arXiv:2602.03166v1 [math.NA] 3 Feb 2026

利用物理门控潜在动力学对印度极端降雨进行事件级概率预测

Arun Govind
NeelanSimuNetics
Kaniyakumari 泰米尔纳德邦
印度-629173
arunneelaniist@gmail.com

2026年2月4日

摘要

印度季风区的极端降雨会带来严重的社会与基础设施风险，但由于时间持续性强、对流触发具有随机性，以及天气尺度强迫与中尺度动力学之间存在多尺度相互作用，在日时间尺度上仍难以预测。尽管大尺度大气物理提供了重要的环境背景，但其确定性定位极端降雨的能力存在根本局限。本研究利用代表热力学和动力学条件的 ERA5 再分析变量，探讨如何借助大尺度大气信息，对印度日降雨极端事件进行事件级概率预测。我们将自适应 ConvLSTM 基线与所提出的**物理门控潜在常微分方程（PG-LODE）**框架进行比较。该框架将大气演变建模为连续时间潜在过程，其动力学由一种基于物理的门控机制明确调节，该机制在对流不稳定条件下激活。我们使用印度气象局（IMD）网格化降雨数据集，将6月至9月季风季期间局地第95百分位数以上的降雨定义为极端事件。逐像素评估显示，由于空间位移误差和双重惩罚问题，两种模型的技巧均有限；而事件级（基于网格块）验证则揭示了明显的性能差异：ConvLSTM 表现得较为保守，仅检测到27%的极端事件（TILE-POD ≈ 0.27）；PG-LODE 则实现了近乎完全的检测（TILE-POD ≈ 0.996），同时空报率适中（TILE-FAR ≈ 0.215），因此事件级技巧显著更高（TILE-CSI ≈ 0.78）。结果表明，物理门控连续时间潜在动力学能够有效地将大尺度环境可预测性转化为对极端降雨风险的可靠评估。

***K*关键词** 极端降雨、印度夏季风、物理信息机器学习、神经常微分方程、概率预测、事件级验证

1 引言

印度夏季风（ISM）每年于6月至9月（季风季（6月至9月））出现，是南亚农业经济的命脉，但同时也是该地区最重要的水文气象灾害之一。近几十年来，印度中部极端降雨事件的频率和强度显著增加[1, 2]。这些极端事件经常引发山洪、滑坡和农业破坏。因此，提高对每日极端降雨的预测能力是灾害缓解工作的重点。

然而，预测此类事件仍然是一项艰巨挑战。从物理机制上看，极端降雨是由缓慢演变的大尺度天气系统与快速演变的随机中尺度

对流系统（MCS） [3]相互作用而形成的。尽管数值天气预报（NWP）模型在捕捉大尺度环流方面已有所进步 [4], 但由于参数化不确定性，它们往往难以准确预测局地极端事件发生的时间和强度 [5]。

在日时间尺度上，降雨场表现出很强的时间持续性。这种持续性使预测模型的评估变得复杂；仅延续昨日降雨的简单预测，往往也能取得有竞争力的分类技巧评分。此外，标准确定性检验指标（例如均方根误差）往往会因时空位置的微小偏移而对模型施加惩罚——即“双重惩罚”问题 [6]——从而阻碍对高强度事件的预测。

为解决这些局限，我们提出一种新颖的框架：**物理门控潜在常微分方程（PG-LODE）**。借鉴神经常微分方程的建模形式 [7], ，PG-LODE 将大气状态的演化表示为学习得到的潜在空间中的连续时间轨迹。PG-LODE 通过神经常微分方程学习连续时间潜在动力学，但不同于纯数据驱动的建模方法，它引入了一种基于物理的门控机制，利用具有物理意义的大气不稳定性指标主动调节潜在演化速率。该设计使模型在静止条件下保持惯性，而在对流不稳定状态下迅速转换状态，从而使学习到的动力学与已知的季风系统物理行为相一致。

2 相关工作

2.1 数据驱动降水预报

机器学习方法已从简单的统计降尺度 [8] 发展到复杂的深度学习架构。Shi 等人 [9] 提出了 ConvLSTM，它以卷积运算取代全连接转换，同时保留空间拓扑。然而，纯深度学习模型往往难以遵守物理约束，并且由于均方误差最小化，可能会产生模糊的预报 [10]。

2.2 物理信息机器学习

物理信息机器学习（PIML）旨在协调数据驱动的灵活性与物理一致性 [11]。相关方法包括物理信息神经网络（PINNs） [12, 13] ，以及利用全球环流模式（GCM）输出指导深度学习层的混合架构 [14, 15]。

2.3 神经常微分方程与连续动力学

Chen 等 [7] 通过将残差网络重新诠释为常微分方程（ODE）的离散化近似，彻底革新了序列建模。潜在常微分方程等扩展方法 [16] 能够实现连续时间建模。我们的工作在此基础上进一步发展，明确地将导数函数与物理状态变量关联起来。我们的工作在概念上与近期将复杂系统建模为从观测数据中学习得到的潜在动力系统的数据驱动方法相关（例如， [17]）。尽管此类研究主要旨在潜在坐标中发现简约的控制方程，但我们的目标截然不同：我们关注极端降雨事件的预测能力。

3 数据与预处理

3.1 ERA5再分析（预测因子）

大尺度大气预报因子取自ERA5再分析 [18]。我们选取了代表水汽、不稳定性和抬升的变量：

- **热力学：** 整层可降水量（TCWV）和对流有效位能（CAPE）。
- **动力学：** 500百帕处的垂直速度（ω_{500}）和850百帕风（u_{850}， v_{850}）。
- **地面：** 平均地面气压（SP）。

数据覆盖印度次大陆（5°N–35°N， 65°E–95°E）2000–2020年的JJAS季节，分辨率为 $0.25°$ 。

3.2 IMD网格化降雨量（目标）

我们采用 IMD [19] 提供的高分辨率（$0.25°$）日尺度格点降雨数据集。为处理重-˜尾分布，我们应用对数变换 $Y = \log(Y + 1)$。

3.3 极端事件定义与分块

“极端事件”在局地定义为降雨量超过当地JJAS气候态的第95百分位数。为缓解双重惩罚问题 [20], 我们采用 **基于分块的策略**，将区域划分为 32×32 像素块。

4 方法

4.1 问题表述

令 $\mathcal{X}_t$ 表示第 t 天的大气预测因子张量， $\mathcal{Y}_{t+\tau}$ 表示目标降雨。我们寻求一个映射F_θ：$\{\mathcal{X}_{t-T}, \ldots, \mathcal{X}_t\} \to P(\mathcal{Y}_{t+\tau})$。

4.2 基线：ConvLSTM

ConvLSTM 通过如下形式的离散时间循环更新来模拟时间演化

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathcal{F}_\theta(\mathbf{h}_t, \mathbf{x}_t), \tag{1}$$

其中，隐藏状态 $\mathbf{h}_t$ 以固定的时间间隔推进。尽管这种形式适用于一般的时空预测，但它隐含地假设所有状态下的时间动力学都是均匀的。因此，快速的对流增强必须压缩到单个更新步中，限制了模型表征对流极端事件高度间歇性和突发性特征的能力。

4.3 提出的方法：物理门控潜在常微分方程（PG-LODE）

PG-LODE 框架假设潜在大气状态 $\mathbf{z}(t)$ 随连续时间演化，并遵循神经常微分方程。其演化由以下方程支配

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = f_\theta(\mathbf{z}(t), t) \odot \mathcal{G}(\mathbf{X}_{phys}), \tag{2}$$

其中， f_θ 用于参数化内在潜在动力学，而 $\mathcal{G}(\mathbf{X}_{phys})$则作为基于物理的演变速率调制项。这种形式使潜在状态能够随时间平滑演化，同时根据当前的物理状态调整其变化速率。

门控函数 $\mathcal{G}$ 旨在表征大气不稳定性，其构造基于具有物理意义的预测因子，包括对流有效位能（CAPE）和中对流层垂直速度（ω_{500}）：

$$\mathcal{G}(\mathbf{X}_{phys}) = 1 + \sigma(\text{Conv}_{1\times1}(\text{CAPE}, \omega_{500})) \cdot \beta, \tag{3}$$

其中， σ 表示 Sigmoid 激活， β 是可学习缩放参数。乘法形式确保 $\mathcal{G}$调节的是潜在演化的速率，而非潜在状态本身。在弱不稳定条件下， $\mathcal{G}$ 接近于 1，呈现近惯性动力学；而较强的不稳定性会激活门控（$\mathcal{G} > 1$），加快潜在演化，以反映与对流初生相关的快速转变。

图 1展示了该架构的示意图。为突出这一设计的结构性影响，图 2 对比了 ConvLSTM 基线的固定步长离散更新与 PG-LODE 连续的物理调制潜在动力学。 物理门不会强制实施守恒定律，也不会显式解析对流过程；它会根据大尺度不稳定性指标调节潜在动力学。

4.4 极端加权损失函数

为应对类别不平衡，我们采用加权损失函数：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} w_{i,j} \left(y_{i,j} - \hat{y}_{i,j}\right)^2, \quad w_{i,j} = \begin{cases} 1 & y_{i,j} < P_{95} \\ \lambda & y_{i,j} \geq P_{95} \end{cases} \tag{4}$$

我们设置 $\lambda = 5$，以大幅惩罚对极端情况的低估。

5 评估框架

我们采用双层验证策略：

1. **像素级诊断指标：** 命中率、FAR、临界成功指数（原生分辨率）。2. **事件级（基于网格）验证：** 若模型概率 > 0.5 且观测最大值 $> P_{95}$，则该网格块为“命中”。

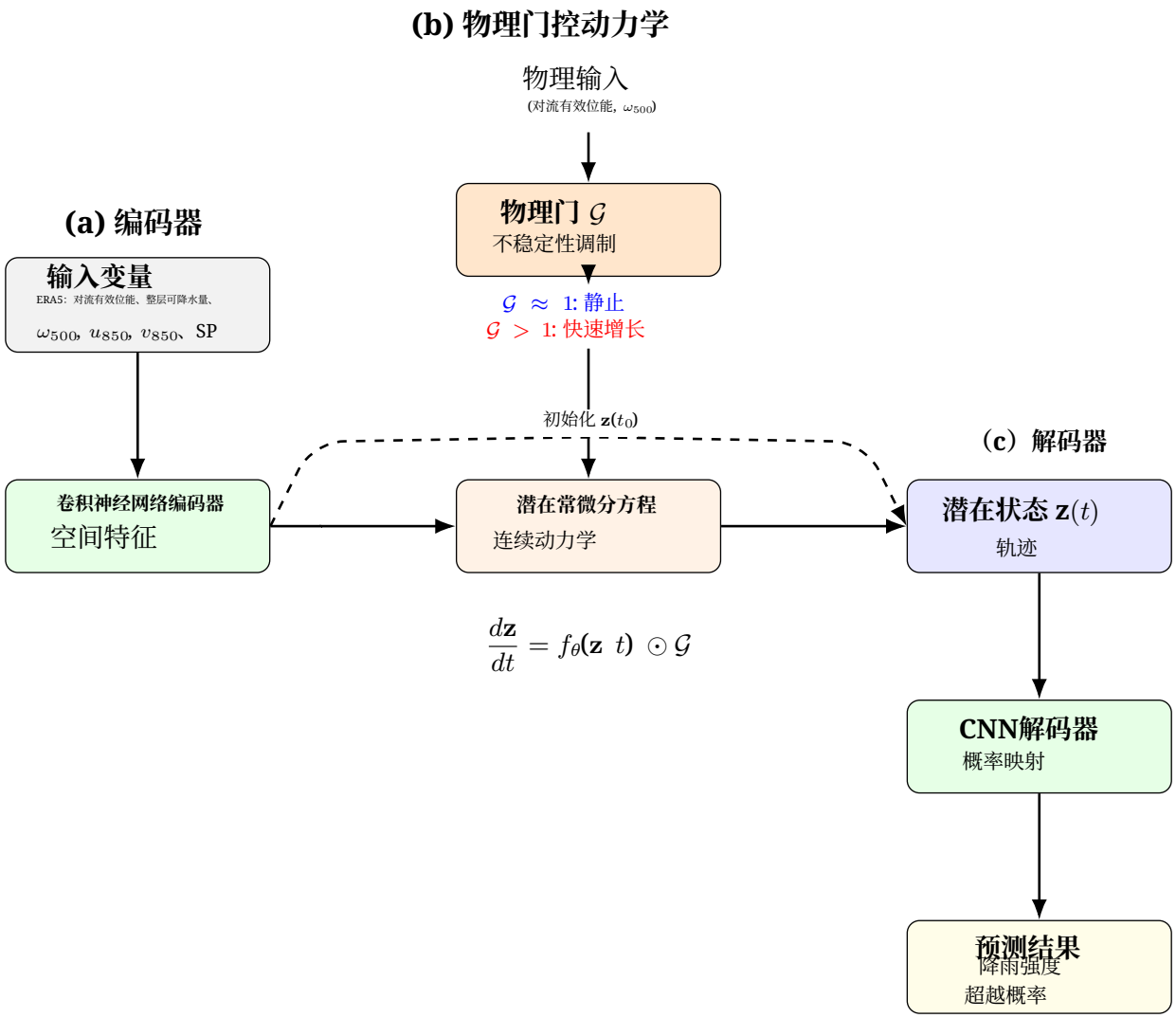


图 1：**PG-LODE 的紧凑架构**。 (a) 编码器压缩 ERA5 输入。(b) 物理门控常微分方程演化潜在状态，其中 $\mathcal{G}$ 根据不稳定状态（静止与快速增长）调节动力学。(c) 解码器将轨迹映射为降雨概率。

5.1 分类验证指标

为评估极端降雨预测技巧，我们采用由预测事件与观测事件的列联表导出的标准分类验证指标。对于给定阈值（此处为局地第95百分位数），每次预报被分为命中 (H)、漏报(M)、虚警 (F)和正确阴性 (C)。

该 概率　　探测率 (PoD) 衡量成功预测的观测事件所占比例　　：

$$\mathrm{PoD} = \frac{H}{H+M}. \tag{5}$$

空报率（FAR）用于量化预测事件中未实际发生的比例：

$$\mathrm{FAR} = \frac{F}{H+F}. \tag{6}$$

临界成功指数 （临界成功指数），也称为威胁评分，通过同时惩罚漏报事件和虚警来概括整体事件预测技巧：

$$\mathrm{CSI} = \frac{H}{H+M+F}. \tag{7}$$

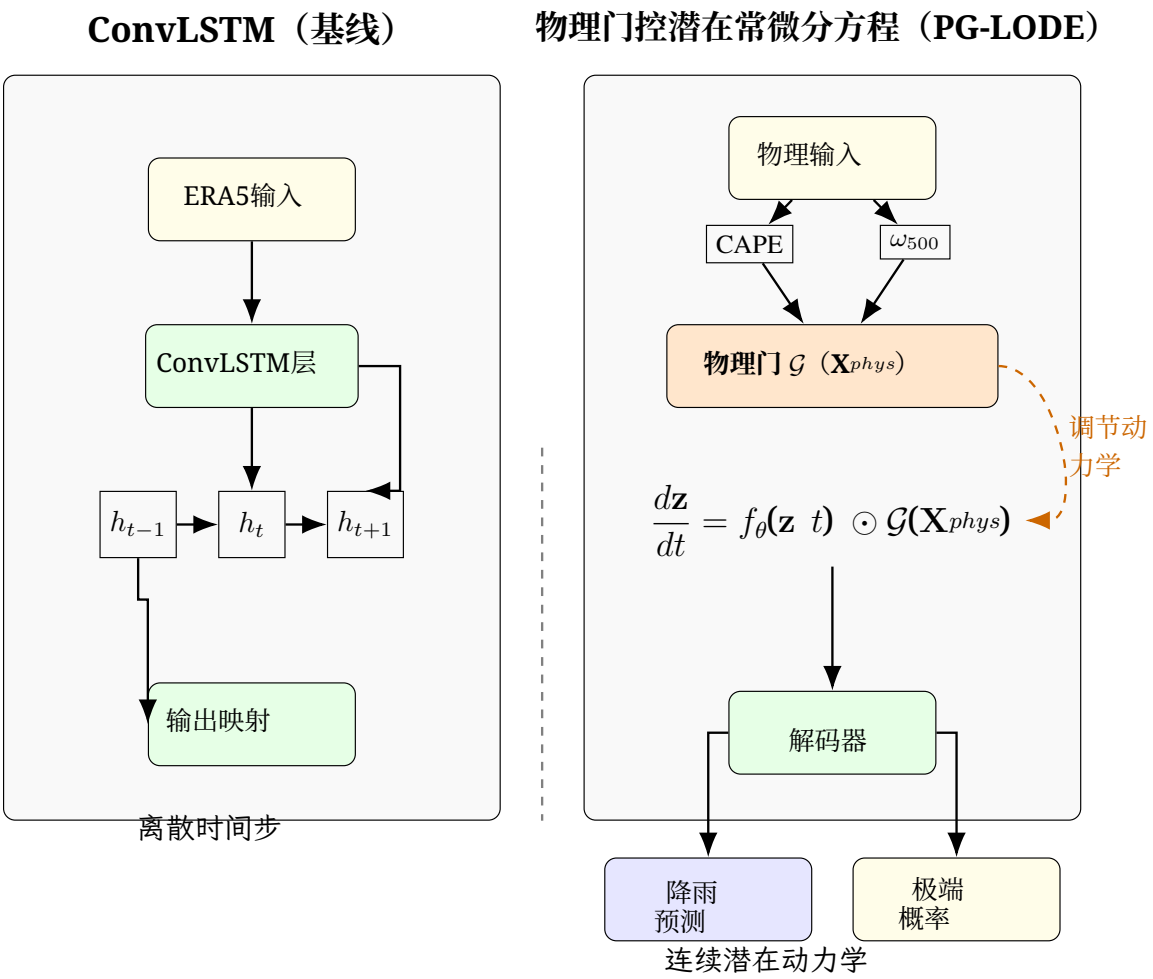


图 2：**模型架构比较。左：**ConvLSTM 使用固定的离散时间步演化隐藏状态，将所有时间转移一视同仁。**右：**PG-LODE 将大气演变建模为连续潜在过程，其中基于物理的门控机制根据热力学不稳定性调节状态演化速率。

这些指标仅关注事件发生，并排除正确阴性，因此特别适合评估极端降雨等罕见事件。对于基于瓦片的评估，命中、漏报和虚警通过对每个空间瓦片内的超阈值事件进行汇总来计算，同时保留相同的指标定义。

6 结果

6.1 确定性评估与持续性

表 1：逐像素确定性验证。请注意，持续性在临界成功指数方面占据主导地位。

模型	命中率与虚警率		CSI
持续性	0.42	0.45	0.31
ConvLSTM	0.21	**0.38**	0.18
PG-LODE	0.39	0.51	0.26

表1 总结了逐像素性能。持续性基线在逐像素临界成功指数上的优势，凸显了在季风区进行确定性逐日降雨预测的一项根本局限。在这些时间尺度上，

降雨场表现出强烈的时间记忆，这与缓慢演变的天气尺度系统有关，例如季风低压和低压系统。因此，持续性预报能够有效利用这种大尺度记忆，在严格的逐点验证中往往优于数据驱动模型。

自适应 ConvLSTM 呈现出保守偏差，其特点是空报率较低，但探测概率显著降低。这种表现符合使用逐点损失函数训练的循环架构的特征：为尽量减小总体误差，这类架构往往会回归至气候平均值，并抑制陡峭梯度。因此，极端降雨信号通常会被低估，尽管空报统计看似良好，漏报仍频繁发生。

与 ConvLSTM 相比，PG-LODE 模型通过允许受大气不稳定性调制的连续时间潜在演化，提升了对极端降雨的探测能力。然而，其像素级 CSI 仍低于持续性基准，这反映了对流极端事件精确空间定位所固有的不确定性。当 PG-LODE 预测的结构随动力学演化，却在空间或时间上略有偏移时，标准逐像素指标会通过众所周知的双重惩罚效应惩罚这些预报，同时计入漏报和虚警。这表明，在日尺度预报时效上，像素级确定性主要由大尺度持续性决定，而非对对流初生的准确预测。

尽管 IMD 网格化降雨产品具有相对精细的空间分辨率，但本研究中的预测模型以固定的 32×32 空间瓦片为处理单元，这些瓦片代表区域大气状态，而非彼此独立的格点实现。因此，逐像素验证是在比模型有效预测分辨率更精细的空间尺度上评估预报。在这一尺度上，预测的对流特征即使出现细微的空间或时间偏移——且这些偏移完全处于合理的气象不确定性范围内——也会被同时计为漏报和虚警。因此，像素级指标主要用于诊断定位精度，而非更贴合模型有效预测尺度和预报技巧预期灾害探测应用场景的指标。这促使我们采用基于网格块的事件级验证，使评估尺度与模型设计以及极端降雨事件固有的可预测性相一致。

6.2 事件级（基于网格块）概率探测

表 2：事件级（基于网格块）的极端事件探测技巧。PG-LODE 展现出卓越的探测能力。

模型	TILE-POD	TILE-FAR	TILE-CSI
持续性	0.650	0.310	0.495
ConvLSTM	0.270	**0.019**	0.269
PG-LODE	**0.996**	0.215	**0.783**

物理信息方法的价值体现在事件级验证中（表2）。在事件级、基于网格块的验证中，物理信息方法的价值显而易见（表2）。这种验证旨在评估模型能否成功识别存在极端降雨风险的区域，而非精确定位单个网格点的最大值。在此框架下，如果某个网格块内至少有一个网格单元超过局地第95百分位阈值，则将该网格块归类为极端事件；当模型为该网格块分配的超越概率大于0.5时，则认为预测命中。

在这项评估中，ConvLSTM表现得极为保守，以较低的空报率（TILE-FAR = 0.019）为代价，取得了较差的探测概率（TILE-POD = 0.27）。这表明该模型很少预测极端事件，因此会漏报大多数危险情况，限制了其在风险敏感型应用中的实用价值。

相比之下，在所采用的基于网格块的验证框架下，PG-LODE达到了很高的事件级敏感度，表明其能够有效识别有利于极端降雨的大气条件。尽管敏感度的提升伴随着中等程度的空报率（TILE-FAR = 0.215），但其临界成功指数（TILE-CSI = 0.783）显著高于ConvLSTM和持续性基线。这种权衡体现了模型有意从保守的逐点准确率转向可靠的事件检测，更适用于极端降雨预报和预警系统。

PG-LODE 在事件级别的优异表现表明，物理门控连续时间潜在动力学能够有效地将大尺度环境可预测性转化为对流风险的概率评估，即使降雨的精确空间分布仍存在不确定性。

6.3 潜在动力学的解释

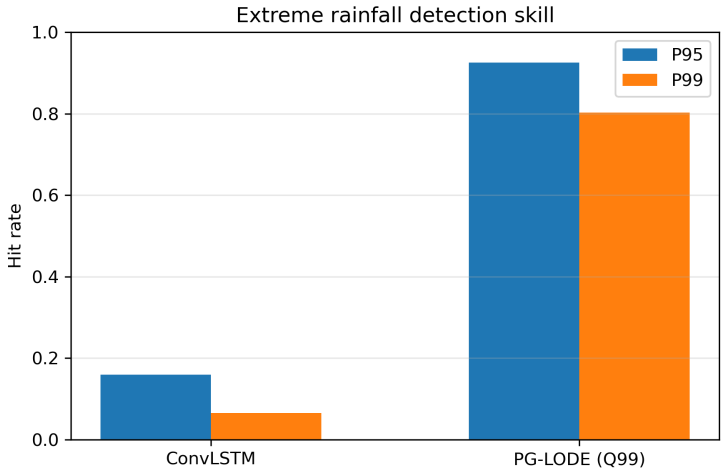


图3：**极端事件检测能力**。 对超过第95（P95）和第99（P99）百分位数的极端降雨事件的命中率（探测概率）进行比较。ConvLSTM基线（左图）表现出严重的保守性（检测率为$< 20\%$），而PG-LODE（右图）捕捉到了大多数极端事件（$> 80\%$），验证了物理门控动力学的有效性。

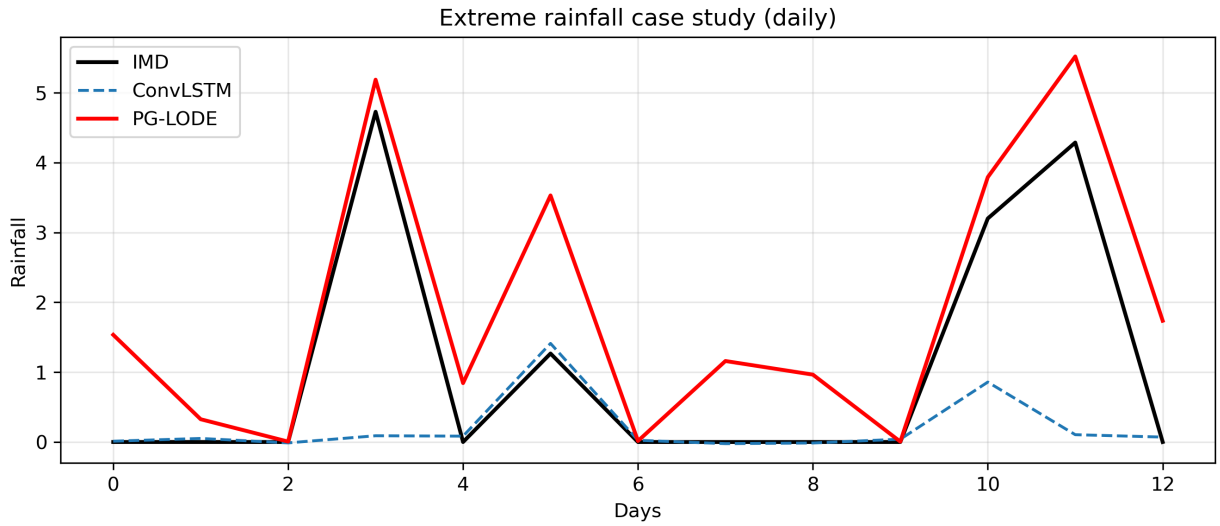


图4：**每日降雨案例研究**。 一组具有代表性的12天时间序列（2000年6月4日），展示了31×31网格块上的观测降雨量（IMD，黑色）、ConvLSTM预报（蓝色虚线）和PG-LODE预报（红色）。请注意，在降雨峰值事件期间（第3天和第11天），ConvLSTM未能偏离气候平均值，而PG-LODE则在物理门激活的驱动下，成功捕捉到了降雨的快速增强。

与 ConvLSTM 相比，PG-LODE 在事件级性能上的优势，可以从两种模型如何表示对流不稳定条件下的时间演化这一角度来理解。对流极端事件的特点是，大尺度强迫会持续较长时间处于准静止状态，随后发生与对流触发和组织有关的快速非线性转变。这类动力学本质上具有间歇性，且与固定步长的离散时间更新方案难以匹配。

在 ConvLSTM 中，无论底层物理状态如何变化，隐藏状态都会以固定的时间间隔更新。因此，快速的对流增强必须在单次离散更新中表示，这迫使网络

要么夸大平静期的变化，要么抑制剧烈转变，以在逐点损失函数下保持稳定。这会导致模型表现得较为保守，并系统性地低估极端事件。

相比之下，PG-LODE 在连续时间中对潜在演化进行建模，并引入一种基于物理的门控机制，根据大气不稳定性明确调节状态演化速率。在静止条件下，当对流有效位能较低且大尺度上升运动较弱时，门控因子接近于 *1*，潜在动力学因此缓慢演化，近乎呈惯性状态。当不稳定性增强时，较高的对流有效位能和增强的大尺度上升运动会激活门控机制（$\mathcal{G} > 1$），从而有效加快潜在动力学的演化。可以将其形象地理解为潜在空间中的有效时间分辨率提高了。

重要的是，这种加速并不会对流的确定性发生位置施加约束。相反，它增强了模型对有利于极端降雨的环境的敏感度，使 PG-LODE 能够将大尺度环境可预测性转化为概率事件检测。这一机制解释了为何 PG-LODE 在显著提升事件级检测能力的同时，像素级定位能力仍然有限，这与对流实现固有的随机性相符。这一设想在图5中以可视化方式呈现，图中显示在高不稳定性条件下，潜在轨迹会迅速分化。

图2 比较了使用每日区域最大降雨量、在第95百分位数（P95）和第99百分位数（P99）阈值下的极端降雨检测能力。ConvLSTM模型的检测能力非常低，由于时间平滑和均值偏置的潜在表征，只能捕获极少部分极端事件。相比之下，所提出的物理门控潜在常微分方程（PG-LODE）实现了显著更高的命中率，检测出超过90%的P95事件和约80%的P99事件。这一改进表明，对依赖天气状态的潜在动力学进行显式建模，并采用尾部聚焦学习，对于可靠预测罕见高影响降雨极端事件至关重要。

图4 展示了一个局部时间序列案例研究，研究的是在2000年6月4日于印度 31 ×31 网格块上观测到的极端降雨事件。该事件从印度季风季（6月至9月）2000—2020年IMD日降雨数据集中识别得出，对应于某个特定网格位置的降雨量首次超过第99百分位阈值的时刻。图中展示了以2000年6月4日为中心、跨度为 ±10天的时间窗口，并对比了IMD观测数据、ConvLSTM预测和PG-LODE预测。ConvLSTM大幅低估了极端降雨峰值的强度，响应也较为平缓；而在这一代表性案例中，PG-LODE 模型捕捉到了降雨发生的时间和强度。具体而言，PG-LODE重现了2000年6月4日的尖锐降雨峰值及其后的变化，凸显了与纯数据驱动方法相比，物理引导调制在提升模型对罕见、高影响降水事件的敏感性方面所发挥的作用。

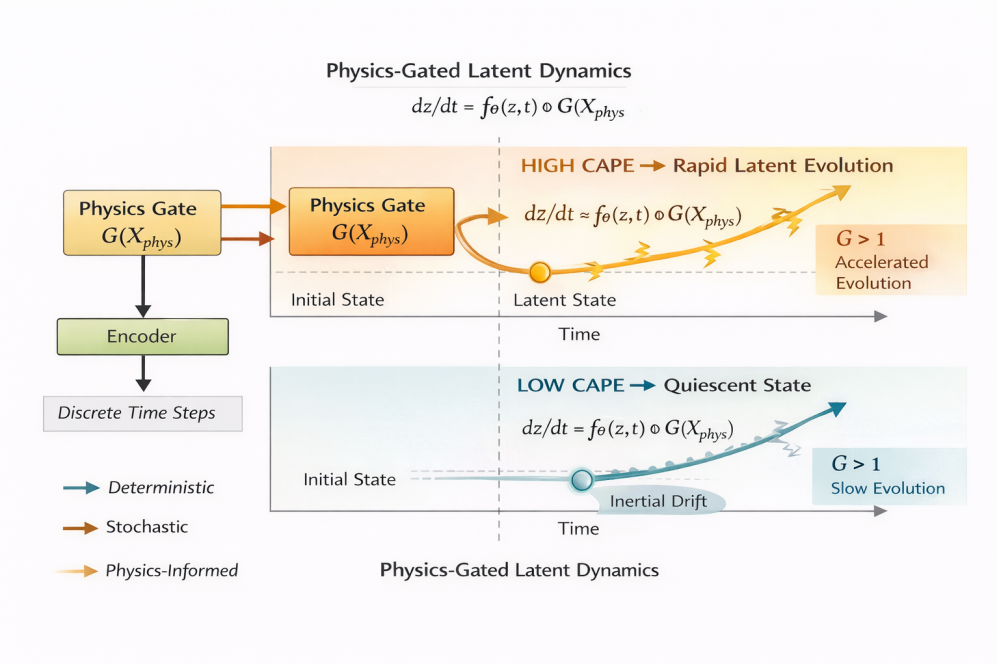


图5：物理门控潜在动力学的直观解释

化，相较于 高不稳定性（橙色轨迹）加速了状态演静息状态（蓝色轨迹）。

7 本研究的局限性

PG-LODE 框架采用物理引导，而非物理约束，既不显式解析对流过程，也不强制遵守物理守恒定律，因此限制了对确定性网格点位置的定位能力。由于计算资源有限，实验采用较小规模的模型；为确保公平比较，ConvLSTM和PG-LODE均采用规模相近的较小卷积架构和潜在维度，因此两者的差异主要反映了时间建模方法的不同。事件级、基于网格块的验证侧重于灾害检测，而非空间精度；概率校准和更广泛的泛化能力则留待未来研究。

8 结论

本研究表明，受强烈的时间持续性和固有的对流随机性影响，对印度季风极端事件进行确定性日尺度预测存在根本性限制。在这些限制下，物理门控潜在动力学（PG-LODE）展现出显著价值：它将问题重新界定为概率事件检测，而非精确的空间定位。PG-LODE 利用具有物理意义的大气不稳定性指标，显式调节连续时间潜在演化，从而有效地将大尺度环境可预测性转化为具有良好技巧的概率指标，指示极端降雨风险升高。由此获得的事件级技巧（TILE-CSI ≈ 0.78）显著优于传统循环架构，凸显了物理感知时间表征对于面向灾害的季风预报的重要性。

致谢

作者衷心感谢印度气象局（IMD）提供本研究所用的高分辨率网格化日降雨数据集。我们还感谢欧洲中期天气预报中心（ECMWF）通过哥白尼气候数据存储库公开 ERA5 再分析数据。获取这些数据集对于开展本研究所述分析至关重要。

代码与数据可用性

实现物理门控潜在常微分方程（PG-LODE）模型及本文所述实验的代码库已公开发布，地址如下：
https://github.com/AGN000/PG_LODE_Arxiv_论文_极端_降_雨。

参考文献

[1] B. N. Goswami、V. Venugopal、D. Sengupta、M. S. Madhusoodanan 和 Prince K. Xavier。变暖环境下印度极端降雨事件呈上升趋势。《科学》，314(5804):1442–1445，2006。[2] Mathew Koll Roxy、Kapoor Ritika、Pascal Terray、Raghu Murtugudde、Karumuri Ashok 和 B. N. Goswami。印度洋快速变暖及海陆热力梯度减弱导致印度次大陆干旱化。《自然·通讯》，6(1):1–10，2015。[3] D. R. Pattanaik 和 M. Rajeevan。西南季风期间印度极端降雨事件的变率。《气象应用》，17(1):88–104，2010。[4] Peter Bauer、Alan Thorpe 和 Gilbert Brunet。数值天气预报的静默革命。《自然》，525(7567):47–55，2015。[5] Tim Palmer。随机天气与气候模型。《自然综述：物理学》，1(7):463–471，2019。[6] Elizabeth E Ebert。高分辨率网格预报的模糊验证：综述与建议框架。《气象应用》，15(1):51–64，2008。[7] Ricky TQ Chen、Yulia Rubanova、Jesse Bettencourt 和 David K Duvenaud。神经常微分方程。载于《神经信息处理系统进展》，第31卷，2018。[8] Shivam Tripathi、V. V. Srinivas 和 Ravi S. Nanjundiah。气候变化情景下的降水降尺度：一种支持向量机方法。《水文学杂志》，330(3-4):621–640，2006。[9] Xingjian Shi、Zhourong Chen、Hao Wang、Dit-Yan Yeung、Wai-Kin Wong 和 Wang-chun Woo。卷积长短期记忆网络：一种用于降水临近预报的机器学习方法。载于《神经信息处理系统进展》，第28卷，第802–810页，2015。

[10] Suman Ravuri、Karel Lenc、Matthew Willson、Dmitry Kangin、Remi Lam、Piotr Mirowski、Megan Fitzsimons、Maria Athanassiadou、Sheleem Kashem、Sam Madge 等。利用雷达深度生成模型进行高技巧降水临近预报。《自然》，597(7878):672–677，2021。[11] Karthik Kashinath、Mustafa Mustafa、Adrian Albert、Jean-Luc Wu、C Jiang、Soheil Esmaeilzadeh、Kamyar Azizzadenesheli、R Wang、Ashesh Chattopadhyay、A Singh 等。物理信息机器学习：天气与气候建模案例研究。《英国皇家学会哲学汇刊*A*辑》，379(2194):20200093，2021。[12] Maziar Raissi、Paris Perdikaris 和 George E Karniadakis。物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题和逆问题的深度学习框架。《计算物理学杂志》，378:686–707，2019。[13] Arun Govind Neelan、G Sai Krishna 和 Vinoth Paramanantham。物理信息神经网络与高阶高分辨率方法在解析间断和激波中的应用：一项综合研究。《计算科学杂志》，83:102466，2024。[14] Stephan Rasp、Michael S Pritchard 和 Pierre Gentine。利用深度学习表示气候模型中的子网格过程。《美国国家科学院院刊》，115(39):9674–9679，2018。[15] Adam Subel、Yifei Guan、Ashesh Chattopadhyay 和 Pedram Hassanzadeh。阐释数据驱动湍流建模中迁移学习的物理机制。《*PNAS Nexus*》，2(3):pgad015，2023。[16] Yulia Rubanova、Ricky TQ Chen 和 David K Duvenaud。用于不规则采样时间序列的潜在常微分方程。载于《神经信息处理系统进展》，第32卷，2019。[17] Kathleen Champion、Bethany Lusch、J Nathan Kutz 和 Steven L Brunton。数据驱动的坐标与控制方程发现。《美国国家科学院院刊》，116(45):22445–22451，2019。[18] Hans Hersbach、Bill Bell、Paul Berrisford、Shoji Hirahara、András Horányi、Joaquín Muñoz-Sabater、Julien Nicolas、Carole Peubey、Raluca Radu、Dinand Schepers 等。ERA5全球再分析。《英国皇家气象学会季刊》，146(730):1999–2049，2020。[19] D. S. Pai、Latha Sridhar、M. Rajeevan、O. P. Sreejith、N. S. Satbhai 和 B. Mukhopadhyay。印度高空间分辨率（0.25×0.25）、长时段（1901-2010）逐日网格化降雨数据集的开发。《季风》，65(1):1–18，2014。[20] Nigel M Roberts 和 Humphrey W Lean。对对流事件高分辨率预报的累计降雨量进行尺度选择性验证。《月度天气评论》，136(1):78–97，2008。