arXiv:2602.03170v1 [math.AG] 3 Feb 2026

阿贝尔曲面的精化不变量：介于多项式性与模性之间

THOMAS BLOMME 和 GURVAN MÉVEL

摘要。由 Block and Göttsche 引入的环簇曲面热带精化不变量，是通过对热带曲线进行计数并赋予其洛朗多项式重数而得到的。随后，Brugallé 和 Jaramillo-Puentes 展示了该洛朗多项式的系数关于曲线次数的多项式性。作者给出了亏格较小时的显式公式，其中涉及拟模形式。

受环簇曲面情形的启发，第一作者定义了阿贝尔曲面的精化不变量，并推广了多项式性结果。本文进一步研究阿贝尔曲面上的这一正则性，并给出涉及拟模形式的显式公式。这与环簇曲面情形中亏格较小时的结果相呼应。

目录

1. 引言 1 1.1. 背景 1 1.2. 结果与论文结构 2**2. 阿贝尔曲面精化不变量概述** 3 2.1. 阿贝尔曲面的热带精化不变量 3 2.2. 与约化 Gromov-Witten 不变量的联系 5**3. 多项式性性质与渐近性** 6 3.1. 多项式性 6 3.2. 从洛朗多项式到多项式 7 3.3. 渐近性 7 3.4. 结果陈述 8**4. 定理 3.4 关于渐近不变量正则性性质的证明** 8 4.1. 前几项的计算 8 4.2. 一般结果 11**5. 固定余次数下级数的前几项系数** 15**参考文献** 17

1. 引言

1.1. **设定**。

1.1.1. 环簇曲面情形。 自 Mikhalkin 对应定理 [Mik05], 提出以来，热带曲线的计数一直是枚举几何中的有效工具。可以为热带曲线赋予整数重数，从而计算 Gromov-Witten（分别为 Welschinger）不变量；这些不变量是复不变量（分别为实不变量），通过计数经过给定点配置的指定亏格和次数的复曲线（分别为实曲线）而得到。

Block and Göttsche [BG16a, BG16b], 引入的热带精细不变量是洛朗多项式（以 q 为变量），其计算方式是对带有洛朗多项式重数的热带曲线进行计数。这些不变量插值了环簇曲面上曲线的复枚举与实枚举：在 $q=1$ 处取值可恢复 Gromov-Witten 不变量（或塞韦里次数），而代入 $q=-1$ 则得到（热带）Welschinger 不变量。Itenberg 和 Mikhalkin [IM13] 证明了采用 Block-Göttsche 重数的热带枚举具有不变性。

给定一个固定的环面曲面 X 和一个非负整数 δ，Di Francesco-Itzykson 在 $X=\mathbb{P}^2$ [DFI95] 的情形下提出了猜想，Göttsche [Göt98], 则将其推广：在曲面 X 中，具有 δ 个节点且经过适当数量点的曲线数（即 Severi 次数），会随着线性系统（曲线的“次数”）变化而呈多项式变化。Tzeng [Tze10] 首先证明了这一猜想。

根据伴随公式，亏格和节点数具有对偶作用。然而，若固定亏格，多项式性便不再成立。受 Göttsche 猜想的启发，Brugallé and Jaramillo-Puentes 研究了精化不变量中固定 余次数 对应的系数，同时固定亏格并改变线性系统。令人惊讶的是，他们发现了多项式行为 [BJP22]。第二作者对属 0 的情形进行了更深入的研究，并为精细不变量给出了一些普适公式 [Mév26]：这些多项式是常数，由分拆数函数的某个幂给出。随后，作者将这一结果推广到属 1 的情形 [BM25], , 此时系数不再是常数，显示出首个艾森斯坦级数的出现，暗示系数与拟模形式之间存在相互作用。

作者猜想，对于任意亏格，热带精化不变量的次数都有上界，而给出这些多项式的系数由拟模形式给出 [BM25，猜想 1.1]。关于固定余次数系数的多项式性结果，也被改写为相应生成级数（称为渐近精细不变量）的渐近陈述，见第 3.2 节。这三篇论文 [BJP22、Mév26、BM25]都采用了地板图算法（该算法由 [BM07，BM08], 提出）或其衍生的组合方法。

1.1.2. 阿贝尔情形。 尽管热带曲线最初是在环簇曲面的情形下发展起来的，如今也已扩展到其他情形，尤其是借助 Nishinou 的对应定理 [Nis20]处理阿贝尔曲面的情形。第一作者近期在这一背景下引入了热带精化不变量 [Blo24，Blo23]。他开发了一种珍珠图算法，这是一种类似于地板图算法的组合方法，用于处理阿贝尔曲面中的计算，并建立了一些多项式性结果 [Blo25a], , 见下文定理 3.1。他还给出了本原类的显式公式。关于阿贝尔曲面精化不变量的历史，详见第 2 节。

本文旨在进一步研究 [Blo25a], 中所得公式的正则性，并凸显拟模形式的出现。我们希望我们的结果能够支持 [BM25，猜想 1.1]。

1.2. **本文的结果与结构**。 第 2 节回顾阿贝尔曲面精细不变量的相关既有研究。第 3 节回顾[Blo25a] 的多项式性结果，并引入渐近精细不变量 $AR_g^\star(n,\ x)$，其中 g 为亏格， n为我们研究的曲线类的自交数， x 为形式变量。这个真正的 多项式与热带精化不变量（一个洛朗 多项式）之间的关系是通过对系数作平移得到的，

更精确的说明见第 3.2 节和第 3.3 节。随后，我们陈述如下主要结果。

定理 3.4。 对于固定的亏格 g，存在在0 处消失的拟模形式 $f_1,\dots,f_{g-3}$，使得

$$AR_g^\star(n,x)=\binom{n}{g-1}+\sum_{k=1}^{g-3} f_k(x)n^k \in \mathbb{Q}[\![x]\!][n].$$

该定理应作如下理解。曲线类 β 的自交数为 $2n$，而关于 n 的多项式依赖是关于 β 的多项式依赖的一个特例。精细不变量的余次数 i 系数由多项式 $Q_{g,i}(n)$ 给出，其中 n 足够大。给出该系数的多项式 $Q_{g,i}(n)$ 是 $AR_g^\star(n,x)$ 的 x^i-系数。此外，将 $Q_{g,i}(n)$ 的 n^l 系数视为 i 的函数时，它们是某个拟模形式的系数。

第4节致力于证明该定理。由于证明相当技术性，我们先处理亏格 g 较小的情形。无论是在具体例子中还是在一般情形下，证明都包括对 [Blo25a] 的公式进行仔细的组合分析。拟模形式出现在引理 4.1 中。

最后，在第 5 节中，我们计算了以亏格为参数的生成级数的前几项系数。虽然我们尚不清楚其中是否显现出某种规律，但仍列出这些计算结果，以供他人进一步研究。

致谢。 本研究始于 GM 对纳沙泰尔的一次访问。我们感谢纳沙泰尔大学提供了优良的工作环境。

2. 阿贝尔曲面精化不变量概要

理解阿贝尔曲面精化不变量有两种途径：一种通过热带图像 [Blo24, Blo23, Blo25a], ，另一种通过（约化）格罗莫夫-威滕理论[BOPY18]。我们在此简要回顾这两种途径，并给出证明本文主要结果所用的显式公式。

2.1. **阿贝尔曲面的热带精细不变量**。

2.1.1. 热带环面与热带曲线。关于热带阿贝尔簇中的热带曲线的更全面介绍，请参阅 [Blo24] 或 [Blo25b] 。

定义 2.1。 热带环面 $\mathbb{T}A$ 是一个商空间 $\mathbb{R}^2/\Lambda$，其中 $\Lambda\simeq\mathbb{Z}^2$ 是一个秩2格。我们将包含映射记为 $S\colon\ \Lambda\hookrightarrow\mathbb{R}^2$。该商空间具有由 $\mathbb{Z}^2\subset\mathbb{R}^2$给出的自然整结构。

D定义 2.2。 在 $\mathbb{T}A$ 中的参数化热带曲线是一个映射 $h\colon\ \Gamma\to\mathbb{T}A$，其中
(1) Γ 是一个度量图；(2) h 在 Γ的各条边上是具有整数斜率的仿射映射；(3) h 满足平衡条件：每个顶点处所有出射斜率之和为 0。

参数化热带曲线的亏格 g 是底层图的第一贝蒂数。其最大公约数 δ 是各边斜率的整数长度的最大公约数。

设 $h\colon\ \Gamma\to\mathbb{T}A$ 是一条参数化热带曲线。若 e 是 Γ 的一条边，并选定一个定向，且 u_e 是沿相应定向的斜率，使得 $u_e e$ 不依赖于所选定向，则我们可以考虑 $\mathbb{T}A$ 中如下的 1-链，其系数取自 $\mathbb{Z}^2$:

$$[\Gamma]=\sum_e u_e e\in C_1(\mathbb{T}A,\mathbb{Z}^2).$$

平衡条件意味着它的边界为 0，因此这条 1-链实际上是一个 1-闭链。 $[\Gamma]$ 所实现的同调类称为热带曲线的 次数 。它记作 B，属于 $H_1(\mathbb{T}A, \mathbb{Z}^2) \simeq \Lambda \otimes \mathbb{Z}^2$。特别地， $B \in \Lambda \otimes \mathbb{Z}^2$ 也可以看作一个线性映射

$$B\colon \Lambda^* \to \mathbb{Z}^2.$$

对于 S 的一般选择： $\Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ （即实矩阵的一般选择）， $\mathbb{T}A$ 中通常不存在热带曲线。如果存在这样的选择，且我们将其次数记为 B，并假设 $\det(B) \neq 0$，则该热带环面称为热带阿贝尔簇，而 B 是极化。根据 [Blo25b，引理 2.9], ，我们有如下结论。

命题 2.3. 设 $\mathbb{T}A$ 是由 S： $\Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ 给出的热带环面。那么， B： $\Lambda^* \to \mathbb{Z}^2$ 是极化，当且仅当 $BS^\intercal$： $(\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}^2$ 诱导出对称正定双线性型。

前一个命题中的条件可以看作是对 S 选择的约束，即选择一个实矩阵，并且现在还需满足对称性条件。例如，如果 B 是单位矩阵，则 S 应选为对称正定矩阵。我们用 $\mathscr{B}$ 表示可能的极化的集合，也就是具有正行列式的整数矩阵的集合。

2.1.2. 计数问题与不变量。 现在，我们通过对满足适当计数问题的热带曲线进行计数来定义精化不变量。令 $g \geqslant 2$ 和 $B \in \mathscr{B}$ 固定，并令 $\mathbb{T}A$ 为带有极化 B 的一般热带阿贝尔曲面。 [Blo24] 中证明了，对于 $\mathbb{T}A$ 内的一般 g 点集 $\mathcal{P}$，存在有限条经过 $\mathcal{P}$的热带曲线，且这些曲线均为三价热带曲线。

定义 2.4 ([Blo25a])。 令 $h\colon \Gamma \to \mathbb{T}A$ 为一条最大公因数为 δ 的三价热带曲线。我们将其精细重数定义为

$$M_\Gamma = \sum_{k|\delta} \varphi(k) k^{2g-2} \prod_V (q^{m_V/2k} - q^{-m_V/2k}),$$

其中， $\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 是欧拉函数，乘积遍历 Γ 的所有顶点，而 m_V 表示该顶点的 Mikhalkin 重数（三条出射斜率中任意两条所构成的行列式的绝对值）。该重数是变量 q 的一个（对称）洛朗多项式。

现在我们对计数问题的解及其精细重数进行计数，定义

$$BG_{g,B}(\mathbb{T}A, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{h\colon \Gamma \to \mathbb{T}A \\ h(\Gamma) \supset \mathcal{P}}} M_\Gamma.$$

根据 [Blo24，第 4.12,4.14], $BG_{g,B}(\mathbb{T}A, \mathcal{P})$ 定理，只要 $\mathcal{P}$ 是一般的，所得结果就不依赖于其选择；同样，只要 $\mathbb{T}A$ 在极化由 B 给出的热带环面中也是一般的，所得结果也不依赖于其选择。由此得到 Block-Göttsche精细不变量 $BG_{g,B}(q)$。

根据变形不变性，$BG_{g,\ B}(q)$ 仅取决于 B 的等价类，这意味着我们可以在 B 的左右两侧分别乘以整可逆矩阵。换言之，$BG_{g,\ B}(q)$ 仅通过以下两个量取决于 B： 其可整除性（其系数的最大公约数）以及其自交数 $2\det(B)$。

2.1.3. 显式计算。以下两个结果为该计算提供了依据：

- 多重覆盖公式 [Blo25a，定理 4.10(iv)] 将计算归结为本原类（最大公约数为 1 的类）：

$$BG_{g,B}(q) = \sum_{k|B} k^{2g-1} BG_{g,\widetilde{B/k}}(q^k),$$

其中 B/k 是一个本原极化，满足 $\det(B/k) = \det(B/k)$；

- 对 $\widetilde{\ }$ 本原类使用极化 $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right)$ 进行显式计算，得到

$$BG_{g,n}(q) = g \sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n} P_{a_1} \cdots P_{a_{g-1}}, \quad \text{where } P_a(q) = \sum_{k|a} \frac{a}{k}(q^k - 2 + q^{-k}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}].$$

特别地，$BG_{g,n}(q)$ 的次数是 n，而 $BG_{g,B}(q)$ 的次数是 $\det(B)$。

2.1.4. 固定线性系中的曲线。此外，还可以统计经过一组由 $g-2$ 个点构成的配置、属于固定线性系的亏格为 g 的热带曲线，这正是 [Blo23] 的目的。由此得到其他精化不变量，记作 $BG^{\star}_{g,B}(q)$。不过，它们与先前的 $BG_{g,B}(q)$ 之间存在如下简洁公式

$$BG^{\star}_{g,B}(q) = \frac{\det(B)}{g(g-1)} \cdot BG_{g,B}(q),$$

因此我们不再详述其精确定义，不过我们更倾向于为后者给出渐近展开。更多细节请参阅 [Blo23] 和 [Blo25a] 。

2.2. **与约化 Gromov-Witten 不变量的联系**。为阿贝尔曲面定义精化不变量的另一种方式，是考察约化 Gromov-Witten 不变量的某些特定生成级数。此外，还可以得到一个紧致公式，并验证该定义与热带定义一致。精化不变量与 Gromov-Witten 不变量之间的联系，已由 Bousseau [Bou19] 在环面情形下建立。

2.2.1. 约化 *Gromov-Witten* 不变量。设 A 为复阿贝尔曲面，即带有可实现曲线类 $\beta \in H_2(A,\mathbb{Z})$ 的复环面。我们可以考虑稳定映射的模空间 $\mathcal{M}_{g,n}(A,\beta)$，其中稳定映射的亏格为 g，有 n 个标记点，并实现同调类 β。按照 [BOPY18], , 该空间配备了映射

$$\mathrm{ev}\colon \mathcal{M}_{g,n}(A,\beta) \to A^n, \quad \mathrm{ft}\colon \mathcal{M}_{g,n}(A,\beta) \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n},$$

以及一个维数为 $g+n$ 的约化虚拟类 $[\mathcal{M}_{g,n}(A,\beta)]^{\mathrm{red}}$；如果模空间是流形，它便起到基本类的作用 [BOPY18]。约化 Gromov-Witten 不变量通过将由 ev 和 ft 拉回的上同调类与约化类作帽积得到：若 $\alpha \in H^*(\mathcal{M}_{g,n},\mathbb{Q})$ 和 $\gamma_i \in H^*(A,\mathbb{Q})$，

$$\langle \alpha; \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle_{g,\beta} = \int_{[\mathcal{M}_{g,n}(A,\beta)]^{\mathrm{red}}} \mathrm{ft}^*\alpha \cup \prod_1^n \mathrm{ev}_i^*\gamma_i.$$

约化类在变形下是不变量，因此这些数仅通过 β 的可整除性（作为格 $H_2(A,\ \mathbb{Z})$ 中的元素）及其自交数 β^2 而依赖于它。

2.2.2. 带有一个 λ-类的不变量生成级数。 对于所关注的情形，我们取 $n = g_0$ 以及每个 $\gamma_i \in H^4(A, \mathbb{Q})$ 为一点的庞加莱对偶类。对于来自 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的类，我们取 $\alpha = \lambda_{g-g_0}$，其中 λ-类是霍奇丛的陈类。回顾一下，霍奇丛是秩为 g 的向量丛，其在稳定映射 $f\colon C \to A$ 上方的纤维为 $H^0(C, \omega_C)$。于是我们考虑以下生成级数：

$$BG^{\mathbb{C}}_{g_0,\beta}(u) = \sum_{g \geqslant g_0} (-1)^{g-g_0} \left\langle \lambda_{g-g_0}; \mathrm{pt}^{g_0} \right\rangle_{g,\beta} u^{2g-2}.$$

随后，我们进行变量替换 $q = e^{iu}$，或者等价地，令 $q - q^{-1} = 2i\sin(u)$，从而得到关于 q 的洛朗级数。这些生成级数已在 [BOPY18] 中研究过。

2.2.3. 显式计算。 当曲线类 β 是本原类时，生成级数由 [BOPY18，定理 2] 计算得出。也可以利用 [BC25] 中的约化分解公式进行计算，从而得到一个闭式表达。

对于非本原类，可借助多重覆盖公式 [BC25，定理 4.23] 进行计算。关于通过变量替换 $q = e^{iu}$ 将热带精化不变量的多重覆盖公式与之联系起来的说明，见 [Blo25a，第 1.2.3] 节。

结合上述两者，显式计算可以还原热带精化不变量：如果β 和 B 具有相同的可整除性，且 $\beta^2 = 2\det(B)$，那么 $BG^{\mathbb{C}}_{g_0,\ \beta}(u) = BG_{g_0,\ B}(q)$，其中经过变量替换 $q = e^{iu}$。特别地，本节开头得到的洛朗级数实际上是次数为 $\frac{\beta^2}{2}$ 的洛朗多项式，这一点从其通过变量替换得到的定义中并不明显。

注记 2.5. 在复数情形下，我们同样可以考虑属于某个固定线性系的曲线。根据 [BL99, Corollary 2.2], , 固定线性系这一条件可以替换为插入 $H^3(A, \mathbb{Z})$ 的一组基。利用 [BOPY18, Proposition 2], , 插入一个 λ-类和点插入时的计算可归结为本节前面处理过的不变量。记 $\star$ 为固定线性系中不变量的生成级数，我们还得到关系式 $BG^{\mathbb{C}}_{,g_0\ \beta,}{}^{\star}(u) = {}^{\beta^2/2}_{g_0\ g_0-1}()\ .BG^{\mathbb{C}}_{g_0,\beta}(u)$。因此，我们不再进一步讨论这一~~情形。~~♦

3. 多项式性性质与渐近性

3.1. **多项式性**。 在 [Blo25a, Section 6.3, Theorem 6.7], 中，我们对精化不变量 $BG_{g,B}(q)$ 的系数有两点观察，现概述如下定理。若 P 是次数为 d的洛朗多项式，我们用 $\mathrm{h}P\mathrm{i}_i$ 表示其余次数 i 系数，即 q^{d-i}前面的系数。

定理 3.1. [Blo25a，定理 6。7] 对于 $i \geqslant 0$，当 $n = \det(B)$ 足够大时，我们有如下结论：

(1) $\langle BG_{g,B}(q)\rangle_i = \langle BG_{g,\widetilde{B}}(q)\rangle_i$；*(2)* $n \mapsto \langle BG_{g,n}(q)\rangle_i$ 与多项式函数 $Q_{g,i}(n)$ 一致，其次数至多为 $g-2$。

特别地，定理 3.1(1) 指出，在研究系数的渐近性时，我们可以限制在本原类上。

证明。 (1) 我们使用多重覆盖公式：

$$BG_{g,B}(q) = \sum_{k|B} k^{2g-1} BG_{g,\widetilde{B/k}}(q^k).$$

$\widetilde{\ }$对于 $k|B$， k 项的次数为 $k\cdot \det\ B/k = k\cdot\ \frac{n}{k^2} = \frac{n}{k}$。因此，只要 $k \geqslant 2$，

$$\frac{n}{k} \leqslant n - \frac{n}{2},$$

且其余次数至少为 $\frac{n}{2}$。只要 n 足够大，这就保证余次数为i 的系数仅来自 $k = 1$ 项，即与原始$\widetilde{\ }$类 B相关的项。

（2）第二个结论源自该不变量的显式表达式。这也可以由第4节中进行的更为详尽的显式计算得到。

□

上述定理是通常的环簇曲面上的 Block-Göttsche 不变量的多项式性结论在阿贝尔曲面情形下的版本 [BJP22]。

3.2. **从劳朗多项式到多项式**。 我们采用与[BM25], 类似的观点，将定理 3.1 中的多项式性结果重新表述为关于函数 $B \mapsto BG_{g,B}(q)$ 的渐近性结论。为此，我们进行变量替换，将 q 中的劳朗多项式变为 x 中的次数为 $2\mathrm{det}(B)$ 的多项式。该公式仅涉及系数的平移，因此余次数为 i 的系数现在变为 x^i-系数：

$$\overline{BG}_{g,B}(x) = x^{\det(B)} BG_{g,B}\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}[x].$$

更一般地, 如果 $P \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 是关于变量 q 、次数为 d的洛朗多项式，我们记 t

$$\overline{P}(x) = x^d P\left(\frac{1}{x}\right),$$

它现在是一个关于变量 x、次数为 $2d$的真正多项式。映射 $P(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] \mapsto \overline{P}(x)$ 是乘法的（并且在次数相同的洛朗多项式上是线性的）。

我们现在得到公式

$$\overline{BG}_{g,n}(x) = g \sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n} \overline{P}_{a_1} \cdots \overline{P}_{a_{g-1}}, \quad \text{where } \overline{P}_a(x) = \sum_{k|a} \frac{a}{k} x^{a-k}(1 - 2x^k + x^{2k}).$$

3.3. **渐近性**。 对于固定的 $g \geqslant 2$，我们将精细不变量视为一个函数 n

$$\overline{BG}_g \colon \mathscr{B} \to \mathbb{Q}[\![x]\!],$$

其中，陪域 $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ 是形式级数环，并赋予超度量距离： $d(f(x)\ g(x))\ = e^{-M}$ 其中

$$f(x) - g(x) = \alpha_M x^M + o(x^M),\ \alpha_M \neq 0.$$

因此，当 $\det(B)$ 足够大时，谈论 $\overline{BG}_g$ 的渐近展开是有意义的。考虑 x 中的形式级数而非仅仅是多项式，其好处在于值域是一个完备空间。当然， $\overline{BG}_g$ 的取值实际上是多项式。

命题 3.2. 存在一个次数至多为 $g-2$ 的多项式函数 $AR_g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}[\![x]\!]$ （其中“AR”表示渐近精细），等价地，即 $\mathbb{Q}[\![x]\!][n]$ 中的一个元素，使得在 $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ 内，使得

$$\overline{BG}_{g,B}(x) = AR_g(\det(B), x) + o(1).$$

$o(1)$ 是在 $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ 上采用超度量拓扑的朗道记号。具体而言，这意味着对任意 $i_0 > 0$，只要$\det(B)$ 足够大，则 $0 \leqslant i \leqslant i_0$ 的 x^i-系数相等。

证明。 这只是定理 3.1 的一种改述，取 $AR_g(n, x) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{g,i}(n) x^i$。 □

注 3.3. 表述渐近展开的另一种方式是：对每一个固定的i, g 和 n （二者相对于 i 和 g取得足够大），我们有同余关系

$$\overline{BG}_{g,B}(x) \equiv AR_g(n,x) \mod x^{i+1}.$$

因此，要计算 AR_g，只需计算 $\overline{BG}_{g,\ B}(x)$ 模 x^{i+1} ，其中 $n = \det(B)$ 足够大，且任意 i。具体计算请参见示例部分。♦

我们还有一个与 $\overline{BG}^{\star}_{g\ ,\ B}(q)$ 相关的渐近精细不变量 $AR^{\star}_g$，它用于计数固定线性系中的曲线。它与 AR_g 之间的关系仅相差一个乘数 $g^{n(g-1)}$。

3.4. **结果陈述**。 现在我们陈述关于渐近精细不变量的主要正则性结果。出于美观考虑，我们针对 $AR^{\star}_g$ 陈述该结果。

定理 3.4. 对于固定的亏格 g，存在拟模形式 $f_1,\dots,f_{g-3}$，它们在0 处消失，使得

$$AR^{\star}_g(n,x) = \binom{n}{g-1} + \sum_{k=1}^{g-3} f_k(x) n^k \in \mathbb{Q}[\![x]\!][n].$$

在证明该定理之前，作为示例，我们给出渐近精细不变量的前几个值。显式计算见第4节的 4.1 节。

命题 3.5。 我们有以下表达式：

(i) $AR^{\star}_2(n,x) = n$;

(ii) $AR^{\star}_3(n,x) = \binom{n}{2}$;

(iii) $AR^{\star}_4(n,x) = \binom{n}{3} - 2E_2(x)n$, *where* $E_2(x) = \sum_{a=1}^{\infty} \sigma_1(a)x^a$.

特别地，前两个渐近精细不变量不依赖于 x，这意味着除 $Q_{g,\ 0}$ 外，所有 $Q_{g,\ i}$ 都为 0。$g = 4$ 的情形是我们首次看到拟模形式出现的值；对于 $g = 2,\ 3$，定理 3.4 中的求和为 0。

4. 关于渐近不变量正则性性质的定理 3.4 的证明

本节中，我们研究渐近不变量 $AR^{\star}_g(x)$，以证明定理 3.4。由于证明较为技术性，我们首先处理命题 3.5 的特殊情形，以说明所采用的技巧。我们希望下面第4.1节给出的细节能够解释如何处理第4.2.2节中的一般情形。我们将大量使用以下公式

$$(1)\quad \overline{BG}^{\star}_{g,n}(x) = \frac{n}{g-1} \sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n} \overline{P}_{a_1}\cdots\overline{P}_{a_{g-1}}, \quad \text{where } \overline{P}_a(x) = \sum_{k|a} \frac{a}{k} x^{a-k}(1-2x^k+x^{2k}).$$

4.1. 首个值的计算。

命题 *3.5(i)* 的证明。 我们从最简单的情形 $g = 2$ 开始。由公式（1），我们有$\overline{BG}^{\star}_{2,n}(x) = n\overline{P}_n(x)$。此外，若 $n > 2i$，且 k 是 n 的真因子，则有 $n - k \geqslant \frac{n}{2} > i$。特别地，只有 $k = n$ 项会对 $P_n(x)$ 的前 i 个系数作出贡献，因此$P_n(x) \equiv 1$ 模 x^{i+1}。于是，除常数项外，所有系数都渐近趋于 0，我们得到

$$AR^{\star}_2(n,x) = n.$$

□

命题 *3.5(ii)* 的证明。 我们继续讨论 $g=3$。由公式（1），不变量由下式给出

$$\overline{BG}^{\star}_{3,n}(x)=\frac{n}{2}\sum_{a_1+a_2=n}\overline{P}_{a_1}\overline{P}_{a_2}.$$

若 $n>4i$，则要么 $a_1>2i$，要么 $a_2>2i$，并且对于 $\overline{j}=1$ 或 2，我们有 $P_{a_j}\equiv 1$ 模 x^{i+1}。因此，我们将求和拆分如下：

$$\overline{BG}^{\star}_{3,n}(x)\equiv\frac{n}{2}\left(\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ a_1\leqslant 2i}}\overline{P}_{a_1}+\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ a_1,a_2>2i}}1+\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ a_2\leqslant 2i}}\overline{P}_{a_2}\right)\mod x^{i+1}.$$

接下来，我们想从中间求和中去掉条件 $a_1,\ a_2>2i$。为此，我们将每个 $\overline{P}_a$ 写成 $(\overline{P}_a-1)+1$，并将 1 项并入中间求和：

$$\overline{BG}^{\star}_{3,n}(x)\equiv\frac{n}{2}\left(\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ a_1\leqslant 2i}}(P_{a_1}-1)+\sum_{a_1+a_2=n}1+\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ a_2\leqslant 2i}}(P_{a_2}-1)\right)\mod x^{i+1}.$$

再次利用对于 $a_j>2i,\ \overline{P}_{a_j}\equiv 1$ 模 x^{i+1}，我们可以将缺少的项补入第一项和第三项求和，最终得到

$$\begin{aligned}\overline{BG}^{\star}_{3,n}(x)&\equiv\frac{n}{2}\left(\sum_{a_1=1}^{+\infty}(P_{a_1}-1)+n-1+\sum_{a_2=1}^{+\infty}(P_{a_2}-1)\right)\mod x^{i+1}\\&\equiv\frac{n}{2}\left(n-1+2\sum_{a=1}^{+\infty}(P_a-1)\right)\mod x^{i+1}.\end{aligned}$$

由于右边不依赖于 i，且等式对任意 x^{i+1} 模都成立，因此该级数就是所求的 $AR^{\star}_3(x)$。注意，当 a 趋于 ∞ 时，$d(P_a-1,\ 0)$ 趋于 0，因此 $\sum_{a=1}^{\infty}(P_a-1)$ 在形式级数环 $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ 中有意义。经过一个初等计算（此处在后文证明的引理 4.1 中包含该计算），可得 $\sum_{a=1}^{\infty}(P_a-1)=0$，从而得到预期结果：

$$AR^{\star}_3(n,x)=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}.$$

□

命题 *3.5(iii)* 的证明。最后，我们计算 $g=4$ 的渐近不变量。根据公式 (1)，该不变量为

$$\overline{BG}^{\star}_{4,n}(x)=\frac{n}{3}\sum_{a_1+a_2+a_3=n}\overline{P}_{a_1}\overline{P}_{a_2}\overline{P}_{a_3}.$$

我们采用相同的方法：求和范围是三角形的整点

$$\Delta_n=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_1+a_2+a_3=n\text{ and }a_j\geqslant 1\}.$$

我们将每个 $\overline{P}_a$ 拆分为$(\overline{P}_a-1)+1$，从而得到

$$\prod_{i=1}^{g-1}\overline{P}_{a_i}=\sum_{I\subset[\![1;g-1]\!]}\prod_{i\in I}(\overline{P}_{a_i}-1).$$

在 $g=4$ 情形下，我们得到

$$\overline{P}_{a_1}\overline{P}_{a_2}\overline{P}_{a_3} = \begin{array}{l}(\overline{P}_{a_1}-1)(\overline{P}_{a_2}-1)(\overline{P}_{a_3}-1)\\ +(\overline{P}_{a_1}-1)(\overline{P}_{a_2}-1)+(\overline{P}_{a_2}-1)(\overline{P}_{a_3}-1)+(\overline{P}_{a_1}-1)(\overline{P}_{a_3}-1)\\ +(\overline{P}_{a_1}-1)+(\overline{P}_{a_2}-1)+(\overline{P}_{a_3}-1)\\ +1.\end{array} \tag{2}$$

因此，我们在 Δ_n 上得到八个函数的和，其中一些函数在置换指标后具有对称作用。在每种情况下，由于当 $a>2i$ 时 $P_a-1\equiv 0$ 模 x^{i+1}，只有那些表达式中出现的 a_j 小于 $2i$ 的（a_1，a_2，a_3）才有贡献。因此，我们的思路是根据各点与 Δ_n 的边界和角点的接近程度来划分三角形，因为这会迫使函数取零。设 $i\geqslant 0$ 和 $n>6i$。

- 首先，我们有

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=n\\ a_1,a_2,a_3\leqslant 2i}} (\overline{P}_{a_1}-1)(\overline{P}_{a_2}-1)(\overline{P}_{a_3}-1)=0,$$

  由于 $n>6i$，求和集合实际上为空。
- 接着，对于（2）第三行中出现的三个函数，我们分别有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=n\\ a_1\leqslant 2i}} (\overline{P}_{a_1}-1) &= \sum_{a_1=1}^{2i}(\overline{P}_{a_1}-1)\left(\sum_{a_2+a_3=n-a_1}1\right)\\ &= \sum_{a_1=1}^{2i}(n-1-a_1)(\overline{P}_{a_1}-1)\\ &\equiv (n-1)\sum_{a=1}^{\infty}(\overline{P}_a-1)-\sum_{a=1}^{\infty}a(\overline{P}_a-1) \mod x^{i+1}.\end{aligned}$$

  在得到最后一行时，我们只需加上 $a_1>2i$ 的项，因为它们不会改变模 x^{i+1} 的和。通过初等计算证明的引理 4.1 得出，$\sum_{a=1}^{\infty}a(\overline{P}_a-1)=2E_2(x)$，其中 $E_2(x)=\sum_1^{\infty}\sigma_1(a)x^a$ 是第一个艾森斯坦级数，其归一化使第一系数为 0。我们已经知道 $\sum_1^{\infty}(P_a-1)_=0$。

- 对于涉及三个a_j 中两个的函数（式（2）第二行），我们采用类似的方法：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=n\\ a_1,a_2\leqslant 2i}} (\overline{P}_{a_1}-1)(\overline{P}_{a_2}-1) &= \sum_{a_1,a_2=1}^{2i}(\overline{P}_{a_1}-1)(\overline{P}_{a_2}-1)\\ &= \left(\sum_{a=1}^{\infty}(\overline{P}_a-1)\right)^2\equiv 0 \mod x^{i+1},\end{aligned}$$

  再次利用 $\sum_{a=1}^{\infty}(P_a-1)\overline{\ }\equiv 0$ 模 x^{i+1}。
- 最后，我们有

$$\sum_{a_1+a_2+a_3=n}1=\binom{n-1}{2}.$$

综上，我们得到

$$\overline{BG}^{\star}_{4,n}(x)\equiv\frac{n}{3}\left(0+3\cdot 0+3(0-2E_2(x))+\binom{n-1}{2}\right) \mod x^{i+1},$$

从而得到预期结果：

$$AR_4^\star(n,x)=\frac{n}{3}\left(\binom{n-1}{2}-6E_2\right)=\binom{n}{3}-2nE_2(x).$$

□

4.2. **一般结果**。

4.2.1. 拟模形式的一个辅助族。 在着手证明定理 3.4 之前，我们引入一族在整个计算中出现的生成级数 $(G_m(x))_m$，并证明它们是拟模形式。生成级数 G_0 和 G_1 是出现在命题 3.5 的 $g=3$ 与 $g=4$ 情形中的那些级数。我们考虑函数

$$G_m(x)=\sum_{a=1}^{+\infty}a^m(\overline{P}_a(x)-1)$$

并将 E_{2j} 记为常数项为 0 的艾森斯坦级数，即

$$E_{2j}(x)=\sum_{a=1}^{+\infty}\sigma_{2j-1}(a)x^a$$

其中 $\sigma_k(a)=\sum_{d|a}d^k$。设 D 为微分算子 $D=x\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x$。我们回顾：若 $F(x)$ 是拟模形式，则 $DF(x)$ 亦然。

引理 4.1. 函数 $G_m(x)$ 是一个在 0 处为零的拟模形式。此外，我们有显式公式

$$G_m(x)=2\sum_{2\leqslant 2j\leqslant m+1}\binom{m+1}{2j}D^{m+1-2j}E_{2j}(x).$$

例 4.2. 当 m 较小时，显式表达式给出如下恒等式：

- $G_0(x)=0$,
- $G_1(x)=2E_2(x)$,
- $G_2(x)=6DE_2(x)$,
- $G_3(x)=12D^2E_2(x)+2E_4(x)$,
- $G_4(x)=20D^3E_2(x)+10DE_4(x)$,
- $G_5(x)=30D^4E_2(x)+30D^2E_4(x)+2E_6(x)$.

◊

证明。由于没有常数项，消失部分显然成立。为证明拟模性和公式，我们按如下方式进行。我们从 $\overline{P}_a$ 的表达式出发，并写成 $1=\sum_{kl=a}l\delta_{l,\,1}$，从而得到：

$$\begin{aligned}\overline{P}_a-1&=\sum_{kl=a}lx^{k(l-1)}(1-2x^k+x^{2k})-\sum_{kl=1}l\delta_{l,1}\\&=\sum_{kl=a}l\left(x^{k(l-1)}-2x^{kl}+x^{k(l+1)}-\delta_{l,1}\right).\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned} G_m(x) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^m l \left(x^{k(l-1)} - \delta_{l,1} - 2x^{kl} + x^{k(l+1)} \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} k^m l^{m+1} (x^{k(l-1)} - \delta_{l,1}) - 2\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^m l x^{kl} + \sum_{k,l=1}^{\infty} k^m l^{m+1} x^{k(l+1)}. \end{aligned}$$

第一项求和的被加项在 $l = 1$ 时为零，因此我们从 $l = 2$ 开始，并令 $l' = l - 1$。对于最后一项求和，由于 l^{m+1} 为 0，我们可以加入被加项 $l = 0$ 。在这最后一项求和中令 $l' = l + 1$，总计得到：

$$G_m(x) = \sum_{k,l'=1}^{\infty} k^m (l'+1)^{m+1} x^{kl'} - 2\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^m l x^{kl} + \sum_{k,l'=1}^{\infty} k^m (l'-1)^{m+1} x^{kl'}.$$

我们省略 l' 上的撇号，在第一项求和与第三项求和中使用二项式公式，并将它们合并：

$$\begin{aligned} G_m(x) &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} (1 + (-1)^j) \sum_{k,l=1}^{\infty} k^m l^{m+1-j} x^{kl} - 2\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^m l x^{kl} \\ &= 2 \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant m+1} \binom{m+1}{2j} \sum_{k,l=1}^{\infty} k^m l^{m+1-2j} x^{kl} - 2\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^m l x^{kl} \\ &= 2 \sum_{2 \leqslant 2j \leqslant m+1} \binom{m+1}{2j} \sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^{m+1-2j} k^{2j-1} x^{kl}. \end{aligned}$$

为得到第二行，我们注意到 $1 + (-1)^j$ 仅在 j 为偶数时非零，因此我们只对偶数求和。为得到最后一行，我们利用最后一项求和与第一项求和中的 $2j = 0$ 项相消。最后，我们利用：

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} (kl)^{m+1-2j} k^{2j-1} x^{kl} = \sum_{a=1}^{\infty} a^{m+1-2j} \sigma_{2j-1}(a) x^a = D^{m+1-2j} E_{2j}(x).$$

拟模形式环在 D 下保持稳定，因此 $D^{m+1-2j} E_{2j}(x)$ 是拟模形式。由于 G_m 是拟模形式的导数的多项式，它也是拟模形式，从而得到所需结果。□

4.2.2. 主要结果的证明。 现在我们来证明定理 3.4。其思路是按照整数分拆到单纯形 $\{a_1 + \cdots + a_{g-1} = n\}$ 某个面的距离，对 n 的分拆求和，并补上缺少的项，从而得到对大小为 n 的单纯形的整点求和。这些表达式会自然地呈现出 $G_m(x)$。

引理 4.3。有

$$\sum_{a_1 + \cdots + a_{g-1} = n} \overline{P}_{a_1} \cdots \overline{P}_{a_{g-1}} \equiv \sum_{s=0}^{g-2} \binom{g-1}{s} \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_{g-1} = n \\ a_1, \ldots, a_s \leqslant 2i}} (\overline{P}_{a_1} - 1) \cdots (\overline{P}_{a_s} - 1) \mod x^{i+1}.$$

证明。 求和遍历单纯形 $\{a_1 + \cdots a_{g-1} = n\}$中的整点集合。我们首先将每个 $\overline{P}_{a_j}$ 写成 $\overline{P}_{a_j} - 1 + 1$，并展开内积：

$$\prod_{j=1}^{g-1} \overline{P}_{a_j} = \sum_{I \subset [\![1; g-1]\!]} \prod_{j \in I} (\overline{P}_{a_j} - 1).$$

接着，我们对单纯形中的整点求和。由于当$a_j > 2i$时， $P_{a_j} - 1$ 模 x^{i+1} 为零，因此剩下

$$\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n} \overline{P}_{a_1}\cdots\overline{P}_{a_{g-1}} \equiv \sum_{I\subset[\![1;g-1]\!]} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_{g-1}=n \\ a_j\leqslant 2i \text{ if } j\in I}} \prod_{j\in I}(\overline{P}_{a_j}-1) \mod x^{i+1}$$
$$\equiv \sum_{s=0}^{g-1}\binom{g-1}{s} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_{g-1}=n \\ a_1,\ldots,a_s\leqslant 2i}} \prod_{j=1}^{s}(\overline{P}_{a_j}-1) \mod x^{i+1},$$

我们注意到，内层求和仅取决于子集 I 的基数 s，且基数为 s 的子集共有 $\binom{g-1}{s}$ 个。最后，$s = g-1$ 项为 0，因为对于$n > 2(g-1)i$，不存在这样的 (a_j) 使它们都小于 $2i$ 且总和等于 n。□

定理 *3.4* 的证明。 根据公式（1），我们需要计算

$$\frac{n}{g-1}\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n} \overline{P}_{a_1}\cdots\overline{P}_{a_{g-1}} \mod x^{i+1},$$

根据引理 4.3，这相当于确定

$$\frac{n}{g-1}\sum_{s=0}^{g-2}\binom{g-1}{s} \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_{g-1}=n \\ a_1,\ldots,a_s\leqslant 2i}} (\overline{P}_{a_1}-1)\cdots(\overline{P}_{a_s}-1) \mod x^{i+1}.$$

我们暂且忽略因子 $\frac{n}{g-1}$，来处理这个表达式。

由于 $|\{a_{s+1}+\cdots+a_{g-1} = n-a_1-\cdots-a_s\}| = \binom{n-1-\sum_1^s a_j}{g-2-s}$，我们得到

$$\sum_{s=0}^{g-2}\binom{g-1}{s} \sum_{a_1,\ldots,a_s\leqslant 2i} \binom{n-1-\sum_1^s a_j}{g-2-s} (\overline{P}_{a_1}-1)\cdots(\overline{P}_{a_s}-1) \mod x^{i+1}.$$

我们补上 $a_j > 2i$ 所缺的项。后者并不改变模 x^{i+1} 的值，因为若 $a_j > 2i$，则 $\overline{P}_{a_j} - 1 \equiv 0 \mod x^{i+1}$。我们得到

$$\sum_{s=0}^{g-2}\binom{g-1}{s} \sum_{a_1,\ldots,a_s=1}^{\infty} \binom{n-1-\sum_1^s a_j}{g-2-s} (\overline{P}_{a_1}-1)\cdots(\overline{P}_{a_s}-1) \mod x^{i+1}.$$

我们先搁置等于 $\binom{n-1}{g-2}$ 的 $s = 0$ 项。乘以 $\frac{n}{g-1}$ 便得到如前所述的 $\binom{n}{g-1}$。

若 $s > 0$，我们将二项式系数视为相应的希尔伯特多项式，其由 $H_m(n) = \binom{n}{m}$ 定义，次数为 m。于是 $\binom{n-1-\sum_1^s a_j}{g-2-s} = H_{g-2-s}(n-1-\sum_1^s a_j)$ 是关于 a_1，……，a_s 的多项式，其系数为关于 n 的多项式。给定单项式$a_1^{m_1}\cdots a_s^{m_s}$，下列求和可分解为一个乘积：

$$\sum_{a_1,\ldots,a_s=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{s} a_j^{m_j}(\overline{P}_{a_j}-1) = \prod_{j=1}^{s} G_{m_j}(x),$$

因此它是一个拟模形式，因为根据引理 4.1， G_m。至此，拟模性的证明完成。

n 中的最高次数由 $s=1$达到，且

$$\sum_{a=1}^{\infty} H_{g-3}(n-1-a)(\overline{P}_a-1),$$

这是一个关于 a,n 的多项式，次数为 $g-3$。然而，由引理 4.1 可知 $G_0=0$，对 a 求和会消去 a 的指数为 0 的项，尤其会消去 n^{g-3} 的系数。因此，对 a 求和后，关于 n 的次数为 $g-4$。乘以 $\frac{n}{g-1}$ 后，得到所述的次数 $g-3$。□

注记 4.4。更一般地，要产生非零贡献，关于 $a_1,\dots,a_s$ 的单项式在每个 a_j 中的次数都至少为 1。特别地，这迫使 $g-2-s\geqslant s$，换言之即 $s\leqslant \frac{g-2}{2}$。♦

我们重新得到命题 3.5 中计算出的数值，同时也得到了一些新的数值。

例 4.5。现在，我们取 $g=5$。由于条件 $2s\leqslant g-2=3$，指标 s 可以取值 $s=0,1$。取值 $s=0$ 给出常数项。对于 $s=1$，我们有

$$H_2(n-1-a)=\frac{(n-a-1)(n-a-2)}{2}=\frac{1}{2}a^2+\frac{3-2n}{2}a+\binom{n}{2},$$

从而

$$\begin{aligned}AR_5^\star(n,x)&=\binom{n}{4}+\frac{n}{4}\cdot 4\left(\frac{1}{2}G_2(x)+\frac{3-2n}{2}G_1(x)\right)\\&=\binom{n}{4}+\left(\frac{3}{2}G_1(x)+\frac{1}{2}G_2(x)\right)n-G_1(x)n^2.\end{aligned}$$

◊

例 4.6。现在取 $g=6$。在这种情况下，我们可能有 $s=0$，1 或 2，因为 $2s\leqslant g-2=4$。$s=0$ 的值给出常数项。对于 $s=1$，我们有

$$\begin{aligned}H_3(n-1-a)&=-\frac{(a-n+1)(a-n+2)(a-n+3)}{6}\\&=-\frac{1}{6}a^3+\frac{3n-6}{6}a^2-\frac{3n^2-12n+11}{6}a+\binom{n}{3},\end{aligned}$$

而对于 $s=2$，

$$H_2(n-1-a_1-a_2)=a_1a_2+\cdots.$$

只有项 a_1a_2 值得关注，因为其他单项式都没有贡献：只有每个变量的次数至少为 1 的单项式才有贡献。因此，我们有

$$\begin{aligned}AR_6^\star(n,x)&=\binom{n}{5}+\frac{n}{5}\left[5\left(-\frac{1}{6}G_3+\frac{3n-6}{6}G_2-\frac{3n^2-12n+11}{6}G_1\right)+10G_1^2\right]\\&=\binom{n}{5}+\left(2G_1^2-G_2-\frac{1}{6}G_3-\frac{11}{6}G_1\right)n+\left(\frac{1}{2}G_2-2G_1\right)n^2-\frac{1}{2}G_1n^3.\end{aligned}$$

◊

5. 固定余次数下级数的前几项系数

我们定义了渐近不变量 $AR_g^\star$，它是一个关于 n 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Q}[\![x]\!]$，并且取决于 g。现在，我们从一个正交的视角出发，研究参数 g 的生成级数：

$$AR^\star = \sum_{g=2}^{\infty} AR_g^\star u^g \in \mathbb{Q}[n][\![x,u]\!],$$

它现在是参数 x 和 u 的形式级数，系数是关于 n 的多项式。我们首先关注带有亏格参数且余次数固定的生成级数，也就是说，我们考虑模 x^{i+1} 的 $AR^\star$，其中 i。我们将再次大量使用公式（1）。若 Q 是一个多项式，我们用 $[Q]_i$ 表示其次数为 i 的系数。回顾一下，若 $k<0$，二项式系数 $\binom{n}{k}$ 为 0。

命题5.1. $AR_g^\star$ 的前几项系数由以下表达式给出：

(i) $\left[AR_g^\star\right]_0 = \binom{n}{g-1}$,

(ii) $\left[AR_g^\star\right]_1 = -2n\binom{n-3}{g-4}$,

(iii) $\left[AR_g^\star\right]_2 = n\left(\binom{n-2}{g-3} - 6\binom{n-3}{g-3} + 3\binom{n-4}{g-3} - 8\binom{n-5}{g-6} - 2(n-5)\binom{n-6}{g-7}\right)$,

证明. (i) 0 次系数就是常数项，因此已在定理 3.4 中计算过；所用事实是所有 $\overline{P}_a$ 的常数项均为 1。为方便读者，我们在此回顾证明。利用 $\left[\overline{P}_a\right]_0 = 1$ 和公式（1），可得

$$\left[BG_{g,n}^\star(x)\right]_0 = \frac{n}{g-1}\sum_{a_1+\cdots a_{g-1}=n} 1 = \frac{n}{g-1}\binom{n-1}{g-2} = \binom{n}{g-1}.$$

(ii) 利用公式（1），由于 $\overline{P}_a$ 的常数项为 1，我们得到

$$\begin{aligned}\left[BG_{g,n}^\star(x)\right]_1 &= \frac{n}{g-1}\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left[\overline{P}_{a_1}\cdots\overline{P}_{a_{g-1}}\right]_1\\ &= \frac{n}{g-1}\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left(\left[\overline{P}_{a_1}\right]_1+\cdots+\left[\overline{P}_{a_{g-1}}\right]_1\right)\\ &= n\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left[\overline{P}_{a_1}\right]_1.\end{aligned}$$

注意，$\overline{P}_a$ 的一次系数仅在 $a=1,\ 2$ 时非零，此时有

$$\begin{aligned}\overline{P}_1(x) &= 1-2x+x^2,\\ \overline{P}_2(x) &= 1+2x-6x^2+2x^3+x^4.\end{aligned}$$

因此，在求和中，a_1 的取值只能是1或2，于是我们得到

$$\begin{aligned}\left[BG_{g,n}^\star(x)\right]_1 &= n\left(\sum_{a_2+\cdots+a_{g-1}=n-1}\left[\overline{P}_1\right]_1+\sum_{a_2+\cdots+a_{g-1}=n-2}\left[\overline{P}_2\right]_1\right)\\ &= 2n\left(\binom{n-3}{g-3}-\binom{n-2}{g-3}\right) = -2n\binom{n-3}{g-4}.\end{aligned}$$

(iii) 利用公式（1），由于 P_a 的常数项为1，我们有

$$\begin{aligned}\left[BG^{\star}_{g,n}(x)\right]_2 &= \frac{n}{g-1}\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left(\sum_{k=1}^{g-1}\left[\overline{P}_{a_i}\right]_2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant g-1}\left[\overline{P}_{a_i}\right]_1\left[\overline{P}_{a_j}\right]_1\right)\\ &= n\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left[\overline{P}_{a_1}\right]_2+\frac{n(g-2)}{2}\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left[\overline{P}_{a_1}\right]_1\left[\overline{P}_{a_2}\right]_1.\end{aligned}$$

现在我们来寻找使被加数非零的 (a_i) 的取值。

- 对于第一项求和，只有 $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ an 中次数为 2 的项非零 d

$$\overline{P}_3 = 1+3x^2-8x^3+3x^4+x^6.$$

因此有

$$\begin{aligned}\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left[\overline{P}_{a_1}\right]_2 &= \sum_{a_2+\cdots+a_{g-1}=n-1}\left[\overline{P}_1\right]_2+\sum_{a_2+\cdots+a_{g-1}=n-2}\left[\overline{P}_2\right]_2+\sum_{a_2+\cdots+a_{g-1}=n-3}\left[\overline{P}_3\right]_2\\ &= \binom{n-2}{g-3}-6\binom{n-3}{g-3}+3\binom{n-4}{g-3}.\end{aligned}$$

- 在第二项求和中， a_1 和 a_2 只能取 1 或 2，因此该项为

$$\begin{aligned}&\sum_{a_1+\cdots+a_{g-1}=n}\left[\overline{P}_{a_1}\right]_1\left[\overline{P}_{a_2}\right]_1\\ =&\sum_{a_3+\cdots+a_{g-1}=n-2}\left[\overline{P}_1\right]_1^2+2\sum_{a_3+\cdots+a_{g-1}=n-3}\left[\overline{P}_1\right]_1\left[\overline{P}_2\right]_1+\sum_{a_3+\cdots+a_{g-1}=n-4}\left[\overline{P}_2\right]_1^2\\ =&4\left(\binom{n-3}{g-4}-2\binom{n-4}{g-4}+\binom{n-5}{g-4}\right)=4\binom{n-5}{g-6}.\end{aligned}$$

综合以上结果，并考虑求和前相应的因子 n和 ^{n}（$g-2$）$_{2}$，得到

$$\begin{aligned}\left[BG^{\star}_{g,n}(x)\right]_2 &= n\left(\binom{n-2}{g-3}-6\binom{n-3}{g-3}+3\binom{n-4}{g-3}-2(g-2)\binom{n-5}{g-6}\right)\\ &= n\left(\binom{n-2}{g-3}-6\binom{n-3}{g-3}+3\binom{n-4}{g-3}-8\binom{n-5}{g-6}-2(g-6)\binom{n-5}{g-6}\right)\\ &= n\left(\binom{n-2}{g-3}-6\binom{n-3}{g-3}+3\binom{n-4}{g-3}-8\binom{n-5}{g-6}-2(n-5)\binom{n-6}{g-7}\right).\end{aligned}$$

□

推论 5.2。 这些系数的生成级数为：

(i) 对于常数项， $u(1+u)^n-u$；*(ii)* 对于第一系数， $-2nu^4(1+u)^{n-3}$；

(iii) 对于第二系数， $u(1+u)^n\left[-2n^2\ \frac{u^6}{1+u}()^6+n\frac{3u^6-10u^5-9u^4-8u^3-2u^2}{(1+u)}\right.$

$_{6}$ $\left.\right]$。

证明。 （i）利用二项式公式，生成级数即为所述结果 t:

$$\sum_{g=2}^{\infty}\binom{n}{g-1}u^g = u(1+u)^n-u.$$

（ii）生成级数为

$$-2n\sum_{g=2}^{\infty}\binom{n-3}{g-4}u^g=-2nu^4(1+u)^{n-3}.$$

(iii) 最后，计算 $g\geqslant 2$ 的二次系数生成级数，得到 s:

$$\begin{aligned}
&n\left[u^3(1+u)^{n-2}-6u^3(1+u)^{n-3}+3u^3(1+u)^{n-4}-8u^6(1+u)^{n-5}-2(n-5)u^7(1+u)^{n-6}\right]\\
&=nu^3(1+u)^{n-6}\left[(1+u)^4-6(1+u)^3+3(1+u)^2-8u^3(1+u)-2(n-5)u^4\right]\\
&=nu^3(1+u)^{n-6}\left[-2nu^4+3u^4-10u^3-9u^2-8u-2\right]\\
&=u(1+u)^n\left[-2n^2\frac{u^6}{(1+u)^6}+n\frac{3u^6-10u^5-9u^4-8u^3-2u^2}{(1+u)^6}\right].
\end{aligned}$$

□

备注 5.3。特别地，我们有

$$AR^\star\equiv u(1+u)^n\left(1-2n\frac{u^3}{(1+u)^3}x\right)-u\mod x^2.$$

考虑下一个系数后，生成级数似乎没有紧凑形式。♦

参考文献

[BC25] Thomas Blomme 和 Francesca Carocci。通过相关不变量得到阿贝尔曲面的多重覆盖公式。arXiv 预印本 arXiv:2512.08357，2025年。[BG16a] Florian Block 和 Lothar Göttsche。福克空间与精化塞维次数。《国际数学研究通知》，2016年(21)：6553–6580，2016年。[BG16b] Florian Block 和 Lothar Göttsche。利用热带几何进行精化曲线计数。《数学汇刊》，152(1)：115–151，2016年。[BJP22] Erwan Brugallé 和 Andrés Jaramillo-Puentes。热带精化不变量的多项式性。《组合理论》，2(2)，2022年。[BL99] Jim Bryan 和 Naichung Conan Leung。阿贝尔曲面上曲线数的生成函数。《杜克数学杂志》，99(2)：311–328，1999年。[Blo23] Thomas Blomme。阿贝尔曲面上的热带曲线 II：线性系统中曲线的计数。《美国数学会汇刊》，376(08)：5641–5691，2023年。[Blo24] Thomas Blomme。阿贝尔曲面上的热带曲线 I：经过点的曲线计数。载于《剑桥哲学学会数学学报》，第177卷，第109–148页。剑桥大学出版社，2024年。[Blo25a] Thomas Blomme。阿贝尔曲面上复不变量与精化不变量的多重覆盖公式。《代数几何》，12(3)，2025年。[Blo25b] Thomas Blomme。点插入多重覆盖公式的简短证明。arXiv 预印本 arXiv:2501.01274，2025年。[BM07] Erwan Brugallé 和 Grigory Mikhalkin。通过地板图计数曲线。《数学报告》，345(6)：329–334，2007年。[BM08] Erwan Brugallé 和 Grigory Mikhalkin。热带曲线的地板分解：平面情形。arXiv 预印本 arXiv:0812.3354，2008年。[BM25] Thomas Blomme 和 Gurvan Mével。属 0 和 1 的热带精化不变量的渐近计算。《综合理工学院数学杂志》，12：185–234，2025年。[BOPY18] Jim Bryan、Georg Oberdieck、Rahul Pandharipande 和 Qizheng Yin。阿贝尔曲面与三维簇上的曲线计数。《代数几何》，5(4)：398–463，2018年。[Bou19] Pierrick Bousseau。来自高亏格和 λ 类的热带精化曲线计数。《数学发明》，215(1)：1–79，2019年。

[DFI95] Philippe Di Francesco 和 Claude Itzykson。量子交环。载于曲线模空间，第81–148页，马萨诸塞州波士顿，1995年。Birkhäuser Boston。[Göt98] Lothar Göttsche。关于曲面上曲线数的猜想生成函数。《数学物理通讯》，196(3)：523–533，1998年。[IM13] Ilia Itenberg 和 Grigory Mikhalkin。关于平面热带曲线的 Block–Göttsche 重数。《国际数学研究通知》，2013年(23)：5289–5320，2013年。[Mév26] Gurvan Mével。属 0 热带精化不变量的万能多项式。《伦敦数学会杂志》，113(1)：e70415，2026年。[Mik05] Grigory Mikhalkin。$\mathbb{R}^2$中的计数热带代数几何。《美国数学会杂志》，18(2)：313–377，2005年。[Nis20] Takeo Nishinou。阿贝尔曲面上热带曲线的实现。*arXiv* 预印本 *arXiv:2007.16148*，2020年。[Tze10] Yu-Jong Tzeng。*Göttsche-Yau-Zaslow* 公式的证明。斯坦福大学，2010年。

图卢兹数学研究所，118 route de Narbonne。F-31062 图卢兹 Cedex 9电子邮箱地址</style： **thomas.blomme@cnrs.fr**

Jussieu 数学研究所—巴黎左岸，索邦大学，4 place Jussieu，75252 巴黎 Cédex 5，法国电子邮箱地址</style： **gurvan.mevel@imj-prg.fr**