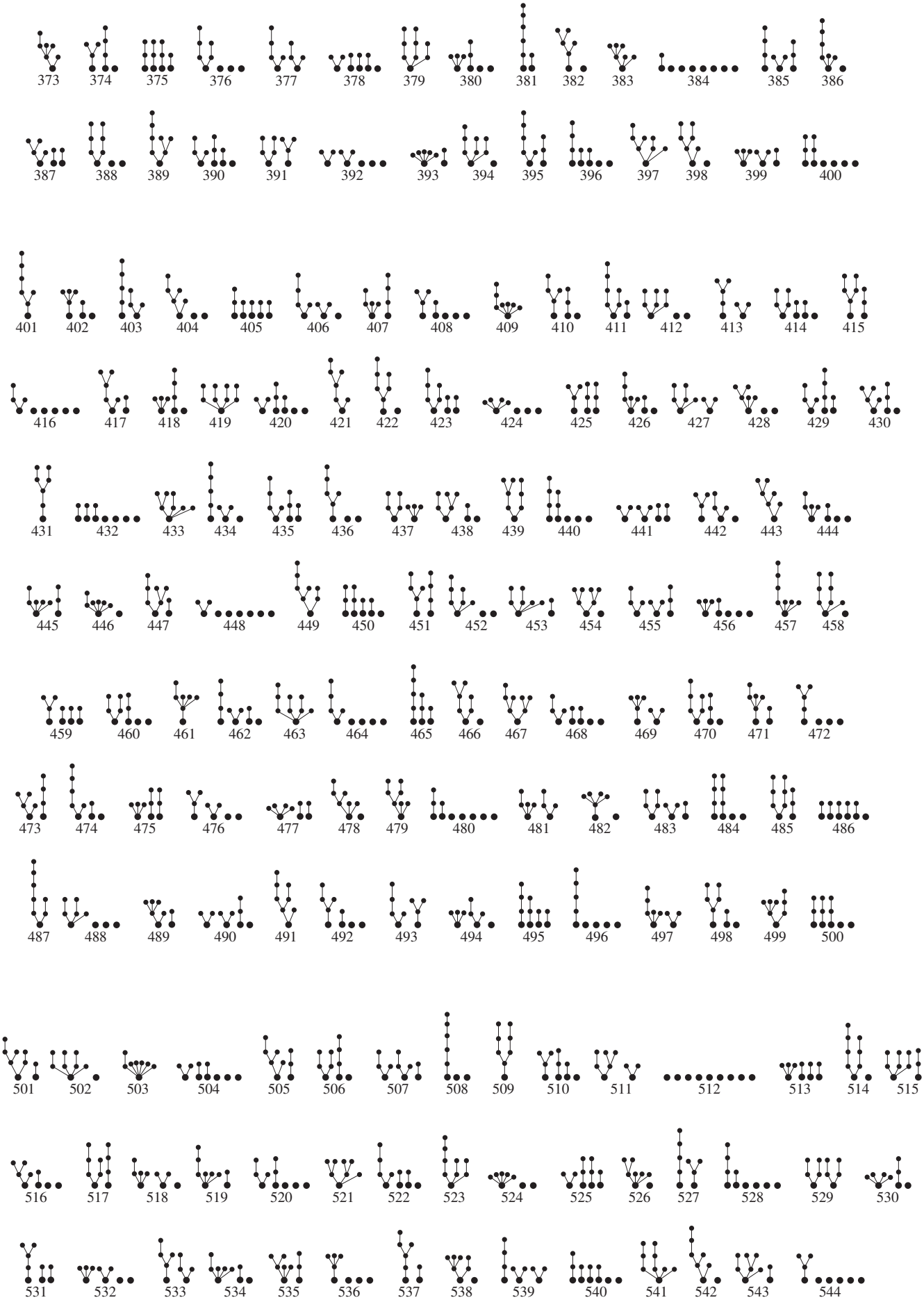
$l \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	2	9
7	3	15	13	25	23	4	21	19	35	37	49	53	5	33
29	55	47	77	71	121	97	6	39	37	65	61	91	89	143
113	169	151	7	51	43	85	73	119	107	187	149	221	181	289
227	8	57	53	95	89	133	131	209	173	247	223	323	263	361
311	9	69	61	115	103	161	151	253	197	299	251	391	307	437
359	529	419	10	87	71	145	113	203	173	319	229	377	281	493
349	551	409	621	463	841	541	11	93	79	165	137	217	193	341
257	403	317	527	389	589	457	713	523	899	601	961	661		
12	111/89	185/151	259/223	407/281	481/359	629/433	703/503	851/593	1073/659	1147/739	1369/827			
13	123/101	205/167	287/239	451/313	533/397	697/467	779/557	943/643	1189/733	1271/823	1517/911	1681/1009		
14	129/107	215/181	301/263		559/433	15	141/113	235/197	329/281					
16	159/131	265/223	371/311	17	177/139	295/233	413/337	18	183/151	305/251	427/359			
19	201/163	335/269	469/383	20	213/173	355/281	497/409	21	219/181	365/307	511/433	22		
553	457	23			581	479								

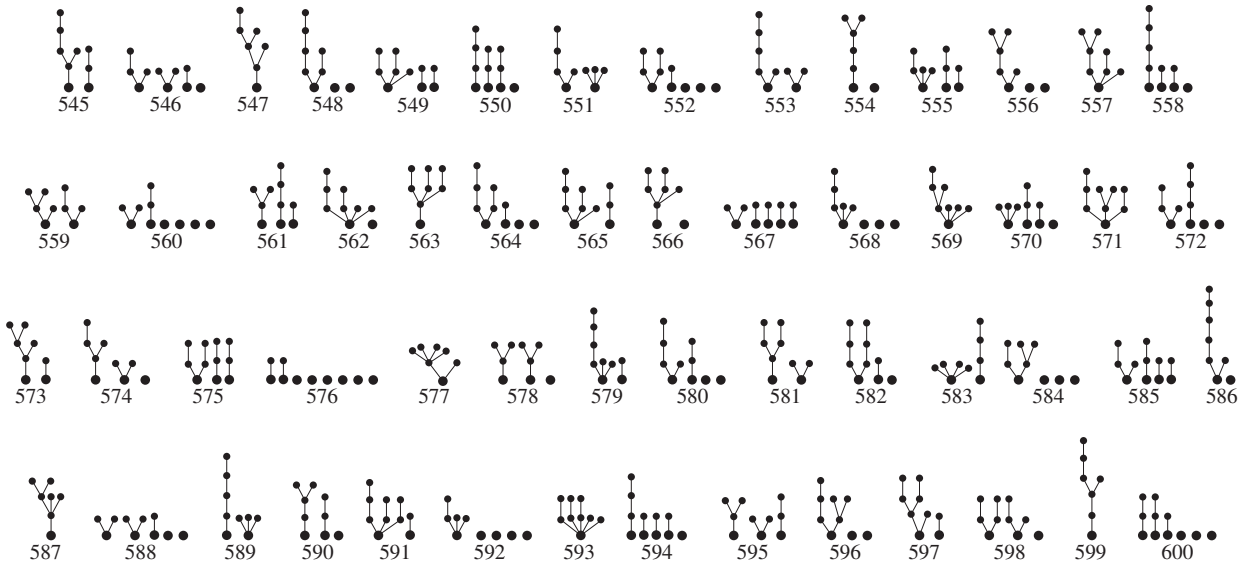
附录 B：从 **1** `a 到 1000 的整数树化

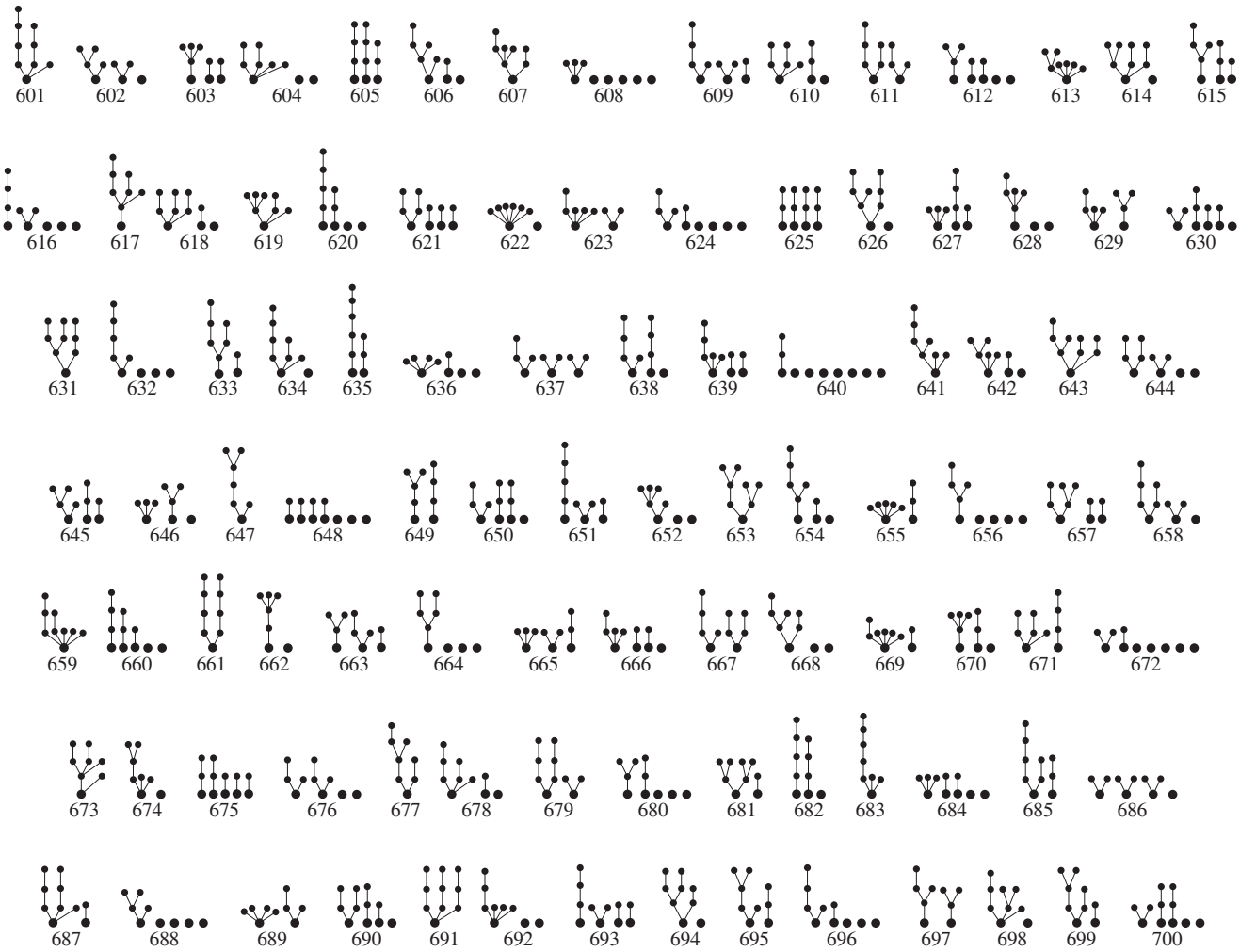


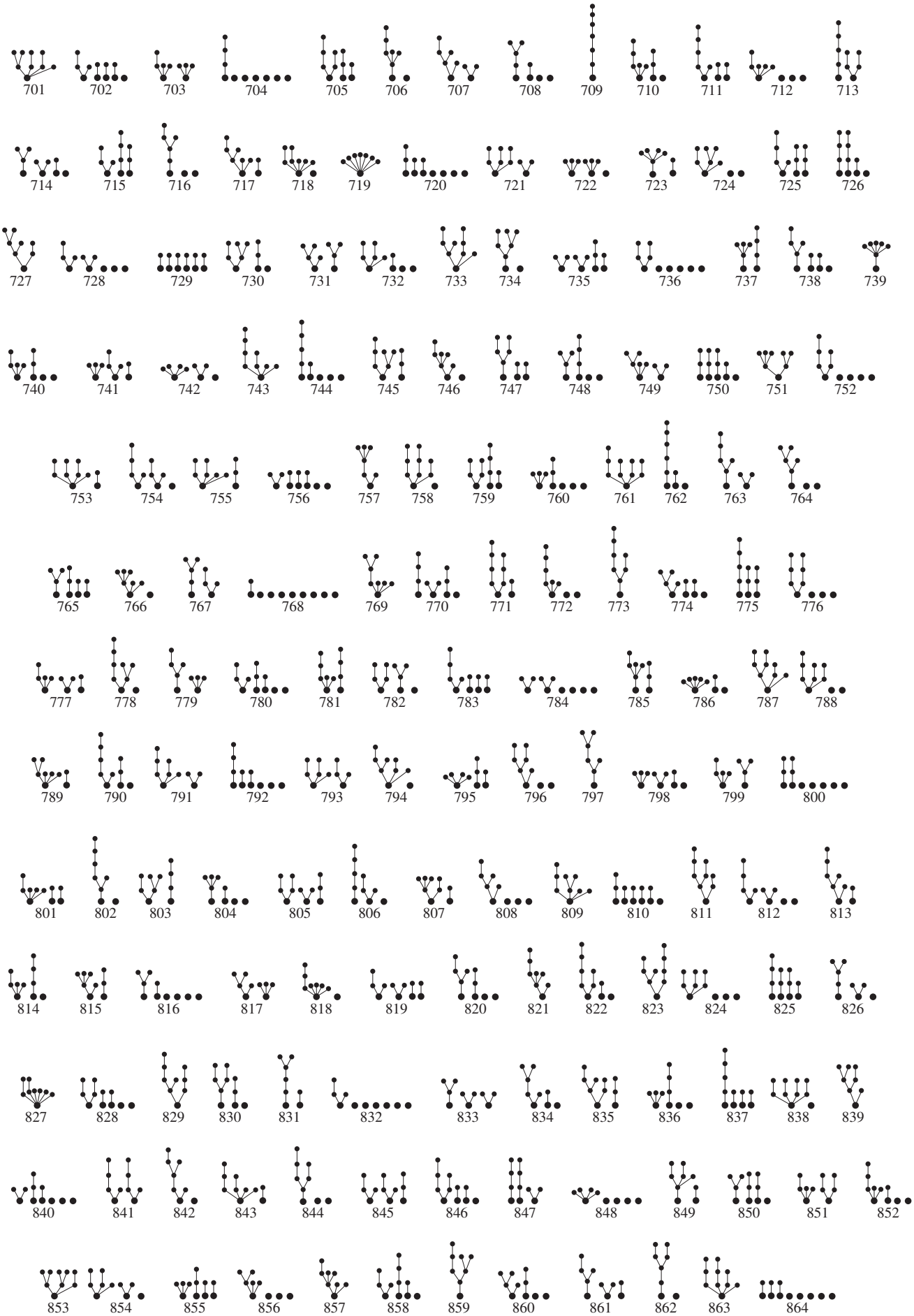

201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215
216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230
231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244
245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258
259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286
287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300

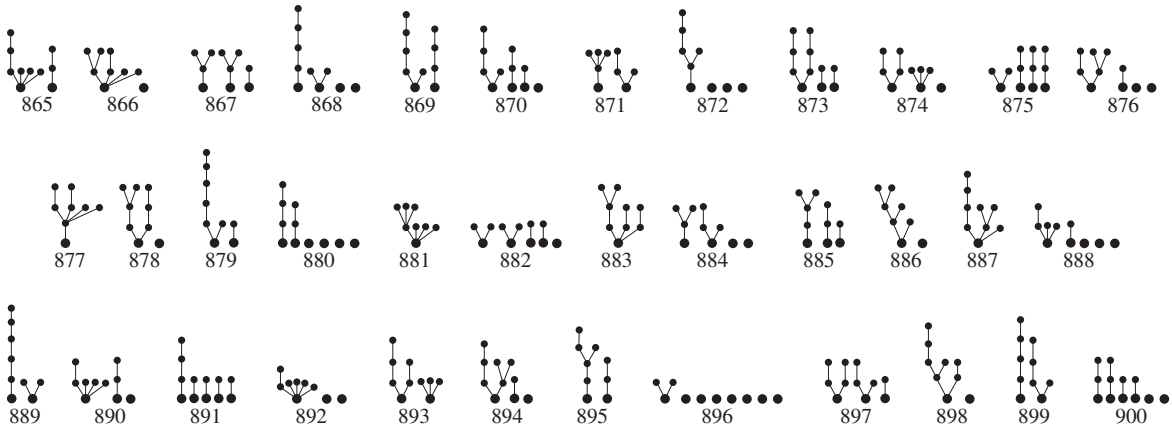

301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315
316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330
331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344
345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358
359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372

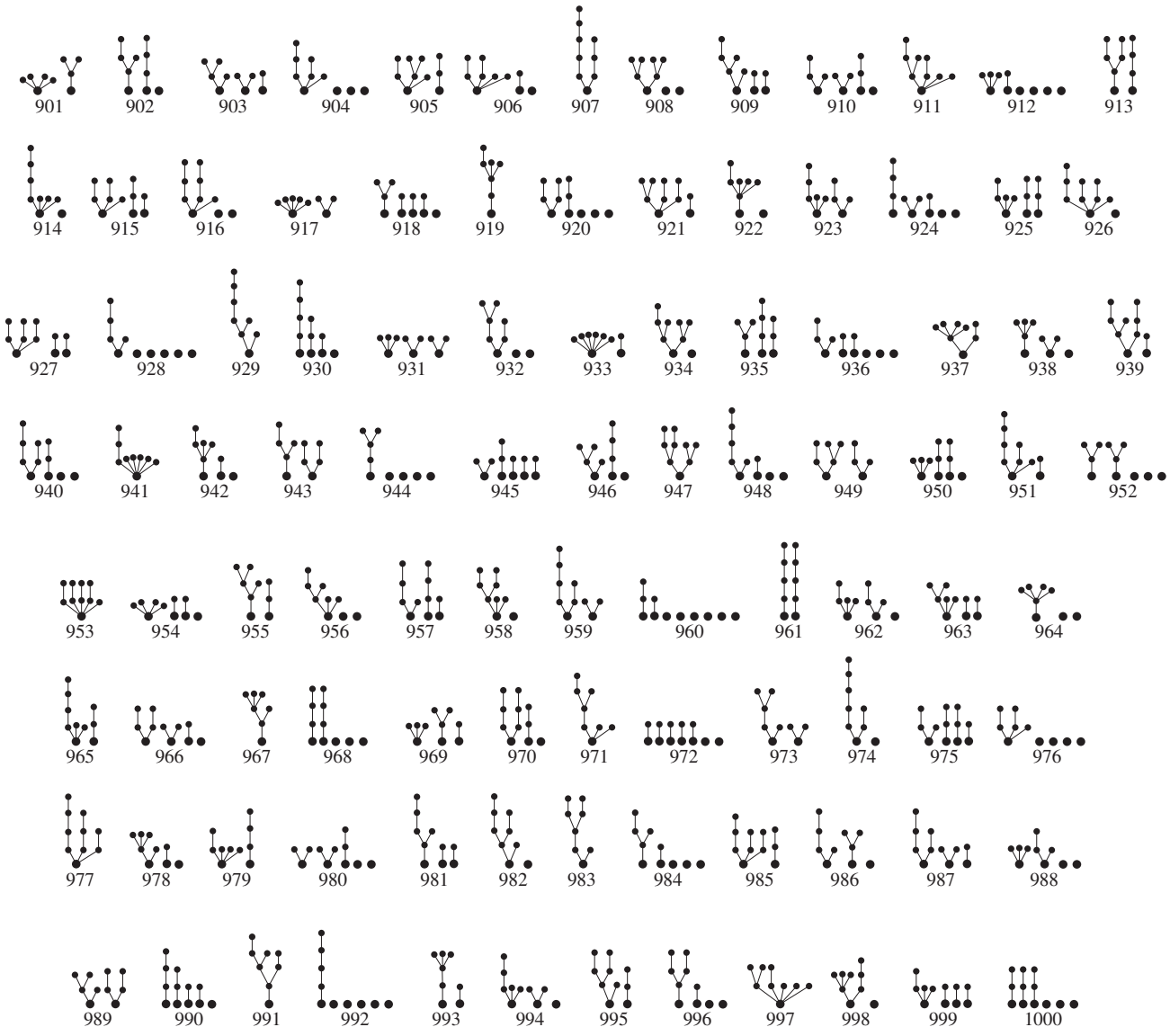

373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386
387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415
416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430
431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444
445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458
459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472
473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486
487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500
501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515
516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530
531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544


545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558
559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572
573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586
587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600


601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615
616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630
631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644
645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658
659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672
673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686
687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700


701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713
714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726
727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739
740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752
753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764
765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776
777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788
789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800
801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813
814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826
827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839
840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852
853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864


865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876
877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888
889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900


901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913
914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926
927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939
940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952
953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964
965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976
977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988
989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000

附录 C：一个将 1 ` 到 1000 的无平方因子数配对的例子

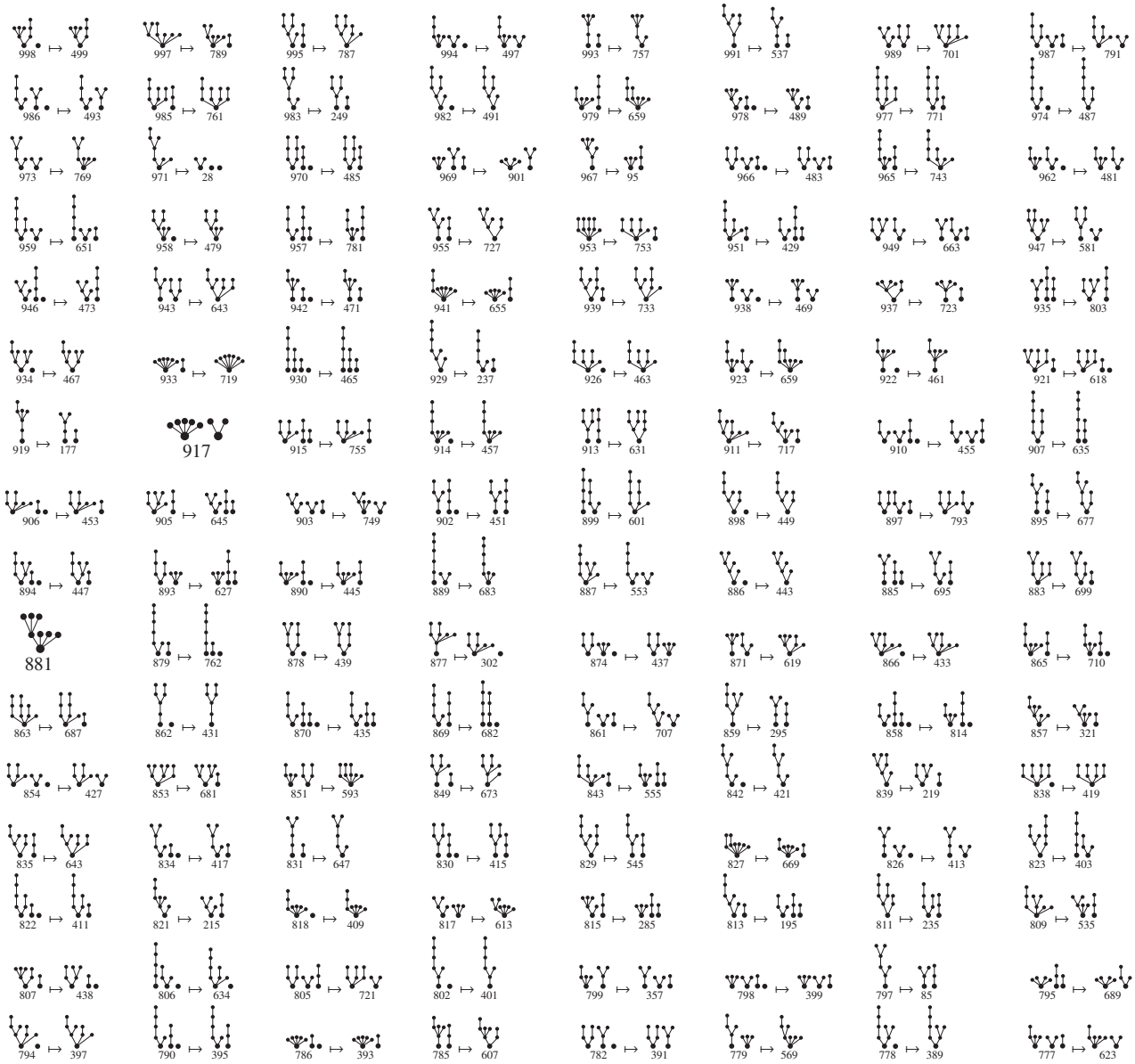
配对按降序进行：对选定的数 n，应用前文所述的剪切操作或根的融合操作之一，将其与一个比它小的数 n′ 配对，使得 μ(n) +μ(n′) = 0。允许在根以外的顶点上方进行剪切：

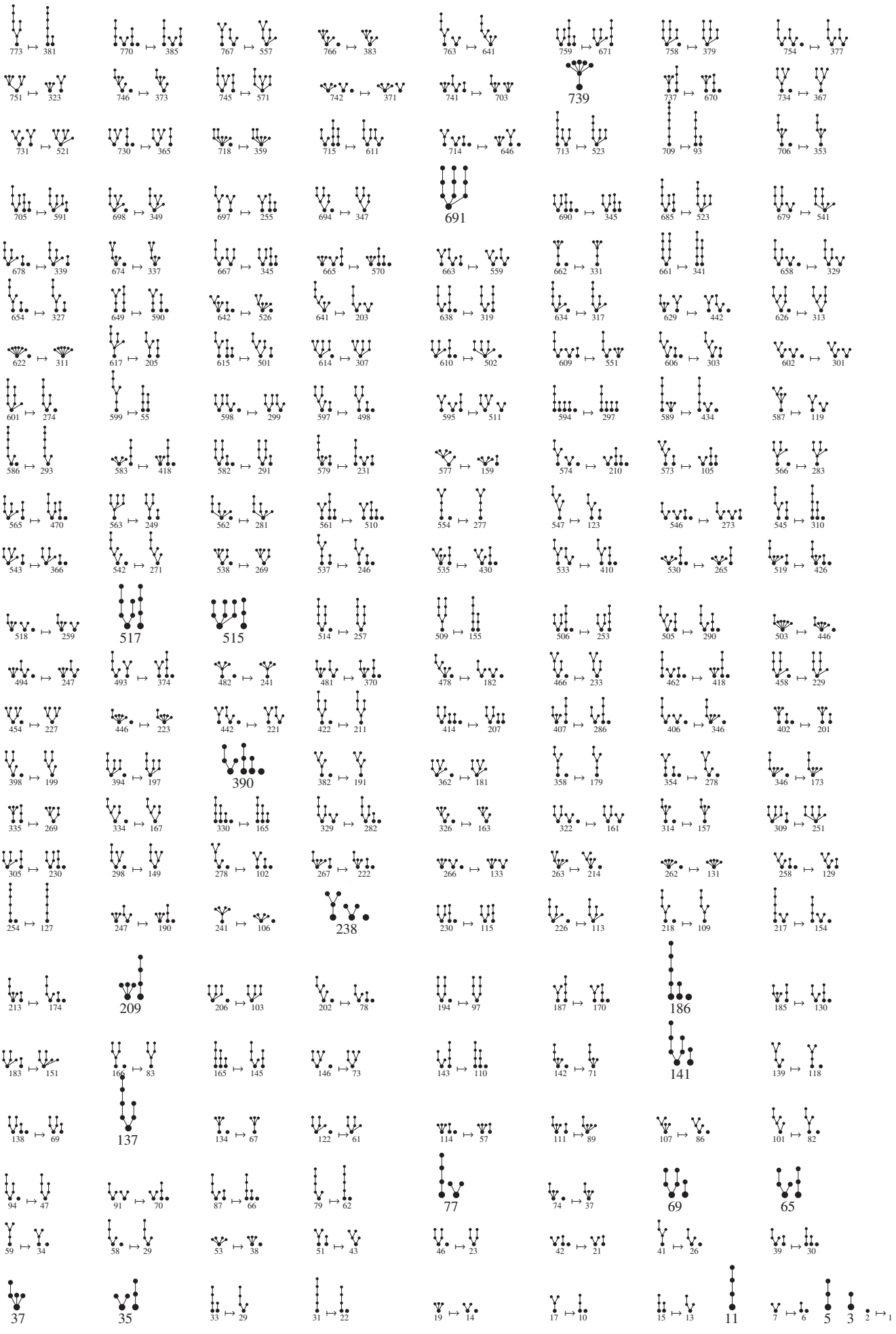


` 直到满足避免出现上述两种例外所导致情形的条件。例如 le

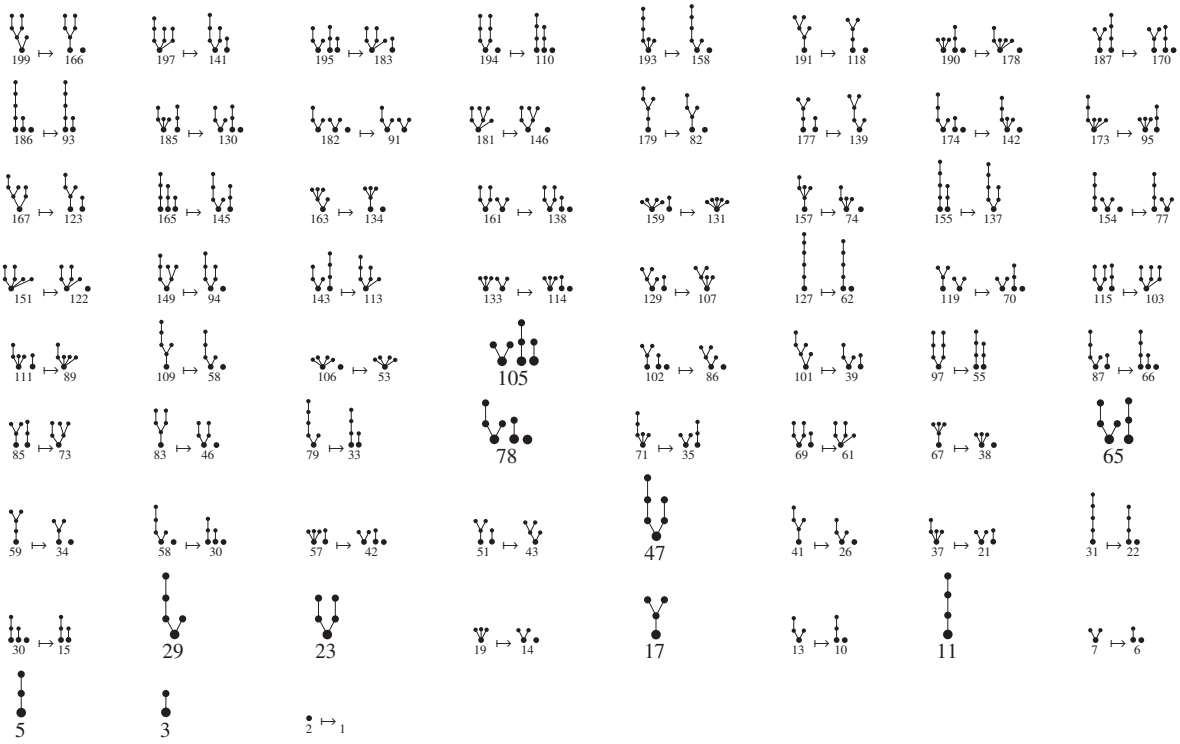


有 20 个数仍然单独保留，要么是有意为之，要么是因为配对的所有候选数都已不可用。含有至少一个平方因子的数与自身配对，因此未予表示。



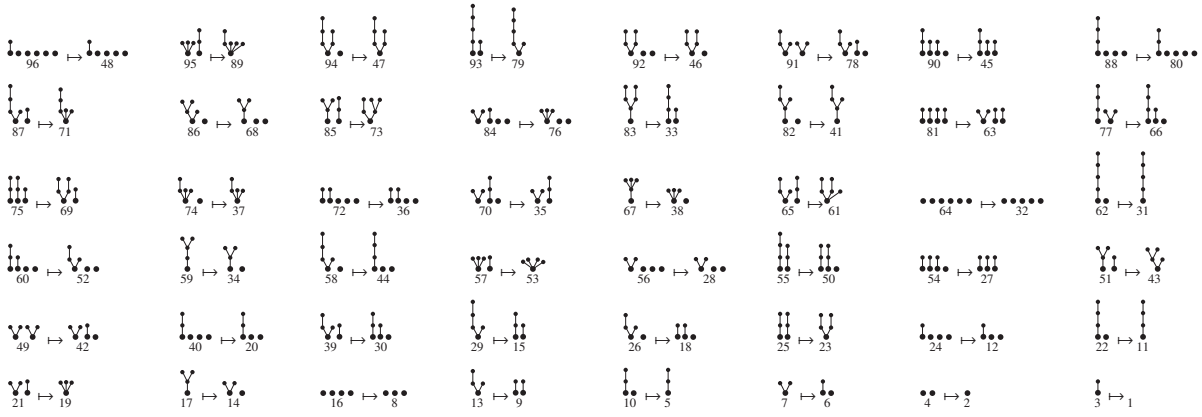

773 ↦ 381
770 ↦ 385
767 ↦ 557
766 ↦ 383
763 ↦ 641
759 ↦ 671
758 ↦ 379
754 ↦ 377
751 ↦ 323
746 ↦ 373
745 ↦ 571
742 ↦ 371
741 ↦ 703
739
737 ↦ 670
734 ↦ 367
731 ↦ 521
730 ↦ 365
718 ↦ 359
715 ↦ 611
714 ↦ 646
713 ↦ 523
709 ↦ 93
706 ↦ 353
705 ↦ 591
698 ↦ 349
697 ↦ 255
694 ↦ 347
691
690 ↦ 345
685 ↦ 523
679 ↦ 541
678 ↦ 339
674 ↦ 337
667 ↦ 345
665 ↦ 570
663 ↦ 559
662 ↦ 331
661 ↦ 341
658 ↦ 329
654 ↦ 327
649 ↦ 590
642 ↦ 526
641 ↦ 203
638 ↦ 319
634 ↦ 317
629 ↦ 442
626 ↦ 313
622 ↦ 311
617 ↦ 205
615 ↦ 501
614 ↦ 307
610 ↦ 502
609 ↦ 551
606 ↦ 303
602 ↦ 301
601 ↦ 274
599 ↦ 55
598 ↦ 299
597 ↦ 498
595 ↦ 511
594 ↦ 297
589 ↦ 434
587 ↦ 119
586 ↦ 293
583 ↦ 418
582 ↦ 291
579 ↦ 231
577 ↦ 159
574 ↦ 210
573 ↦ 105
566 ↦ 283
565 ↦ 470
563 ↦ 249
562 ↦ 281
561 ↦ 510
554 ↦ 277
547 ↦ 123
546 ↦ 273
545 ↦ 310
543 ↦ 366
542 ↦ 271
538 ↦ 269
537 ↦ 246
535 ↦ 430
533 ↦ 410
530 ↦ 265
519 ↦ 426
518 ↦ 259
517
515
514 ↦ 257
509 ↦ 155
506 ↦ 253
505 ↦ 290
503 ↦ 446
494 ↦ 247
493 ↦ 374
482 ↦ 241
481 ↦ 370
478 ↦ 182
466 ↦ 233
462 ↦ 418
458 ↦ 229
454 ↦ 227
446 ↦ 223
442 ↦ 221
422 ↦ 211
414 ↦ 207
407 ↦ 286
406 ↦ 346
402 ↦ 201
398 ↦ 199
394 ↦ 197
390
382 ↦ 191
362 ↦ 181
358 ↦ 179
354 ↦ 278
346 ↦ 173
335 ↦ 269
334 ↦ 167
330 ↦ 165
329 ↦ 282
326 ↦ 163
322 ↦ 161
314 ↦ 157
309 ↦ 251
305 ↦ 230
298 ↦ 149
278 ↦ 102
267 ↦ 222
266 ↦ 133
263 ↦ 214
262 ↦ 131
258 ↦ 129
254 ↦ 127
247 ↦ 190
241 ↦ 106
238
230 ↦ 115
226 ↦ 113
218 ↦ 109
217 ↦ 154
213 ↦ 174
209
206 ↦ 103
202 ↦ 78
194 ↦ 97
187 ↦ 170
186
185 ↦ 130
183 ↦ 151
166 ↦ 83
165 ↦ 145
146 ↦ 73
143 ↦ 110
142 ↦ 71
141
139 ↦ 118
138 ↦ 69
137
134 ↦ 67
122 ↦ 61
114 ↦ 57
111 ↦ 89
107 ↦ 86
101 ↦ 82
94 ↦ 47
91 ↦ 70
87 ↦ 66
79 ↦ 62
77
74 ↦ 37
69
65
59 ↦ 34
58 ↦ 29
53 ↦ 38
51 ↦ 43
46 ↦ 23
42 ↦ 21
41 ↦ 26
39 ↦ 30
37
35
33 ↦ 29
31 ↦ 22
19 ↦ 14
17 ↦ 10
15 ↦ 13
11
7 ↦ 6
5
3
2 ↦ 1

附录 D：从 **1** `到 199

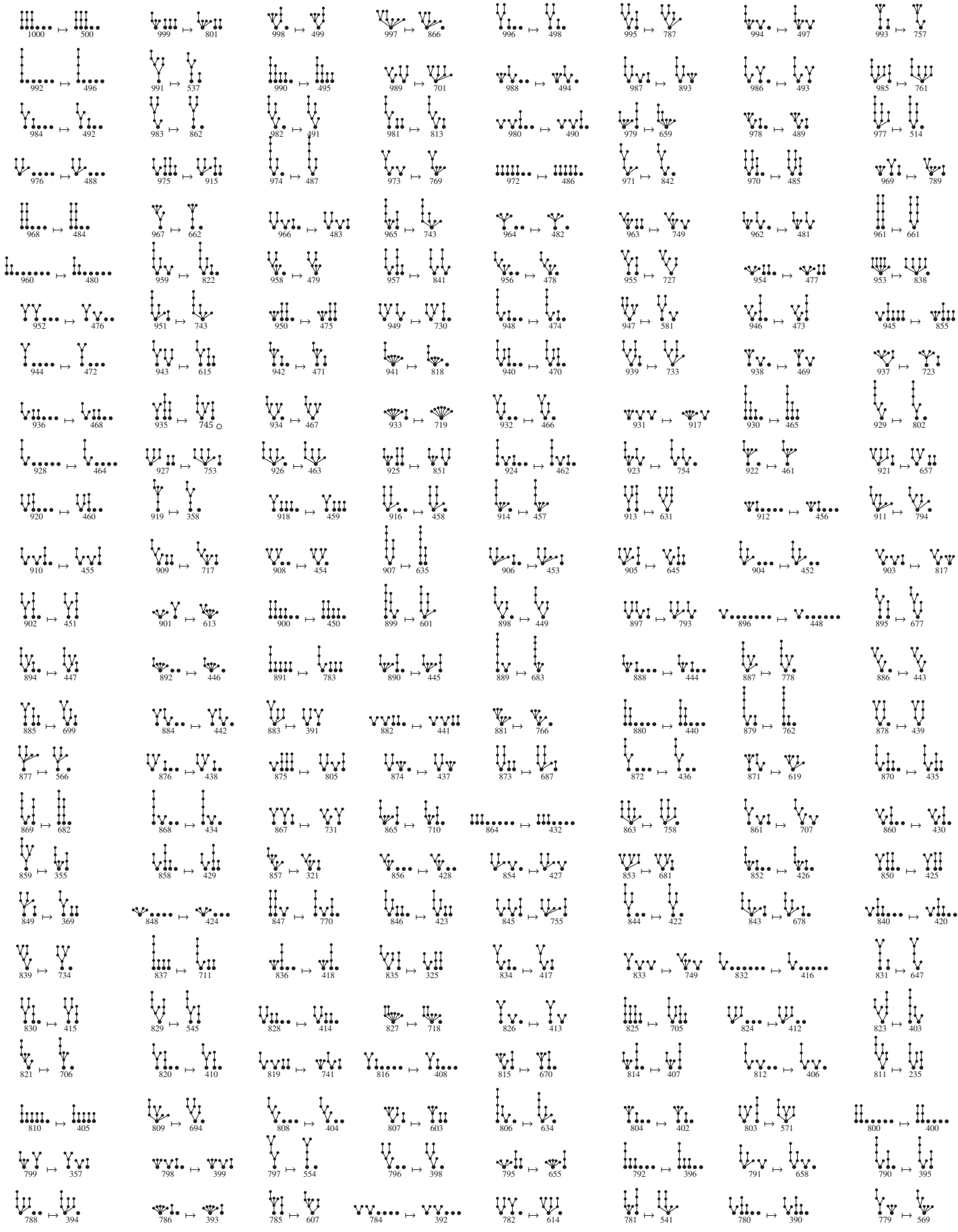


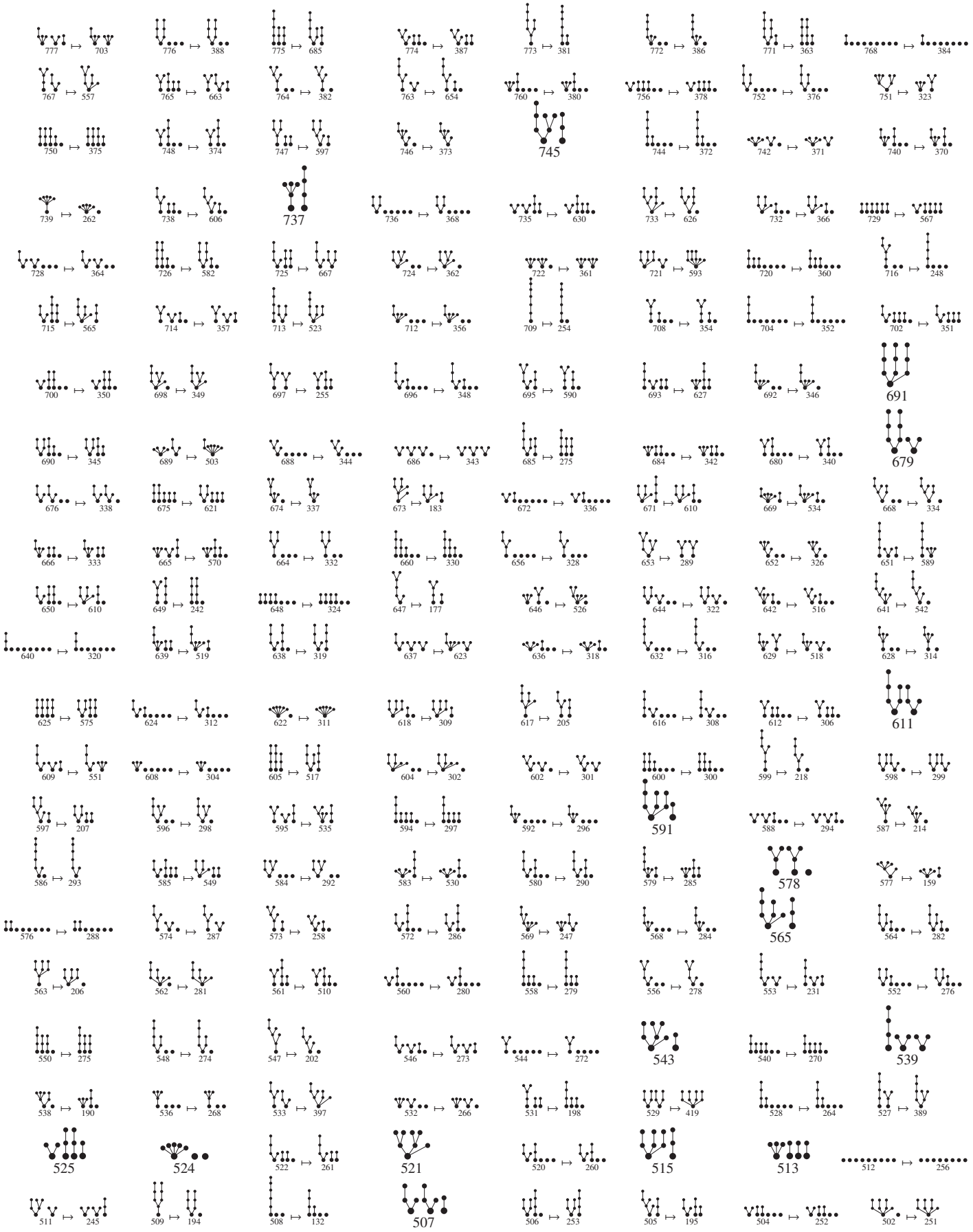
附录 E：从 **1** `到 96，含平方因子

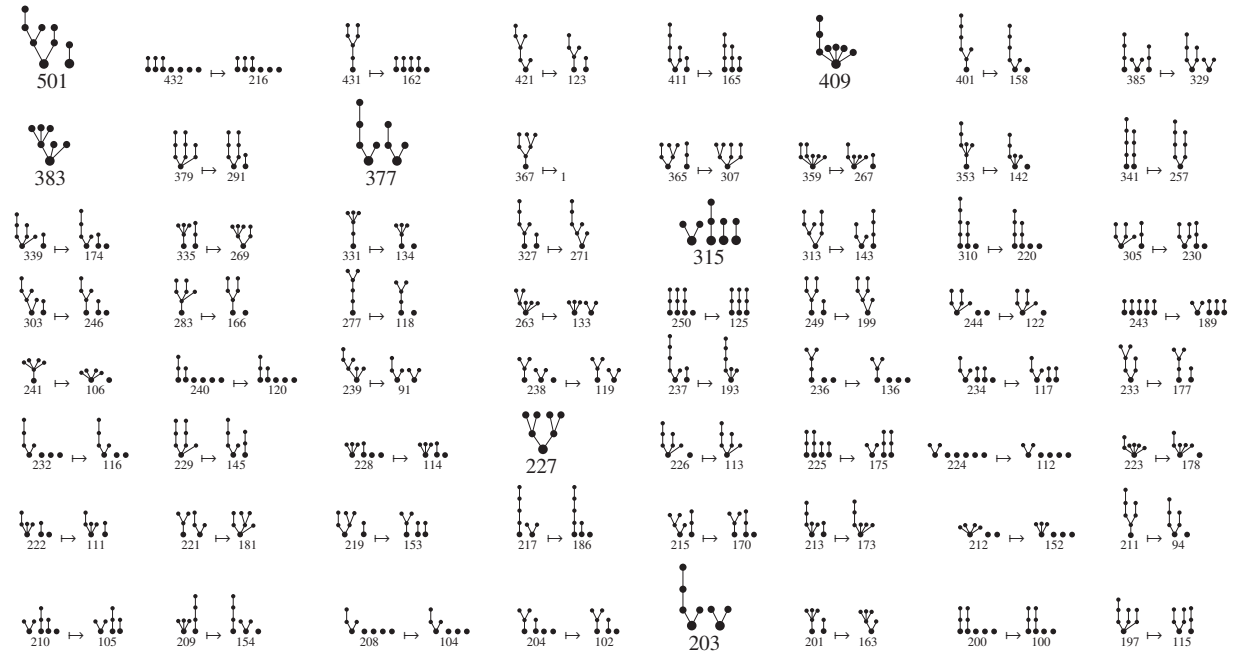
在这个例子中，从 1 `到 96 的所有数字都可以两两配对。回想一下，96 是 Liouville 求和函数在 906150256 之前的最后一个零点。

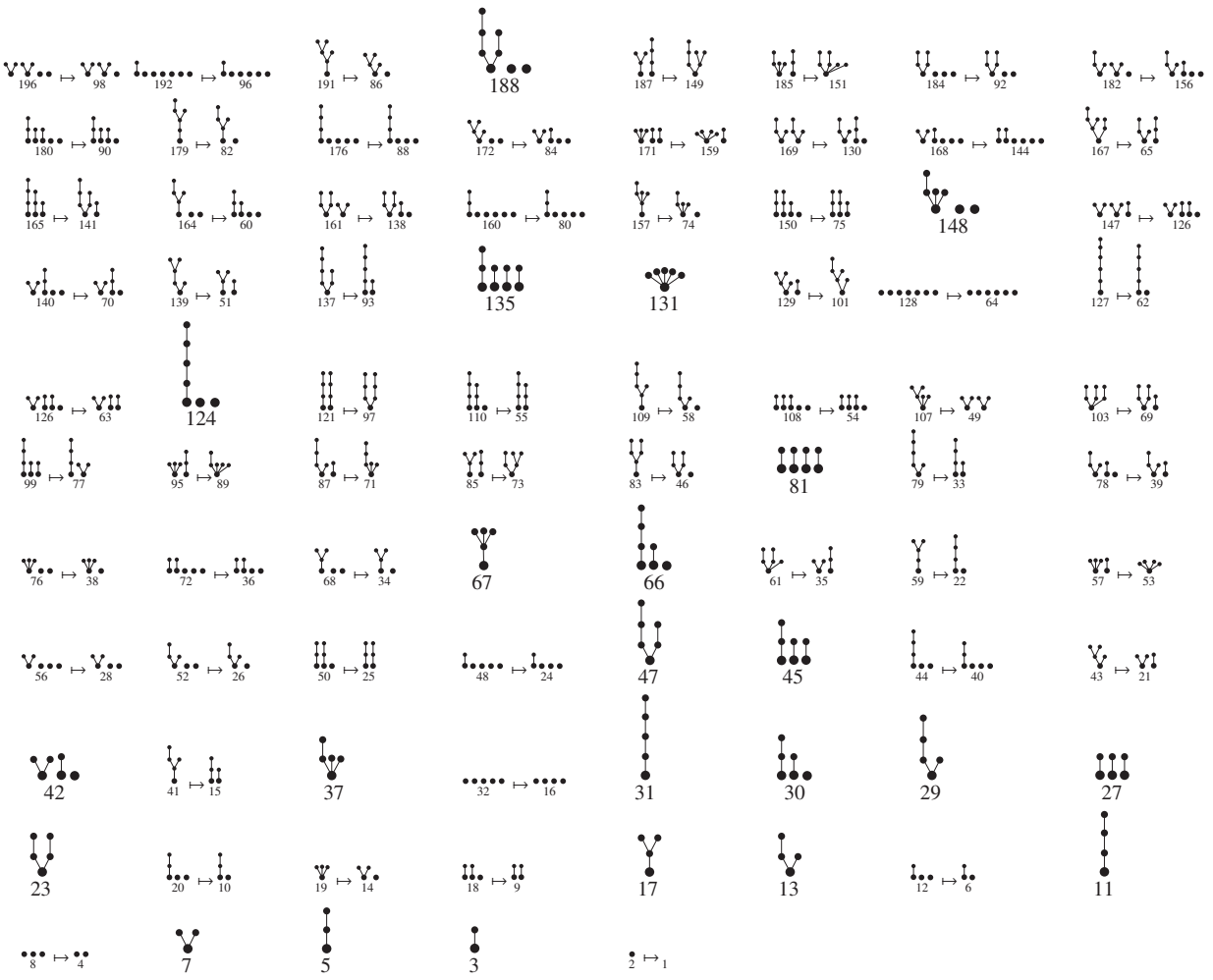


附录F：从 **1** 到1000及其平方因子

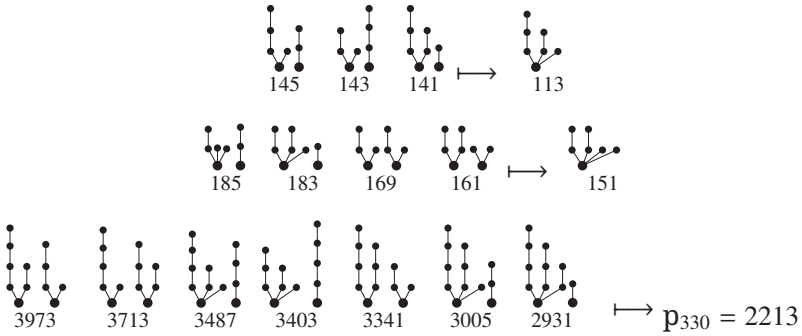



777 ↦ 703
776 ↦ 388
775 ↦ 685
774 ↦ 387
773 ↦ 381
772 ↦ 386
771 ↦ 363
768 ↦ 384
767 ↦ 557
765 ↦ 663
764 ↦ 382
763 ↦ 654
760 ↦ 380
756 ↦ 378
752 ↦ 376
751 ↦ 323
750 ↦ 375
748 ↦ 374
747 ↦ 597
746 ↦ 373
745
744 ↦ 372
742 ↦ 371
740 ↦ 370
739 ↦ 262
738 ↦ 606
737
736 ↦ 368
735 ↦ 630
733 ↦ 626
732 ↦ 366
729 ↦ 567
728 ↦ 364
726 ↦ 582
725 ↦ 667
724 ↦ 362
722 ↦ 361
721 ↦ 593
720 ↦ 360
716 ↦ 248
715 ↦ 565
714 ↦ 357
713 ↦ 523
712 ↦ 356
709 ↦ 254
708 ↦ 354
704 ↦ 352
702 ↦ 351
700 ↦ 350
698 ↦ 349
697 ↦ 255
696 ↦ 348
695 ↦ 590
693 ↦ 627
692 ↦ 346
691
690 ↦ 345
689 ↦ 503
688 ↦ 344
686 ↦ 343
685 ↦ 275
684 ↦ 342
680 ↦ 340
679
676 ↦ 338
675 ↦ 621
674 ↦ 337
673 ↦ 183
672 ↦ 336
671 ↦ 610
669 ↦ 534
668 ↦ 334
666 ↦ 333
665 ↦ 570
664 ↦ 332
660 ↦ 330
656 ↦ 328
653 ↦ 289
652 ↦ 326
651 ↦ 589
650 ↦ 610
649 ↦ 242
648 ↦ 324
647 ↦ 177
646 ↦ 526
644 ↦ 322
642 ↦ 516
641 ↦ 542
640 ↦ 320
639 ↦ 519
638 ↦ 319
637 ↦ 623
636 ↦ 318
632 ↦ 316
629 ↦ 518
628 ↦ 314
625 ↦ 575
624 ↦ 312
622 ↦ 311
618 ↦ 309
617 ↦ 205
616 ↦ 308
612 ↦ 306
611
609 ↦ 551
608 ↦ 304
605 ↦ 517
604 ↦ 302
602 ↦ 301
600 ↦ 300
599 ↦ 218
598 ↦ 299
597 ↦ 207
596 ↦ 298
595 ↦ 535
594 ↦ 297
592 ↦ 296
591
588 ↦ 294
587 ↦ 214
586 ↦ 293
585 ↦ 549
584 ↦ 292
583 ↦ 530
580 ↦ 290
579 ↦ 285
578
577 ↦ 159
576 ↦ 288
574 ↦ 287
573 ↦ 258
572 ↦ 286
569 ↦ 247
568 ↦ 284
565
564 ↦ 282
563 ↦ 206
562 ↦ 281
561 ↦ 510
560 ↦ 280
558 ↦ 279
556 ↦ 278
553 ↦ 231
552 ↦ 276
550 ↦ 275
548 ↦ 274
547 ↦ 202
546 ↦ 273
544 ↦ 272
543
540 ↦ 270
539
538 ↦ 190
536 ↦ 268
533 ↦ 397
532 ↦ 266
531 ↦ 198
529 ↦ 419
528 ↦ 264
527 ↦ 389
525
524
522 ↦ 261
521
520 ↦ 260
515
513
512 ↦ 256
511 ↦ 245
509 ↦ 194
508 ↦ 132
507
506 ↦ 253
505 ↦ 195
504 ↦ 252
502 ↦ 251


501
432 ↦ 216
431 ↦ 162
421 ↦ 123
411 ↦ 165
409
401 ↦ 158
385 ↦ 329
383
379 ↦ 291
377
367 ↦ 1
365 ↦ 307
359 ↦ 267
353 ↦ 142
341 ↦ 257
339 ↦ 174
335 ↦ 269
331 ↦ 134
327 ↦ 271
315
313 ↦ 143
310 ↦ 220
305 ↦ 230
303 ↦ 246
283 ↦ 166
277 ↦ 118
263 ↦ 133
250 ↦ 125
249 ↦ 199
244 ↦ 122
243 ↦ 189
241 ↦ 106
240 ↦ 120
239 ↦ 91
238 ↦ 119
237 ↦ 193
236 ↦ 136
234 ↦ 117
233 ↦ 177
232 ↦ 116
229 ↦ 145
228 ↦ 114
227
226 ↦ 113
225 ↦ 175
224 ↦ 112
223 ↦ 178
222 ↦ 111
221 ↦ 181
219 ↦ 153
217 ↦ 186
215 ↦ 170
213 ↦ 173
212 ↦ 152
211 ↦ 94
210 ↦ 105
209 ↦ 154
208 ↦ 104
204 ↦ 102
203
201 ↦ 163
200 ↦ 100
197 ↦ 115


196 ↦ 98
192 ↦ 96
191 ↦ 86
188
187 ↦ 149
185 ↦ 151
184 ↦ 92
182 ↦ 156
180 ↦ 90
179 ↦ 82
176 ↦ 88
172 ↦ 84
171 ↦ 159
169 ↦ 130
168 ↦ 144
167 ↦ 65
165 ↦ 141
164 ↦ 60
161 ↦ 138
160 ↦ 80
157 ↦ 74
150 ↦ 75
148
147 ↦ 126
140 ↦ 70
139 ↦ 51
137 ↦ 93
135
131
129 ↦ 101
128 ↦ 64
127 ↦ 62
126 ↦ 63
124
121 ↦ 97
110 ↦ 55
109 ↦ 58
108 ↦ 54
107 ↦ 49
103 ↦ 69
99 ↦ 77
95 ↦ 89
87 ↦ 71
85 ↦ 73
83 ↦ 46
81
79 ↦ 33
78 ↦ 39
76 ↦ 38
72 ↦ 36
68 ↦ 34
67
66
61 ↦ 35
59 ↦ 22
57 ↦ 53
56 ↦ 28
52 ↦ 26
50 ↦ 25
48 ↦ 24
47
45
44 ↦ 40
43 ↦ 21
42
41 ↦ 15
37
32 ↦ 16
31
30
29
27
23
20 ↦ 10
19 ↦ 14
18 ↦ 9
17
13
12 ↦ 6
11
8 ↦ 4
7
5
3
2 ↦ 1

通过根的融合得到一个素数的多种方`法



参´考´文献

[1] L. Alexandrov, 《论素数分布的非渐近性》, arXiv:math/9811096v1。[2] R. G. Batchko, 《素数分布中的素数分形与全局准自相似结构》, arXiv:1405.2900（2014）。[3] P. Borwein、S. Choi、B. Rooney、A. Weirathmueller, 《为爱好者和专家而作的黎曼猜想》, Springer（2006）。[4] J. C. Butcher, 《积分方法的代数理论》, 《数学计算》26，79–106（1972）。[5] R. de la Bret`eche、G. Tenenbaum, 《关于某些算术函数方程》, 《傅里叶研究所年刊》50，1445-1504（2000）。[6] P. Cappello, 《自然数与有根树之间的新双射》, 技术报告，第四届SIAM离散数学会议，旧金山（1988）。sites.cs.ucsb.edu/~cappello/papers/bijections/p.pdf（于2026年2月2日核验的链接）。[7] G. Cantor, 《关于超限集合论基础的贡献》, 《数学年刊》46，481–512（1895）及49，207–246（1897），载于《论文集》，由Ernst Zermelo编，Springer Verlag，柏林，282–356（1932）。[8] G. Cantor, 《关于超限集合论基础》, F. Marotte法译，M´em Soc. Sci. Phys et Nat. Bordeaux，第III卷，第5辑，343–437（1899），重印于Jacques Gabay（1989）。[9] A. Cayley, 《论称为树的解析形式理论》, 《哲学杂志》13，172–176（1857）。[10] F. Chapoton、M. Livernet, 《Pre-Lie代数与有根树的歌剧》, 《国际数学研究通讯》2001，395–408（2001）。[11] Z. Chen, 《Matula 数生成器》, s2.smu.edu/~ziz henc/Project/MatulaNumber/（于2026年2月2日核验的链接）。[12] E. Deutsch, 《由Matula 数得到的有根树统计量》, 《离散应用数学》160，第15期，2314–2322（2012）。[13] A. A. V. Dossou-Olory, 《具有极端Matula 数的拓扑树》, arXiv:1806.03995。[14] P. Dusart，对于k ≥ 2，第k个素数大于k(ln k +ln ln k − 1), 《数学计算》68，第225期，411–415（1999）。[15] A. Dzhumadil'daev、C. L¨ofwall, 《树、自由右对称代数、自由Novikov代数与恒等式》, 《同调、同伦与应用》4(2)，165–190（2002）。[16] S. B. Elk、I. Gutman、A. Ivi´c, 《用于编码化学结构的Matula 数及其若干性质》, 《塞尔维亚化学学会杂志》58，193-201（1993年）。[17] P. Erd¨os, 《初等数论中的一种新方法及其导致的素数定理初等证明》, 《美国国家科学院院刊》35，第7期，374–384（1949）。[18] L. Foissy, 《装饰有根树的霍普夫代数 I + II》, 博士论文，兰斯大学（2002），以及《数学科学通报》126，第3期，193–239及第4期，249–288（2002）。[19] D. F. Goebel, 《有根树与自然数之间的一一对应》, 《组合理论杂志B辑》29，141-143（1980）。[20] I. Gutman、A. Ivi´c, 《关于Matula 数》, 《离散数学》150，131-142（1996）。[21] I. Gutman、Y.-N. Neh, 《从Matula 数推导树的性质》, 《数学研究所学报》，新辑，53（67），17-22（1993）。[22] M. Livernet, 《Pre-Lie代数的刚性定理》, 《纯粹与应用代数杂志》207，第1期，1-18（2006）。[23] J-P. Massias、G. Robin, 《关于素数的某些函数的有效界》, 《波尔多数论杂志》8，第1期，215-242（1996）。[24] D. W. Matula, 《通过素因数分解对有根树进行自然枚举》, 《SIAM评论》10，273（1968年）。

[25] D. W. Matula、Z. Chen，《自然数的精确简洁图形表示》，IEEE第26届计算机算术研讨会（ARITH），DOI 10.1109/ARITH.2019.00027（2019年）。[26] A. F. Nieto，《Matula 数、哥德尔编号与福克空间》，《数学化学杂志》，DOI 10.1007/s10910-013-0178-z（2013年）。.[27] B. Riemann，《给定大小以下的素数数量》，柏林科学院月报（1859年11月）。[28] J. B. Rosser、L. Schoenfeld，《素数的某些函数的近似公式》，《伊利诺伊数学杂志》6，64-94（1962年）。[29] A. Selberg，《素数定理的一个初等证明》，《数学年刊》50，305–313（1948年）。[30] N. Sloane，《整数序列在线百科全书》，http://oeis.org/[31] J. Sousselier，《数与树》，个人网页（1999年），http://www.sousselier.com/uploads/ARBOR6.pdf（于202§年2月2日核验的链接）。[32] A. Weiermann，《解析组合学、证明论序数、以及独立性结果的相变》，《纯粹与应用逻辑年刊》136，189-218（2005年）。[33] A. Weiermann，《自然良序的单调二阶极限律》，arXiv:2007:14111（2020年）。

2026年2月3日 Dominique Manchon，Blaise Pascal 数学实验室，UMR6620，法国国家科学研究中心 - 克莱蒙奥弗涅大学，Vasarély 广场 3 号，CS 60026，63178 Aubière，法国 • 电子邮箱：Dominique.Manchon@uca.fr 网址：https://dominiquemanchon.go.yj.fr/