arXiv:2602.03179v1 [math.AC] 3 Feb 2026

赋值插值存在性的代数方法

SHIJIE BAO、QI'AN GUAN、ZHITONG MI 和 ZHENG YUAN

Abstract. 本文提出一种针对赋值插值问题的代数方法，恢复并推广了作者此前在复解析情形中已知的刻画。我们利用渐近Samuel函数来刻画赋值插值存在的条件。此外，我们还刻画了无限赋值插值问题中解的存在条件。

Contents

1. 引言 1 2. 赋值与渐近Samuel函数 3 3. 有限赋值插值的存在性 6 4. 无限赋值插值的存在性 11 5. 复解析情形 15 参考文献 18

1. 引言

设 R 是一个等特征零、维数为 n的优正则整环。

令 $\mathfrak{a}_1$，……，$\mathfrak{a}_r$ 为 r 上的非零理想，其中 R，并令 b_1，……，$b_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。我们考虑下面的赋值插值问题，作者曾在复解析情形下研究过该问题（例如 [BGMY25，定理 1.2]讨论了 $R = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\text{时的情形，}o}$ 即全纯芽环）：

问题 1.1。是否存在关于赋值 v 在 R 上的存在性给出充要条件，使得 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对 $j = 1$，……，r成立？

为解释本文的结果，我们引入一些记号。设 $\mathfrak{a}$ 是 X上的一个理想，且 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$。记 $(\lambda \cdot \mathfrak{a})_\bullet = \big((\lambda \cdot \mathfrak{a})_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$为 滤过 （参见第 2.2节），其各项均为理想：

$$(\lambda \cdot \mathfrak{a})_m = \begin{cases} R & \lambda = 0 \\ \mathfrak{a}^{\lceil \lambda m \rceil} & 0 < \lambda < \infty \\ 0 & \lambda = \infty \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}.$$

如果 $(\mathfrak{b}_1)_\bullet, \ldots, (\mathfrak{b}_s)_\bullet$ 是 R 中理想的滤过，那么这些滤过的求和 $\mathfrak{c}_\bullet := \sum (\mathfrak{b}_i)_\bullet$ 是如下定义的一个滤过：

$$\mathfrak{c}_m = \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s=m \\ m_i\in\mathbb{N}}} (\mathfrak{b}_1)_{m_1} \cdots (\mathfrak{b}_s)_{m_s}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Date：2026年2月4日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13A18、14F18、32S05。
Key words and phrases. 赋值、渐近Samuelfunction、滤过、乘子理想。

现在我们回到赋值插值问题。对于理想 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$和非负实数 $b_1, \ldots, b_r$，如果 b_j全为零，那么我们可以直接在 R上选取平凡赋值，因此我们只考虑其中至少有一个非零的情形。因此，可以假设 $\sum_{b_j>0} \mathfrak{a}_j \neq R$，否则在 R 上的任何赋值v 都 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对所有 j (参见第 2.1节)。

考虑该滤过

$$I_\bullet := \left(\frac{1}{b_1} \cdot \mathfrak{a}_1\right)_\bullet + \cdots + \left(\frac{1}{b_r} \cdot \mathfrak{a}_r\right)_\bullet.$$

遵循 Cutkosky 与 Peaharaj [CP24，定义 3。5]，该渐近*Samuel*函数与该滤过相关联，定义如下。对任意理想 $\mathfrak{a}$（属于 R），令

$$\overline{\nu}_{I_\bullet}(\mathfrak{a}) := \lim_{k} \frac{\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}^k)}{k} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\},$$

其中 $\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}) := \sup\{m \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}^k \subseteq I_m\}$ 表示阶函数（关于 $I_\bullet$）。该构造推广了经典渐近 Samuel 函数 [Sa52]，并作为在复解析情形中引入的相对型的代数类比[Ras06]（参见第 5 节）。

定理 1.2. 以下三个陈述等价。

（1）存在一个赋值 v 于 R 上，使得 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对 $j = 1$，……，r 成立。（2）存在一个准单项式赋值 v 于 R 上，使得 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对$j = 1$，……，r 成立。（3）等式 $\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) = \sum_{j=1}^r b_j$ 成立。

事实上，前两个陈述等价，以及存在满足相同插值条件的*Zhou* 赋值 （参见 [BGMY24、BGZ25]）这一等价性，已在 [BGMY25附录 A 中证明。1]。

此外，对于无穷赋值插值问题，我们在本文中运用赋值逼近方法证明以下结果。

定理 1.3。进一步假设 R 是局部的，且具有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$。设 $(\mathfrak{a}_j)^{j\in\mathbb{Z}_+}$ 是 R 中的非零理想可数序列，满足 $\sqrt{\sum_{j=1}^\infty \mathfrak{a}_j} = \mathfrak{m}$，并设 $(b_j)^{j\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个正实数序列。那么，以下陈述等价：

(1) 存在一个赋值 v，定义在 R 上，以 $\mathfrak{m}$ 为中心，且满足 $A(v) < \infty$，使得$v(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对所有 $j \geq 1$均成立；(2) 对于每个 $r \geq 1$,

$$\overline{\nu}_{I_\bullet^{(r)}}(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) = \sum_{j=1}^r b_j,$$

并且有

$$\sup_{r\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{lct}^{\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k}\left(I_\bullet^{(r)}\right) - k\sum_{j=1}^r b_j\right) < \infty.$$

这里有 $I_\bullet^{(r)} = \sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{b_j} \cdot \mathfrak{a}_j\right)_\bullet$。

组织结构。本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾渐近Samuel函数的概念，并迅速证明定理 $\Rightarrow$ (1) 1.2 中的蕴含关系。在第 3 节中，我们通过研究跳跃数的渐近行为，以及准单项式赋值锥 $\mathrm{QM}(Y, D)$ 上的一个极值问题，证明定理 1.2 。在第 4 节中，我们通过赋值逼近证明定理 1.3 ；这一策略与 [BGMY25] 中的方法更为接近。最后，我们展示定理 1.2 如何推出 [BGMY25] (其中

讨论复解析情形），并由定理 1.3 得到对无限赋值插值存在性的一种解析刻画。

致谢。第一作者在访问北京大学数学科学学院期间完成了这项工作，并感谢该院的热情接待与支持。第二作者受到国家重点研发计划项目 2021YFA1003100 和国家自然科学基金项目 NSFC-12425101 的资助。第三作者受到国家自然科学基金项目 NSFC-12401099 和北京交通大学人才基金项目 2024-004 的资助。第四作者受到国家自然科学基金项目 NSFC-12501106 的资助。

2. Valuation and asymptotic Samuel function

在本节中，R 是一个诺特整环。

2.1. 赋值。 回顾一下，函数 $v\colon R^*=R\backslash\{0\}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个（实）赋值，如果

$$v(xy)=v(x)+v(y)\quad\&\quad v(x+y)\geq\min\{v(x),v(y)\},$$

对所有 $x,y\in R^*$ 都成立。令 $v(0)=\infty$。赋值 v 可以唯一延拓为定义在 R 上的赋值 $v\colon K\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，其中 R 是 R 的分式域 K，延拓定义为 $v(x/y)=v(x)-v(y)$。对于 R 上的两个赋值 v,w，若对所有 $x\in R^*$都有 $v(x)\leq w(x)$，则称 $v\leq w$。对于 R的任意非零理想 $\mathfrak{a}$，定义 $v(\mathfrak{a})=\inf_{x\in\mathfrak{a}}v(x)$。于是容易验证：对于 R中的非零理想 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$，

$$v(\mathfrak{ab})=v(\mathfrak{a})+v(\mathfrak{b})\quad\&\quad v(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\min\{v(\mathfrak{a}),v(\mathfrak{b})\}.$$

特别地，我们可以看出，若理想 $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_r$ 在 R 中满足 $\sum_{j=1}^r\mathfrak{a}_j=R$，那么

$$0=v(R)=v\big(\sum\mathfrak{a}_j\big)=\min v(\mathfrak{a}_j),$$

这意味着对于某个 $j\in\{1,\dots,r\}$，有 $v(\mathfrak{a}_j)=0$。

2.2. 理想的分次序列与理想滤过。 R 中的理想的分次序列 $\mathfrak{a}_\bullet=(\mathfrak{a}_m)_{m\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是一个理想序列，满足对于所有 $p,q\geq 1$，都有 $\mathfrak{a}_p\cdot\mathfrak{a}_p\subseteq\mathfrak{a}_{p+q}$。令 $\mathfrak{a}_0=R$。我们总是假设对于某个 $m\geq 1$，有 $\mathfrak{a}_m\neq(0)$。例如，若 v 是 R 上的非平凡赋值，则 $\mathfrak{a}_\bullet^v$ 是由 $\mathfrak{a}_m^v=\{x\in R\mid v(x)\geq m\}$ 定义的 R 中的理想分次序列。

现在设 v 是 R 上的一个赋值，$\mathfrak{a}_\bullet$ 是 R 中的一个理想分次序列。那么对于所有 $p,q\geq 1$，都有 $v(\mathfrak{a}_{p+q})\leq v(\mathfrak{a}_p)+v(\mathfrak{a}_q)$，这意味着极限

$$v(\mathfrak{a}_\bullet):=\lim_{m\to\infty,\,\mathfrak{a}_m\neq(0)}\frac{v(\mathfrak{a}_m)}{m}=\inf_{m\geq 1}\frac{v(\mathfrak{a}_m)}{m}$$

由 Fekete 引理可知。特别地，对于 R 上任意非平凡赋值 v，$v(\mathfrak{a}_\bullet^v)=1$。$R$ 中理想的分次序列 $\mathfrak{a}_\bullet=\{\mathfrak{a}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 称为滤过，若它还满足对每个 $m\in\mathbb{N}$ 都有 $\mathfrak{a}_m\supseteq\mathfrak{a}_{m+1}$。

2.3. 渐近 Samuel 函数。 经典渐近 Samuel 函数（[Sa52]）已推广到滤过情形，见 [CP24]。下面回顾其构造和一些基本性质。设 $J_\bullet$ 是 R中的一个理想滤过。对于 R中的每个理想 $\mathfrak{a}$，相对于 $\mathfrak{a}$ 的 $J_\bullet$ 阶定义为

$$\nu_{J_\bullet}(\mathfrak{a}):=\sup\{m\in\mathbb{N}\mid\mathfrak{a}\subseteq J_m\}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

于是可得，对于每个 $p,\ q\in\mathbb{N}$，$\nu_{J_\bullet}(\mathfrak{a}^{p+q})\geq\nu_{J_\bullet}(\mathfrak{a}^p)+\nu_{J_\bullet}(\mathfrak{a}^q)$。因此可知

$$\overline{\nu}(\mathfrak{a};J_\bullet):=\lim_{m\to\infty}\frac{\nu_{J_\bullet}(\mathfrak{a}^m)}{m}=\sup_{m\geq 1}\frac{\nu_{J_\bullet}(\mathfrak{a}^m)}{m}\in\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$$

由 Fekete 引理良定义，称为 渐近*Samuel*函数，属于 $J_\bullet$（参见[CP24，定理 3。4]）。本文中我们也将 $\nu(\mathfrak{a};J_\bullet):=\overline{\nu_{J_\bullet}(\mathfrak{a})}$ 记作。

例 2.1。若 $J_\bullet = \{J^m\}_{m\geq 0}$ 对于 J 中的非零理想 R，则 $\nu(\mathfrak{a};\ J_\bullet) \equiv \nu_J(\mathfrak{a})$，这就是经典渐近 *Samuel* 函数（参见 [Sa52，HS06、LJT09]）。

例 2.2。若我们取与某个赋值 v 在 R 上相关联的赋值理想滤过 $J_\bullet = \mathfrak{a}_\bullet^v$，则显然 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) = v(\mathfrak{a})$。

下面的引理展示了渐近Samuel函数的一些基本性质，这些性质实际上在 [CP24]中已为人所知。以下证明采用了 [Sa52 的定理 2] 的策略。

引理 2.3 (见 [CP24，命题 3。11])。设 $J_\bullet$ 是 R 中的一个理想滤过。则

(1) $\overline{\nu}(\mathfrak{a}; J_\bullet) \geq \nu(\mathfrak{b}; J_\bullet)$，对于 R 中的理想 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$；*(2)* $\nu(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) = k \cdot \nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)$，其中 $\mathfrak{a}$ 是 R 中的一个理想，且 $k \in \mathbb{Z}_+$；*(3)* $\nu(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}; J_\bullet) = \min\{\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)\ \nu(\mathfrak{b}; J_\bullet)\}$，其中 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$ 是 R 中的理想；*(4)* $\nu(\mathfrak{ab}; J_\bullet) \geq \nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) + \nu(\mathfrak{b}; J_\bullet)$，其中 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$ 是 R 中的理想。

证明。前两个结论显然成立。

(3)：显然，$\nu(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}; J_\bullet) \leq \min\{\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)\ \nu(\mathfrak{b}; J_\bullet)\}$。因此，我们只需证明反向不等式。不失一般性，假设 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)$ 和 $\nu(\mathfrak{b}; J_\bullet)$ 均非零。任取 $0 < \sigma < \min\{\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)\ \nu(\mathfrak{b};\ J_\bullet)\}$。根据定义，有以下包含关系：

$$\mathfrak{a}^l \subseteq J_{\sigma l - F(l)}, \quad \mathfrak{b}^l \subseteq J_{\sigma l - G(l)},$$

其中 $F(l) = o(l)$ 且 $G(l) = o(l)$，其中 $l \to \infty$。由此可得

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^l = \sum_{j=0}^{l} \mathfrak{a}^j \mathfrak{b}^{l-j} \subseteq \sum_{j=0}^{l} J_{\sigma j - F(j)} J_{\sigma(l-j)-G(l-j)} \subseteq J_{\sigma l - H(l)},$$

其中 $H(l) = \sup_{0\leq j\leq l}\big(F(j) + G(l-j)\big) = o(l)$，其中 $l \to \infty$。因此，我们得到 $\nu(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}; J_\bullet) \geq \sigma$。根据 σ 的选取，这就得到了所需的反向不等式。

(4)：只需证明 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)$ 和 $\nu(\mathfrak{b};\ J_\bullet)$ 均非零的情形。设 $0 < \sigma_1 < \nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)$ 和 $0 < \sigma_2 < \nu(\mathfrak{b}; J_\bullet)$。于是，由 $l \to \infty$，有 $\mathfrak{a}^l \subseteq J_{\sigma_1 l - o(l)}$ 和 $\mathfrak{b}^l \subseteq J_{\sigma_2 l - o(l)}$，这意味着

$$(\mathfrak{ab})^l \subseteq J_{\sigma_1 l - o(l)} \cdot J_{\sigma_2 l - o(l)} \subseteq J_{(\sigma_1+\sigma_2) l - o(l)}.$$

因此，我们得到 $\overline{\nu}(\mathfrak{ab}; J_\bullet) \geq \sigma_1 + \sigma_2$，从而得到所需的不等式。 □

设 I 是 R的一个理想。I 在 R 中的整闭包是由满足某个首一多项式方程的$x \in R$ 组成的理想 $\overline{I}$：

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad \text{with } a_i \in I^i.$$

注意，如果 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$ 是 R中的理想，那么 $\overline{\mathfrak{a}}\cdot\overline{\mathfrak{b}} \subseteq \overline{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}$（参见 [HS06，推论 6.8。6]）。因此，对于 $J_\bullet$ 中理想的一个滤过 R，我们有 $\overline{J_\bullet} := \{\overline{J_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 它也是一个滤过。

引理 2.4。对于任意滤过 $J_\bullet$ 以及 R中的任意理想 $\mathfrak{a}$，有 $\nu(\mathfrak{a};\ J_\bullet) = \nu(\mathfrak{a};\ \overline{J_\bullet})$。

证明。参见 [CP24，推论 4。6]。 □

现在我们考察赋值与渐近 Samuel 函数之间的关系。我们从下面这个简单的观察开始。

引理 2.5。假设 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) < \infty$。对于 R 上的每个赋值 v，我们有

$$v(\mathfrak{a}) \geq \overline{\nu}(\mathfrak{a}; J_\bullet) v(J_\bullet). \tag{2.1}$$

证明。对于定义在 R上的每个赋值 v，若 $\mathfrak{a}^l \subseteq J_m$ 对于 $l \in \mathbb{N}$成立，则 $v(\mathfrak{a})\cdot l = v(\mathfrak{a}^l) \geq v(J_m)$。将两边同时除以 l 并令 $l \to \infty$，可得 $v(\mathfrak{a}) \geq \nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)\overline{v}(J_\bullet)$。□

注 2.6。 回顾定理 *2.1*。根据 [HS06，引理 10.1。5], 若另外 I 是一个不包含于的任何极小素理想中的理想，则经典渐近 *Samuel* 函数满足

$$\overline{\nu}_I(\mathfrak{a}) = \min\left\{\frac{v(\mathfrak{a})}{v(I)} \;\middle|\; v \in \mathcal{RV}(I)\right\},$$

其中 $\mathcal{RV}(I)$ 表示 Rees 赋值的 I。我们看到，在这种情况下，(2.1) 中的等式必由某个 *Rees* 赋值取到。然而，对于一般的理想滤过的渐近 *Samuel* 函数，这一结论不成立（参见定理 *3.4*）。

设 $\mathfrak{a}_\bullet$ 和 $\mathfrak{b}_\bullet$ 是 R 中理想的分次序列。回忆一下， $\mathfrak{a}_\bullet + \mathfrak{b}_\bullet$ 也是一个理想的分次序列，其定义如下:

$$(\mathfrak{a}_\bullet + \mathfrak{b}_\bullet)_m \coloneqq \sum_{i=0}^{m} \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{b}_{m-i}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

引理 2.7。 对于 R 上的任意赋值 v ，

$$v(\mathfrak{a}_\bullet + \mathfrak{b}_\bullet) = \min\{v(\mathfrak{a}_\bullet), v(\mathfrak{b}_\bullet)\}.$$

证明。 记 $\mathfrak{c}_\bullet = \mathfrak{a}_\bullet + \mathfrak{b}_\bullet$。由于对每个 m 都有 $\mathfrak{c}_m \supseteq \mathfrak{a}_m$ 和 $\mathfrak{c}_m \supseteq \mathfrak{b}_m$ ，故有$v(\mathfrak{c}_\bullet) \leq \min\{v(\mathfrak{a}_\bullet)\ v(\mathfrak{b}_\bullet)\}$。另一方面，对于每个 $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v(\mathfrak{c}_m) = \min_{0\leq i\leq m} v(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{b}_{m-i}) &= \min_{0\leq i\leq m} \left\{v(\mathfrak{a}_i) + v(\mathfrak{b}_{m-i})\right\} \\ &\geq \min_{0\leq i\leq m} \left\{i \cdot v(\mathfrak{a}_\bullet) + (m-i) \cdot v(\mathfrak{b}_\bullet)\right\} \\ &\geq m \cdot \min\{v(\mathfrak{a}_\bullet), v(\mathfrak{b}_\bullet)\}, \end{aligned}$$

这意味着 $v(\mathfrak{c}_\bullet) \geq \min\{v(\mathfrak{a}_\bullet)\ v(\mathfrak{b}_\bullet)\}$。由此得到所需的等式。 □

现在令 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ 为 R 中的理想，且 $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。回忆滤过

$$I_\bullet \coloneqq \left(\frac{1}{b_1} \cdot \mathfrak{a}_1\right)_\bullet + \cdots + \left(\frac{1}{b_r} \cdot \mathfrak{a}_r\right)_\bullet.$$

引理 2.8. 对于 R上的每个赋值 v ， 有

$$v(I_\bullet) = \min_{b_j>0}\left\{\frac{1}{b_1}v(\mathfrak{a}_1), \ldots, \frac{1}{b_r}v(\mathfrak{a}_r)\right\}.$$

证明。 注意， $v\left(\left(\frac{1}{b_j} \cdot \mathfrak{a}_j\right)_\bullet\right) = \frac{1}{b_j}v(\mathfrak{a}_j)$ 对每个满足 j 的 $b_j > 0$都成立。因此，由定理 2.7 以及对 r的归纳法可得此引理。 □

引理 2.9. $\nu(\mathfrak{a}_j;\ I_\bullet)$ 对 $\geq b_j$ $j = 1, \ldots, r$以及 $\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ I_\bullet) \geq \sum_{j=1}^r b_j$。

证明。 注意， $\mathfrak{a}_j^{\lceil m/b_j \rceil} \subseteq \left(\frac{1}{b_j} \cdot \mathfrak{a}_j\right)_m \subseteq I_m$ 对所有 $m \geq 1$都成立。我们有 $\nu(\mathfrak{a}_j;\ I_\bullet) \geq b_j$ 对 $j = 1, \ldots, r$ 成立。因此，由定理 2.3 还可推出 $\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ I_\bullet) \geq \sum_{j=1}^r \nu(\mathfrak{a}_j;\ I_\bullet) \geq \sum_{j=1}^r b_j$。 □

下面的命题证明了定理 ⇒1.2 中的蕴含“(1) (3)”。正如我们所见，这个蕴含实际上对所有诺特整环都成立。

命题 2.10. 若 v 是 R 上的赋值，且满足 $v(\mathfrak{a}_j) \geq b_j$ （对 $j = 1, \ldots, r$） ，则$\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; \overline{I}_\bullet) \leq \sum_{j=1}^r v(\mathfrak{a}_j)$。此外，若对所有 j都有 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$， 则 $\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; \overline{I}_\bullet) = \sum_{j=1}^r b_j$。

证明。 由于 $v(\mathfrak{a}_j) \geq b_j$ 对所有 j均成立，我们有 $v(I_\bullet) \geq 1$ 由定理 2.8可知。因此，由定理 2.5 可得 $\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; I_\bullet) \leq v(I_\bullet)^{-1} v(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \leq \sum_{j=1}^r v(\mathfrak{a}_j)$。

若 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对所有 j均成立，则上述不等式表明 $\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ I_\bullet) \leq \sum_{j=1}^r b_j$; 而根据定理2.9，我们有反向不等式 $\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ I_\bullet) \geq \sum_{j=1}^r b_j$。因此，所需的等式成立。 □

3. Existence of finite valuative interpolation

在本节中， R 是一个等特征零、维数为 n的优正则整环。 $X = \operatorname{Spec} R$。

3.1. **除子赋值与准单项式赋值**。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$上的分离正则优概形。记 Val_X 为实值赋值v 的集合，其中这些赋值定义在函数域 $K(X)$ 上，且 X 具有中心 $c_X(v)$（参见 X （参见 [JM12，第 1 节。2]）。

若存在位于 X 之上的素除子 E （即正则概形 Y 上的素除子 E ，且该概形具有适当双有理修改 $\pi\colon Y \to X$），以及正实数 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$，使得$v = \lambda \cdot \mathrm{ord}_E$，则称赋值 $v \in \mathrm{Val}_X$ 是 X上的除子赋值。除子赋值 $v = \lambda \cdot \mathrm{ord}_E$ 的对数差异 $A(v)$ 定义为满足 $A(v) = \lambda \cdot A(\mathrm{ord}_E)$ 的量，其中 $A(\mathrm{ord}_E) := \mathrm{ord}_E(K_{Y/X}) + 1$。

设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个具有正则且连通的 Y 的适当双有理态射，并设 $y = (y_1, \cdots, y_r) \in \mathscr{O}_{Y,\eta}^{\oplus r}$是点 $\eta \in Y$ 处的一个参数系。对于$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^r$，令 $\langle \alpha, \beta \rangle := \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i$。与$y$和 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r_{\geq 0}$相关联的拟单项式赋值是一个赋值 $\mathrm{val}_\alpha\colon K(X) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，满足：

$$\mathrm{val}_\alpha(f) = \min\{\langle \alpha, \beta \rangle \colon c_\beta \neq 0\}$$

对于所有 $f \in \mathscr{O}_{Y,\eta}$ 写成 $\widehat{\mathscr{O}_{Y,\eta}}$ 形式 $f = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}} c_\beta y^\beta$，其中每个 $c_\beta \in \widehat{\mathscr{O}_{Y,\eta}}$ 均为零或单位（参见 [JM12，第 3 节1]）。

设 (Y, D) 是定义在 X 上的对数光滑对。记 $\mathrm{QM}(Y, D)$ 为所有准单项式赋值 v 的集合，这些赋值可以在某个如上所述的点 $\eta \in Y$ 处描述，且每个 y_i 在 η 上定义一个不可约分支。则 $\mathrm{QM}(Y, D)$ 是有限个闭单纯锥的并，且每个锥都同胚于锥 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ （见 [JM12，引理 4。5]）。此外，还存在一个收缩映射

$$r_{Y,D}\colon \mathrm{Val}_X \to \mathrm{QM}(Y, D),$$

它将赋值 v 映射到唯一的准单项式赋值 $w = r_{Y,D}(v) \in \mathrm{QM}(Y, D)$，其中 $w(D_i) = v(D_i)$ 对每个不可约分支 D_i 都成立，且 D。对于理想 X 上的理想，如果 (Y, D) 给出 $\mathfrak{a}$ 的对数解消，则有 $r_{Y,D}(v) \leq v$ 且 $r_{Y,D}(v)(\mathfrak{a}) = v(\mathfrak{a})$（参见 [JM12，第 4.3] 节）。

拟单项式 $v \in \mathrm{QM}(Y, D)$的对数差异由 $A(v) = \sum_{i=1}^r v(D_i) A(\mathrm{ord}_{D_i})$定义，一般赋值 $v \in \mathrm{Val}_X$ 的对数差异由 $A(v) = \sup_{(Y,D)} A(r_{Y,D}(v)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$定义，其中上确界取遍 X 上的所有对数光滑对(Y, D)（参见 [JM12，第5节.2]）。

3.2. **乘子理想与Skoda定理**。 对于优概形 X 在特征0时，对数解消 的存在性已在 [Te08，Te18],中得到证明，推广了广中定理：给定理想 $\mathfrak{a}$ 在 X上，存在射影双有理态射 $\pi\colon Y \to X$ 使得 Y是正则的，且 $\mathfrak{a} \cdot \mathscr{O}_Y$是除子 D 的理想，使得 $D + K_{Y/X}$ 具有简单正规交叉支集。

设 $\mathfrak{a}$ 是 X 上的一个非零理想，且 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。那么 乘子理想 $\mathscr{J}(\lambda \cdot \mathfrak{a})$，也记作 $\mathscr{J}(\mathfrak{a}^\lambda)$，是 X 上由局部截面 f 组成的理想，其中 f 属于 $\mathscr{O}_X$，并满足

$$\mathrm{ord}_E(f) + A(\mathrm{ord}_E) > \lambda \cdot \mathrm{ord}_E(\mathfrak{a})$$

对所有位于 X 上方的素除子 E，

以下是复解析几何中 Skoda除法定理的一种代数几何类比的局部版本（[Sk72]）。另见 [La04，变式 9.6。39]关于通过对数对在奇异正规簇上得到的 Skoda 定理。

定理 3.1 (Skoda 定理)。 对于 X 上的每个非零理想 $\mathfrak{a}$ 以及 $m \geq n$,

$$\mathscr{J}(\mathfrak{a}^m) \subseteq \mathfrak{a}^{m-n+1}.$$

证明。 当 X 是有限型时，该定理已得到充分确立（参见 [La04，定理 9.6。21]）。此外，通过在 [JM12，附录 A] 中采用相同的论证，可以将其推广到正则优良概形。 □

3.3. 渐近乘子理想与渐近跳跃数。 设 $J_\bullet$ 是 X 上的理想分次序列。对于每个 $\lambda \geq 0$，可以看出，X 上的下列理想族

$$\left\{ \mathscr{J}\left(\frac{\lambda}{p} \cdot J_p\right) \right\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$$

存在唯一的极大元，记作 $\mathscr{J}(J_\bullet^\lambda)$ 或 $\mathscr{J}(\lambda \cdot J_\bullet)$，定义为 指数为 $J_\bullet$ 的渐近乘子理想 λ (参见 [La04，定义 11.1。15])。

设 $\mathfrak{q}$ 是 X 上的非零理想。我们将 $\mathrm{lct}^{\mathfrak{q}}(J_\bullet)$ 或 $\mathrm{lct}(\mathfrak{q}; J_\bullet)$ 记为渐近跳跃数(参见 [JM12，命题 2。12])：

$$\mathrm{lct}^{\mathfrak{q}}(J_\bullet) = \mathrm{lct}(\mathfrak{q}; J_\bullet) := \min\{\lambda \geq 0 \mid \mathfrak{q} \not\subseteq \mathscr{J}(J_\bullet^\lambda)\},$$

或者等价地（见 [JM12，推论 6。9]），

$$\mathrm{lct}^{\mathfrak{q}}(J_\bullet) = \inf_v \frac{A(v) + v(\mathfrak{q})}{v(J_\bullet)}, \tag{3.1}$$

其中，下确界取遍 X 上的所有（除子、拟单项式）赋值。Jonsson 和 Mustaţă 在 [JM12] 中证明，$\mathrm{lct}^{\mathfrak{q}}(J_\bullet)$ 可由某个赋值计算 v，即该赋值使（3.1）中的下确界取得。

定理 *3.2*（*[JM12，定理 7.3]*）。若对数典范阈值 $^{\mathfrak{q}}(J_\bullet) = \lambda < \infty$，则对 $V(\mathscr{J}(J_\bullet^\lambda)$：$\mathfrak{q})$的每个不可约分支的每个泛点 ξ，存在一个赋值 $v \in Val_X$，它计算对数典范阈值 $^{\mathfrak{q}}(J_\bullet)$，且 $c_X(v) = \xi$。

Jonsson 与 Mustaţă 也在 [JM12] 中猜想，计算渐近跳跃数的赋值可以选为准单项式赋值（见[JM12，猜想 C]），其中维数 $X \leq 2$ 的情形由他们在 [JM12],中证明，而情形 $\mathfrak{q} = \mathscr{O}_X$ 由 Xu 在 [Xu20]中证明。一般情形仍然未解决。

3.4. **跳跃数的渐近性质。** 设 $\mathfrak{a}$为R中的真理想，且 $J_\bullet$ 为 R 中非零理想的分次序列，满足对数典范阈值$(J_\bullet) < \infty$。注意，由此可得对数典范阈值$(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) < \infty$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$成立。此外，我们可以看出对数典范阈值$(\mathfrak{a}^k; J_\bullet)$ 关于 k 是凹的（参见 [BGZ25，引理 6.1]），因此我们可以定义

$$\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) := \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet)}{k} = \inf_{k\geq 1} \frac{\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet)}{k} \in [0, +\infty).$$

引理 3.3. 设 $J_\bullet$ 是理想滤过，且 对数典范阈值$(J_\bullet) < \infty$。则 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) \leq \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)$。特别地，$\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) < \infty$。

证明。 不妨设 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) > 0$。由于对 R 的每个理想 I，$\mathscr{J}(I) \supseteq I$，对于$m_k = \sup\{m \mid \mathfrak{a}^k \subseteq J_m\}$，我们有

$$\mathfrak{a}^k \subseteq J_{m_k} \subseteq \mathscr{J}(J_{m_k}) \subseteq \mathscr{J}(m_k \cdot J_\bullet) \implies \mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) \geq m_k.$$

因此，

$$\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet)}{k} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{k} = \overline{\nu}(\mathfrak{a}; J_\bullet).$$

在这种情形下，我们也可以看到 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) < \infty$，因为 $\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) < \infty$。 □

注记 3.4. 一般情形下，我们无法期望 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet) = \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)$（参见 [CP24，例 7。2]）。以下是另一个来自 [KW07]的例子。

令 $R = \mathbb{C}[x, y]$ 和 $\mathfrak{m} = (x, y)$ 为极大理想。令 $J_\bullet$ 为分次序列：

$$J_k = \mathfrak{m}^k \cdot (x^k, y), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

然后，如 *KW07* 的例 *3.6*]，所示，对每个 $c > 0$，渐近乘子理想 $\mathscr{J}(c \cdot J_\bullet) = \mathscr{J}(c \cdot \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^{\lfloor c \rfloor - 1}$。由此可得 $\rho(\mathfrak{m}; J_\bullet) = 1$（也可以通过以下定理 *3.5* 验证这一点）。然而，$\mathfrak{m}^l \subseteq J_k$ 当且仅当 $l \geq 2k$，这表明 $\nu(\mathfrak{m}; J_\bullet) = 1/2 \neq \rho(\mathfrak{m}; J_\bullet)$。

此外，若 X 是光滑不可约复代数簇，且 $J_\bullet$ 是 [KW07，定义 2.3]，意义下的稳定分次序列，则根据 [KW07，定理 3.3],，存在一个合适的正整数 C，使得 $\mathscr{J}(Ck \cdot J_\bullet) \subseteq J_k$ 对所有 k 足够大的情形均成立，这意味着

$$\overline{\nu}(\mathfrak{a}; J_\bullet) \geq C^{-1} \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)$$

对任意非零理想 $\mathfrak{a}$ *on* X。

一般来说，我们不能用不等式（2.1）反过来刻画量 $\nu(\mathfrak{a}; J_\bullet)$（例如，定理 3.4 和下述定理 3.5 即可说明这一点），这与定理 2.6 中经典渐近 Samuel 函数的情形不同。然而，我们将在下面的命题中证明，对于 Val $\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)$ 上的 $\overset{<\infty}{X}$（以及 X 上的除子赋值空间），这种刻画确实成立，其中

$$\mathrm{Val}_X^{<\infty} := \{v \in \mathrm{Val}_X \mid A(v) < \infty\}.$$

命题 3.5. 设 $\mathrm{lct}(J_\bullet) < \infty$。那么（约定令 $*/0 = \infty$）

$$\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) = \inf_{v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty}} \frac{v(\mathfrak{a})}{v(J_\bullet)} = \inf_E \frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}, \tag{3.2}$$

最后一项中的下确界取遍 X 上的所有素除子 E。

证明。对于每个 $v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty}$，有 $\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) \leq \big(A(v) + k \cdot v(\mathfrak{a})\big)/v(J_\bullet)$，从而

$$\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) = \lim_{k \to \infty} \frac{\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet)}{k} \leq \lim_{k \to \infty} \left(\frac{v(\mathfrak{a})}{v(J_\bullet)} + \frac{1}{k} \cdot \frac{A(v)}{v(J_\bullet)} \right) = \frac{v(\mathfrak{a})}{v(J_\bullet)}.$$

另一方面，设 $v_k \in \mathrm{Val}_X^{<\infty}$ 是计算 $\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet)$ 的赋值。那么

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) = \frac{A(v_k) + k \cdot v_k(\mathfrak{a})}{v_k(J_\bullet)} > k \cdot \frac{v_k(\mathfrak{a})}{v_k(J_\bullet)} \geq k \inf_{v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty}} \frac{v(\mathfrak{a})}{v(J_\bullet)}.$$

因此，$\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) \geq \inf^{v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty}} {}^{v}(\mathfrak{a})/v(J_\bullet)$。我们得到第一个等式。下一个等式由函数 $v \mapsto v(\mathfrak{a})$ 和 $v \mapsto v(J_\bullet)$ 在 $\mathrm{Val}_X^{<\infty}$([JM12，推论 64]) 上的连续性，以及除子赋值在 $\mathrm{Val}_X^{<\infty}$([JM12，注 411]) 中的稠密性得出。□

~它也在 [BLQ24，定义 31] 中引入了滤过的 饱和 $J_\bullet$ $J_\bullet$的概念：

$$\widetilde{J}_t := \{f \in R \mid \mathrm{ord}_E(f) \geq t \cdot \mathrm{ord}_E(J_\bullet) \text{ for any prime divisor } E \text{ over } X\} \tag{3.3}$$

对每个 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。那么，上述定理 3.5 等价于 $\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) = \widetilde{\sup}\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mathfrak{a} \subseteq J_t\}$。

推论 3.6. 假设对数典范阈值$(J_\bullet) < \infty$。那么对于 R中的非零理想 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$，

$$\rho(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}; J_\bullet) = \min\{\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet), \rho(\mathfrak{b}; J_\bullet)\},$$
$$\rho(\mathfrak{a}\mathfrak{b}; J_\bullet) \geq \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) + \rho(\mathfrak{b}; J_\bullet).$$

证明. 由定理3.5，可得

$$\begin{aligned}\rho(\mathfrak{a}+\mathfrak{b};J_\bullet)=\inf_E\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}&=\inf_E\left(\min\left\{\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)},\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{b})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}\right\}\right)\\&=\min\left\{\inf_E\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)},\inf_E\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{b})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}\right\}\\&=\min\{\rho(\mathfrak{a};J_\bullet),\rho(\mathfrak{b};J_\bullet)\},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\rho(\mathfrak{a}\mathfrak{b};J_\bullet)=\inf_E\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}&=\inf_E\left(\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}+\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{b})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}\right)\\&\geq\inf_E\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}+\inf_E\frac{\mathrm{ord}_E(\mathfrak{b})}{\mathrm{ord}_E(J_\bullet)}\\&=\rho(\mathfrak{a};J_\bullet)+\rho(\mathfrak{b};J_\bullet).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

3.5. 与有限赋值插值相关的一个特殊情形。回想一下， $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_r$ 是 R的理想，而 $b_1,\dots,b_r\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，其中 $\sum_{b_j>0}\mathfrak{a}_j\neq R$，即$\bigcap_{b_j>0}V(\mathfrak{a}_j)$在 X中包含某个闭点。令

$$I_\bullet:=\left(\frac{1}{b_1}\cdot\mathfrak{a}_1\right)_\bullet+\cdots+\left(\frac{1}{b_r}\cdot\mathfrak{a}_r\right)_\bullet.$$

引理 3.7. 对于 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_r$，有对数典范阈值$(I_\bullet)<\infty$ 以及 $0<\nu(\mathfrak{a};I_\bullet)<\infty$。

证明。 设$x\in\bigcap_{b_j>0}V(\mathfrak{a}_j)$是一个闭点，即对于所有满足 $b_j>0$的 j，都有 $\mathfrak{a}_j\subseteq\mathfrak{m}_x$，从而得到

$$\mathrm{lct}(I_\bullet)\leq\frac{A(\mathrm{ord}_x)}{\mathrm{ord}_x(I_\bullet)}=\frac{A(\mathrm{ord}_x)}{\min_{b_j>0}\{\mathrm{ord}_x(\mathfrak{a}_j)/b_j\}}<\infty.$$

我们还可以根据定理$\nu(\mathfrak{a};I_\bullet)>0$ 2.9得出这一点。此外，由于定理 $\nu(\mathfrak{a};I_\bullet)<\infty$3.3，我们还有□

对于这个特殊的滤过 $I_\bullet$，我们将证明 $\nu(\cdot;I_\bullet)$与$\rho(\cdot;I_\bullet)$相同，如下面两个引理所示。

引理 3.8. 设 $N\in\mathbb{Z}_+$，并设 $d_j\in\mathbb{N}$ 满足对所有满足 $b_j>0$ 的 j，都有 $N\geq b_jd_j$。那么 $I_\bullet$ 的渐近乘子理想满足

$$\mathscr{J}(cN\cdot I_\bullet)\subseteq\mathscr{J}(c\cdot\mathfrak{b}),\quad\forall c>0,$$

其中 $\mathfrak{b}=\sum_{b_j>0}\mathfrak{a}_j^{d_j}$。

证明。 只需证明

$$\mathscr{J}\left(\frac{cN}{p}\cdot I_p\right)\subseteq\mathscr{J}(c\cdot\mathfrak{b}),\quad\forall p\gg 1.$$

注意，对所有满足 $b_j>0$ 和 $p_j\in\mathbb{N}$的 j，都有 $N\lceil p_j/b_j\rceil\geq p_jd_j$。因此，整闭包

$$\overline{I_p^N}=\overline{\left(\sum_{p_1+\cdots+p_r=p}\prod_{b_j>0}\mathfrak{a}_j^{\lceil p_j/b_j\rceil}\right)^N}\subseteq\overline{\sum_{p_1+\cdots+p_r=p}\prod_{b_j>0}\mathfrak{a}_j^{p_jd_j}}=\overline{\mathfrak{b}^p}.$$

上文我们使用了如下事实：$\overline{(J_1+\cdots+J_r)^l}=\overline{J_1^l+\cdots+J_r^l}$对于 $l\in\mathbb{N}$以及理想 $J_1,\dots,J_r$（参见 [HS06，例 1.1.2 与推论 1.3。1]）。由此可得，对每一个

$p \gg 1$,

$$\mathscr{J}\left(\frac{cN}{p}\cdot I_p\right) = \mathscr{J}\left(\frac{c}{p}\cdot I_p^N\right) = \mathscr{J}\left(\frac{c}{p}\cdot \overline{I_p^N}\right)$$
$$\subseteq \mathscr{J}\left(\frac{c}{p}\cdot \overline{\mathfrak{b}^p}\right) = \mathscr{J}\left(\frac{c}{p}\cdot \mathfrak{b}^p\right) = \mathscr{J}(c\cdot\mathfrak{b}),$$

由 [La04，推论 9.6。17]。证明完毕。 □

引理 3.9。对 R 的每一个非零理想 $\mathfrak{a}_0$，我们有 $\nu(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) = \rho(\mathfrak{a}_0; I_\bullet)$。

证明。我们只需证明 $\nu(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) \geq \rho(\mathfrak{a}_0; I_\bullet)$。不失一般性，我们假设 $\rho(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) > 0$。设 $N \gg 1$ 为一个足够大的正整数，且 $d_j \in \mathbb{N}$使得

$$\frac{d_j}{N} \leq \frac{1}{b_j} \leq \frac{d_j}{N} + \frac{1}{N}, \quad \forall\, j \text{ with } b_j > 0.$$

对每一个 $l \in \mathbb{Z}_+$，令 $k_l = \lceil$对数典范阈值$(\mathfrak{a}_0^l;\ I_\bullet)/N\rceil - 1$，即

$$Nk_l < \mathrm{lct}(\mathfrak{a}_0^l; I_\bullet) \leq N(k_l+1),$$

这表明 $\mathfrak{a}_0^l \subseteq \mathscr{J}(Nk_l\cdot I_\bullet)$。同时，由定理 3.8，$\mathscr{J}(Nk_l\cdot I_\bullet) \subseteq \mathscr{J}(\mathfrak{b}^{k_l})$，其中 $\mathfrak{b} = \sum_{b_j\geq 0}\mathfrak{a}_j^{d_j}$。现在将 Skoda 定理（定理 3.1）应用于 $\mathfrak{b}$，我们得到

$$\mathscr{J}(\mathfrak{b}^{k_l}) \subseteq \mathfrak{b}^{k_l-n+1}, \quad \forall\, k_l \geq n.$$

此外，由于对所有满足 $b_j > 0$的 j 都有 $\frac{1}{b_j} \leq \frac{d_j}{N} + \frac{1}{N}$，若令 $e_N = \min_{b_j>0}\lfloor N - b_j\rfloor$，则可以看出

$$I_{e_N} \supseteq \sum_{b_j>0}\mathfrak{a}_j^{\lceil e_N/b_j\rceil} \supseteq \sum_{b_j\geq 0}\mathfrak{a}_j^{d_j} = \mathfrak{b}.$$

综上所述，当 $k_l \geq n$时，我们有

$$\mathfrak{a}_0^l \subseteq \mathscr{J}(Nk_l\cdot I_\bullet) \subseteq \mathscr{J}(\mathfrak{b}^{k_l}) \subseteq \mathfrak{b}^{k_l-n+1} \subseteq I_{e_N}^{k_l-n+1} \subseteq I_{(k_l-n+1)e_N}.$$

这表明

$$\overline{\nu}(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) \geq \limsup_{l\to\infty}\frac{(k_l-n+1)e_N}{l} = \frac{\rho(\mathfrak{a}_0; I_\bullet)\cdot e_N}{N}, \quad \forall\, N \gg 1,$$

其中由 k_l的选取可知 $\rho(\mathfrak{a}_0;\ I_\bullet) = \lim_{l\to\infty} Nk_l/l$。注意当$N\to\infty$时 $N/e_N \to 1$，因此我们得到 $\nu(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) \geq \rho(\mathfrak{a}_0;\ I_\bullet)$。证明完毕。□

注记 3.10. $\nu(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) = \rho(\mathfrak{a}_0; I_\bullet)$对所有 $\mathfrak{a}_0$ 成立这一事实等价于说

$$\mathcal{K}(I_\bullet) = \widetilde{I}_\bullet,$$

其中 $I_\bullet$ 是 $I_\bullet$ 的饱和，定义于 [BLQ24，定义 3。1] 由(3.3)，且滤过 $\mathcal{K}(I_\bullet) = \{K(I_\bullet)_t\}_{t\geq 0}$ 定义于 [CP24，定理 5。5] 由

$$K(I_\bullet)_t := \{f \in R \mid \overline{\nu}_{I_\bullet}(f) \geq t\}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

我们证明以下引理，其中，推论（3）⇒（1）定理1.2 中的结论本质上正是由该引理与定理3.9共同得出的。

引理 3.11. 设 $\mathfrak{a}_0$ 是 R 的一个非零理想，且 $\nu(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) > \mathfrak{v}$。假设 (Y, D) 是 X 上的一个对数光滑对，它给出 $\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_r$的一个对数解消。则存在一个准单项式赋值 $v \in \mathrm{QM}(Y, D)$ 使得

$$\overline{\nu}(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) = \frac{v(\mathfrak{a}_0)}{v(I_\bullet)}.$$

证明. 我们有对数典范阈值$(I_\bullet) < \infty$ 由定理 3.7 可知，从而 $0 \preccurlyeq \nu(\mathfrak{a}_0; I_\bullet) < \infty$。设$r_{Y,D}\colon \mathrm{Val} \to \mathrm{QM}(Y, D)$ 为回缩映射。注意 $r_{Y,D}(v)(\mathfrak{a}_0) \le v(\mathfrak{a}_0)$ 且$r_{Y,D}(v)(\mathfrak{a}_j) = v(\mathfrak{a}_j)$ 对 $j = 1, \dots, r$ 成立，因为 (Y, D) 给出 $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$的一个对数解消。于是由

$$\beta(v) := \frac{v(\mathfrak{a}_0)}{v(I_\bullet)} = \frac{v(\mathfrak{a}_0)}{\min_{b_j>0}\{v(\mathfrak{a}_j)/b_j\}}$$

对于所有 $v \in \mathrm{Val}_X$， $\beta(r_{Y,\ D}(v)) \le \beta(v)$，这意味着 $(*/0 = \infty)$

$$\inf_{v\in \mathrm{Val}_X^{\le\infty}} \beta(v) = \inf_{v\in \mathrm{QM}(Y,D)} \beta(v) = \inf_{v\in \mathrm{QM}(Y,D),\, A(v)=1} \beta(v),$$

上面的最后一个等式成立，是因为 β 在重标度下保持不变。由于 $\mathrm{QM}(Y,\ D)$ $\cap \{v \mid A(v) = 1\}$ 是 $\mathrm{QM}(Y,\ D)$ 的紧子集（参见第 3.1节），且 $\beta(v)$ 在此紧集上连续，因此下确界必定由某个 $v \in \mathrm{QM}(Y,\ D)$ 取得，其中该下确界恰好等于 $\nu(\mathfrak{a}_0;\ I_\bullet)$，这是由定理3.5 和定理 3.9得出的。 □

3.6. **定理 1.2的证明**。现在我们证明定理1.2。

定理 1.2 的证明。(2) ⇒ (1) 显然，而 (1) ⇒ (3) 由定理 2.10 得出。只需证明 (3) ⇒ (2)。由定理 3.11 和定理 3.7，存在一个定义在 R 上的准单项式赋值 v，使得 $v(I_\bullet) = 1$ 且 $v(\mathfrak{a}) = \nu(\mathfrak{a}; I_\bullet) = \sum_{j=1}^r b_j$。由 $v(I_\bullet) = 1$ 可知，根据定理 2.8，对于 $j = 1, \dots, r$，有 $v(\mathfrak{a}_j) \ge b_j$。因此，由于 $v(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^r v(\mathfrak{a}_j)$，可得对于所有 $j = 1, \dots, r$，都有 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$。证明完毕。□

自然会问，对于所有 $j = 1, \dots, r$， $\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}_j) = b_j$是否足以确保存在一个赋值 v，使得对于所有 j， $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$。然而，下面的例子表明，考虑乘积 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$处的渐近Samuel函数至关重要。

例 *3.12*。考虑 $R = \mathbb{C}[x, y]$。设 $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{m}^6 + (x)$、 $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{m}^6 + (y)$ 和$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{m}^4 + (xy)$，其中 $\mathfrak{m} = (x, y)$。令 $b_1 = 1$、 $b_2 = 1$ 和 $b_3 = 3$。于是可以验证，$\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}_1) = 1$、 $\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}_2) = 1$、 $\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}_3) = 3$ 且 $\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = 6$。因此，即使 $\mathfrak{a}_1$、 $\mathfrak{a}_2$ 和 $\mathfrak{a}_3$ 都是 $\mathfrak{m}$- 初等的，我们也不能从对 $j = 1$、*2*、*3*， $\nu(\mathfrak{a}_j; I_\bullet) = b_j$ 推出 $\nu_{I_\bullet}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = b_1 + b_2 + b_3$。

4. Existence of infinite valuative interpolation

本节中， R 是一个等特征零、维数为 n的优正则整环。 $X = \operatorname{Spec} R$。

4.1. **赋值逼近法**。为了刻画无限赋值插值的存在性，我们首先考察式（3.2）中间项的下确界是否能由 Val 中的某个赋值取得$\mathrm{Val}_X^{\le\infty}$。我们采用赋值逼近法，这种方法更接近 [BGMY25]中的方法。

设 $J_\bullet$ 是 R中的一个理想滤过。

引理 4.1. 假设$\mathrm{lct}(J_\bullet) < \infty$。设 $\mathfrak{a}$ 是 R的一个非零理想。若存在$v \in \mathrm{Val}_X^{\le\infty}$使得 $\rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) = v(\mathfrak{a})/v(J_\bullet)$，则

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) \cdot k \Big) < \infty.$$

证明。 重标度后，不妨设 $v(J_\bullet) = 1$。于是对每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) \le \frac{A(v) + v(\mathfrak{a}^k)}{v(J_\bullet)} = A(v) + \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) \cdot k,$$

这意味着 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \Big($对数典范阈值$(\mathfrak{a}^k;\ J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet) \cdot k\Big) \le A(v)$ $< \infty$。 □

设 $\xi \in X$ 为一点， $\mathfrak{m}_\xi$ 为定义 ξ 闭包的理想。设 ord_ξ 为以 ξ 为中心的相应阶估值:

$$\mathrm{ord}_\xi(f) \coloneqq \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid f \in \mathfrak{m}_\xi^k\right\}.$$

Set

$$\mathrm{Val}_{X,\xi}^{<\infty} \coloneqq \{v \in \mathrm{Val}_X \mid c_X(v) = \xi,\ A(v) < \infty\}.$$

命题 4.2. 假设 $\mathrm{ord}_\xi(J_\bullet) > 0$ 且 $\mathfrak{m}_\xi^p \subseteq J_q$ ，其中 p、$q \in \mathbb{Z}_+$。设$\mathfrak{a}$ 是 R 的一个非零理想，且 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_\xi$。那么以下两个陈述等价:

(1) 存在 $v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty},\xi$ ，使得 $v(J_\bullet) = 1$ 且 $v(\mathfrak{a}) = \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)$; (2) 有

$$M \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)\cdot k\right) < \infty.$$

此外，若 *(2)* 成立，则 *(1)* 中的赋值 v 可以选取为满足 $A(v) \le M$ 且 $v(\mathfrak{m}_\xi) \ge q/p$ 。

证明。 首先，注意到 $\mathrm{lct}(J_\bullet) < \infty$ ，由

$$\mathrm{lct}(J_\bullet) = \inf_{v\in\mathrm{Val}_X^*}\frac{A(v)}{v(J_\bullet)} \le \frac{A(\mathrm{ord}_\xi)}{\mathrm{ord}_\xi(J_\bullet)} < \infty.$$

由此可得，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，均有 $\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) < \infty$，且 $\rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet) < \infty$。

(1) $\Rightarrow$ (2): 这由定理 4.1 立即得到。

(2) $\Rightarrow$ (1): 现在我们假设

$$M = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)\cdot k\right) < \infty.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，由于 $J_q \supseteq \mathfrak{m}_\xi^p$ 且 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_\xi$，存在一个赋值 $v_k \in \mathrm{Val}_X^{<\infty},\ \xi$ 它计算对数典范阈值 $\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k;\ J_\bullet)$，并满足 $v_k(J_\bullet) = 1$ （见定理 3.2）。于是我们有

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) = \frac{A(v_k) + v_k(\mathfrak{a}^k)}{v_k(J_\bullet)} = A(v_k) + kv_k(\mathfrak{a}). \tag{4.1}$$

由于 $v_k(\mathfrak{a}) \ge \rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet)v_k(J_\bullet) = \rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet)$ 根据定理 3.5，可得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} A(v_k) \le \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet)\cdot k\right) = M < \infty.$$

与此同时，我们有

$$\mathfrak{m}_\xi^p \subseteq J_q \implies v_k(\mathfrak{m}_\xi) \ge p^{-1}v_k(J_q) \ge \frac{q}{p}v_k(J_\bullet) = \frac{q}{p} > 0.$$

因此，由于集合

$$\left\{w \in \mathrm{Val}_X \mid c_X(w) = \xi,\ w(\mathfrak{m}_\xi) \ge q/p,\ A(w) \le M\right\}$$

在 Val_X 中是紧的（见 [JM12，命题 5.9]），我们可以从 $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 中提取一个子序列，它收敛于某个 $v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty},\xi$，且 $A(v) \le M$ 以及 $v(\mathfrak{m}_\xi) \ge q/p$。根据 [JM12，推论 6.4]，，我们有 $v(J_\bullet) = 1$。我们还由 (4.1) 得到

$$v(\mathfrak{a}) = \lim_{k\to\infty} v_k(\mathfrak{a}) = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{lct}(\mathfrak{a}^k; J_\bullet)}{k} = \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet).$$

因此，赋值 v 正是我们所需要的。 □

例 *4.3.* 设 $R = \mathbb{C}[x, y]$ 和 $\mathfrak{m} = (x,\ y)$ 。设 v 是定义在 R 上、以 o 为中心的归一化赋值，它是具有有限偏斜度 $\alpha(v) < \infty$ 和无限对数不一致度 $A(v) = \infty$ 的无限奇异赋值（关于此类赋值的存在性，参见 [*FJ04*，注 *A*.4]）。令 $J_\bullet = \mathfrak{a}_\bullet^v$ 为与赋值 v 相关联的分次序列。通过赋值树理论可验证，对数典范阈值 $\mathrm{lct}(\mathfrak{a}_\bullet^v) < \infty$，且 $\rho(\mathfrak{m};\ \mathfrak{a}_\bullet^v) = 1$ 。

那么， v 本身就是满足 $v(\mathfrak{m}) = 1 = \rho(\mathfrak{m};\ \mathfrak{a}_\bullet^v)$ 且 $v(\mathfrak{a}_\bullet^v) = 1$ 的（唯一）赋值，而 $v \notin$赋值$_X^{<\infty}$。事实上，我们有

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{lct}(\mathfrak{m}^k; \mathfrak{a}_\bullet^v) - k \right) = A(v) = \infty$$

对于此情形，根据 [BGZ25，命题 A。2]。

定理 4.2 可以推广到可数无穷多个理想的情形。我们从以下观察开始。

引理 *4.4.* 设 $J_\bullet$ 是 R 中非零理想的一个滤过，且 $lct(J_\bullet) < \infty$，再设 $\mathfrak{a}_1$，……，$\mathfrak{a}_r$ 是 R 中的非零理想。令 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$。假设存在一个赋值 $v \in Val_X^{<\infty}$，使得 $v(\mathfrak{a}) = \rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet)$ 且 $v(J_\bullet) = 1$。那么，对于 $j = 1$，……，r，$v(\mathfrak{a}_j) = \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$ 当且仅当 $\rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet) = \sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$。

证明。“如果”部分：假设 $\rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet) = \sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$。于是

$$\sum_{j=1}^r v(\mathfrak{a}_j) = v(\mathfrak{a}) = \rho(\mathfrak{a}; J_\bullet) = \sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j; J_\bullet),$$

由于定理 3.5，对每个 $v(\mathfrak{a}_j) \geq v(J_\bullet)\rho(\mathfrak{a}_j; J_\bullet) = \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet$，都有 $v(\mathfrak{a}_j) = \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$，其中 $j = 1, \ldots, r$。

“仅当”部分：这是 $v(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^r v(\mathfrak{a}_j)$ 的直接推论。 □

现在我们证明定理 4.2 的以下推广，其中有限情形将在定理 1.3 的证明中用到。

命题 4.5. 设 $J_\bullet$ 是 R 中的一个理想滤过，使得 $\mathrm{ord}_\xi(J_\bullet) > 0$，且$\mathfrak{m}_\xi^p \subseteq J_q$，其中 p、$q \in \mathbb{Z}_+$ 为某些元素。假设 $(\mathfrak{a}_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ 是 R 中的非零理想序列，且对所有 $j \geq 1$ 都有 $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{m}_\xi$。那么以下两个陈述等价：

(1) 存在 $v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty}$，$\xi$ 使得 $v(J_\bullet) = 1$ 且 $v(\mathfrak{a}_j) = \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$ 对所有$j \geq 1$ 都成立；(2) 对于每个 $r \in \mathbb{Z}_+$，

$$\rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; J_\bullet) = \sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j; J_\bullet),$$

并且有

$$\sup_{r\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{lct}(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k; J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; J_\bullet) \cdot k \right) < \infty.$$

证明。首先，如定理 4.2 的证明中所示，我们可以看到 $\mathrm{lct}(J_\bullet) < \infty$ 且 $\rho(\mathfrak{a};\ J_\bullet) < \infty$ 对于所有非零理想 $\mathfrak{a}$ 的 R。

(1) $\Rightarrow$ (2)：根据假设和定理 3.5，对于每个 $r \in \mathbb{Z}_+$，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j; J_\bullet) = \sum_{j=1}^r v(\mathfrak{a}_j) = v(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) &\geq \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; J_\bullet) \cdot v(J_\bullet) \\ &= \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; J_\bullet),\end{aligned}$$

因此我们有 $\rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ J_\bullet) = \sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$ 根据定理 3.6，这也推出$v(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) = \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ J_\bullet)$ 对任意 $r \geq 1$。

现在，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $r \geq 1$，

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k; J_\bullet) \leq \frac{A(v) + v(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k)}{v(J_\bullet)} = A(v) + \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; J_\bullet) \cdot k,$$

这意味着

$$\sup_{r\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{lct}(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k; J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; J_\bullet) \cdot k \right) \leq A(v) < +\infty.$$

（2） ⇒ （1）：现在我们假设对于所有 $r \geq 1$， $\rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ J_\bullet) = \sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$，并且

$$M := \sup_{r\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{lct}(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k; J_\bullet) - \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; J_\bullet) \cdot k \right) < +\infty.$$

根据定理 4.2，对于任意 $r \geq 1$，我们可以找到一个赋值 $v_r \in \mathrm{Val}_X^{<\infty,\xi}$，使得 $v_r(J_\bullet) = 1$ 且 $v_r(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) = \rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ J_\bullet)$。注意，由于对所有 r， $\rho(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ J_\bullet) = \sum_{j=1}^r \rho(\mathfrak{a}_j; J_\bullet)$，由定理 4.4 可知，对所有$1 \leq j \leq r$， $v_r(\mathfrak{a}_j) = \rho(\mathfrak{a}_j;\ J_\bullet)$。此外，根据定理 4.2，我们可以假设对所有 r， $v_r(\mathfrak{m}_\xi) \geq q/p$ 且 $A(v_r) \leq M$。因此，$(v_r)_{r\in\mathbb{Z}_+}$ 存在一个子序列收敛到某个 $v \in \mathrm{Val}_X^{<\infty,\xi}$（它也满足 $v(\mathfrak{m}_\xi) \geq q/p$ 且 $A(v) \leq M$）。我们可以看出，对所有 $j \in \mathbb{Z}_+$，$v(\mathfrak{a}_j) = \rho(\mathfrak{a}_j; J_\bullet)$；并且根据 [JM12，推论 6.4]，有 $v(J_\bullet) = 1$，因为每个 $v_r(J_\bullet) = 1$。

证明完毕。 □

4.2. **定理1.3的证明**。

定理 1.3 的证明。首先，我们证明 (1) ⇒(2)。假设 v 是 R 上的一个赋值，满足$A(v) < \infty$，使得对所有 $j \in \mathbb{Z}_+$都有 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$。于是，由定理 2.10，对所有 $j \in \mathbb{Z}_+$ 都有 $\nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r;\ I_\bullet^{(r)}) = \sum_{j=1}^r b_j$。此外，由于 $v(I_\bullet^{(r)}) = \min_{1\leq j\leq r}\{v(\mathfrak{a}_j)/b_j\} = 1$，对每个 $r \geq 1$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k; I_\bullet^{(r)}) \leq \frac{A(v) + v(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k)}{v(I_\bullet^{(r)})} = A(v) + k\sum_{j=1}^r b_j,$$

由此即证实 $\sup_r \sup_k \left(\text{对数典范阈值 } (\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k;\ I_\bullet^{(r)}) - k\sum_{j=1}^r b_j \right) \leq A(v) < \infty$。

接下来，我们证明（2） ⇒ （1）。根据假设，存在某个 $r_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\sqrt{\sum_{j=1}^{r_0} \mathfrak{a}_j} = \mathfrak{m}$，这意味着存在 $s \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\mathfrak{m}^s \subseteq \sum_{j=1}^{r_0} \mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{m}$（参见 [AM69，推论 7。16]）。因此，取 $p = s \cdot \sum_{j=1}^{r_0} \lceil 1/b_j \rceil$，我们有

$$I_1^{(r)} \supseteq \mathfrak{m}^p, \quad \forall\, r \geq r_0.$$

此外，对于所有 r， $\mathrm{ord}_\mathfrak{m}(I_\bullet^{(r)}) = \min_{1\leq j\leq r}\{\mathrm{ord}_\mathfrak{m}(\mathfrak{a}_j)/b_j\} > 0$。

令 $\mathfrak{c}_r := \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$ 对于 $r \geq r_0$。由定理 3.9，我们有 $\rho(\mathfrak{c}_r;\ I_\bullet^{(r)}) = \nu(\mathfrak{c}_r; I_\bullet^{(r)}) = \sum_{j=1}^r b_j$ 对于所有 $r \geq 1$。现在根据定理 4.2，对于每个 $r \geq r_0$，存在一个赋值 $v_r \in \mathrm{Val}_X$ 在 R 上，使得 $v_r(I_\bullet^{(r)}) = 1$ 且 $v_r(\mathfrak{c}_r) = \rho(\mathfrak{c}_r; I_\bullet^{(r)}) = \sum_{j=1}^r b_j$。此外，该赋值 v_r 可以满足 $v_r(\mathfrak{m}) \geq 1/p$ 并且

$$A(v_r) \leq \sup_{k\geq 1} \left(\mathrm{lct}(\mathfrak{c}_r; I_\bullet^{(r)}) - k\sum_{j=1}^r b_j \right) \leq M,$$

其中 $M := \sup_{r\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\text{对数典范阈值 } (\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k;\ I_\bullet^{(r)}) - k\sum_{j=1}^r b_j \right) < \infty$。

我们验证$v_r(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对所有 $1 \leq j \leq r$均成立。事实上，我们有 $\sum_{j=1}^r v_r(\mathfrak{a}_j) = v_r(\mathfrak{c}_r) = \sum_{j=1}^r b_j$，并且根据定理 2.9， $v_r(\mathfrak{a}_j) \geq \nu(\mathfrak{a}_j; I_\bullet^{(r)}) \cdot v_r(I_\bullet^{(r)}) \geq b_j$ 对 $1 \leq j \leq r$ 成立。因此，对所有 $1 \leq j \leq r$， $v_r(\mathfrak{a}_j) = b_j$。同时，由于每个 v_r 都属于 Val_X的以下紧子集，

$$\{w \in \mathrm{Val}_X \mid A(w) \leq M,\ w(\mathfrak{m}) \geq 1/p\},$$

我们可以从 $(v_r)_{r\geq r_0}$ 中抽取一个收敛到某个赋值 v 的子序列，其中该赋值定义在R 上，且满足 $A(v) \leq M < \infty$。由于每个 v_r 都满足 $v_r(\mathfrak{a}_j) = b_j$，对 $1 \leq j \leq r$成立，因此我们可以看出，对所有 $j \in \mathbb{Z}_+$， $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$。所以，赋值 v 正是我们所需要的。□

5. Complex analytic case

在本节中，$R=\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\ o}$ 是 $\mathbb{C}^n$中原点 o 处的全纯函数芽环。

对于 R 的每个非零理想 $\mathfrak{a}$，我们可以按如下方式为 $\mathfrak{a}$ 关联一个在 o 附近的多重次调和（简称 psh）函数：若 $g_1,\dots,g_s$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一组生成元，则令 $\log|\mathfrak{a}|:=\log\left(|g_1|^2+\cdots+|g_s|^2\right)^{1/2}$。注意，此定义取决于 $\mathfrak{a}$ 的生成元的选取，但任意两种此类选取所得到的 psh 函数在 o 附近相差一个有界项。对于 R 的理想 $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2$，在 o 附近，我们有

$$\begin{aligned}\log|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| &= \log|\mathfrak{a}_1|+\log|\mathfrak{a}_2|+O(1),\\ \log|\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2| &= \max\{\log|\mathfrak{a}_1|,\log|\mathfrak{a}_2|\}+O(1).\end{aligned}$$

值得注意的是，对于 $\mathfrak{a}$ 和 I 的理想 R，我们还有 $\log|\mathfrak{a}|\le\log|I|+O(1)$ 当且仅当$\mathfrak{a}\subseteq I$，其中$\overline{I}$ 是 I 在 R 中的整闭包；例如参见 [CADG，推论 10。5]。

现在设 $\mathfrak{a}_1$、……、$\mathfrak{a}_r$是 R 的真理想，且 b_1、……、$b_r\in\mathbb{R}_+$。定义拟次调和函数

$$\Phi=\log\left(|\mathfrak{a}_1|^{1/b_1}+\cdots+|\mathfrak{a}_r|^{1/b_r}\right)=\max_{1\le j\le r}\log|\mathfrak{a}_j|^{1/b_j}+O(1)$$

在 o 附近，对于每个拟次调和函数 ψ 在 o 附近，回顾一下，相对型 [Ras06]从ψ 到 Φ 在 o 处定义为

$$\sigma(\psi,\Phi):=\sup\{c\ge 0\mid \psi\le c\Phi+O(1)\text{ near }o\}.$$

令 $I_\bullet:=\left(\overline{\mathfrak{a}_1^{\frac{1}{b_1}}}\right)_\bullet+\cdots+\left(\overline{\mathfrak{a}_r^{\frac{1}{b_r}}}\right)_\bullet$。

引理5.1。对于每个 $m\in\mathbb{Z}_+$，都有

$$\left(m+\max_{1\le j\le r}b_j\right)\Phi+O(1)\le\log|I_m|\le m\Phi+O(1)\quad near\ o.$$

证明。在 o附近，有

$$\begin{aligned}\log|I_m| &= \log\left|\sum_{m_1+\cdots+m_r=m}\mathfrak{a}_1^{\lceil m_1/b_1\rceil}\cdots\mathfrak{a}_r^{\lceil m_r/b_r\rceil}\right|+O(1)\\ &= \max_{m_1+\cdots+m_r=m}\left(\sum_{j=1}^r\lceil m_j/b_j\rceil\log|\mathfrak{a}_j|\right)+O(1),\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\log|I_m| &\le \max_{m_1+\cdots+m_r=m}\left(\sum_{j=1}^r m_j\cdot\log|\mathfrak{a}_j|^{1/b_j}\right)+O(1)\\ &= m\cdot\max_{1\le j\le r}\log|\mathfrak{a}_j|^{1/b_j}+O(1)=m\Phi+O(1),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\log|I_m| &\ge \max_{1\le j\le r}\lceil m/b_j\rceil\log|\mathfrak{a}_j|+O(1)\\ &\ge \max_{1\le j\le r}\left(m/b_j+1\right)\log|\mathfrak{a}_j|+O(1)\ge\left(m+\max_{1\le j\le r}b_j\right)\Phi+O(1).\end{aligned}$$

□

我们将在下面的两个引理中分别证明，Φ 的相对型和跳跃数分别与 $I_\bullet$ 的某些代数概念相一致。

引理 5.2. $\nu(\mathfrak{a};I_\bullet)=\sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi)$ 对$R=\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$的每个理想 $\mathfrak{a}$,$_o$。

证明。由于根据定理 2.4，$\overline{\nu}(\mathfrak{a};I_\bullet) = \nu(\mathfrak{a};I_\bullet)$，我们只需证明 $\nu(\mathfrak{a};I_\bullet) \le \sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi)$以及 $\nu(\mathfrak{a};I_\bullet) \ge \sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi)$。

首先，我们证明 $\nu(\mathfrak{a};I_\bullet) \le \sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi)$。不妨设 $\overline{\nu}(\mathfrak{a};I_\bullet) > 0$。对每个正整数 l，令 $m_l = \max\{m \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}^l \subseteq I_m\}$。由定理 5.1 可得

$$l \cdot \log|\mathfrak{a}| \le \log|I_{m_l}| + O(1) \le m_l \cdot \Phi + O(1).$$

根据相对型的定义，我们有

$$\sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi) \ge \sup_{l\in\mathbb{Z}_+} \frac{m_l}{l} = \overline{\nu}(\mathfrak{a};I_\bullet).$$

接下来，我们证明 $\overline{\nu}(\mathfrak{a};I_\bullet) \ge \sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi)$。不妨设 $\sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi) > 0$。给定任意正实数 $\sigma < \sigma(\log|\mathfrak{a}|,\Phi)$，我们有 $\log|\mathfrak{a}| \le \sigma\Phi + O(1)$ 在 o 附近。对于$L \in \mathbb{Z}_+$充分大的情形，显然存在正整数 $d_1, \ldots\ldots, d_r$使得

$$\frac{d_j}{L} \le \frac{1}{b_j} < \frac{d_j}{L} + \frac{1}{L}, \quad j = 1,\ldots r.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lceil L/\sigma\rceil \cdot \log|\mathfrak{a}| &\le L \max_{1\le j\le r} \log|\mathfrak{a}_j|^{1/b_j} + O(1) \le L \cdot \max_{1\le j\le r} \log|\mathfrak{a}_j|^{d_j/L} + O(1)\\ &\le \log\Big(\sum_{1\le j\le r} |\mathfrak{a}_j^{d_j}|\Big) + O(1).\end{aligned}$$

设 $J = \sum_{j=1}^r \mathfrak{a}_j^{d_j}$ 是$\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\,o}$的一个理想。那么，上述不等式表明 $\log|\mathfrak{a}^{\lceil L/\sigma\rceil}| \le \log|J| + O(1)$，这说明 $\mathfrak{a}^{\lceil L/\sigma\rceil} \subseteq J$。现在我们验证，对于 $m = \lfloor L - \max_{1\le j\le r} b_j\rfloor$，$J \subseteq I_m$ 成立。事实上，对这样的 m，我们有

$$m/b_j \le \Big(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{L}\Big)L \le d_j \implies \lceil m/b_j\rceil \le d_j, \quad j = 1,\ldots,r,$$

这意味着 $J = \sum \mathfrak{a}_j^{d_j} \subseteq I_m$。因此，对于 $m = \lfloor L -$，我们有 $\mathfrak{a}^{\lceil L/\sigma\rceil} \subseteq J \subseteq I_m$ $\max_{1\le j\le r} b_j\rfloor$。由此可得

$$\overline{\nu}(\mathfrak{a};\overline{I}_\bullet) \ge \sup_L \frac{\lfloor L - \max_{1\le j\le r} b_j\rfloor}{\lceil L/\sigma\rceil} = \sigma.$$

取 $\sigma \to \sigma(\log|\mathfrak{a}|, \Phi)$，得到 $\nu(\mathfrak{a};\overline{I_\bullet}) \ge \sigma(\log|\mathfrak{a}|, \Phi)$。

证明完毕。 □

对于 o 附近的一个 psh 函数 ϕ，ϕ 在 o 处的 乘子理想 定义为:

$$\mathscr{I}(\phi)_o := \{f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,o} \mid |f|^2 e^{-2\phi} \text{ is integrable near } o\},$$

并且对于 $R = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ 的每个理想 $\mathfrak{q}$，跳跃数 $c_o^{\mathfrak{q}}(\phi) := \sup\{c \ge 0 \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathscr{I}(c\phi)_o\}$。特别地，如果对于某个非零理想 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 和 $t > 0$，有 $\phi = t\log|\mathfrak{a}|$，那么 $\mathscr{I}(t\log|\mathfrak{a}|)_o = \mathscr{J}(t\cdot\mathfrak{a})$（参见 [DK01]）。

引理 5.3。对数典范阈值$^{\mathfrak{q}}(I_\bullet) = c_o^{\mathfrak{q}}(\Phi)$ 对于 $R = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ 的每个非零理想 $\mathfrak{q}$，o。

证明。设 $c > 0$。根据定理 5.1，对于每个 $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathscr{J}(cm\cdot I_\bullet) \supseteq \mathscr{J}(c\cdot I_m) = \mathscr{I}(c\log|I_m|)_o \supseteq \mathscr{I}\big(c(m+B)\Phi\big)_o,$$

其中 $B = \max_{1\le j\le r} b_j$。若 $cm = \mathrm{lct}^{\mathfrak{q}}(I_\bullet)$，则

$$\mathfrak{q} \not\subseteq \mathscr{J}(cm\cdot I_\bullet) \implies \mathfrak{q} \not\subseteq \mathscr{I}\big(c(m+B)\Phi\big)_o,$$

即，$\frac{m+B}{m}\cdot$对数典范阈值$^{\mathfrak{q}}(I_\bullet) = c(m+B) \ge c_o^{\mathfrak{q}}(\Phi)$。因此，通过取$m \to \infty$，我们得到对数典范阈值$^{\mathfrak{q}}(I_\bullet) \ge c_o^{\mathfrak{q}}(\Phi)$。

取充分大的 $L \in \mathbb{Z}_+$，并令 $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\frac{d_j}{L} \le \frac{1}{b_j} < \frac{d_j}{L} + \frac{1}{L}, \quad j = 1, \dots r.$$

于是，由定理 3.8，对每个 $c > 0$，我们有

$$\mathscr{J}(cL \cdot I_\bullet) \subseteq \mathscr{J}(c \cdot \mathfrak{b}_L) = \mathscr{I}(c \log |\mathfrak{b}_L|)_o =: \mathscr{I}(c\phi_L)_o,$$

其中 $\mathfrak{b}_L = \sum_{j=1}^r \mathfrak{a}_j^{d_j}$ 且 $\phi_L := \log |\mathfrak{b}_L|$。注意，由 d_j 的选取，

$$\begin{aligned} c\phi_L = \max_{1 \le j \le r} cd_j \log |\mathfrak{a}_j| + O(1) &\le \max_{1 \le j \le r} c\Big(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{L}\Big) L \log |\mathfrak{a}_j| + O(1) \\ &\le c(L - B)\Phi + O(1). \end{aligned}$$

因此，对所有 $c > 0$，$\mathscr{J}(cL \cdot I_\bullet) \subseteq \mathscr{I}\big(c(L-B)\Phi\big)_o$。从而，对$cL$ =对数典范阈值$^{\mathfrak{q}}(I_\bullet)$，有 $c_o^{\mathfrak{q}}(\Phi) \ge c(L - B)$。于是，令 $L \to \infty$，我们得到 $c_o^{\mathfrak{q}}(\Phi) \ge$ 对数典范阈值$^{\mathfrak{q}}(I_\bullet)$。

证明完毕。 □

现在我们证明定理 1.2 可以推出复解析情形中的一个结果，该结果已在 [BGMY25] 中得到证明。

推论 5.4 ([BGMY25，定理 1。2])。设 $R = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\, o}$，设 $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r$ 是 R 的真理想，且设 $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}_+$。那么，当且仅当 $\sigma(\log |\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r|, \Phi) = \sum_{j=1}^r b_j$ 时，存在 R 上的一个赋值，使得对 $j = 1, \dots, r$，有 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$，其中 $\Phi = \log\big(|\mathfrak{a}_1|^{1/b_1} + \cdots + |\mathfrak{a}_r|^{1/b_r}\big)$。

证明。利用定理 5.2，得到 $\sigma(\log |\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r|, \Phi) = \nu(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; I_\bullet)$，因此这个推论可由定理1.2直接推出。 □

此外，定理 1.3给出了复解析情形下无限赋值插值存在性的如下刻画。

推论 5.5。设 $R = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,o}$，设 $(\mathfrak{a}_j)_{j \ge 1}$ 是 R 的真理想序列，并设 $(b_j)_{j \ge 1}$ 是正实数序列。假设 $\bigcap_{j \ge 1} V(\mathfrak{a}_j) = \{o\}$ 在 o 附近成立。那么存在一个赋值 v，定义在 R 上，以 o 为中心，且满足 $A(v) < \infty$，使得 $v(\mathfrak{a}_j) = b_j$ 对所有 $j \ge 1$ 成立，当且仅当

$$\sigma(\log |\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r|, \Phi_r) = \sum_{j=1}^r b_j, \quad \forall\, r \ge 1,$$

and

$$\sup_{r \ge 1} \sup_{k \in \mathbb{N}} \Big(c_o^{\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k}(\Phi_r) - k \sum_{j=1}^r b_j \Big) < \infty,$$

其中 $\Phi_r =$对数 $\big(|\mathfrak{a}_1|^{1/b_1} + \cdots + |\mathfrak{a}_r|^{1/b_r}\big)$。

证明。利用定理 5.2 和定理 5.3，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $r \ge 1$，可得

$$\sigma(\log |\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r|, \Phi_r) = \overline{\nu}(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r; I_\bullet^{(r)}) \quad \text{and} \quad c_o^{\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k}(\Phi_r) = \mathrm{lct}(\mathfrak{a}_1^k \cdots \mathfrak{a}_r^k; I_\bullet^{(r)}),$$

其中 $I_\bullet^{(r)} := \Big(\frac{1}{b_1} \cdot \mathfrak{a}_1\Big)_\bullet + \cdots + \Big(\frac{1}{b_r} \cdot \mathfrak{a}_r\Big)_\bullet$。因此，该推论可直接由定理1.3 推出。

□

References

[AM69] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald。 *Introduction to Commutative Algebra*。（第 1 版）CRC出版社。DOI:10.1201/9780429493638。[BGMY24] S. J. Bao、Q. A. Guan、Z. T. Mi 和 Z. Yuan。"驯顺极大权、相对类型与赋值。" *Adv. Math.* 477 (2025)，论文编号 110364，共 70 页。DOI:10.1016/j.aim.2025.110364。[BGMY25] S. J. Bao、Q. A. Guan、Z. T. Mi 和 Z. Yuan。"赋值插值的存在性。"arXiv:2510.22244。预印本。[BGZ25] S. J. Bao、Q. A. Guan 和 L. Zhou。"代数周赋值。" arXiv:2505.19451v3。预印本。[BLQ24] H. Blum、Y. C. Liu 和 L. Qi。"局部环上滤过重数的凸性。" *Compo. Math.* 160，第 4 期（2024）：878–914。DOI:10.1112/S0010437X23007972。[CP24] S.D. Cutkosky 和 S. Praharaj。"滤过的渐近Samuel函数"。 *Acta Math Vietnam* 49 61 81 2024 10 1007 40306 024 00523 ，–（）。DOI: 。/s - - -x。[CADG] J.-P. Demailly。 *Complex Analytic and Differential Geometry*。可通过电子方式访问： https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf。[DK01] J.-P. Demailly 和 J. Koll´ar。"复奇点指数的半连续性与Fano轨形上的K¨ahler–Einstein度量。" *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 34，第 4 期（2001）：525–556。DOI:10.1016/S0012-9593(01)01069-2。[FJ04] C. Favre 和 M. Jonsson。 *The Valuative Tree*。数学讲义，第 1853 卷，Springer，2004。DOI:10.1007/b100262。[HS06] C. L. Huneke 和 I. Swanson。 *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*。伦敦数学会讲义丛书，第 336 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006。[JM12] M. Jonsson 和 M. Mustaţ˘a。"理想序列的赋值与渐近不变量。" *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 62 (2012)，第 6 期，2145–2209。DOI:10.5802/aif.2746。[KW07] A. K´uronya 和 E. Wolfe。"分次理想系的 Brian.con–Skoda 型定理。"*J. Algebra* 307 (2007)，795–803。DOI:10.1016/j.jalgebra.2006.09.020。[La04] R. Lazarsfeld。 *Positivity in Algebraic Geometry II*。Springer Berlin Heidelberg，2004。DOI:10.1007/978-3-642-18810-7。[LJT09] M. Lejeune-Jalabert 和 B. Teissier。"理想的整闭包与 ´等奇性。"*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques* 17 (2009)，第 4 期，781–859。DOI:10.5802/afst.1203。[Ras06] A. Rashkovskii。多重次调和函数的相对类型与极值问题。2006，文章编号 76283，共 26 页。DOI:10.1155/IMRN/2006/76283。[Sa52] P. Samuel。"理想的幂的一些渐近性质。" *Ann. of Math.* 56 (1952)，第 1 期，11–21。DOI:10.2307/1969764。[Sk72] H. Skoda。"将技术应用于带权全纯函数代数的理想理论。" *Ann. Sci. École Norm. Sup. série 4* 5 (1972)，第 4 期，545–579。DOI:10.24033/asens.1237。[Te08] M. Temkin。"特征零下拟优概形的奇点解消。" *Adv.* (), –。 *Math.* 219 2008 488 522 10 1016 2008 05 006 DOI: 。/j.aim. . .[Te18] M. Temkin。"Q 上的函子性奇点解消：边界与嵌入情形。" *Israel J. Math.* 224 (2018)，455–504。DOI:10.1007/s11856-018-1656-6。[Xu20] C. Xu。"极小化赋值是拟单项式的。" *Ann. of Math. (2)* 191(2020 3, 1003 1030 10 4007 2020 191 3 6)，第 – 期。DOI: 。/annals. . . .

Shijie Bao: Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sci-ences, Beijing 100190, China*Email address*: bsjie@amss.ac.cn

Qi'an Guan: School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871, China*Email address*: guanqian@math.pku.edu.cn

Zhitong Mi: School of Mathematics and Statistics, Beijing Jiaotong University, Bei-jing, 100044, China*Email address*: zhitongmi@amss.ac.cn

Zheng Yuan: State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China *Email address*: yuanzheng@amss.ac.cn