arXiv:2602.03174v1 [math.AP] 3 Feb 2026

# 关于Wasserstein距离的福克-普朗克方程定量敏感性分析

Martin Morange*

**摘要**

我们分析了福克-普朗克方程的解相对于某个未知参数的敏感性。我们的主要结果是，对于任意$p$，为具有不同参数的两个解之间的$p$-Wasserstein距离 $\mathscr{W}_p$ 提供定量的上界 $\geq 2$。我们给出了这一结果的两种证明：第一种依赖于两个随机微分方程解之间的同步耦合，另一种则基于对最优传输的Kantorovich对偶形式进行微分。对于过阻尼朗之万过程，我们还给出了更具体的界，并据此比较其向不变测度的收敛性与对参数的敏感性。

**摘要**

我们分析了福克-普朗克方程的解相对于某个未知参数的敏感性。我们的主要结果是，为Wasserstein距离的$p$阶 $\mathscr{W}_p$ 提供定量的上界，以比较对应于不同参数的两个解。我们给出了这一结果的两种证明：第一种基于两个随机微分方程解之间的同步耦合，另一种则基于对最优传输的Kantorovich对偶形式进行微分。随后，我们还考察了朗之万过程，并为其证明了略有不同的界，从而比较其向不变测度的收敛性与对参数的敏感性。

## 法语简版

我们考虑一个依赖于参数 $a \in \mathbb{R}^p$ 的福克-普朗克方程，其漂移项为 $b$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$，扩散系数为 $A$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{S}^d_{++}(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x,a) = \nabla_x \cdot \big(A(x,a)\nabla_x \rho(t,x,a)\big) - \nabla_x \cdot \big(\rho(t,x,a) b(x,a)\big), \\ \rho(0,x,a) = \rho_0(x,a). \end{cases} \tag{1}$$

这里，$a \in \mathbb{R}^p$ 应理解为影响方程解的一个参数（通常是扩散系数、常数漂移项或初始条件的扰动）。我们的目标是研究该参数变化对相应解的影响。因此，我们关注这一偏微分方程流对这些参数的依赖性，并用 Wasserstein 距离来衡量。在随机参数的情形下，这一问题已得到广泛研究，[4], 其中作者证明了连续性结果。在确定性情形下，对于其他偏微分方程，已有一些适用于更具体框架的结果（例如， [6] 其中作者研究了薛定谔方程对非线性指数的依赖性）；对于福克-普朗克方程，也有一些关于其对 L 范数的依赖性的结果[2] （例如参见[11], [5] 或 [7]）。因此，我们的主要贡献是利用 Wasserstein 距离进行此类分析。

以下假设 $b$ 和 $A$ 是 Lipschitz 函数，且 $\nabla_x \cdot A$ 也是 Lipschitz连续，并且它们满足

*Inria，CMAP，法国国家科学研究中心，巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，91120 帕莱索，法国。邮箱：martin.morange@inria.fr

$$|b(x,a)| + \|A(x,a)\|_F \le C(1+|x|),$$
$$|b(x,a) - b(x',a')| + \|A(x,a) - A(x',a')\|_F \le L_1\left(|x-x'| + |a-a'|\right),$$
$$|\nabla_x \cdot A(x,a) - \nabla_x \cdot A(x',a')| \le L_2\left(|x-x'| + |a-a'|\right),$$

从而使 (4) 是适定的。我们还假设

$$\lambda_{\min}(A(x,a) \ge m,$$

其中 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_F$为矩阵弗罗贝尼乌斯范数，且 $\lambda_{\min}(A(x,a))$ 表示 $A(x,a)$ 的最小特征值。在这些假设下，我们得以建立

**定理 0.1.** 设 $t\,p \in [2,+\infty)$与 $a, a' \in \mathbb{R}^p$。存在 $C_{1,d,p} > 0$与 $C_{2,d,p} > 0$两个显式常数，使得

$$\mathcal{W}_p^p(\rho(t,\cdot,a'),\rho(t,\cdot,a)) \le \mathcal{W}_p^p(\rho_0(\cdot,a'),\rho_0(\cdot,a))e^{C_{1,d,p}t} + \frac{C_{2,d,p}}{C_{1,d,p}}\left(e^{C_{1,d,p}t}-1\right)|a'-a|^p \tag{2}$$

我们以两种不同方式证明该结果。第一种证明基于距离 $\mathcal{W}_p$ 的对偶表述，即写出

$$\mathcal{W}_p^p\left(\rho(t,\cdot,a),\rho(t,\cdot,a')\right) = \sup_{\substack{h_{a,t},h_{a',t}\in C_b(\mathbb{R}^d)\\ h_{a,t}(x)+h_{a',t}(y)\le|x-y|^p}} \int_{\mathbb{R}^d} h_{t,a}(x)\rho_{t,a}(\mathrm{d}x) + \int_{\mathbb{R}^d} h_{t,a'}(y)\rho_{t,a'}(\mathrm{d}y),$$

然后利用包络定理对该关系求导。第二种证明基于两个随机微分方程之间的同步耦合，即通过

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t,a)\mathrm{d}t + \sigma(X_t,a)\mathrm{d}B_t,$$
$$\mathrm{d}X'_t = b(X'_t,a')\mathrm{d}t + \sigma(X'_t,a')\mathrm{d}B_t,$$

其中 $\sigma$ 是 $A$ 的平方根。通过以最优方式耦合初始条件（在 $\mathcal{W}_p$ 的意义下），并考虑 $|X_t - X_{\prime t}|^p$，我们以等价方式证明该结果。随后，我们将该方法应用于朗之万过程的情形，以比较向平稳测度的收敛与由不同参数引起的偏差。更确切地说，我们考虑随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla_x V(t,X_t,a)\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{2}{\beta}}\mathrm{d}B_t,$$
$$\mathrm{d}X'_t = -\nabla_x V(t,X'_t,a')\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\mathrm{d}B_t,$$

其中我们假设

$$\langle \nabla_x V(x,a) - \nabla_x V(y,a), x-y\rangle \ge m|x-y|^2,$$
$$|\nabla_x V(x,a) - \nabla_x V(x,a')| \le L_3|a-a'|.$$

在这些假设下，我们证明

**Th定理 0.2.** 设 $p\,[2,+\infty)$，$a$，$a' \in \mathbb{R}^p$与 $\beta$，$\beta' > 0$。存在 $\lambda > 0$、$K_{1,\,d,\,p}$，$K_{2,\,d,\,p} > 0$使得

$$\mathcal{W}_p^p(\rho(t,\cdot,a,\beta),\rho(t,\cdot,a',\beta')) \le \mathcal{W}_p^p(\rho_0(\cdot,a,\beta),\rho_0(\cdot,a',\beta'))e^{-\lambda t} + \left(1-e^{-\lambda t}\right)\left(K_{1,d,p}|a-a'|^p + K_{2,d,p}\left|\sqrt{\frac{2}{\beta}} - \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\right|^p\right). \tag{3}$$

# 1 背景与研究动机

在研究常微分方程的流时，自然需要估计解关于其初值或参数的变化。前者已在瓦瑟斯坦度量空间中对许多偏微分方程（如福克-普朗克、麦基恩-弗拉索夫、多孔介质方程或凯勒-塞格尔方程）得到广泛研究，但我们尚未见到关于偏微分方程相对于参数在瓦瑟斯坦度量空间中的敏感性的系统研究。在此，我们聚焦于线性福克-普朗克方程，以讨论其在 $\mathcal{W}_p$ 中对 $p$ 属于 $[2,\infty)$ 的参数敏感性。因此，我们考虑 $\mathbb{R}^d$ 上依赖于参数 $a \in \mathbb{R}^p$ 的线性福克-普朗克方程，其中 $b$： $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$，以及扩散系数 $A$： $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{S}^d_{++}(\mathbb{R})$，其中 $\mathbb{S}^d_{++}(\mathbb{R})$ 是维数为 $d$ 的对称正定矩阵的集合。

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x,a) = \nabla_x \cdot \big(A(x,a)\nabla_x \rho(t,x,a)\big) - \nabla_x \cdot \big(\rho(t,x,a) b(x,a)\big), \\ \rho(0,x,a) = \rho_0(x,a). \end{cases} \tag{4}$$

这里 的 $\in \mathbb{R}^p$ 应理解为影响该过程的某个参数（通常是扩散系数、常数漂移或初始条件的扰动）。我们的目标是研究该参数的变化如何影响方程（4）的相应解。因此，我们关注该偏微分方程流对内禀参数的依赖性，并以Wasserstein距离衡量。这一问题针对随机参数已得到广泛研究，见 [4], ，其中给出了连续性结果，作者证明了随机扩散的 Hölder 连续性。在确定性情形下，针对其他偏微分方程，在更具体的设定中已有一些结果（例如 [6] ，作者研究了薛定谔方程对非线性指数的依赖性）；针对福克-普朗克方程也有相关结果，但采用的是 $\mathrm{L}^2$ 范数（例如 [10], [5] 或 [7]）。我们的主要贡献是使用 Wasserstein距离开展此类分析。

本文中，我们始终假设$b$和$A$是Lipschitz连续函数，且 $\nabla_x \cdot A$ 也满足Lipschitz连续条件，并且它们满足

$$\begin{aligned} |b(x,a)| + \|A(x,a)\|_F &\le C(1+|x|), \\ |b(x,a) - b(x',a')| + \|A(x,a) - A(x',a')\|_F &\le L_1\big(|x-x'| + |a-a'|\big), \\ |\nabla_x \cdot A(x,a) - \nabla_x \cdot A(x',a')| &\le L_2\big(|x-x'| + |a-a'|\big), \end{aligned}$$

对于某些常数$C$， $L_1$,$L_2 > 0$其中$\|\cdot\|_F$表示矩阵的弗罗贝尼乌斯范数，因此（4）是适定的。此外，我们还假设

$$\lambda_{\min}(A(x,a) \ge m,$$

其中$m$是一些正数， $\lambda_{\min}(A(x,a))$表示$A(x,a)$的最小特征值。为了比较两个解，我们将使用$p$阶Wasserstein距离，其定义如下：对于具有有限$p$阶矩的 $\mu, \mu' \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_p(\mu,\mu') &= \left( \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\mu')} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left|x - x'\right|^p \pi(\mathrm{d}x, \mathrm{d}x') \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sup_{\substack{h,h' \in C_b(\mathbb{R}^d) \\ h(x)+h'(x') \le |x-x'|^p}} \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_{\mathbb{R}^d} h'(x')\mu'(\mathrm{d}x') \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\Pi(\mu,\ \mu')$是 $\mu$ 与 $\mu'$ 之间的耦合， $C_b(\mathbb{R}^d)$是从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}$的有界连续函数集合。我们可以给出具有不同参数a和a′的两个解之间的 $\mathscr{W}_p$ 距离的上界，其中两个解满足（4）。我们的主要结果如下定理，接下来的章节中我们将给出两种不同的证明。

**定理 1.1**。 令 $p \in [2,+\infty)$， $a$， $a' \in \mathbb{R}^p$和 $\beta$， $\beta' > 0$。存在 $C_{1,\ d,\ p}$， $C_{2,\ d,\ p} > 0$两个显式常数，使得

$$\mathscr{W}_p^p(\rho(t,\cdot,a'),\rho(t,\cdot,a)) \le \mathscr{W}_p^p(\rho_0(\cdot,a'),\rho_0(\cdot,a)) e^{C_{1,d,p}t} + \frac{C_{2,d,p}}{C_{1,d,p}}\left(e^{C_{1,d,p}t} - 1\right)|a' - a|^p. \tag{6}$$

**注 1.1**。 当 $a = a'$（即唯一的不确定性来自初始条件时）时，我们得到的估计在文献中已得到广泛研究（例如见 *[12]*）。

**注 1.2.** 该结果的主要不便之处之一在于，它无法涵盖 $p \in [1,2)$ 以及 $p = \infty$ 的情形。对于 $p = 1$ 的情形，可以尝试借鉴 *[9]*, 中的思路；该文作者通过使用反射耦合（而非我们之后将使用的同步耦合），研究了关于 $\mathcal{W}_1$范数的指数衰减。对于 $p = \infty$，我们的界在取 $p$ 次方根并令 $p$ 趋于无穷时发散，这一点更令人担忧，也使我们相信当 $p = \infty$ 时该结果并不成立。

例 1.1。 对于 $p = 2$，大多数表达式都要简单得多。事实上，若假设 $A$ 不依赖于 $x$，且 $b = 0$，则在这种情况下可直接得到

$$\mathcal{W}_2^2(\rho(t,\cdot,a'),\rho(t,\cdot,a)) \le \mathcal{W}_2^2(\rho_0(\cdot,a'),\rho_0(\cdot,a)) + \frac{L_1^2}{2m}|a-a'|^2 t.$$

因此，在这一简化情形下，两个解仅相差一个关于时间的仿射函数。

## 2 使用 Kantorovich 对偶表述对定理 1.1 的第一种证明

我们依赖以下微分不等式，该不等式已在 [2, 定理 4.1] 中证明，例如，并随后用于许多应用（参见例如[11]）。回顾一下，存在$h_{a,\,t}$和$h_{a',\,t}$使得（5）中的上确界（即 $\rho(t,\cdot a)$ 与 $\rho(t,\cdot,a')$ 之间的距离）能够取到，并且 $\pi_{a,a'}$ 存在一个最优耦合，使下确界也能够取到。为清晰起见，在下文中，我们用 $\pi$ 代替 $\pi_{a,a'}$。因此

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}_p^p(\rho(t,\cdot,a'),\rho(t,\cdot,a)) &\le \int_{\mathbb{R}^d} h_{a',t}(x')\partial_t\rho_{a',t}(\mathrm{d}x') + \int_{\mathbb{R}^d} h_{a,t}(x)\partial_t\rho_{a,t}(\mathrm{d}x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (\nabla_x\cdot A(x',a'))\cdot\nabla_x h_{a',t}(x') + (\nabla_x\cdot A(x,a))\cdot\nabla_x h_{a,t}(x)\pi(\mathrm{d}x',\mathrm{d}x)\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} A(x',a'):\nabla_x^2 h_{a',t}(x) + A(x,a):\nabla_x^2 h_{a,t}(x)\pi(\mathrm{d}x',\mathrm{d}x)\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} b(x',a')\cdot\nabla_x h_{a'}(x') + b(x,a)\cdot\nabla_x h_a(x)\pi(\mathrm{d}x',\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

最后一个等式来自分部积分。在 $\pi$ 的支撑集上，约束 $h_{a,t}(x) + h_{a',t}(x') \le |x-y|^p$ 实际上是等式，而最优性条件给出，在 $\pi$ 的支撑集上，

$$\begin{cases}
h_{a',t}(x') + h_{a,t}(x) = |x'-x|^p\\
\nabla_x h_{a',t}(x') = p|x'-x|^{p-2}(x'-x)\\
\nabla_x h_{a,t}(x) = p|x'-x|^{p-2}(x-x')\\
\begin{bmatrix}\nabla_x^2 h_{a,t}(x) & 0\\ 0 & \nabla_x^2 h_{a',t}(x')\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} M(x',x) & -M(x',x)\\ -M(x',x) & M(x',x)\end{bmatrix},
\end{cases}$$

其中 $M$ 由下式给出

$$M(x',x) = p(p-2)|x'-x|^{p-4}(x'-x)(x'-x)^T + p|x'-x|^{p-2}I_d.$$

由于对称半正定矩阵类在乘法下封闭，我们可以将最后一个条件与矩阵 $\begin{bmatrix} A(x,a) & \mathrm{p}A(x,a)\\ \mathrm{p}A(x,a) & A(x',a')\end{bmatrix}$ 相乘并取其迹，从而在 $\pi$ 的支撑集上，

$$\begin{aligned}
A(x',a'):\nabla_x^2 h_{a'}(x) + A(x,a):\nabla_x^2 h_a(x) &\le \mathrm{Tr}(A(x',a')M(x',x)) + \mathrm{Tr}(A(x,a)M(x',x))\\
&\quad - 2\mathrm{Tr}\left(\sqrt{A(x,a)}\sqrt{A(x',a')}M(x',x)\right)\\
&= \mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{A(x',a')} - \sqrt{A(x,a)}\right)^2 M(x',x)\right)\\
&\le \|M(x,x')\|_{\mathrm{op}}\mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{A(x',a')} - \sqrt{A(x,a)}\right)^2\right),
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Tr}(XY) \le \|X\|_{\mathrm{op}}\mathrm{Tr}(Y)$，利用冯·诺依曼迹不等式（例如参见 [8]），该不等式指出 at

$$|\mathrm{Tr}(XY)| \le \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(X)\sigma_i(Y),$$

对于任意 $d \times d$ 复矩阵 $X$ 和 $Y$，其中 $\sigma_i(X)$ 是 $X$ 的奇异值。由于 $p \ge 2$，$\|M(x,x')\|_{\mathrm{op}} = p(p-1)|x-x'|^{p-2}$，因此我们只需处理

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{A(x',a')} - \sqrt{A(x,a)}\right)^2\right) = \left\|\sqrt{A(x',a')} - \sqrt{A(x,a)}\right\|_F^2.$$

设 $B(x,a) = \sqrt{A(x,a)}$，从而 $B^2(x,a) = A(x,a)$。对 $a$ 求导，得到 at

$$\partial_a B(x,a)B(x,a) + B(x,a)\partial_a B(x,a) = \partial_a A(x,a).$$

然后在 [1, 第 10] 节中证明

$$\|\partial_a B(x,a)\|_F \le \frac{\|\partial_a A(x,a)\|_F}{2\lambda_{\min}(B(x,a))} \le \frac{L_1}{2\sqrt{m}}.$$

于是得到

$$\|B(x,a') - B(x,a)\|_F^2 \le |a'-a|^2 \int_0^1 \|\partial_a B(x,(1-t)a + ta')\|_F^2 \,\mathrm{d}t \le \frac{L_1^2}{4m}|a-a'|^2.$$

对 $x$ 采用相同的方法，可以得到类似的界，最终可得

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{A(x',a')} - \sqrt{A(x,a)}\right)^2\right) \le \frac{L_1^2}{4m}\left(|x-x'|^2 + |a-a'|^2\right).$$

接着，在 $\pi$ 的支撑集上，

$$A(x',a') : \nabla_x^2 h_{a'}(x) + A(x,a) : \nabla_x^2 h_a(x) \le \frac{L_1^2}{4m}p(p-1)|x-x'|^p + \frac{L_1^2}{4m}p(p-1)|x-x'|^{p-2}|a-a'|^2.$$

对第二项应用杨氏不等式，取系数 $q = p/2$ 和 $q' = p/(p-2)$，于是

$$A(x',a') : \nabla_x^2 h_{a'}(x) + A(x,a) : \nabla_x^2 h_a(x) \le \frac{L_1^2(p-1)}{2m}|a-a'|^p + \frac{L_1^2(p-1)^2}{2m}|x-x'|^p. \tag{7}$$

下一步，我们通过观察 $\pi$ 的支撑集上有，来处理漂移项，

$$\begin{aligned} b(x',a')\cdot\nabla_x h_{a',t}(x') + b(x,a)\cdot\nabla_x h_{a,t}(x) &= p\langle b(x',a') - b(x,a), x'-x\rangle |x'-x|^{p-2} \\ &\le pL_1|a-a'||x-x'|^{p-1} + pL_1|x-x'|^p \\ &\le L_1|a-a'|^p + L_1(2p-1)|x-x'|^p, \end{aligned} \tag{8}$$

其中，第一个不等式用到了柯西–施瓦茨不等式，第二个不等式用到了杨氏不等式。采用相同的方法，我们还可以证明

$$(\nabla_x \cdot A(x',a'))\cdot\nabla_x h_{a',t}(x') + (\nabla_x \cdot A(x,a))\cdot\nabla_x h_{a,t}(x) \le L_2|a-a'|^p + L_2(2p-1)|x-x'|^p. \tag{9}$$

最后，将（7）、（8）和（9）合并，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{W}_p^p(\rho(t,\cdot,a'),\rho(t,\cdot,a)) \le C_{1,d,p}\mathcal{W}_p^p(\rho(t,\cdot,a'),\rho(t,\cdot,a)) + C_{2,d,p}|a-a'|^p, \tag{10}$$

其中 $C_{1,d,p} = (L_1+L_2)(2p-1) + \frac{L_1^2(p-1)^2}{2}m$ 以及 $C_{2,d,p} = L_1 + L_2 + L_1^2(p-1)^2 m$。利用格朗沃尔引理的一个直接变体，即可得到该定理的不等式。

## 3 使用同步耦合给出定理 1.1 的第二个证明 ng

设$X_t$与$X'_t$为随机微分方程的解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= (b(X_t,a)+\nabla\cdot A(X_t,a))\,\mathrm{d}t+\sqrt{2}\sigma(X_t,a)\mathrm{d}B_t,\\ \mathrm{d}X'_t &= \left(b(X'_t,a')\nabla\cdot A(X'_t,a')\right)\mathrm{d}t+\sqrt{2}\sigma(t,X'_t,a')\mathrm{d}B_t,\end{aligned}$$

其中 $\sigma(x,a) = \mathrm{p}A(\overline{x,a})$, 并且 $(X_0, X\prime 0)$ 是 $\rho_0(\cdot, a)$ 与 $\rho_0(\cdot,a')$ 之间 $p$-Wasserstein距离的最优耦合。随后 $X_t$与 $X\prime t$之间的耦合使得两个动力学中的底层布朗运动相同。现在我们对 $|X_t - X\prime t|^p$（当 $p \geq 2$ 时）应用伊藤引理，由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}|X_t-X'_t|^p =& p(X_t-X'_t)\cdot(b(X_t,a)-b(X'_t,a'))|X_t-X'_t|^{p-2}\mathrm{d}t\\ &+p(X_t-X'_t)\cdot(\nabla\cdot A(X_t,a)-\nabla\cdot A(X'_t,a'))|X_t-X'_t|^{p-2}\\ &+p(p-2)\left|\left(\sigma(X_t,a)-\sigma(X'_t,a')\right)^T(X_t-X'_t)\right|^2|X_t-X'_t|^{p-4}\mathrm{d}t\\ &+p\|\sigma(X_t,a)-\sigma(X'_t,a')\|_F^2|X_t-X'_t|^{p-2}\mathrm{d}t\\ &+p|X_t-X'_t|^{p-2}(X_t-X'_t)\cdot\left(\sigma(X_t,a)-\sigma(X'_t,a')\right)\mathrm{d}B_t.\end{aligned}$$

取期望得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^p\right] =& \mathbb{E}[|X_0-Y_0|^p]+p\int_0^t\mathbb{E}\left[(X_s-X'_s)\cdot(b(X_s,a)-b(X'_s,a'))|X_s-X'_s|^{p-2}\right]\mathrm{d}s\\ &+p\int_0^t\mathbb{E}\left[(X_s-X'_s)\cdot(\nabla\cdot A(X_s,a)-\nabla\cdot A(X'_s,a'))|X_s-X'_s|^{p-2}\right]\mathrm{d}s\\ &+p(p-2)\int_0^t\mathbb{E}\left[\left|\left(\sigma(X_s,a)-\sigma(X'_s,a')\right)^T(X_s-X'_s)\right|^2|X_s-X'_s|^{p-4}\right]\mathrm{d}s\\ &+p\int_0^t\mathbb{E}\left[\|\sigma(X_s,a)-\sigma(X'_s,a')\|_F^2|X_s-X'_s|^{p-2}\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

特别地,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^p\right] =& p\mathbb{E}\left[(X_t-X'_t)\cdot(b(X_t,a)-b(X'_t,a'))|X_t-X'_t|^{p-2}\right]\\ &+p\mathbb{E}\left[(X_t-X'_t)\cdot(\nabla\cdot A(X_t,a)-\nabla\cdot A(X'_t,a'))|X_t-X'_t|^{p-2}\right]\\ &+p(p-2)\mathbb{E}\left[\left|\left(\sigma(X_t,a)-\sigma(X'_t,a')\right)^T(X_t-X'_t)\right|^2|X_t-X'_t|^{p-4}\right]\\ &+p\mathbb{E}\left[\|\sigma(X_t,a)-\sigma(X'_t,a')\|_F^2|X_t-X'_t|^{p-2}\right].\end{aligned}$$

第一项和第二项可以通过

$$\begin{aligned}p\mathbb{E}\left[(X_t-X'_t)\cdot(b(X_t,a)-b(X'_t,a'))|X_t-X'_t|^{p-2}\right] &\leq pL_1\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^p\right]+pL_1|a-a'|\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^{p-1}\right]\\ &\leq L_1|a-a'|^p+L_1(2p-1)\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^p\right],\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&p\mathbb{E}\left[(X_t-X'_t)\cdot(\nabla\cdot A(X_t,a)-\nabla\cdot A(X'_t,a'))|X_t-X'_t|^{p-2}\right]\\ &\qquad\leq pL_2\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^p\right]+pL_2|a-a'|\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^{p-1}\right]\\ &\qquad\leq L_2|a-a'|^p+L_2(2p-1)\mathbb{E}\left[|X_t-X'_t|^p\right].\end{aligned}\tag{12}$$

接下来，注意到

$$\mathbb{E}\left[\left|\left(\sigma(X_t,a)-\sigma(X_t',a')\right)^T(X_t-X_t')\right|^2|X_t-X_t'|^{p-4}\right]\le\mathbb{E}\left[\|\sigma(X_t,a)-\sigma(X_t',a')\|_F^2|X_t-X_t'|^{p-2}\right],$$

从而

$$\begin{aligned}p(p-2)\mathbb{E}\left[\left|\left(\sigma(X_t,a)-\sigma(X_t',a')\right)^T(X_t-X_t')\right|^2|X_t-X_t'|^{p-4}\right]&\\+p\mathbb{E}\left[\|\sigma(X_t,a)-\sigma(X_t',a')\|_F^2|X_t-X_t'|^{p-2}\right]&\\\le p(p-1)\mathbb{E}\left[\|\sigma(X_t,a)-\sigma(X_t',a')\|_F^2|X_t-X_t'|^{p-2}\right].&\end{aligned}$$

利用关于 $\|\mathrm{p}A(x',a')-\mathrm{p}A(x,a)\|_F^2$ ~~的前一个~~界，~~我们还~~可得到

$$\mathbb{E}\left[\|\sigma(X_t,a)-\sigma(X_t',a')\|_F^2|X_t-X_t'|^{p-2}\right]\le\frac{L_1^2}{4m}\left(\mathbb{E}\left[|X_t-X_t'|^p\right]+|a-a'|^2\mathbb{E}\left[|X_t-X_t'|^{p-2}\right]\right),$$

因此

$$p(p-1)\mathbb{E}\left[\|\sigma(X_t,a)-\sigma(X_t',a')\|_F^2|X_t-X_t'|^{p-2}\right]\le\frac{L_1^2(p-1)}{2m}|a-a'|^p+\frac{L_1^2(p-1)^2}{2m}\mathbb{E}\left[|X_t-X_t'|^p\right].\tag{13}$$

利用（11）、（12）和（13）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left[|X_t-X_t'|^p\right]\le C_{1,d,p}\mathbb{E}\left[|X_t-X_t'|^p\right]\mathrm{d}s+C_{2,d,p}|a-a'|^p.$$

其中$C1,d,p$和 $C2,d,p$是先前得到的相同常数。由此便足以通过格朗沃尔不等式得出结论，因为根据构造， $\mathbb{E}[|X_0-Y_0|^p]=\mathcal{W}_{pp}(\rho_0(\cdot,a'),\rho_0(\cdot,a))$。

# 4 过阻尼朗之万过程的进一步结果

本节中，我们考虑原始偏微分方程的一种细微变体，以突出当底层偏微分方程趋向稳态时可能出现的情况。为清晰起见，我们选择过阻尼朗之万过程，但该方法足够可靠，可适用于多种类似情形，例如[3]中所述的情形。我们来考虑

$$\begin{cases}\partial_t\rho(t,x,a,\beta)=\frac{1}{\beta}\Delta\rho(t,x,a,\beta)+\nabla_x\cdot\left(\rho(t,x,a,\beta)\nabla_xV(x,a)\right),\\\rho(0,x,a,\beta)=\rho_0(x,a,\beta).\end{cases}\tag{14}$$

注意，我们选择的参数是热能 $\beta>0$，而参数 $a\in\mathbb{R}^p$ 仅影响势能 $V$。在下文中，我们假设

$$\begin{aligned}\langle\nabla_xV(x,a)-\nabla_xV(y,a),x-y\rangle&\ge k|x-y|^2,\\|\nabla_xV(x,a)-\nabla_xV(x,a')|&\le L_3|a-a'|,\end{aligned}$$

对于某些 $k$、$L_3>0$。在这一组假设下，我们证明以下结论

**定理 4.1.** 设 $p\in[2,+\infty)$，$a,a'\in\mathbb{R}^p$和 $\beta,\beta'>0$。存在 $\lambda,K_{1,d,p},K_{2,d,p}>0$使得

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_p^p(\rho(t,\cdot,a,\beta),\rho(t,\cdot,a',\beta'))\le\mathcal{W}_p^p(\rho_0(\cdot,a,\beta),\rho_0(\cdot,a',\beta'))e^{-\lambda t}&\\+\frac{1}{\lambda}\left(K_{1,d,p}|a-a'|^p+K_{2,d,p}\left|\sqrt{\frac{2}{\beta}}-\sqrt{\frac{2}{\beta'}}\right|^p\right)\left(1-e^{-\lambda t}\right).&\end{aligned}\tag{15}$$

证明. 我们像之前一样，使用耦合论证。我们引入

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla_x V(t, X_t, a)\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{2}{\beta}}\mathrm{d}B_t,$$
$$\mathrm{d}X'_t = -\nabla_x V(t, X'_t, a')\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\mathrm{d}B_t,$$

对 $|X_t - X_t|^p$ 应用伊藤引理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}|X_t - X'_t|^p =& -p(X_t - X'_t)\cdot(\nabla_x V(X_t, a) - \nabla_x V(X'_t, a'))|X_t - X'_t|^{p-2}\mathrm{d}t \\ &+ \frac{p(p-2+d)}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\beta}} - \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\right|^2 |X_t - X'_t|^{p-2}\mathrm{d}t \\ &+ p|X_t - X'_t|^{p-2}\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}} - \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\right)(X_t - X'_t)\cdot\mathrm{d}B_t.\end{aligned}$$

但是，由凸性可知，

$$-p\mathbb{E}\left[(X_t - X'_t)\cdot(\nabla_x V(X_t, a) - \nabla_x V(X'_t, a))|X_t - X'_t|^{p-2}\right] \le -pk\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^p\right],$$

并且，由于 $\nabla_x V$关于 $a$满足 Lipschitz连续，

$$\begin{aligned}&-p\mathbb{E}\left[(X_t - X'_t)\cdot(\nabla_x V(X'_t, a) - \nabla_x V(X'_t, a'))|X_t - X'_t|^{p-2}\right] \\ &\qquad\le pL_3|a - a'|\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^{p-1}\right] \\ &\qquad\le \frac{pk}{4}\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^p\right] + \frac{(4(p-1))^{p-1}L_3^p}{(pk)^{p-1}}|a - a'|^p,\end{aligned}$$

利用 $ab \le \frac{\varepsilon^q}{q}a^q + \frac{1}{\varepsilon^{q'}q'}b^{q'}$对 $\varepsilon = \left(pm4(p-1)L_3\right)^{\frac{1}{p}}$成立。通过同样的论证可得

$$\begin{aligned}&\frac{dp(p-1)}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\beta}} - \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\right|^2 \mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^{p-2}\right] \\ &\qquad\le \frac{pk}{4}\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^p\right] + (p-1)d\left(\frac{2d(p-1)(p-2)}{k}\right)^{\frac{p}{2}}\left|\sqrt{\frac{2}{\beta}} - \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\right|^p.\end{aligned}$$

综合以上结果，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^p\right] \le -\lambda\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^p\right] + K_{1,d,p}|a - a'|^p + K_{2,d,p}\left|\sqrt{\frac{2}{\beta}} - \sqrt{\frac{2}{\beta'}}\right|^p,$$

其中 $\lambda = \frac{pk}{2}$, $K_{1,d,p} = (4(p-1))^{p-1}L_3^p(pk)^{p-1}$ 以及 $K_{2,d,p} = (p-1)d\left(\frac{2d(p-1)(p-2)}{k}\right)^{\frac{p}{2}}$，这正是我们要证明的不等式。

□

## 致谢

作者谨此感谢 Vincent Calvez 对稿件提出宝贵意见。本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划资助（资助协议编号：865711）。

## 利益冲突

作者不为任何可能从本文中受益的组织工作、提供建议、持有股份或接受资金，并声明除其研究机构外，不隶属于其他任何组织。

## 参考文献

[1] R. Bhatia and P. Rosenthal，如何以及为何求解算子方程$AX - XB = Y$，伦敦数学会会报，29(1):1–21，1997。[2] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré，具有下界黎曼里奇曲率的度量测度空间，《杜克数学杂志》，163(7):1405–1490，2014。[3] F. Bolley、I. Gentil 和 A. Guillin，福克–普朗克方程在 Wasserstein距离下的平衡态收敛，《泛函分析杂志》，263(8):2430–2457，2012。[4] O. G. Ernst、A. Pichler 和 B. Sprungk，风险的Wasserstein敏感性与不确定性传播，《*SIAM/ASA*不确定性量化杂志》，10(3):915–948，2022。[5] S. Roy、S. Pal、A. Manoj、S. Kakarla、J. V. Padilla 和 M. Alajmi，结肠癌参数估计与敏感性分析的福克–普朗克框架，《*AIP*会议论文集》，2522(1):070005，2022。[6] R. Carles、Q. Chauleur 和 G. Ferriere，非线性薛定谔流对非线性幂次的依赖性，预印本，46页，2025。[7] K. Elamvazhuthi、H. Kuiper 和 S. Berman，具有零通量边界条件的一维福克–普朗克方程向平衡态的可控性，载于《*IEEE*第*56*届年度决策与控制会议（*CDC*）论文集》，澳大利亚墨尔本，第2485–2491页，2017。[8] L. Mirsky，约翰·冯·诺伊曼的迹不等式，《数学月刊》，79(4):303–306，1975。[9] A. Eberle，扩散过程的反射耦合与收缩速率，《概率论及相关领域》，166(3):851–886，2016。[10] A. Arnold、S. Jin 和 T. Wöhrer，具有不确定性的演化方程局部敏感性分析中的尖锐衰减估计：从常微分方程到线性动力学方程，《微分方程杂志》，268(3):1156–1204，2020。[11] N. David、A. R. Mészáros 和 F. Santambrogio，存在限制势时赫勒–肖极限的改进收敛速率，《巴黎综合理工学院数学杂志》，13:41–71，2025。[12] C. Villani，《最优传输：旧与新》，《数学科学基础丛书》第338卷，施普林格，柏林，2009。