三维高阶 Nystr¨om 边界积分方程方法的全自动自适应参数选择

Davit Aslanyan，*IEEE* 学生会员，以及 Constantine Sideris，*IEEE* 高级会员

arXiv:2602.03178v1 [math.NA] 3 Feb 2026

摘要——**本文提出一种基于切比雪夫的自适应边界积分方程（CBIE）求解器，用于计算光滑理想电导体（PEC）物体的电磁散射。该方法通过引入（i）统一的自适应求积策略，自动选择近奇异相互作用距离；以及（ii）自适应计算所有自作用和近奇异预计算积分，使其达到指定精度，从而无需手动调节参数。计算采用高斯-克龙罗德（h 自适应）或克伦肖-柯蒂斯（p 自适应）求积规则，并结合消除奇异性的变量变换。在这一框架中，我们研究了 h 自适应和 p 自适应方案，确保该方法在各种几何体上均具备高阶精度和稳健性，同时不会损失效率。针对典型几何体和复杂 CAD 几何体的数值结果表明，与经过最优调参的固定网格 CBIE 实现相比，该自适应求解器具有相当的精度和收敛速度，同时能够自动处理并扩展至电尺寸较大、几何形状复杂的问题。**

索引词—**边界积分方程，Nystr¨om 方法，高阶方法，自适应求积**

I. 引言

EFFICIENT 用于求解麦克斯韦方程组的高效、准确电磁（EM）仿真，对于推动现代技术进步至关重要，包括通信系统、医学成像、纳米光子学和航空航天工程。电磁散射问题只有在某些典型物体（例如无限长圆柱体或球体）的情况下才有解析解。然而，对于大多数我们关注的、具有实际意义且电尺寸较大的物体（例如飞机、电路互连、纳米光子器件），散射问题只能通过数值方法求解，这凸显了高效、准确求解器的重要性和必要性。

有限差分法（FDM， [1]）和有限元法（FEM， [2]）是此类问题的两种数值求解方法。由于相对简单、稳健且易于实现，它们得到了广泛应用。然而，有限差分法和有限元法都是体方法，需要对整个仿真区域进行网格划分。由于导数算子采用低阶近似所产生的局部截断误差，这两种方法还会受到数值色散和精度较低的影响，并且通常需要进行大量几何处理，并构建复杂的体网格，才能准确表示复杂的CAD模型（ [3]–[7]）。

边界积分方程（BIE）方法是另一种广受欢迎的求解方法，相较于有限差分法和有限元法具有诸多优势。BIE 方法只需对不同区域之间的边界进行网格划分（使用二维表面网格表示三维物体），因此，与体网格方法相比，在达到相近精度时，所需的未知量数量可显著减少。由于所需的二维网格划分要简单得多，BIE 方法更容易与 CAD 模型集成，并支持基于 NURBS 的高阶曲线网格 [8]–[12]。由于利用格林函数解析地描述从源点到目标点的传播过程，这类方法不会受到数值色散的影响；此外，通过算法加速和硬件加速等手段进行适当加速后，还能在计算时间和并行性能方面实现很高的效率 [13]–[16]。

矩量法（MoM） [17] 或许是最广为人知的 BIE 离散方法之一，其中，未知表面电流通过基函数展开，并与权函数进行测试。低阶实现中，最著名的是基于 Rao–Wilton–Glisson（RWG）基函数 [18], 的实现；这类方法鲁棒且散度相容，但要刻画具有曲率的几何体或电尺寸较大的表面，就需要非常精细的网格，从而导致较高的计算成本。此外，其解的精度相对于网格分辨率仅呈线性收敛。高阶矩量法格式 [19]通过使用高阶基函数缓解了这一问题，但往往会带来较高的实现复杂度和计算成本，这些成本与 MoM 所需的四维积分有关。

基于Nystr¨om的边界积分方程方法直接离散积分方程，并采用“点匹配”进行测试，从而无需基函数和测试函数。局部修正Nystr¨om（LCN）方法 [20] 已在文献中被广泛用于通过在奇异点附近引入局部核修正来实现高阶收敛。尽管精度较高，这些修正项的构造可能较为复杂、计算效率低下，并且在更高阶时可能数值不稳定，尤其是针对复杂几何上的矢量电磁公式 [21], [22]。

基于切比雪夫的边界积分方程（CBIE）方法是 Nystr¨om 方法 [23], [24] 的一种高效实现。CBIE 方法用一组互不重叠的曲线四边形面片表示所关注物体的几何形状——

作者衷心感谢美国空军科学研究办公室（FA9550-20-1-0087 和 FA9550-25-1-0020）以及美国国家科学基金会（CCF-2047433）的资助。D. Aslanyan 任职于美国南加州大学电气与计算机工程系，地址为美国加利福尼亚州洛杉矶市，邮编 90089；C. Sideris 任职于斯坦福大学电气工程系，地址为美国加利福尼亚州斯坦福市，邮编 94305（电子邮箱：daslanya@usc.edu, sideris@stanford.edu）。

这样即使使用非常粗的网格，也能准确表示复杂曲率。在每个面片上，表面密度未知量定义在二维切比雪夫网格上，该网格由一维切比雪夫多项式的节点作张量积构成。该方法利用未知量位于切比雪夫网格这一特点，使用 F´ejer 第一求积公式，高效计算光滑核对应的相互作用（“远场”相互作用）。然而，当目标点靠近（“近奇异”相互作用）或位于（“奇异”相互作用）积分面片上时，积分算子核可能呈现近奇异或奇异行为。CBIE 方法通过以下方式处理这些相互作用：(i) 应用奇点抵消变量替换（CoV），在细化网格上通过预计算步骤高精度地计算积分权重（积分算子核与切比雪夫多项式的作用）；(ii) 将未知密度展开为切比雪夫多项式；(iii) 将预计算的求积权重与密度相应的切比雪夫系数相乘并累加，从而计算积分算子核对密度的作用。与低阶基于 RWG 的矩量法相比，CBIE 以更少的未知量实现了更高的精度和收敛阶；与 LCN 相比，CBIE 计算修正项的效率显著更高 [25]。

尽管具有这些优势，现有的基于切比雪夫的边界积分方程实现仍存在两个严重缺陷。首先，“近奇异”相互作用距离参数 Δ_{near} 的最优选择可能强烈依赖于具体问题以及离散化方案的选择。 Δ_{near} 决定该方法是采用F´ejer第一求积法则（适用于距离源片超过Δ_{near} 的目标点），还是在其他情况下利用密度的切比雪夫展开以及预计算权重来精确计算积分。参数 Δ_{near} 的取值范围很广，使其选择并不直观，并且需要大量人工调参才能获得最优性能。其次，参数 N_β 的选择（该参数决定细化求积网格在每个 u 方向和 v 方向上、为将预计算权重计算到所需精度所需的积分点数量）同样需要参数调优才能达到最优性能。此外，最优Δ_{near} 和 N_β 在同一几何体上可能随片显著变化，尽管以往的基于切比雪夫的边界积分方程实现均使用全局“最坏情况”取值。这些限制会妨碍鲁棒性与可扩展性，并且对于实际几何体往往甚至会降低计算效率。

近期，在会议论文集中，我们探讨了高斯-克龙罗德 [26] 和克伦肖-柯蒂斯 [27]自适应求积公式，以按所需容差 [28], [29]自动计算 CBIE 方法所需的预计算积分。在本工作中，我们扩展了这些方法，提出了一种新的稳健方法，可自动为每个面片选择 Δ_{near} ，并为 CBIE 框架提出了一种自适应积分策略，从而无需手动调整任何参数。主要贡献如下：

- 一种统一的自适应求积方法，可自动确定最佳的“近奇异”相互作用

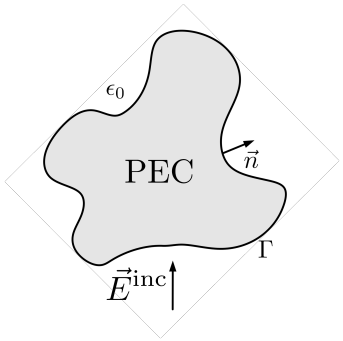


图 1：入射到理想电导体物体上的平面波。

di距离 Δ_{near} f或每个h i积分 i面片上h.

- 结合奇点消解变量替换，使用高斯-克龙罗德和克伦肖-柯蒂斯求积公式，以规定的精度自适应计算所有预计算积分。
- 计算开销可忽略：该方法在各种散射问题上的准确性和效率与现有 CBIE 实现相当，甚至更优。

本文其余部分安排如下：第二节定义了本文采用的积分方程表述，并简要概述 CBIE 方法；第三节介绍两阶段 h自适应积分方法和p自适应积分方法，讨论自适应方案中采用的奇异性消除变量变换，并比较各方法的计算成本。第四节通过数值示例展示所提方法的稳健性。我们在两个理想电导体典型几何体（球体和环形体）以及滑翔机的复杂 CAD 模型上求解磁场积分方程（MFIE）。结果表明，该自适应策略可实现稳健的高阶误差控制 CBIE 求解器，无需任何人工参数调整，并且可扩展至复杂的电大尺寸几何体。值得注意的是，本文介绍的所有技术均可直接应用于其他积分方程表述，包括电场积分方程（EFIE）、组合场积分方程（CFIE），以及用于建模介质材料的表述，例如 PMCHWT 和 M¨uller 表述。

II. 预备知识

A. 积分方程表述

我们考虑三维空间中由闭合理想电导体物体产生的电磁散射问题，这些物体由边界曲面 Γ 包围。物体受到入射平面波照射

$$\vec{E}^{\text{inc}} = e^{ik_0 z}\hat{x},$$

其自由空间波数为 k_0 （图 1）。

为简化起见，我们选择使用磁场积分方程对该问题进行建模，不过也可以轻松采用其他合适的公式，例如电场积分方程或组合场积分方程。该积分方程用感应的

$\vec{}$ $\vec{}$表面电流密度 $J = \hat{}n \times H$表示散射场。

经典磁场积分方程表示为

$$\frac{1}{2}\vec{J} + K[\vec{J}] = \hat{n} \times \vec{H}^{\text{inc}}, \tag{1}$$

其中，算子 K 定义为

$$K[\vec{a}](\mathbf{r}) = \hat{n}(\mathbf{r}) \times \int_{\Gamma} \vec{a}(\mathbf{r}') \times \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d\sigma(\mathbf{r}'). \tag{2}$$

这里，$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e^{-ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$是亥姆霍兹方程在自由空间中的标量格林函数，$\mathbf{r}$ 表示目标点，$\mathbf{r}'$ 是积分变量，∇ 表示关于$\mathbf{r}$的梯度，而 Γ表示物体表面。

根据 [30], , 算子 K 可利用向量微积分恒等式，并将梯度分解为切向分量和法向分量，重新表述。由此可将其表示为弱奇异单层算子和伴随双层算子：

$$S[\vec{a}](\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\vec{a}(\mathbf{r}')\, d\sigma(\mathbf{r}'), \tag{3}$$

$$D[\vec{a}](\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \vec{n}(\mathbf{r})}\vec{a}(\mathbf{r}')\, d\sigma(\mathbf{r}'). \tag{4}$$

采用这种记法，K 可表示为

$$K[\vec{a}](\mathbf{r}) = D[\vec{a}](\mathbf{r}) - \left(\vec{e}^{u}(\mathbf{r})\left[\vec{n}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right] + \vec{e}^{v}(\mathbf{r})\left[\vec{n}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial v}\right]\right) S[\vec{a}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{5}$$

其中，$\vec{e}^{u}$ 和 $\vec{e}^{v}$ 是逆变基向量，$\vec{n}$是外指单位法向量。这种表述的优点在于，使用 CBIE 方法进行离散化时，对于奇异和近奇异相互作用，只需预先计算两个标量算子（S 和 D），而非原本所需的四个量，因此可显著节省存储空间并减少计算开销。

B. 基于切比雪夫的边界积分方程框架

为离散化 MFIE，我们采用文献 [23], [24] 中提出的基于切比雪夫的 Nystr¨om（CBIE）方法。本小节简要回顾 CBIE 框架，并为第 III 节介绍的自适应预计算方法奠定基础。

CBIE 方法将表面 Γ 划分为 M 个互不重叠的四边形面片（图 2）：

$$\Gamma = \bigcup_{p=1}^{M} \Gamma^{p}, \tag{6}$$

其中，每个面片 Γ^{p} 通过映射进行参数化

$$\mathbf{r}_p(u, v) : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \Gamma^{p} \subset \mathbb{R}^3. \tag{7}$$

对于每个曲面片 p，微分几何量定义如下。切向基向量为

$$\vec{e}_u^{p} = \frac{\partial \mathbf{r}_p(u, v)}{\partial u}, \quad \vec{e}_v^{p} = \frac{\partial \mathbf{r}_p(u, v)}{\partial v},$$

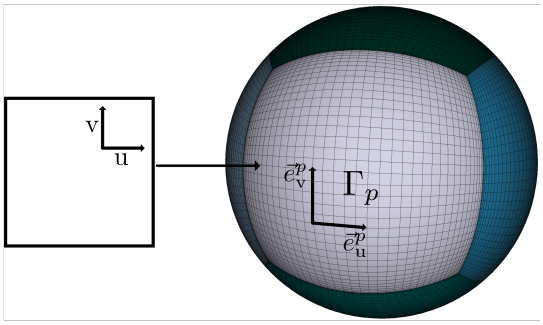


图 2：参数映射与表面剖分。

外指单位法向量为

$$\vec{n}_p(\mathbf{r}) = \frac{\vec{e}_u^{p} \times \vec{e}_v^{p}}{\|\vec{e}_u^{p} \times \vec{e}_v^{p}\|},$$

度量张量为

$$G^{p} = \begin{bmatrix} g_{uu}^{p} & g_{uv}^{p} \\ g_{vu}^{p} & g_{vv}^{p} \end{bmatrix}, \quad g_{ij}^{p} = \vec{e}_i^{p} \cdot \vec{e}_j^{p},\ i, j \in \{u, v\}. \tag{8}$$

曲面元可定义为 $d\sigma^{p} = \sqrt{|G^{p}|}\, du\, dv$，其中 $|G^{p}|$ 表示度量张量的行列式。逆变基向量定义为$\vec{e}_p^{i} = g_p^{ij}\vec{e}_j^{p}$，其中 g_p^{ij} 是 G^{p}的逆矩阵的分量。表面电流密度可展开为

$$\vec{J} = J^{u}\vec{e}_u + J^{v}\vec{e}_v.$$

根据片区参数化，在 Γ^{p} 上定义的任意函数 $f(\mathbf{r})$都对应于 $f(\mathbf{r}^{p}(u, v))$，并在张量积切比雪夫网格 [31]上离散化，该网格定义如下：

$$x_j = \cos\left(\pi \frac{2j+1}{2Q}\right), \quad j = 0, \ldots, Q-1,$$

$$w_j = \frac{2}{Q}\left(1 - 2\sum_{k=1}^{Q/2} \frac{1}{4k^2 - 1}\cos\left(k\pi \frac{2j+1}{Q}\right)\right), \tag{9}$$

其中，$Q \in \{n, m\}$ 分别表示 u 和 v 方向上的离散点数。尽管CBIE框架并不要求这样做，为简便起见，我们选择 $n = m$ 。

核为 $B(\mathbf{r},\mathbf{r}')$的积分算子作用于$f$ 时，可简化为逐片计算的积分之和：

$$I(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\, d\sigma(\mathbf{r}') = \sum_{p=1}^{M} I^{p}(\mathbf{r}), \tag{10}$$

其中

$$I^{p}(\mathbf{r}) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p(u, v))f(\mathbf{r}_p(u, v))\sqrt{|G^{p}|}\, du\, dv. \tag{11}$$

根据$\mathbf{r}$ 与 Γ^{p}的相对位置，核B 可能是光滑的，也可能是奇异的。基于切比雪夫的边界积分方程框架通过分别处理这两种情况来实现高阶精度。

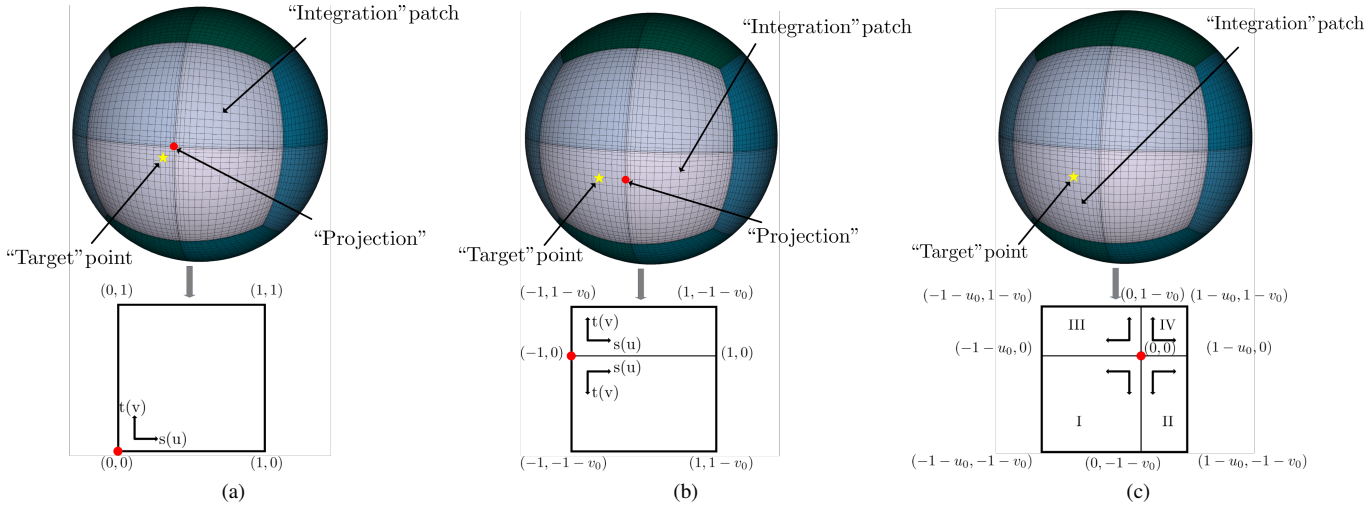


图 3：根据“目标”点和“积分”面片的位置进行奇异变量变换。(a) 积分面片未细分：在单个子面片上应用变量变换；(b) 积分面片沿 v 方向细分：在两个子面片上应用变量变换；(c) 积分面片沿 u 和 v 方向细分：在四个子面片上应用变量变换。注意，在这种情况下，“投影”点与“目标”点重合。

远场相互作用：如果$\mathbf{r}$ 与 Γ^p相距足够远，则使用 F´ejer 的第一求积公式近似该积分：

$$I^p(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} B(\mathbf{r},u_i,v_j) f(u_i,v_j)\sqrt{|G^p(u_i,v_j)|}\, w_i w_j. \tag{12}$$

近场相互作用：如果 $\mathbf{r}$ 位于 Γ^p上或其附近，则将函数 f 展开为切比雪夫多项式：

$$f(u,v) \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} a^p_{i,j} T_i(u) T_j(v), \tag{13}$$

其系数为

$$a^p_{i,j} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{nm} \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{m-1} f(u_l,v_t) T_i(u_l) T_j(v_t), \tag{14}$$

其中，若 $i=0$，则 $\alpha_i = 1$；否则 $\alpha_i = 2$。随后按如下方式计算算子作用：

$$I^p(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} a^p_{i,j}\beta^p_{i,j}, \tag{15}$$

其中$\beta^p_{i,j}$ 为预计算权重：

$$\beta^p_{i,j} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B(\mathbf{r},\mathbf{r}_p(u,v)) T_i(u) T_j(v)\sqrt{|G^p|}\, du\, dv. \tag{16}$$

本文中，磁场积分方程（MFIE）仅通过伴随双层算子、单层算子及其数值导数实现。这最大限度地减少了预计算的数量，核 B 可化简为

$$B(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), & \text{for Eq. (3)},\\ \frac{\partial G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial \vec{n}(\mathbf{r})}, & \text{for Eq. (4)}. \end{cases} \tag{17}$$

III. 自适应积分方法

对于奇异和近奇异相互作用，采用自适应求积，以达到切比雪夫多项式积分方程核预计算所需的精度。将可能靠近某个源片的目标点按距离从近到远排序，并逐一计算其预计算积分，再与采用 F´ejer 求积计算远场相互作用的结果进行比较。一旦 F´ejer 求积相较于精度更高的近场求积方法的误差低于所需容差，其余距离更远的目标点便被视为远场相互作用，不再对其进行预计算。预计算积分的计算误差以及近场与远场目标点判定的误差，均通过计算核作用于一个“辅助”密度函数的结果来估计。由于这些量必须在求解问题之前确定，因此无法获得真实解的面密度。我们提出构造一种基于平面波的“辅助”密度函数，其波数略高于待求解问题的波数，以帮助控制预计算阶段的精度，并以一致的方式确定近远相互作用边界。选择该函数是为了以可靠的启发式方式模拟预期的物理面密度行为，从而为误差估计提供一致的依据。

A. 自适应框架

算法步骤如下：

- 预计算精度：对于每个积分源补丁，按距离对目标点进行排序。对于序列中的每个目标点，针对积分算子核作用于切比雪夫多项式的预计算权重（公式（16）），使用 h自适应高斯–克朗罗求积或 p自适应

Clenshaw-Curtis 求积进行计算。两种自适应求积方案都会迭代细化求积网格，直到满足所需的精度容差。第 III-C 节和第 III-D 节将讨论这两种方案的实现细节。

- 近场/远场交互截断确定：一旦针对每个目标点–积分面片交互的预计算达到所需精度，算法便通过检查计算误差来确定“近场”交互截断距离。该误差定义为“辅助”密度的积分结果（12）与（15）之间的相对误差。若误差低于指定容差，则所有后续目标点（由于上述排序，它们距离积分面片更远）均被视为“远场”交互，并由此确定“近场”交互容差。

- 如果两个投影坐标都（在 10^{-10} 容差范围内）接近任一端点，则不细分该面片（图 3a），
- 如果投影坐标中只有一个在（ 10^{-10}容差）范围内接近任一端点，则将面片分为两个子面板（图 3b），
- 若两个投影坐标均未（在 10^{-10} 容差范围内）接近任一端点，则将该面片划分为四个子面板（图3c）。

尽管高斯–克朗罗求积无需修改即可对弱端点奇异性进行积分，但引入该变量变换可通过平滑被积函数来提高其效率。对于Clenshaw-Curtis求积，变量变换不可或缺，因为一旦核奇异性被平滑 [23]，极坐标-矩形积分的收敛速度会显著加快。重要的是，两种求积方法始终应用于相同的经变量变换的子面片，以确保两种方案之间的一致性。

B. 奇异性消解变量变换

为有效处理当“目标”点位于积分面片上或附近时出现的算子奇异点，我们采用以点（u_0, v_0）为中心的正则化 p 阶变量变换（式18）：

$$s = \eta_s^q(u), \quad t = \eta_t^q(v), \tag{18}$$

其中 η^q 的选取使其前 $p-1$ 阶导数在原点处为零。求积节点在奇异点周围的这种聚集使被积函数正则化并加速收敛。

点 $(u_0,\ v_0)$ 由“目标”点相对于积分面片的位置决定。当观测点位于积分面片上时，$(u_0,\ v_0)$ 设为观测点本身，因为 $|r - r'| \to 0$ 如 $r \to r'$。当“目标”点不在积分面片上，但距离积分面片很近，以致核呈现近奇异行为时，$(u_0,\ v_0)$ 对应于积分面片上与“目标”点欧几里得距离最小的点。

每个积分面片最多细分为四个子面片，并将 $(u_0,\ v_0)$ 映射到每个子面片的原点。如果将积分面片细分为四个子面片，则变量变换（图 3）的形式为：

$$s = \begin{cases} u^p(-u_0 - 1) + u_0 & \text{Interval I,} \\ u^p(1 - u_0) + u_0 & \text{Interval II,} \\ u^p(-u_0 - 1) + u_0 & \text{Interval III,} \\ u^p(1 - u_0) + u_0 & \text{Interval IV,} \end{cases} \tag{19}$$

and

$$t = \begin{cases} v^p(-v_0 - 1) + v_0 & \text{Interval I,} \\ v^p(-v_0 - 1) + v_0 & \text{Interval II,} \\ v^p(1 - v_0) + v_0 & \text{Interval III,} \\ v^p(1 - v_0) + v_0 & \text{Interval IV.} \end{cases} \tag{20}$$

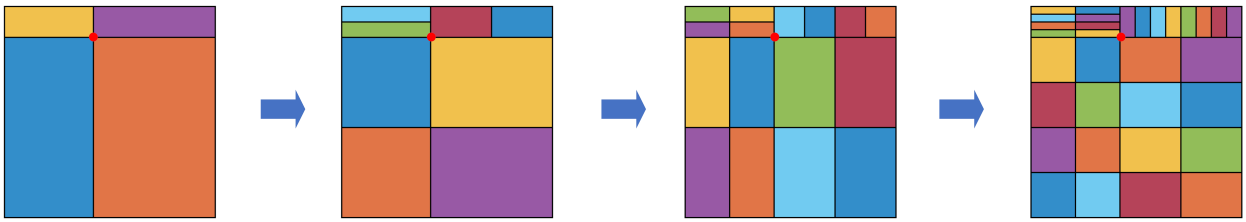
自适应积分方法根据点 $(u_0,\ v_0)$ 的坐标与定义域端点 $\{-1, 1\}$ 之间的距离，决定是否将积分面片细分为一个、两个或四个子面片：

C. 高斯–克朗罗求积

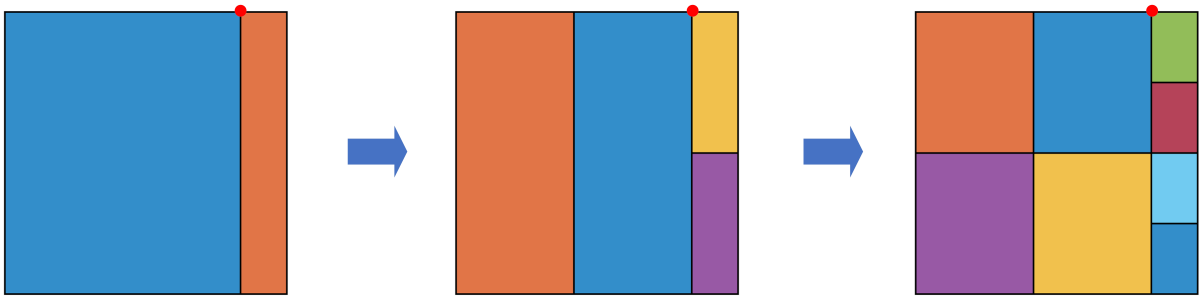
h自适应策略基于嵌套的高斯–克朗罗（GK）求积规则 [26]。在一维情形下，较低阶的Gauss（含 N_G 个点）与较高阶的Kronrod（含 N_K个点）求积规则共享节点，其中Gauss节点对应于Kronrod求积规则中每隔一个的节点。这使得可利用Kronrod节点处相同的核函数求值，同时使用Gauss与Kronrod求积公式对积分进行数值计算。由于Kronrod求积规则的阶数更高，二者之差可在几乎不增加额外代价的情况下给出误差估计。通过采用两个一维求积公式的张量积，该方法可扩展至二维积分。根据每个方向采用Gauss（G）还是Kronrod（K）求积规则，可得到（u, v）中积分的四个估计： $I_{GG},\ I_{GK},\ I_{KG},\ I_{KK}$，其中下标表示各方向所采用的是 Gauss （ G ）还是 Kronrod（K）求积规则 [28]。由于预期最为精确， I_{KK} 估计被用作参考值。该算法迭代细分每个积分面板，并对所得每个子面板应用同阶高斯–克朗罗求积规则，直至满足全局绝对和/或相对误差容差，或达到积分面板的最大数量：

$$|I_{KK} - I_{GG}| < \max(\text{tol}_{\text{abs}}, \text{tol}_{\text{rel}} \cdot |I_{KK}|).$$

传统的 GK 求积实现会将每个积分面板均匀划分为 4 个子面板。然而，这种方法没有利用所有可用信息（即估计值 I_{GK} 和 I_{KG}）。我们的实现会考量误差估计 $|I_{KK} - I_{GK}|$ 和 $|I_{KK} - I_{KG}|$，以确定哪个方向的精度较差，并优先沿该方向细分，从而采用各向异性自适应积分方法。这样可以更高效地分配计算资源，因为各向同性方法总是沿两个方向同时细分，即使其中一个方向已达到规定的误差容差。



(a) 奇异相互作用：奇异点用红色圆圈标出



(b) 近奇异相互作用：奇异点用红色圆圈标出

图 4：使用高斯–克朗罗求积计算预计算积分时所采用的区间划分示例

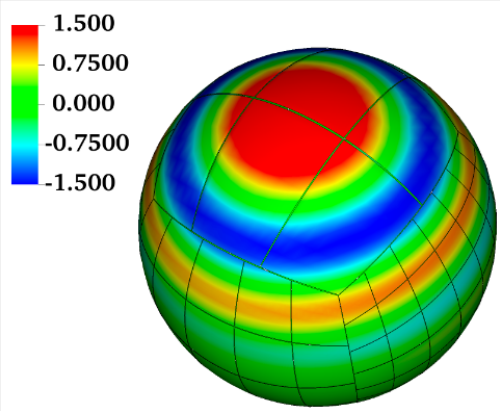


图 5：直径为 $D = 4\lambda$ 的理想导体球上求得的表面电流密度的实部 J_x 。

积分 I_{XY} 定义为

$$I_{XY}(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \beta_{i,j}^{XY},$$

其中， $X, Y \in \{G, K\}$, $a_{i,j}$ 是“辅助”密度的切比雪夫展开系数，而 $\beta_i^{XY}{}_{,j}$ 表示预计算积分 (16) 的结果。图 4a 和图 4b 展示了自奇异相互作用和近奇异相互作用的实现工作流程示例。

D. 克伦肖–柯蒂斯求积

p自适应策略基于 F´ejer 的第二类求积公式，所用节点与 Clenshaw-Curtis 求积的节点相同，但端点 [27] 除外。求积节点的排列方式使得 $2N$ 阶求积公式的每隔一个节点都与 N 阶求积公式的节点重合。这使得我们能够采用自适应积分策略，即高阶求积公式的节点可以复用低阶求积公式的节点。在一维情况下，先用 N (I_1) 阶求积公式近似积分，再用 $2N$ (I_2) 阶求积公式近似积分。将误差估计 $|I_2 - I_1|$ 与容差条件进行比较：

$$|I_2 - I_1| < \max(\text{tol}_{\text{abs}}, \text{tol}_{\text{rel}} \cdot |I_2|).$$

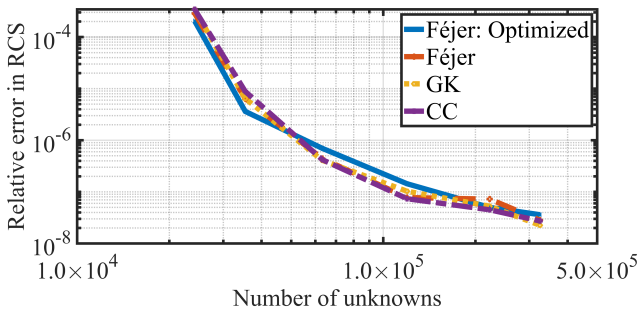
如果满足误差容差，则选择高阶求积公式的结果 I_2 。否则，算法会反复细化求积公式（每一步将节点数加倍，使得第 k次迭代有 $2^{k-1}N$ 个点），并与上一次迭代的结果进行比较，直到达到容差或超过最大细化深度 p。第 k次迭代的积分 I_k 定义为

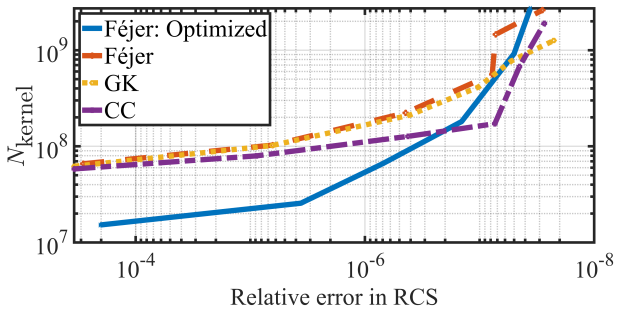
$$I_k(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \beta_{i,j}^{k},$$

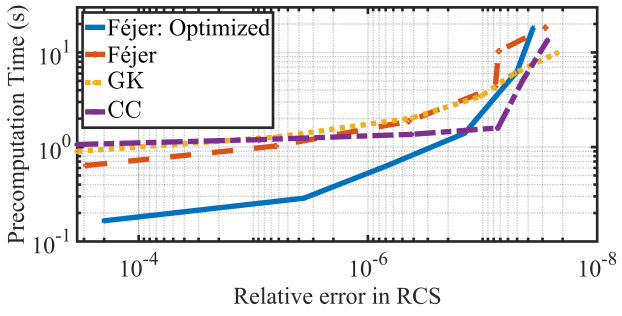
其中$a_{i,j}$ 为“辅助”密度的切比雪夫展开系数，$\beta_{i,j}^{k}$ 表示预计算积分(16)的结果。

IV. 数值结果

许多现实中的电磁散射问题涉及几何形状复杂的物体，无法使用尺寸均匀的面片进行离散化 Γ_p ，并且可能需要使用“有缺陷”的网格，其中相邻面片的边缘可能无法完全吻合。Nystr¨om 方法可以轻松处理这类几何表示。本节将通过数值验证，展示所提出的自适应积分方法在以下对象上的表现：







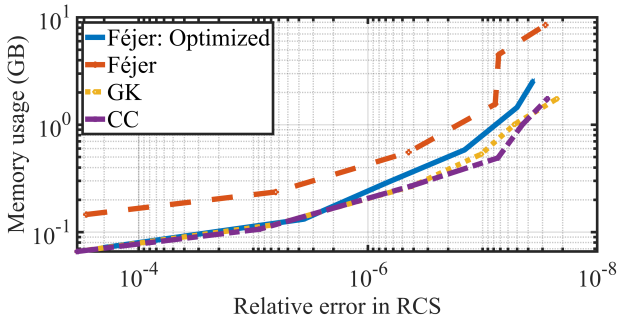
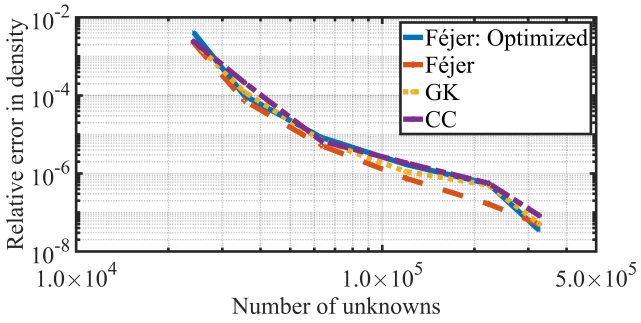
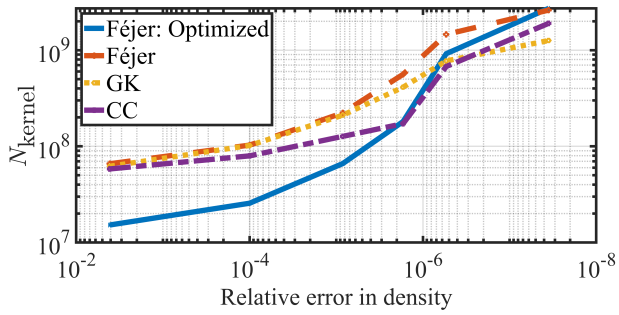
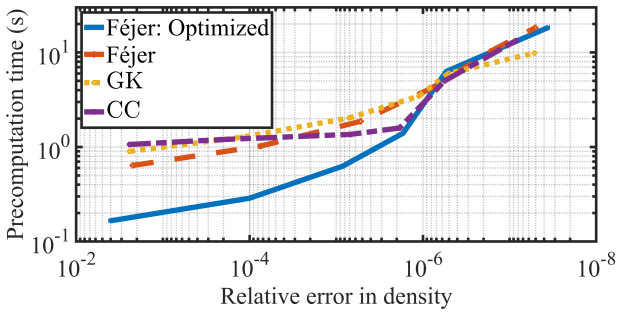


图 6：直径为$D = 4\lambda$ 的非均匀剖分理想导体球的散射。雷达散射截面测量值在 $\theta \in [0°, 180°]$，$\varphi = 90°$ 处的收敛情况，分别对应于 (a) 未知量的数量，(b) 核函数求值次数，(c) 预计算时间，(d) 预计算内存用量。







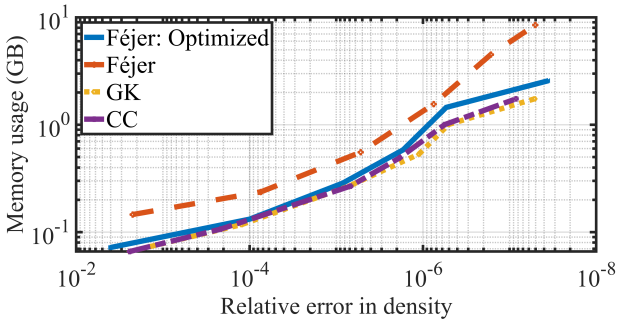


图 7：直径为$D = 4\lambda$ 的非均匀剖分理想导体球的散射。表面电流密度的收敛情况，分别对应于 (a) 未知量的数量，(b) 核函数求值次数，(c) 预计算时间，(d) 预计算内存用量。

三种复杂度递增的几何体：非均匀离散的理想电导体球体、均匀网格剖分的环形散射体，以及滑翔机的 CAD 模型。一个入射平面波

采用波数为 $k_{\text{aux}} = 1.1 \cdot k_0$ 的激励作为误差估计的“辅助”密度。系数可根据问题的复杂度进行修改

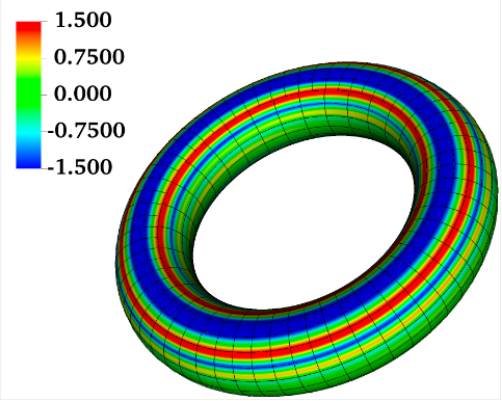


图8：具有 $D = 26.2\lambda$ “外侧”直径和 $d = 15.7\lambda$ “内侧”直径的理想电导体环面上 J_x 求解所得表面电流密度的实部。

以及几何体；然而，对于所研究的全部三个物体，所选系数均表现出稳健的性能。所有仿真均在配备两颗 AMD EPYC 7763 处理器（共 128 个核心）的服务器上运行。

第一个示例是直径为a D =4λ 的理想导体球（图5），用作验证算例。球形散射体的散射问题具有Mie级数形式的闭式解析解，将用作参考。图6和图7展示了雷达散射截面（RCS）与表面电流密度关于未知量数目、核函数求值次数、预计算时间以及用于存储预计算的内存（RAM）用量的收敛情况。

我们比较了四种预计算策略的结果：“F´ejer：优化”、“F´ejer”、“GK”和“CC”。“F´ejer：优化”表示一种固定网格“F´ejer”求积设置，其中奇异细化网格和近相互作用阈值 Δ_{near} 均已在多次仿真运行中经过细致的人工调优。这代表固定求积方法在时间上最高效的实现，因为它采用了在给定离散化下仍能使精度保持在最佳可能精度0.5位以内的最粗网格和最小的Δ_{near} 。标准“F´ejer”在所有离散化中使用相同的固定求积设置和 Δ_{near}。这些设置针对单一离散化进行了优化（其中表面由1624个四边形面片和324800个未知量表示，并且是该散射体所考虑的最精细离散化），随后被重复使用，代表实践中更为典型的使用场景。虽然标准“F´ejer”方法预期能达到与“优化”版本相同的精度，但预期其计算效率较低。GK和CC分别表示采用所提出的 h自适应Gauss-Kronrod和p自适应Clenshaw-Curtis积分方法得到的结果，如第III-C节和第III-D节所述。

结果表明，自适应方法“GK”和“CC”在 RCS 和表面密度方面达到优于 $4 \cdot 10^{-8}$ 的相对误差，且表现不逊于“F´ejer：优化”情形。这一点尤为重要，因为后者假设事先已知最优调优参数，而这些参数

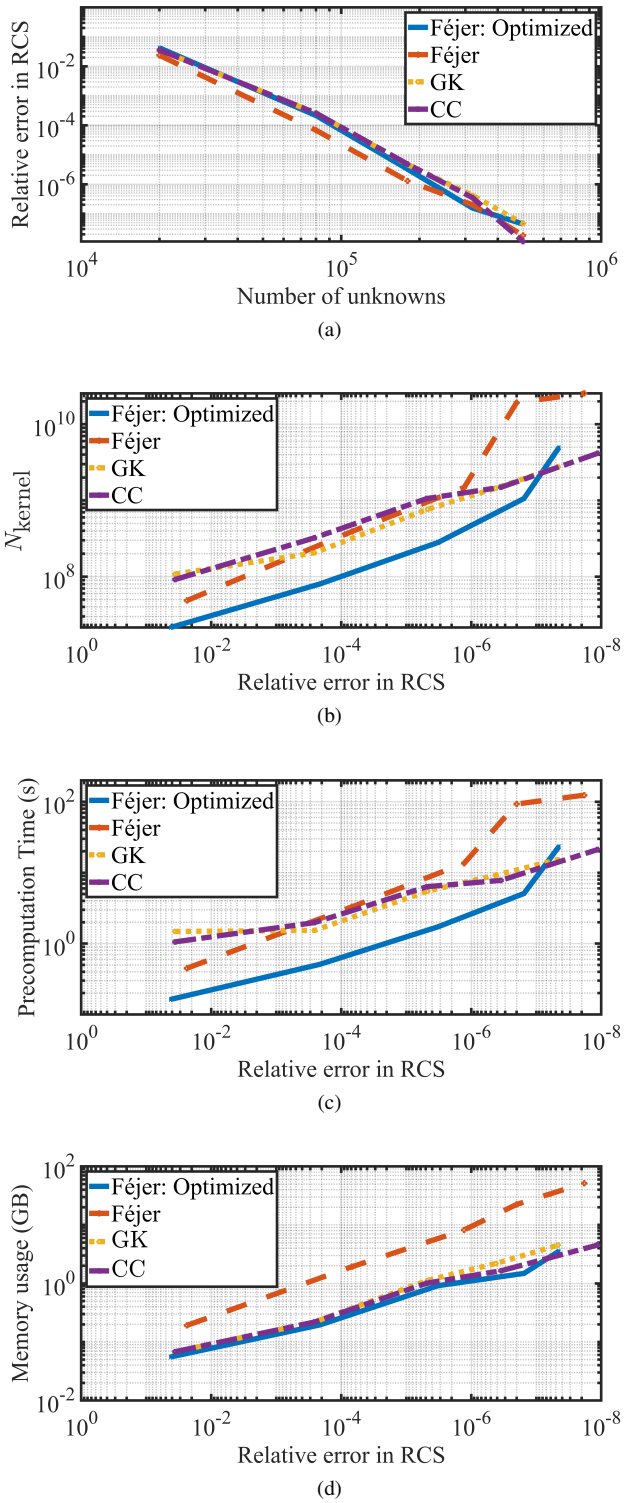


图 9：均匀分割的理想电导体环形体的散射，其 $D = 26.2\lambda$“外部”直径和 $d = 15.7\lambda$ “内部”直径。雷达散射截面测量值在 $\theta \in [0°, 180°]$，$\varphi = 90°$ 处的收敛情况，分别相对于 (a) 未知量数量、(b) 核函数求值次数、(c) 预计算时间、(d) 预计算内存用量。

需要在调整参数以优化性能的同时反复求解该问题。这种方法

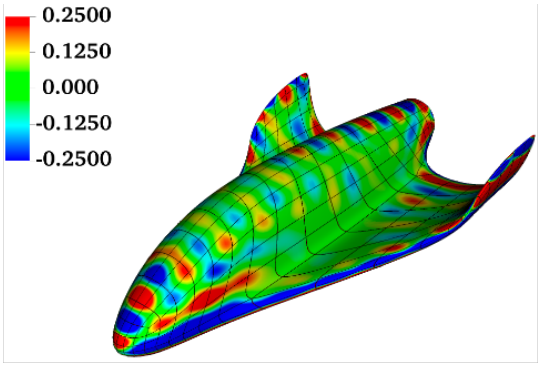


图 10： J_x 求得的翼展为 $W = 7.5\lambda$ 、长度为 $L = 10\lambda$ 的理想电导体 PEC 滑翔机表面电流密度实部。

在实际场景中完全不可行。与“F´ejer”基准所描述的实际应用场景相比，自适应方法减少了奇异核函数求值次数、预计算时间和内存用量，同时不牺牲任何精度。

接下来，我们考虑一个外径为 $D = 26.2\lambda$ 、内径为 $d = 15.7\lambda$ 的环面散射体 (8)。图 9 展示了环面 PEC 散射体的 RCS 收敛情况。该几何体没有解析解，因此使用高度离散化的数值解作为参考。对于环面散射体，“GK”和“CC”均表现出色。它们达到的精度与固定网格方法相近，而运行时间相当（对于“F´ejer: Optimized”）或更短（对于更实用的“F´ejer”用例）。尽管经过精心优化的固定网格方法偶尔能以略短的运行时间（约 1–2 秒）达到相近的精度，但自适应方法具有更好的泛化能力，只需运行一次即可达到所需精度，也无需针对具体问题调整参数。

第三个示例涉及一个滑翔机的CAD模型，其 $W = 7.5\lambda$ 翼展和 $L = 10\lambda$ 长度。该模型具有显著的几何特征，包括排气口附近的尖锐边缘。如图11所示，自适应方法保持了稳健的收敛性，且精度与固定网格方法相近。手动调参的固定网格方法偶尔也能达到相当的精度，且耗时相近；然而，对于复杂情形，自适应方法在实际应用中可将耗时最多缩短至原来的八分之一。所有方法的精度都限制在约5位有效数字，这归因于尖锐边缘处的奇异点对高阶方法构成了挑战。未来的工作将通过对积分方程算子进行正则化，并利用 [32], [33]中介绍的角点奇异性处理技术，解决这些局限。我们通过将采用自适应积分方法的CBIE求解器计算得到的RCS方向图与 $\phi = 90^\circ$ 处的θ 进行比较，验证了结果，并在图12中将其与商业软件Ansys HFSS和Altair FEKO进行对比。三种求解器生成的方向图高度吻合。

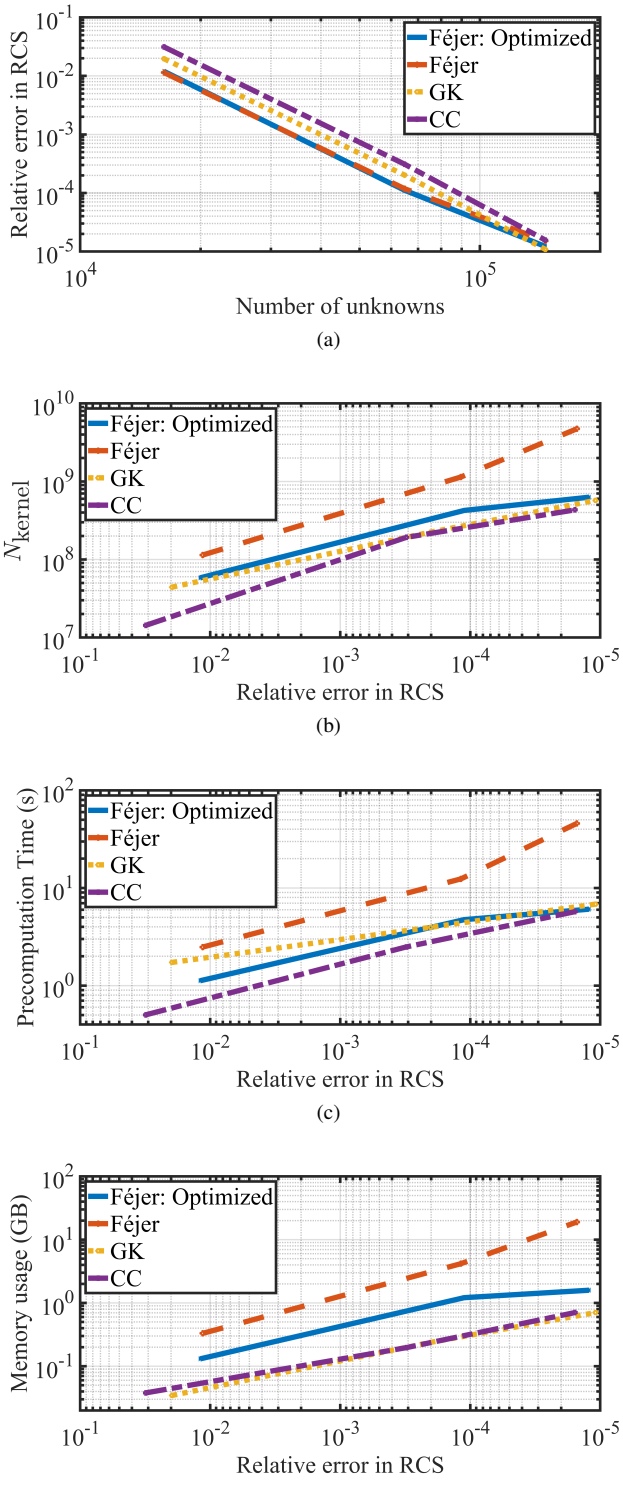


图11：翼展为 $L = 10\lambda$、长度为 $W = 7.5\lambda$ 的理想电导体CAD滑翔机模型的散射。在 $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$， $\varphi = 90^\circ$ 处雷达散射截面测量的收敛性相对于(a)未知量数量、(b)核求值次数、(c)预计算时间以及(d)预计算内存用量。

图13描述了在所考虑的各几何体中，每个 Δ_{near}参数对应的积分分片数量。 Δ_{near} 被选取由自适应算法确定，单位为波长λ。颜色映射中较深的颜色表示较大的 Δ_{near}

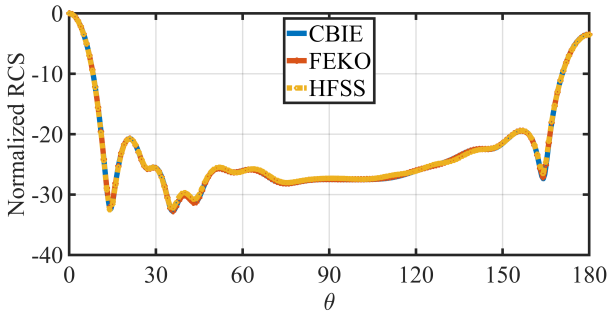
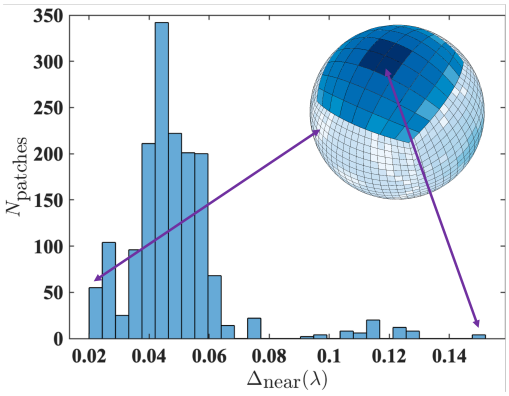


图 12：使用 Ansys HFSS、Altair FEKO 和自适应 CBIE 方法计算的 PEC滑翔机模型在 $\phi = 90°$ 处的 RCS。

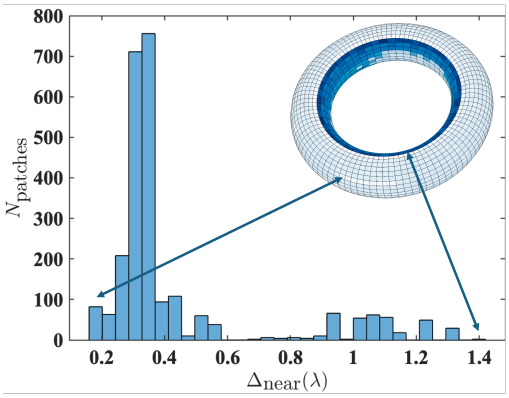
值。对于这些面片，更多目标点被视为“近奇异点”，需要使用奇异积分方法才能达到所需的精度。这需要更多内存用量来存储预计算权重。

图 13a 展示了采用 1624 个面片的球体参数化分布。大多数积分分片所需的 Δ_{near} 值较小，且紧密集中在 0.04λ值附近。这可以归因于物体的 C^{∞} 连续性、物体恒定的高斯曲率，以及用于表示几何体的大量面片。少数离群值对应于尺寸明显大于其余面片的面片（这是使用劣质网格所致）。固定网格 F´ejer 实现对所有积分面片使用相同的 Δ_{near} 参数；如果该参数选择不当，就可能限制精度（所选 Δ_{near} 过小）或导致效率低下（所选 Δ_{near} 过大）。自适应方法会自动为每个面片选择所需的 Δ_{near} ；与实际应用中固定网格 F´ejer 方法相比，对于理想电导体球体散射体，最多可节省 4 倍内存用量（图 6d 和图 7d）。

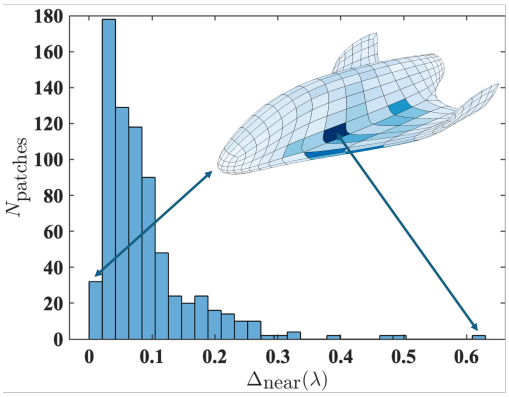
图 13b 展示了含 2500 个面片的环形体参数化的分布。对于这种参数化， Δ_{near} 取值范围较大，这可以用物体曲率的变化来解释。环形体“外侧”周边的曲率小于“内侧”周边的曲率，这也解释了为什么环形体“内侧”表面的面片需要更大的 Δ_{near} 值。对于此情况，与之前的固定 F´ejer 方法相比，内存用量最多可节省 11 倍（图 9d）。图 13c 展示了含 729 个面片的滑翔机参数化的分布。对于这种复杂几何体，与经过人工调参的固定“F´ejer 最佳”方法相比，自适应方法最多可节省 2 倍内存用量；与更实用的固定 F´ejer 方法相比，内存用量最多可节省 27 倍（图 11d）。



(a)



(b)



(c)

图 13：积分分片的 Δ_{near} 参数分布：(a) 理想导体球，(b) 理想电导体环面，(c) PEC滑翔机散射体。

V. 结论

本文提出了一种自适应方法，使高阶 Nystr¨om 方法无需手动调整任何参数。我们通过将这些技术融入基于切比雪夫的离散化来展示其效果

该方法用于求解三维金属散射体的麦克斯韦方程。该方法采用高斯-克龙罗德或克伦肖-柯蒂斯自适应求积公式，并结合消除奇异性的变量变换，从而自动达到解所需的精度。该方法能够自动计算奇异及近奇异预计算积分，使其达到指定精度，并针对每个积分面片单独确定近场/远场相互作用截断距离。该方法用于求解球体、环形体以及复杂 CAD 滑翔机理想电导体模型上的散射问题。文中给出的三个示例结果表明，

无论采用高斯-克龙罗德还是克伦肖-柯蒂斯求积公式，所提出的方法都表现出相近的性能。结果证实，所提出的方法无需进行任何几何特定校准，即可实现与固定网格CBIE方法相当的高阶精度和计算效率。未来的工作将致力于处理尖锐边缘奇异性，以进一步拓展该方法在更广泛散射问题中的适用性。

参考文献

[1] P.-b. Zhou，《有限差分法》，载于电磁场数值分析，第63–94页，Springer，1993年。[2] G. Dhatt、E. Lefranc,ois 和 G. Touzot，有限元法。John Wiley & Sons，2012年。[3] G. S. Warren 和 W. R. Scott Jr，《使用三角形边元的有限元法中的数值色散》，微波与光学技术快报，第9卷，第6期，第315–319页，1995年。[4] G. S. Warren 和 W. Scott，《有限元法中高阶节点元的数值色散》，*IEEE*天线与传播汇刊，第44卷，第3期，第317–320页，2002年。[5] J. A. Pereda、O. Garcia、A. Vegas 和 A. Prieto，《有损介质中FDTD技术的数值色散与稳定性分析》，*IEEE*微波与导波快报，第8卷，第7期，第245–247页，1998年。[6] F. Teixeira、C. Sarris、Y. Zhang、D.-Y. Na、J.-P. Berenger、Y. Su、M. Okoniewski、W. Chew、V. Backman 和 J. J. Simpson，《有限差分时域方法》，*Nature Reviews Methods Primers*，第3卷，第1期，第75页，2023年。[7] D. Sun、Q. Zhong、W. Wang、Z. Cui、C. Du 和 Z. Liu，《基于CAD模型及ASE格式的车辆多材料FDTD建模》，载于*2024*年第*14*届天线、传播与电磁理论国际研讨会（*ISAPE*），第1–4页，2024年。[8] K. Tanaka、M. Tanaka 和 T. Omoya，《用于CAD和近场光学仿真的边界积分方程》，载于*IEEE*天线与传播学会国际研讨会，*1996*年文摘，第3卷，第1890–1893页，第3卷，1996年。[9] J. Hu 和 C. Sideris，《一种基于Nystr¨om的高阶方案，可显式保证电场积分方程中的表面密度连续性》，*IEEE*天线与无线传播快报，第23卷，第9期，第2633–2637页，2024年。[10] J. Hu、E. Sever、O. Babazadeh、I. Jeffrey、V. Okhmatovski 和 C. Sideris，《采用基于切比雪夫的Nystr¨om边界积分方程方法求解麦克斯韦方程组的H矩阵加速直接矩阵求解器》，*IEEE*天线与传播开放期刊，第6卷，180，2025年1，171第。页–。[11] R. Simpson、Z. Liu、R. V´azquez 和 J. Evans，《采用相容B样条离散化的电磁散射等几何边界元法》，计算物理学杂志，第362卷，第264–289页，2018年。[12] K. Li 和 X. Qian，《基于边界积分的等几何分析与形状优化》，计算机辅助设计，第43卷，第11期，第1427–1437页，2011年。2011年实体与物理建模。[13] J. M. Song 和 W. C. Chew，《用于求解电磁散射组合场积分方程的多层快速多极子算法》，微波与光学技术快报，第10卷，19，1995年1，14第。页–。[14] J. Song、C.-C. Lu 和 W. C. Chew，《用于大型复杂目标电磁散射的多层快速多极子算法》，*IEEE*天线与传播汇刊，第45卷，1493，1997年10，1488第。页–。[15] J. Paul 和 C. Sideris，《采用插值因子化格林函数法加速求解三维麦克斯韦方程组的边界积分》，*IEEE*天线与传播汇刊，第73卷，第6期，第3814–3826页，2025年。[16] O. P. Bruno 和 L. A. Kunyansky，《求解表面散射问题的快速高阶算法：基本实现、测试与应用》，计算物理学杂志，第169卷，第1期，第80–110页，2001年。[17] R. F. Harrington，矩量法场计算。Wiley-IEEE Press，1993年。[18] S. Rao、D. Wilton 和 A. Glisson，《任意形状表面上的电磁散射》，*IEEE*天线与传播汇刊，第30卷，第3期，第409–418页，1982年。

[19] A. F. Peterson、S. L. Ray、R. Mittra、电气与电子工程师学会，电磁学计算方法，第351卷。IEEE出版社，纽约，1998年。[20] A. F. Peterson 和 M. M. Bibby，局部修正*Nystr¨om*方法导论，第25卷。Morgan & Claypool Publishers，2010年。[21] M. Shafieipour，《采用局部修正Nyström方法对电尺寸较大的目标进行高效、误差可控的高阶电磁散射建模》，2014年。[22] M. Shafieipour、I. Jeffrey、J. Aronsson 和 V. I. Okhmatovski，《RWG矩量法与局部修正Nystr¨om方法求解电场积分方程的等价性》，*IEEE*天线与传播汇刊，第62卷，782，2013年2，772第。页–。[23] O. P. Bruno 和 E. Garza，《基于切比雪夫的矩形-极坐标积分求解器，用于求解由不重叠曲面片描述的几何体的散射问题》，计算物理学杂志，第421卷，第109740页，2020年。[24] J. Hu、E. Garza 和 C. Sideris，《一种基于切比雪夫的高阶精度麦克斯韦方程组积分方程求解器》，*IEEE*天线与传播汇刊，第69卷，第9期，第5790–5800页，2021年。[25] J. Hu、E. Sever、O. Babazadeh、R. Gholami、V. Okhmatovski 和 C. Sideris，《采用基于切比雪夫的Nystr¨om边界积分方程方法的H矩阵加速直接矩阵求解器》，载于*2022*年*IEEE/MTT-S*国际微波研讨会（*IMS 2022*），第16–19页，IEEE，2022年。[26] S. E. Notaris，《高斯-克朗罗德求积公式：五十年研究综述》，电子数值分析汇刊，第45卷，404，2016年371页–。[27] C. W. Clenshaw 和 A. R. Curtis，《自动计算机上的数值积分方法》，数值数学，第2卷，第1期，第197–205页，1960年。[28] D. Aslanyan 和 C. Sideris，《基于切比雪夫的边界积分方程方法的自适应求积》，载于*2023*年*IEEE*天线与传播国际研讨会暨*USNC-URSI*无线电科学会议（*USNC-URSI*），第1209–1210页，2023年。[29] D. Aslanyan 和 C. Sideris，《基于切比雪夫的边界积分方程方法的p自适应求积》，载于*2023*年国际应用计算电磁学学会研讨会（*ACES*），第1 2页，2023年–。[30] E. Garza，用于光子器件仿真与设计的边界积分方程方法。加州理工学院，2020年。[31] J. P. Boyd，切比雪夫与傅里叶谱方法。Courier Corporation，2001年。[32] C. Sideris、D. Aslanyan 和 O. P. Bruno，《角点处具有无界解的散射积分方程的高阶精度求解》，计算物理学杂志，第114213页，2025年。[33] D. Aslanyan、O. P. Bruno 和 C. Sideris，《用于求解含角点区域散射问题的高阶精度组合场积分方程求解器》，载于*2025*年国际应用计算电磁学学会研讨会（*ACES*），第1–2页，2025年。