arXiv:2602.03185v1 [physics.flu-dyn] 3 Feb 2026

任意接触角气泡的冲量诱导液体射流

Hiroyuki Miyoshi[1]†、Hiroya Watanabe[2]、Ishin Kikuchi[2]和 Yoshiyuki Tagawa[2]

[1]东京大学数学工程与信息物理系，日本东京文京区本乡7-3-1[2]东京农工大学机械系统工程系，日本东京小金井市中町2-24-16，邮编184-8588

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

本文研究了浸没于容器中的管道上附着的球形气泡的接触角，与其底部受到冲击加速度后所诱导的射流速度之间的关系。尽管气泡几何形状会显著影响液体射流的喷射速度这一点已广为人知，但针对任意气泡形状下液体射流的数学研究仍然有限。本文推导出小空腔极限下的压力冲量，并将其表示为经典勒让德函数的可计算积分。研究表明，射流速度可分为两部分：（i）由气泡曲率产生的静水压力冲量分布所诱导的速度；（ii）由管道在容器中的浸没分布所诱导的速度。这一分解揭示，只有在管道浸没时才会出现最优气泡曲率；对于未浸没的构型则不存在最优曲率，此时射流速度随气泡深度单调增加。实验验证了这种非单调性，并定量支持了预测结果：最优几何形状会随浸没深度而变化。

关键词： 液体射流、勒让德函数、解析解

1. 引言

液体射流支撑着从精密制造到高分辨率喷墨技术等广泛的工程应用（Lohse 2022）。Eggers 和 Villermaux 在其具有开创性的综述中对相关控制物理和经典模型进行了全面总结（Eggers & Villermaux 2008），该综述至今仍指导着液体射流的基础研究与应用研究。同样的物理原理推动了无针给药（Baxter & Mitragotri 2006；Srivastava 等 2025年；Mohizin & Kim 2023）、增材制造和微流控驱动等工业应用。组织切割、金属切割和精密清洗等工程应用需要能够快速加速的射流，而这些射流无需复杂的装置即可产生（Tagawa 等 2012）。

当容器具有固体边界，且容器内存在空腔或物体时，冲量会导致液体射流产生。例如，Bartolo 等人 (2006)研究了液滴之间的冲量使液滴变形后，液滴空腔塌陷所引发的射流喷发

† 通讯邮箱：hiroyukimiyoshi@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

以及疏水表面。多项研究对这类高速射流的动力学进行了建模。Gekle 等人 (2009)建立了一个轴对称势模型，将空腔塌陷与射流速度联系起来。Tagawa 等人 (2012)考察了形成高度聚焦射流所需的条件；Rohilla 等人 则利用电火花产生气泡空化，研究几何参数对射流动力学的影响（Rohilla 与 Marston 2023）。Antkowiak 等人(2007)推导出在混合边界条件下受到脉冲激励后，球形空腔喷出速度的半解析解。最近，Dixit 等人 (2025)表明，在球形空腔内的液体中加入聚合物，可利用黏弹性应力维持更高的射流速度。当液体在短时间内加速时，考虑脉冲式变化这一极限情形很有用（Batchelor 2000）。在此类情形中，可利用满足拉普拉斯方程的冲量所诱导的压力冲量来研究液体射流的动力学。Philippi 等人(2018)表明，在半球形流体区域中，此类压力冲量诱导的流动可归结为具有狄利克雷和诺伊曼边界条件的拉普拉斯问题的解。Kurihara 等人 (2025)最近开展的实验进一步表明，在短时加速度作用下，液体内部的压力波动在时间上高度局域化，并可在压力冲量框架内进行定量表征；这为该类模型应用于冲击驱动的射流形成提供了实验支持。

Antkowiak 的研究的数学建模已通过液体射流实验得到验证。Onuki 等人 （2018年）发明了一种装置，利用管内的浸没式气液界面产生高度聚焦的液体射流。他们表明，浸没液体会显著提高射流速度，且速度随浸没深度的增加而提高。通过改进 Onuki 等人所用的射流装置，Kamamoto 等人 （2021年）和 Kobayashi 等人（2024年）开发了一种采用高黏度射流的新型涂层技术。Kiyama 等人 （2016年）开展了一系列实验，以确定影响液体射流速度的重要因素。Watanabe 等人 （2025年）将锥形容器中压力冲量的完整数值结果与采用简化模型得到的结果进行了比较。研究确定，射流速度既取决于容器横截面积变化所引起的总流量，也取决于沿中心线的压力冲量变化。另有报道指出，就 Antkowiak 等人，的实验而言，旋转容器中由压力冲量引起的反弹高度远低于无旋容器中的反弹高度（Andrade等人2023年；Xie 2025年）。

人们也普遍知道，冲量时刻球形空腔的形状会显著影响该空腔产生的射流速度（Gordillo & Blanco-Rodr´ıguez 2023年）。液体容器的几何形状也会显著影响射流速度和射流稳定性。Reuter & Ohl（2021年）研究了锥形液体容器产生的超声速射流，发现射流速度随锥角增大而增大。Krishnan 等发现，射流速度与两个物理速度的几何平均值成标度关系，即撞击速度和弯月面变形速度尺度（Krishnan等 2022年）。Cheng 等研究了自由表面撞击，以探究黏性效应对聚焦射流形成的影响（Cheng等 2024年）。尽管如上所述，已有多项关于射流速度与弯月面形状关系的实验研究，但此类数学建模仍然有限。

本文通过建立任意接触角下球形气泡冲量诱发液体射流的解析压力冲量解，弥补了这一空白。利用最初由 Lebedev（1965）为求解狄利克雷边值问题而引入的环面坐标，并结合基于勒让德函数的特殊函数表示，我们推导出了压力

冲量以及小气泡极限下所产生的射流速度的闭式表达式。近年来，基于环面坐标的相关公式已被应用于气泡蒸发（Popov 2005；Wilson & D’Ambrosio 2023）以及基底上多个气泡的相互作用等问题（Masoud等2021；Dombrovsky等2025），展现了其在自由边界问题中的多功能性。

本分析的一个关键结果是，射流速度可以分解为两个物理上截然不同的贡献：(i) 与气泡几何形状相关的曲率诱导聚焦项，以及 (ii) 由周围容器所施加的压力冲量再分布引起的浸没诱导项。这一分解揭示了一种最佳气泡形状，可在管浸没时使射流速度最大化。在没有浸没的情况下不会出现这一效应，此时射流速度随气泡深度单调增加。基于图像的冲击实验验证了理论预测，并确认最佳几何形状源于这两种机制之间的竞争。

这一新解提供了一种考虑容器边界的混合方法。通过变量代换将环面坐标与柱坐标相结合，解由第3节所导出解析解的偶数阶导数所得到的基底的级数展开给出。直观解释中常被忽略的一个关键点是，浸没并非仅仅将静水压力冲量平移一个可加常数。由于射流速度由压力冲量的梯度决定，浸没深度通过与自由液面边界条件相关的一个独特调和分量进入速度。由此得到射流速度自然分解为两项贡献，这构成本文的核心组织原则。

射流速度随角度变化的数值结果表明，存在一个使射流速度达到最大的最佳角度。在实际实验中，通过诱发液体容器底部发生撞击，验证了这一趋势。最重要的是，当管浸入液体中时，球形气泡的临界角会减小。这一结果表明，控制球形空腔的形状对于产生高速射流至关重要。

本文其余部分安排如下。第 2 节在冲量作用后对问题进行建模，并推导出一个三维轴对称拉普拉斯方程，用于求解弯月面和壁面上具有混合边界条件的压力冲量。第 3 节利用环面坐标，得到压力冲量在小气泡极限下的解析公式。对于含有气泡的一般区域，第 4 节将第 3 节导出的解与若干导数叠加，求得拉普拉斯方程的解。最后，第 5 节给出实验结果，第 6 节总结全文。

2. 问题表述

本文中，我们用星号表示有量纲量，用普通字母表示无量纲量。考虑一个附着在管尖端的球形气泡，其中管在管外的刚性容器中浸入深度 h^* 。容器底部受到撞击后突然承受冲量，射流从受控球形气泡的底部喷出。气泡弯月面与水平线之间的夹角定义为 θ。容器内圆柱管的半径为 R^*，容器的半径为 r^*。图1示意了几何参数。

定义　撞击前后的速度分别为 $\boldsymbol{u}^*(0)$ 和 $\boldsymbol{u}^*(\tau^*)$，其中 τ^* 为　n

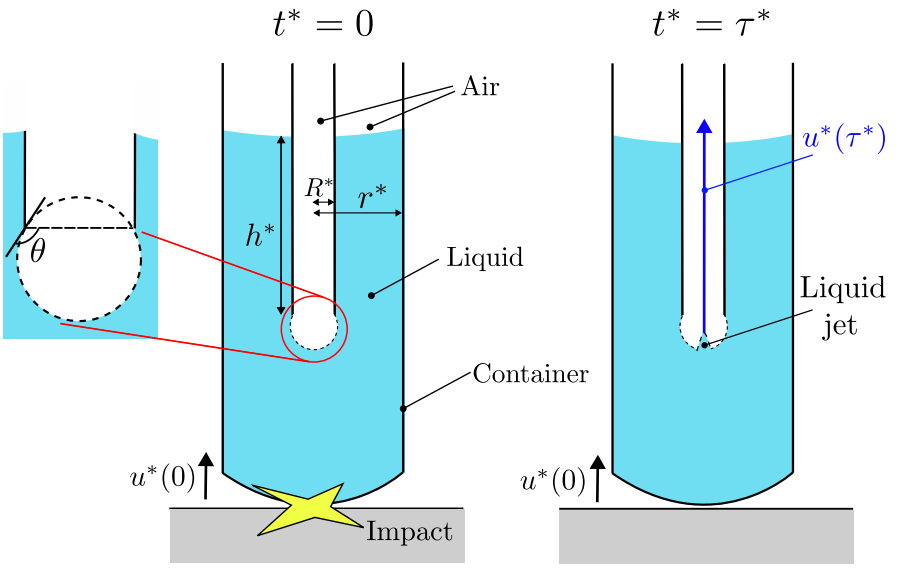

FIGURE 1. 撞击地面产生的液体射流。在初始时刻 $t^* = 0$，下落容器底部受到撞击，从而使圆柱形容器中的压力冲量 Π^* 发生变化。假设管端的气泡区域为球形，这与一些实验结果一致（参见 Onuki *et al.* (2018)）。撞击后，压力冲量的非均匀分布会产生液体射流。

撞击持续时间。根据 Batchelor（2000年）的经典研究以及 Antkowiak等人（2007年）关于液体射流的最新研究，假设流体在冲量作用的瞬态时间内为无黏、无旋流体。此时液体的速度 $\boldsymbol{u}^*$受以下方程支配

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho^*}\nabla^* p^*, \tag{2.1}$$

其中， ∇^* 是有量纲的梯度算子， p^* 是流体压力， ρ^* 是液体的密度。对式 (2.1) 在撞击的短暂时间段 τ^*内积分后，速度 $\boldsymbol{u}^*(\tau^*)$ 满足

$$\boldsymbol{u}^*(\tau^*) - \boldsymbol{u}^*(0) = -\frac{1}{\rho^*}\nabla^* \Pi^*. \tag{2.2}$$

这里， Π^* 是压力冲量，它定义为压力 p^* 在撞击持续时间 τ^*内的积分。由于假设 $\boldsymbol{u}^*$ 不可压缩，压力冲量Π^* 在充满液体的区域内满足三维拉普拉斯方程；即，

$$\nabla^{*2}\Pi^* = 0 \tag{2.3}$$

在气泡外部的圆柱形区域内。获得 Π^* 后，按照式 (2.2) 使用 Π^* 的空间导数计算射流速度 $\boldsymbol{u}^*(\tau^*)$。

将压力冲量和坐标无量纲化会很方便，即$\Pi^* = \Pi \cdot \rho^* U_0^* R^*$和 $(x^*, y^*, z^*) = (R^* x, R^* y, R^* z)$。采用这种尺度后，内管半径始终设为 1。 U_0^* 是由于底部发生弹性碰撞，容器在初始时刻沿 z^*方向的速度。此外，无量纲几何参数定义为 $h := h^*/R^*$， $\lambda := R^*/r^*$。无量纲几何形状如图2左侧所示。

假设空腔和容器的形状具有轴对称性，则在由（ξ, z）定义的柱坐标系中研究射流速度会很方便。我们考虑球形空腔外部柱形区域内三维势问题的一般解。接触角为 θ 的球形气泡边界定义为 $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} := \left\{ (\xi, z) \middle| \ \xi^2 + \left(z - \frac{1}{\tan\theta} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta},\ z \leqslant 0 \right\}. \tag{2.4}$$

注意，由 H 定义的气泡深度与接触角 θ 之间的关系为

$$H = \tan(\theta/2). \tag{2.5}$$

我们假设容器在 z方向上的长度远大于管和容器的半径。因此，底部发生弹性碰撞后，撞击会使 $z \to -\infty$ 处的速度分布均匀。

界面的边界条件为自由界面处的欧拉–伯努利方程；该方程在弯月面 $\mathcal{S}$上简化为 $\Pi = 0$ ，在容器内液体界面顶部 $1 < \xi < 1/\lambda$处则简化为 $z = h$ （Gordillo 等2020年；Onuki 等2018）。此外，假设气泡区域上方区域的压力冲量梯度均匀，则可近似认为压力冲量在 $z = 0$、 $1 < \xi < 1/\lambda$上满足 $\Pi = h$ 。Onuki 等 （2018）的先前研究也采用了这一近似，并表明该近似在预测射流速度方面与实验结果吻合良好。对于容器侧壁，施加无穿透条件；也就是说，由于假设容器仅沿 z轴运动，因此对于 $\xi = 1/\lambda$、 $z < 0$，有 $\partial\Pi/\partial\xi = 0$。因此，无量纲压力冲量 Π 满足以下柱坐标下的混合边值问题:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \nabla^2\Pi = 0, & (\xi, z) \in D, \\ \text{(ii)} & \dfrac{\partial\Pi}{\partial\xi}(1/\lambda, z) = 0, & z < 0 \\ \text{(iii)} & \Pi(\xi, z) = 0, & (\xi, z) \in \mathcal{S}, \\ \text{(iv)} & \Pi(\xi, 0) = h, & 1 \leqslant \xi \leqslant 1/\lambda, \\ \text{(v)} & \Pi(\xi, z) = -z + \text{const}, & z \to -\infty, \end{cases} \tag{2.6}$$

其中，区域 D 是 $z < 0$ 的流体区域，如图2左侧所示。求得 Π 后，根据式 (2.2)，利用空腔底部相对于运动坐标系的速度计算初始射流速度。

3. 小气泡极限

本节研究小气泡极限，即当空腔相对于图2右侧所示容器的半径足够小时的情况。这对应于内管半径与容器半径之比趋于 0，即 $\lambda \to 0$。此时，球形气泡 $\mathcal{S}$ 外部的区域为半无限下半部三维区域，记为 D_∞。对于这一极限情况，可以得到场 Π_∞ 的解析解，进而求出冲击加速度诱导的射流速度。

随着 $\lambda \to 0$，式 (2.6) 中 (ii) 的侧壁无穿透条件消失。

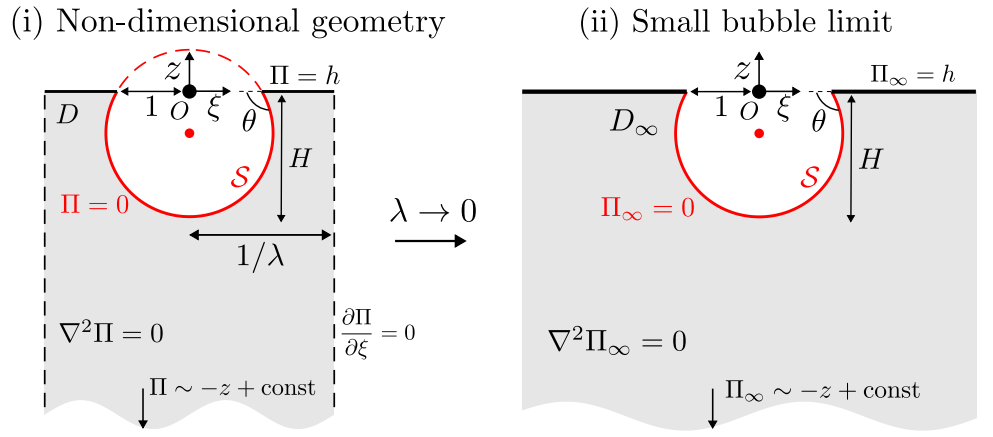

FIGURE 2. (i) 调和压力冲量的无量纲边值问题 Π 以及 (ii) 小气泡极限下的几何形状 D_∞。当 $\lambda \to 0$时，几何形状为球形气泡外部的半无限三维半空间，记作 D_∞。注意，数值 H 与 θ 的关系为 $H = \tan(\theta/2)$。冲量 Π 可由 Π_∞ 在 $\lambda \to 0$下很好地近似。

由 $\Pi_\infty(\xi, z)$ 定义的压力冲量现在满足

$$\begin{cases} \text{(i)} & \nabla^2 \Pi_\infty = 0, \quad (\xi, z) \in D_\infty, \\ \text{(iii)} & \Pi_\infty(\xi, z) = 0, \quad (\xi, z) \in \mathcal{S}, \\ \text{(iv)} & \Pi_\infty(\xi, 0) = h, \quad 1 \leqslant \xi \leqslant \infty, \\ \text{(v)} & \Pi_\infty(\xi, z) = -z + \text{const}, \quad z \to -\infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

为求解边值问题 (3.1)，将柱坐标 $(\xi,\ z)$ 变换为环面坐标 $(\alpha,\ \beta)$（Lebedev 1965）较为方便，因为在该坐标系中，D_∞ 的所有边界都可表示为一条等值线。按照 Lebedev（1965）第8章中给出的数学设定，进行如下变量代换：

$$\xi(\alpha, \beta) = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \quad z(\alpha, \beta) = \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \tag{3.2}$$

其中，区域 D_∞ 内 α 和 β 的参数空间分别为 $0 < \alpha < \infty$，$\pi + \theta < \beta <2\pi$。逆变换为

$$\alpha(\xi, z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z^2 + (\xi + 1)^2}{z^2 + (\xi - 1)^2} \right), \quad \beta(\xi, z) = \pi + \tan^{-1} \left(\frac{2z}{\xi^2 + z^2 - 1} \right), \tag{3.3}$$

其中，β 的选取使得 $\pi + \theta < \beta < 2\pi$。使用该坐标系，球形气泡的边界 $\mathcal{S}$ 和满足 $z = 0$ 的平面 $1 < \xi$ 分别对应于 $\beta = \pi + \theta$ 和$\beta = 2\pi$。几何形状与参数 α 和β 之间的对应关系如图3所示。利用新坐标和 Lebedev（1965）中的数学表述，边值问题（3.1）的解 $\Pi_\infty(\xi,\ z)$为

$$\Pi_\infty(\xi, z) = \Pi_f(\xi, z) + h\Pi_g(\xi, z), \tag{3.4}$$

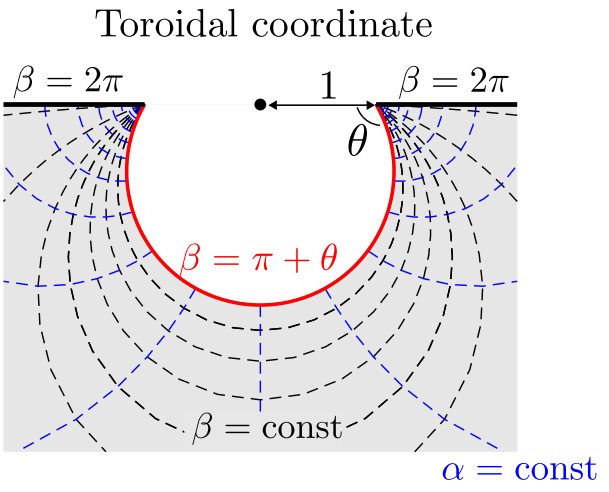

FIGURE 3. 用于求解压力冲量的混合边值问题的环面坐标（α, β）。柱坐标（ξ, z）通过（3.2）中的坐标变换映射到新坐标（α, β）。气泡边界表示为 $\beta = \pi + \theta$。

其中

$$\Pi_f(\xi, z) := -z - f_\theta(\alpha(\xi, z), \beta(\xi, z)), \tag{3.5}$$
$$\Pi_g(\xi, z) := 1 - g_\theta(\alpha(\xi, z), \beta(\xi, z), \tag{3.6}$$

and

$$f_\theta(\alpha, \beta) := 2\sqrt{2(\cosh\alpha - \cos\beta)} \int_0^\infty \tau \frac{\sinh\theta\tau \sinh(2\pi - \beta)\tau}{\cosh\pi\tau \sinh(\pi - \theta)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau, \tag{3.7}$$

$$g_\theta(\alpha, \beta) := \sqrt{2(\cosh\alpha - \cos\beta)} \int_0^\infty \frac{\cosh\theta\tau \sinh(2\pi - \beta)\tau}{\cosh\pi\tau \sinh(\pi - \theta)\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau. \tag{3.8}$$

柱坐标（ξ, z）通过坐标变换（3.2）与（α, β）相关联。函数 $P_\nu(z)$ 是一种特殊函数，称为阶数为 ν 的第一类勒让德函数。该公式的推导过程详见附录 A。

请注意，$\Pi_f(\xi, z)$ 是由无浸没时球形气泡的曲率引起的压力冲量，而 Π_g 是由管道浸没引起的压力冲量。总压力冲量 Π_∞ 分解为 Π_f 和 Π_g 乘以管道浸没长度 h。

尽管表达式 (3.7) 和 (3.8) 与 Lebedev（1965）中的 (8.12.12) 相似，但由于边界条件 (i)、(iii)–(v) 不同，这些解是新颖的。这也是本文的主要贡献之一。

该公式包含对函数 $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cosh\alpha)$ 关于 τ 的积分。利用一些众所周知的积分表示，可以计算该函数（Lebedev, 1965）。本文附录 B 给出了该函数的数值计算。

射流速度通过直接计算式 (3.4) 中 Π_∞ 关于 z 的导数获得，取值位置为气泡底部。为此，需计算 f_θ 的导数

以及 g_θ，计算方法如下，使用链式法则：

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial f_\theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial f_\theta}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial g_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial g_\theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial g_\theta}{\partial \beta}. \tag{3.9}$$

在位于 $(\xi,\ z) = (0,\ -H)$ 处的球形气泡底部评估射流速度。该处的参数为 $\alpha = 0$ 和 $\beta = \pi + \theta$。请注意，(3.9) 中f_θ 和 g_θ 相对于 α 和 β 的导数可以显式求出。例如，g_θ 相对于 β 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_\theta}{\partial \beta} = {} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2(\cosh\alpha - \cos\beta)}} \int_0^\infty \frac{\cosh\theta\tau \sinh(2\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau \sinh(\pi-\theta)\tau} P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau \\ & - \sqrt{2(\cosh\alpha - \cos\beta)} \int_0^\infty \tau \frac{\cosh\theta\tau \cosh(2\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau \sinh(\pi-\theta)\tau} P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.10}$$

利用 Mehler–Fock定理以及勒让德函数的积分表示（Lebedev，1965），在随管移动的参考系中，空腔底部的速度 $v_f(\theta)$ 可显式表示为

$$v_f(\theta) := \frac{\partial f_\theta}{\partial z}(0, \pi+\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 8\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \int_0^\infty \tau^2 \frac{\sinh\theta\tau \cosh(\pi-\theta)\tau}{\cosh\pi\tau \sinh(\pi-\theta)\tau}\mathrm{d}\tau, \tag{3.11}$$

and

$$v_g(\theta) := \frac{\partial g_\theta}{\partial z}(0, \pi+\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta + 4\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \int_0^\infty \tau \frac{\cosh\theta\tau \cosh(\pi-\theta)\tau}{\cosh\pi\tau \sinh(\pi-\theta)\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{3.12}$$

根据压力冲量分解 (3.4)，总射流速度 $v(\theta)$ 等于

$$v(\theta) = v_f(\theta) + h v_g(\theta), \tag{3.13}$$

这意味着，速度由速度 $v_f(\theta)$ 和速度 $v_g(\theta)$ 组成：前者源于撞击产生的压力冲量，其中 $h = 0$ ；后者则由管浸没所致的压力分布引起。这是自然的，因为解 (3.4) 由气泡 Π_f 产生的静水压力冲量，以及管浸没所产生的压力组成；后者等于 Π_g 乘以高度 h。这一分解很重要，因为射流速度 $v(\theta)$ 关于 h和气泡高度 $H = \tan(\theta/2)$ 存在局部最大值。

(3.11) 和 (3.12) 中的最终积分似乎无法化简为更简单的闭式表达式。不过，由于被积函数在 $\tau \to \infty$ 时会迅速衰减至零，因此很容易对其进行数值计算。尽管如此，我们仍可证明，对于 $\theta = \pi/2$，积分表达式 (3.11) 可以简化如下：

$$v_f(\pi/2) = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\int_0^\infty \tau^2 \frac{\cosh\frac{\pi}{2}\tau}{\cosh\pi\tau}\mathrm{d}\tau = 2. \tag{3.14}$$

这一结果与 Antkowiak 等人（2007年）的图6相对应，如 $\lambda \to 0$ 所示，其中研究了半球形气泡产生的射流。该速度与以下事实一致： $H = 1$ ($\theta = \pi/2$) 的压力冲量明确写为 $F_{\pi/2}(\xi,\ z) = -z - z/(\xi^2 + z^2)^{3/2}$。显然，该函数在下半球上满足 $F_{\pi/2}(\xi,\ z) = 0$ ，且 $z = 0,\ \xi \geqslant 1$。这一事实将在第4节中使用。对于 $\theta = 0$，显然 $v_f(0) = 0$ ，并且

$$v_g(0) = 4\int_0^\infty \frac{\tau\mathrm{d}\tau}{\sinh\pi\tau} = 8\int_0^\infty \frac{\tau\mathrm{d}\tau}{e^{\pi\tau} - e^{-\pi\tau}} = 8\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^\infty \frac{\tau}{e^{\pi\tau}}\sum_{n=0}^\infty e^{-2n\pi\tau}\mathrm{d}\tau = 1. \tag{3.15}$$

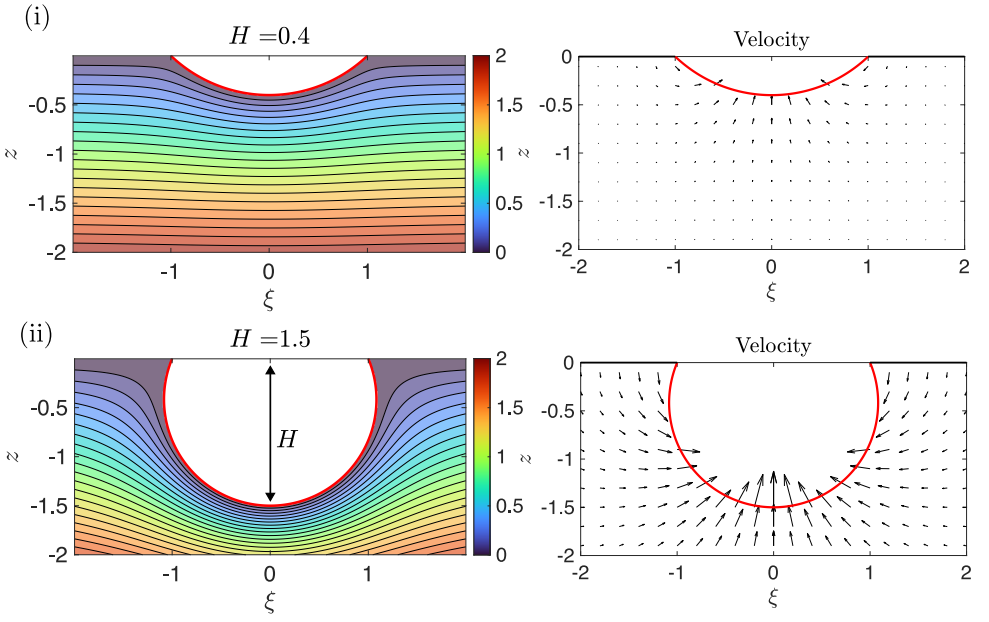

FIGURE 4. 调和压力冲量 $\Pi_\infty(\xi,\ z)$ 在式（3.7）中的等高线图，以及式（3.11）中的速度。(i) $H = 0.4$ 和 (ii) $H = 1.5$。数值 H 与角度 θ 的关系为 $H = \tan(\theta/2)$。

图4显示了腔高分别为(i) $H = 0.4$和(ii) $H = 1.5$时， Π_f 的等高线图和速度图。注意， H 和 θ 彼此满足关系式 (2.5)。随着空腔高度 H 增加，速度的大小也随之增加。还可以观察到，最大速度出现在气泡底部。这是自然的，因为随着 H 增大，球形气泡不断扩张，等高线之间的间距变小，因此底部的压力梯度增大。对于 $h > 0$，图5显示了空腔高度为 $H = 1.5$时， Π_∞ 的等高线图和速度图，其中(i) $h = 1$ ，(ii) $h = 2.5$ 。随着 h增大，速度也随之增大。

图6展示了不同浸没深度 $h = 0$、 $h = 2.0$、 $h = 4.0$ 和 $h = 8.0$下，射流速度 $v(\theta)$ 随 $H = \tan(\theta/2)$ 的变化。对于 $h = 0$，随着气泡高度 H 增加，速度单调增大。相反，对于$h > 0$，存在一个使速度 $v(\theta)$达到最大值的临界值 H 。还可以观察到，随着 h 增大， H 的临界值会减小。

这里推导的公式仅适用于壁面与内部空腔相距较远的情况。当二者相距较近时，小气泡极限无法很好地近似射流速度。不过，我们将在下一节中表明，对于 λ 和 H 的广泛参数范围，公式（3.7）和（3.8）都与结果吻合良好。

4. 使用级数解求压力冲量的精确解

第 3 节给出了压力冲量场和速度的解析公式，适用于气泡尺寸足够小、可忽略侧壁效应的情况。尽管已有液体射流的场和速度的解析公式，但壁面的存在会对两者产生影响。Antkowiak 等 （2007年）研究了射流速度与空腔尺寸及管半径变化之间的关系，其中空腔的接触角始终为 $\pi/2$。数值和实验结果均表明，射流

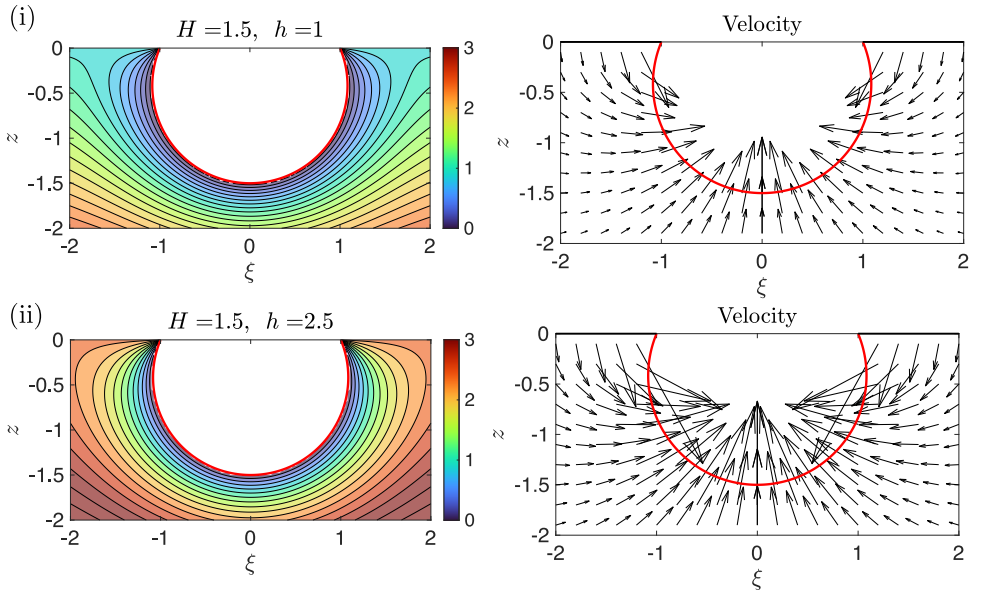

FIGURE 5. 式（3.7）中的调和压力冲量 $\Pi_\infty(\xi, z)$ 与式（3.11）中的速度的等高线图，适用于 $H = 1.5$。请注意，由于边界条件，$\Pi_\infty(\pm1,0)$ 不连续。(i) $h = 1.0$ 和 (ii) $h = 2.5$。空腔高度固定为 $H = 1.5$。

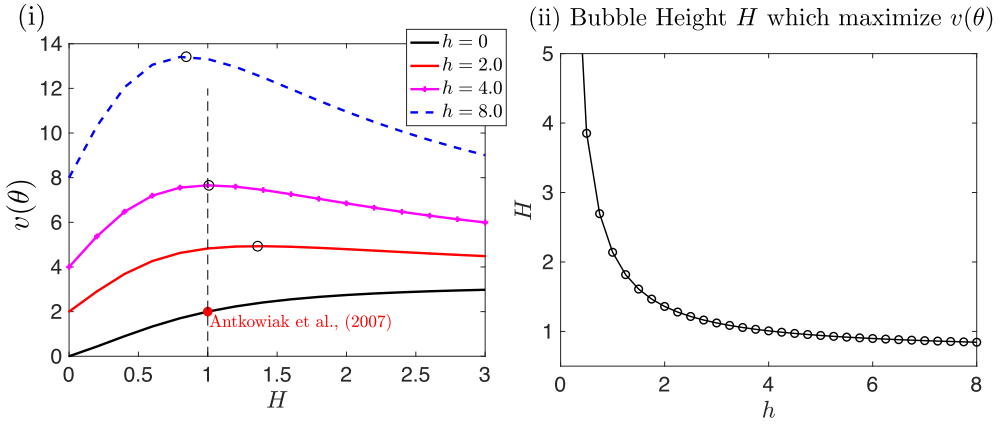

FIGURE 6. (i) 不同浸没深度 h下气泡底部的速度。考察四种不同 h 下的射流速度，分别为 $h = 0$、$h = 2.0$、$h = 4.0$ 和 $h = 8.0$。圆点对应速度 $v(\theta)$ 达到最大值的位置。(ii) 关于深度 h，使射流速度达到最大值的 H 临界值。

速度会随着空腔接近壁面边界而降低，即 $\lambda \to 1$。还观察到，在 $h = 0$ 情况下，速度约为 1。

为研究与 Antkowiak 等（2007年）相似的情形，我们基于第 3 节中的解析公式，提出了一种用于求取存在壁面边界时压力冲量的半解析方法。与 Antkowiak 等（2007年）中的表述类似，管内球形气泡外部的场由式（3.7）和（3.8）中压力冲量导出的高阶场叠加而成。

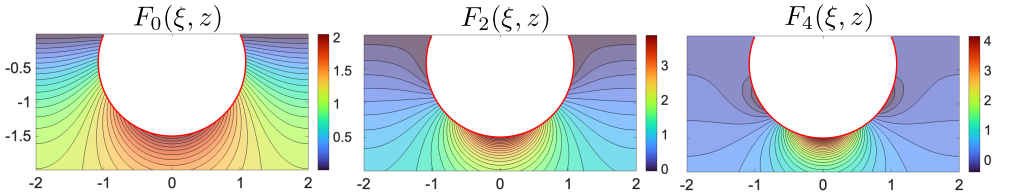

FIGURE 7. $F_0(\xi,\ z)$、 $F_2(\xi,\ z)$ 和 $F_4(\xi,\ z)$，用于 $\lambda=1/2$。通过叠加这些函数，构造出满足条件 (i)–(v) 的解。

4.1. 由 *Antkowiak* 等推导 $\theta=\pi/2$ 的半解析解 al.

Antkowiak 等人推导出了半球形气泡外部管内势问题的半解析解，即 $\theta=\pi/2$ (Antkowiak 等人2007年)。Antkowiak等人(2007年)从考虑以下初始函数开始建立公式：

$$\phi_0(\xi,z):=\frac{z}{(\xi^2+z^2)^{3/2}}. \tag{4.1}$$

容易看出， $\Pi(\xi,\ z):=-z-\phi_0(\xi,\ z)$ 满足 (2.6) 中的条件 (i)、(iii)–(v)。为满足边界条件 (ii)，我们考虑修正场 $F_0\ \xi\ z\ =\phi_0\ \xi\ z+(,\ ):$ $\psi_0\ \xi\ z$ $\psi_0\ \xi\ z$ (，) (，)，其中添加了 (，) 以满足边界条件 (ii)。利用条件 $\psi_0(\xi,\ z)\ =0$ 在 $z=0$上， $\psi_0(\xi,\ z)$ 可表示为由贝塞尔函数 $I_0(\xi)$ 构成的傅里叶正弦函数，如下所示：

$$\psi_0(\xi,z):=\int_0^\infty \eta_0(m)\sin(mz)I_0(m\xi)\mathrm{d}m, \tag{4.2}$$

其中， $f_0(m)$ 是通过对函数进行傅里叶正弦变换计算得到的，以满足管侧壁上的边界条件，如下所示：

$$\eta_0(m)=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{\sin mz}{mI_1(m/\lambda)}\frac{\partial\phi_0}{\partial\xi}(1/\lambda,z)\mathrm{d}z. \tag{4.3}$$

尽管 $-z-F_0(\xi,\ z)$ 并非管在 $-z-F_0(\xi,\ z)\ \neq 0$ on $\mathcal{S}$ 条件下边值问题的精确解，但可以利用与 $\phi_0(\xi,\ z)$ 相关的新基底求得解。考虑 $\phi_0(\xi,\ z)$ 关于 z 的一个偶数阶导数：

$$\phi_{2n}(\xi,z):=\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}\phi_0}{\partial z^{2n}}(\xi,z),\quad \psi_{2n}(\xi,z):=\int_0^\infty \eta_{2n}(m)\sin(mz)I_0(m\xi)\mathrm{d}m, \tag{4.4}$$

其中，系数 $\eta_{2n}(m)$ 的计算方式与式 (4.3) 类似，只需将 $\phi_0(1/\lambda,\ z)$ 修改为 $\phi_{2n}(1/\lambda,\ z)$。解 $\Pi(\xi,\ z)$ 是以下函数 F_{2n} 的叠加：

$$\Pi(\xi,z):=-z-\sum_{n=0}^\infty A_{2n}F_{2n}(\xi,z),\quad F_{2n}(\xi,z):=\phi_{2n}(\xi,z)+\psi_{2n}(\xi,z). \tag{4.5}$$

Antkowiak 等人推导出了 $F_{2n}(m)$ 的显式表示，进而得到了关于系数 A_{2n} 的线性方程组，其截断阶数为 N。

我们证明，这种方法适用于并非总是具有半球形气泡的问题。唯一的修改是基函数 ϕ_{2n}。

4.2. 任意角度 θ 的半解析解

我们从式 (3.7) 中定义的解 $\phi_0(\alpha,\ \beta):=f_\theta(\alpha,\ \beta)$ 开始构造。注意，该函数是调和函数，并满足 $\phi_0(\alpha,\ \beta)\ =0$ 对于 $\beta\ =2\pi$。与

式 (4.4) 中新候选函数的定义类似，我们定义一个与 $\phi_0(\alpha,\ \beta)$ 关于 β 的 $2n$ 阶导数相关的调和函数，定义如下：

$$\begin{aligned}\phi_{2n}(\alpha,\beta) &:= \frac{2\sqrt{2(\cosh\alpha-\cos\beta)}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}}{\partial\beta^{2n}}\int_0^\infty \tau\frac{\sinh\theta\tau\sinh(2\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau\sinh(\pi-\theta)\tau}P_{-1/2+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{2\sqrt{2(\cosh\alpha-\cos\beta)}}{(2n)!}\int_0^\infty \tau^{2n+1}\frac{\sinh\theta\tau\sinh(2\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau\sinh(\pi-\theta)\tau}P_{-1/2+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.6}$$

对于 $n=0,\ 1,\ \ldots\ldots$。这些函数在区域 D 中是调和函数，且 $\phi_{2n}(\alpha,\ 2\pi)=0$，即 $\phi_{2n}(\alpha,\ \beta)=0$ 对于 $z=0,\ \xi\geqslant 1$ 在柱坐标系中。利用新函数 $\phi_{2n}(\alpha,\ \beta)$ 以及式（4.2）中定义的、采用不同核函数的修正函数 $\psi_{2n}(\alpha,\ \beta)$，

$$\eta_{2n}(m) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin mz}{mI_1(m/\lambda)}\frac{\partial\phi_{2n}}{\partial\xi}(\alpha(1/\lambda,z),\beta(1/\lambda,z))\mathrm{d}z, \tag{4.7}$$

$\Pi\ \xi\ z$ $F_{2n}\ \xi\ z\ =\phi_{2n}\ \alpha\ \xi\ z\ \ \beta\ \xi\ z\ +(,\ )$ 的解由 $(,\ )$ 的叠加给出：
$\psi_{2n}\ \alpha\ \xi\ z\ \ \beta\ \xi\ z$
$(\ (,\ )\ (,\ )\ )\ (\ (,\ )\ (,\ )\ )$ 如下：

$$\Pi(\xi,z) = -z - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}F_{2n}(\xi,z). \tag{4.8}$$

该表达式与 Antkowiak等人的式（4.5）类似，不同之处在于基函数 $F_{2n}(\xi,\ z)$ 不同。系数 A_{2n} 的确定方式是使 $\Pi(\xi,\ z)=0$ 在 $\mathcal{S}$ 上成立。使用配点法求得系数 A_{2n} 后，即可计算射流速度。计算时可对 z 求导，并应用链式法则。

图 7 展示了 $\lambda=0.5$ 和 $H=1.5$ 时，$F_0(\xi,\ z)$、$F_2(\xi,\ z)$ 和 $F_4(\xi,\ z)$ 的等高线图。可以看出，通过加入具有较大 n 的 $F_{2n}(\xi,\ z)$，可以纳入更高阶的振荡项。通过对 F_{2n} 进行线性组合，可以提取出边值问题 (2.6) 的解Π 。

4.3. 浸没管的半解析解

同样的方法也可用于求解带有$h\neq 0$的问题 (2.6)。首先注意，在 (3.8) 中定义的 $g_\theta(\alpha,\ \beta)$ 不满足容器侧壁上的边界条件。为满足该边界条件，我们考虑一个修正˜项 $\phi_0(\alpha,\ \beta):=g_\theta(\alpha,\ \beta)$，并定义

$$G(\xi,z) := \tilde{\phi}_0(\alpha(\xi,z),\beta(\xi,z)) + \tilde{\psi}(\alpha(\xi,z),\beta(\xi,z)) \tag{4.9}$$

其中，$\tilde{\psi}(\xi,\ z)$由式 (4.2) 给出，表示为 $\tilde{\phi}_0(\xi,\ z)$的傅里叶正弦级数。由此可得压力场

$$\Pi(\xi,z) = -z - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_{2n}F_{2n}(\xi,z) + h\left(1-G(\xi,z)\right), \tag{4.10}$$

其中，最后一项表示 $z=0$ 处的边界条件以及 $z=0$,˜$\xi=\pm 1$处的奇点。求得系数 A_{2n}后，即可计算射流的场和速度。

在数值计算中，我们将级数 (4.8) 截断至 N，以计算气泡底部的射流速度 $v(\theta)$。由于基底适用于混合边值问题，所需的基函数数量较少。同样

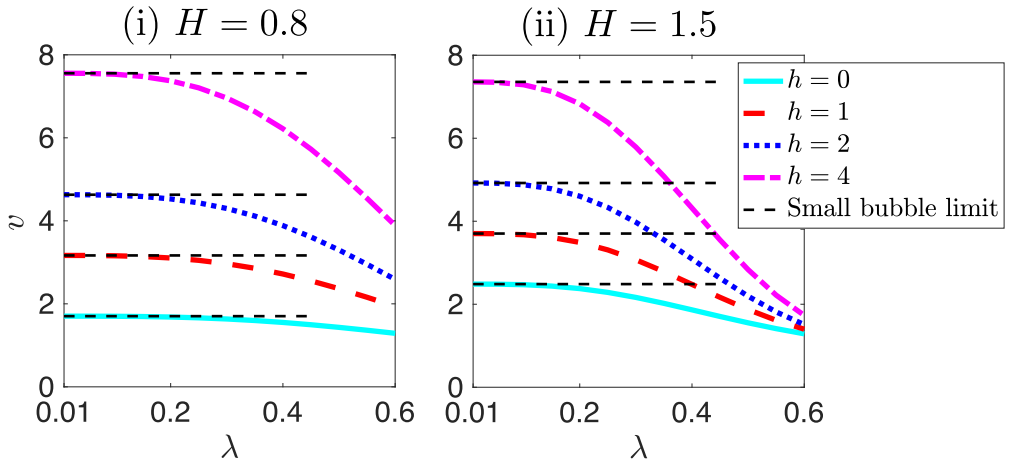

FIGURE 8. 对小气泡极限下的解析解（3.7）和（3.8）进行了比较，其中解析解以黑色虚线表示，数值解则通过一系列基函数计算得到。（i） $H = 0.8$ 和（ii） $H = 1.5$ ，其中 $h = 0$、 $h = 1$、 $h = 2$和 $h = 4$。可以看出，随着 λ 和 h 减小，小气泡极限下解析解的精度逐渐提高。

与 Antkowiak 等人(2007年)的研究类似，我们发现，约 5–10 个基底足以满足条件 (iv)，并可获得 10^{-4} 的绝对误差。本文所有计算均使用八个基函数。在 $\mathcal{S}$ 至 ˜ 的一半范围内选取相同数量的配点，以为 A_{2n} 或 A_{2n} 构建线性方程组，从而满足 (3.1) 中的边界条件 (ii)。

图8比较了小气泡极限下的解析解（3.11）和（3.12）（以黑色虚线表示）与通过一系列基函数近似得到的数值解。随着 λ 和 h 减小，小气泡极限下解析解的精度提高。这些数值结果表明，在较大范围的 λ和 h内，由（3.11）和（3.12）推导出的解析解近似效果良好，尤其是在 λ 和 h较小时。

5. 实验

本节介绍本研究采用的实验装置，并将实验结果与解析公式进行比较。实验结果的趋势与解析结果吻合良好；也就是说，存在一个最优值，可产生高速射流，如图6所示。

5.1. 实验装置

为产生液体射流，我们参照了 Kiyama等人（2016年）和 Onuki 等人（2018年）的先前研究。他们研究了在自由下落容器中产生的脉冲驱动液体射流。将内径为 $r^* = 13.5$mm 的试管（IWAKI， 30×200）装满运动黏度为 10 mm^2/s 的硅油。将内径为 $R^* = 1$ mm 的玻璃毛细管插入试管中，并用 3D 打印机（Bambu Lab, Bambu Lab A1 3D 打印机）制作的毛细管支架牢牢固定。用注射器将容器与一根细管连接，然后将气泡注入细管顶部。在毛细管支架顶部连接一个钢制 S 形钩，并用电磁铁将容器悬挂在钢制底板上方。底板与容器底部之间的距离

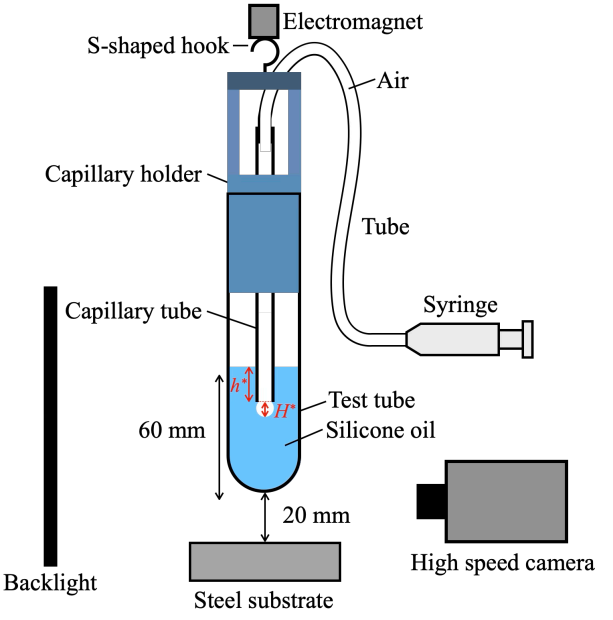

FIGURE 9. 实验装置示意图。将插入毛细管的容器用电磁铁固定在钢基底上方，关闭电磁铁后释放容器，使其撞击钢基底。通过使用注射器调节毛细管内的压力，改变气泡的深度 H^* 。使用高速摄像机记录气泡和射流。

为 20 mm。电磁铁关闭后，容器自由下落并撞击底板。撞击时，容器中的液体迅速加速，从毛细管下端的气泡中喷出一道聚焦射流。使用高速摄像机记录容器自由下落过程中气泡的行为以及射流形成过程。所有实验中的参数 λ（即管外容器半径与管半径之比）均为 0.074。对于这一 λ，可使用解析公式（3.11）和（3.12）近似计算射流速度，如图8所示。黏性液体的深度设为 60 mm，假定其远大于管半径。

实验参数为 h^* 和 H^*。管尖端的高度 H^* 是在管下落过程中用水平放置的摄像机测量的。考察了 h^* 的三个取值： $h^* = 0$ mm、 $h^* = 2$ mm 和 $h^* = 4$ mm。由于管下落时 H^* 会发生振荡，因此在撞击前后拍摄视频，通过目视检查确定撞击前一刻的 H^* 。撞击后立即产生的射流尖端位置也通过目视确定，随后计算射流速度。通过实验测量射流速度随气泡高度 H^* 和浸入深度 h^*的变化。

5.2. 解析解与实验结果的比较

图10展示了不同 $h = h^*/R^*$ 和 $H = H^*/R^*$条件下射流的图像序列。我们将容器与底板发生碰撞的时刻设为 $t = 0$ 。对于 $h = 0$，射流形成过程以1 ms为间隔展示；对于 $h = 2$，以0.5 ms为间隔展示；对于$h = 4$，以0.3 ms为间隔展示。对于每种条件，图10中的图像序列还包括容器释放前的球形气泡形状，以及容器自由下落期间（撞击前 25 ms）的气泡形状。对于 $h = 0$ 和 $h = 2$，气泡部分

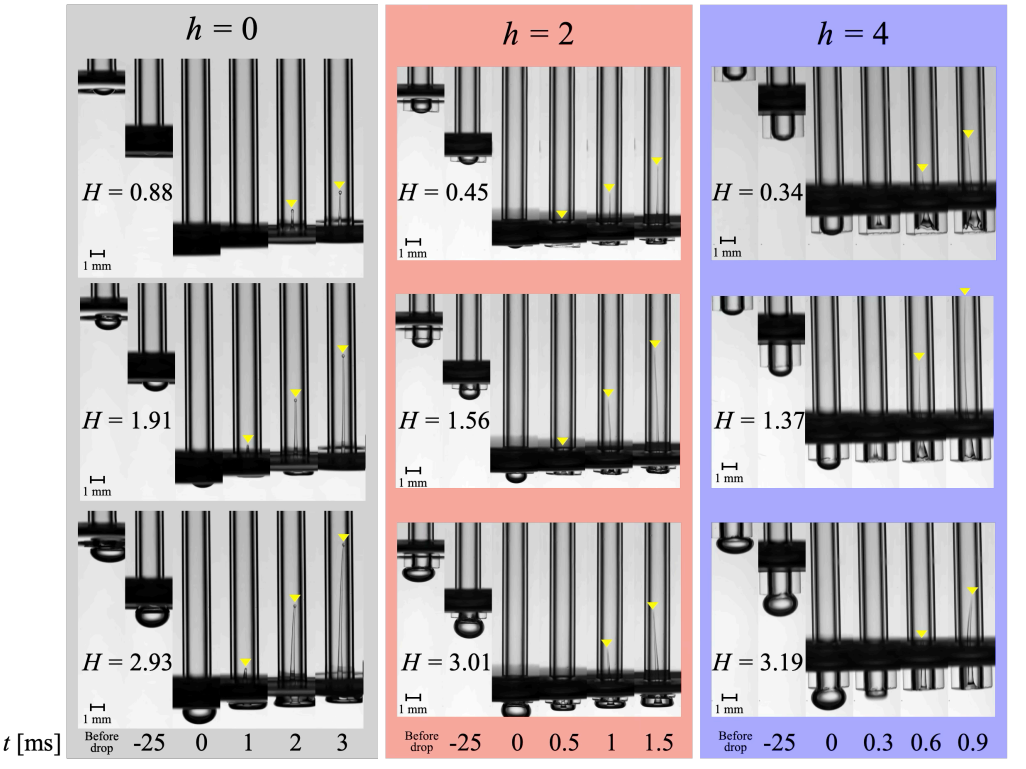

FIGURE 10. 射流的图像序列。将容器与基底发生撞击的时刻定义为 $t = 0$ ms。对于每种条件，展示六张图像，其中包括容器释放前以及撞击前 25 ms 拍摄的图像。黄色三角形表示射流尖端位置。随着容器下落，气泡逐渐增大并变得近乎球形。对于 $h = 0$，射流速度随 H的增大而增大。相比之下，对于 $h > 0$，存在一个使射流速度达到最大值的 H，且该值取决于 h。对于 $h = 2$，射流速度在 $H = 1.56$时达到最大值；而对于 $h = 4$，则在 $H = 1.37$时达到最大值。

被界面遮挡，难以观察其形状。在所有条件下，容器自由下落时，气泡都会接近球形且呈横向对称形状。随后，当容器撞击底板时，气泡发生显著变形，形成聚焦射流。观察 $h = 0$条件下 $t = 3$ ms时的射流尖端位置可知，随着 H增大，射流尖端高度也随之增加。这表明，对于 $h = 0$，随着 H 增大，射流速度也会增大。相反，对于 $h > 0$，较大的 H 并不一定会使射流尖端位置更高。对于 $h = 2$，$t = 1.5$ ms时的射流尖端位置表明，最大射流高度出现在 $H = 1.56$。同样，对于 $h = 4$，$t = 0.9$ ms时的射流尖端位置在 $H = 1.37$达到最大值。这些结果表明，对于 $h > 0$，存在一个使射流速度达到最大值的 H 最优值，且该最优值取决于 h。

为了使解析解与实验数据相拟合，我们首先使用撞击后容器的速度 U_0^*，对测量速度 $U_\theta^*(h)$进行无量纲化，具体如下：

$$U_\theta(h) := \frac{U_\theta^*(h) - U_0^*}{U_0^*}. \tag{5.1}$$

为了将解析解与实验数据进行比较，我们考虑了

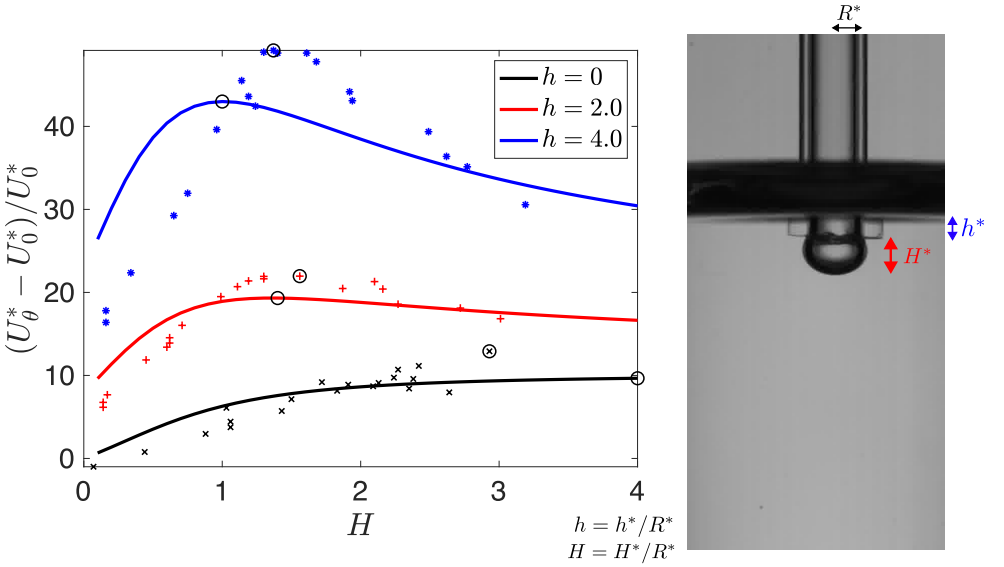

FIGURE 11. 图中以实线表示式（3.7）和（3.8）的小气泡极限解析解，以圆点表示实验数据。数据绘制于 $h = 0$、$h = 2.0$ 和 $h = 4.0$。黑色圆圈表示理论结果和实验结果中的最大射流速度。

以下缩放因子 $\gamma(h)$，它仅取决于高度 h：

$$U_\theta(h) \approx \gamma(h)(v_f(\theta) + hv_g(\theta)). \tag{5.2}$$

需要缩放因子 $\gamma(h)$，因为实验装置可能导致一些缩放差异（Kiyama 等 2016年）。通过最小二乘法拟合实验数据，确定了数值 $\gamma(h)$。

图11比较了式（3.7）和（3.8）的小气泡极限解析解（以实线表示）与实验数据（以圆点表示）。实验数据和解析数据均绘制于 $h = 0$、$h = 2.0$ 和 $h = 4.0$。每个黑色圆圈表示我们实验中的最大射流速度。虽然拟合实验数据需要缩放因子 $\gamma(h)$，但解析解 $v(\theta)$ 很好地近似了实验数据的趋势。这表明，控制气泡高度 H 和浸入深度 h 对产生高速射流至关重要。

6. 讨论

本文推导出了球形气泡外部压力冲量的解析解，推广了 Antkowiak等人（2007年）先前的研究。通过对双曲函数进行简单积分，计算得到了射流速度；结果表明，对于特定的气泡高度 H 和浸入深度 h，存在一个局部最大射流速度。

需要指出的是，对于容器中的浸没管，存在一种能够产生最快射流的最佳气泡形状。这一点可以从物理角度加以解释。总速度 $v(\theta) = v_f(\theta) + hv_g(\theta)$，其中，$v_f(\theta)$ 是由压力冲量诱导的速度，$h = 0$ 如图12(i)所示；$v_g(\theta)$ 是由图12(ii)中容器内水的高度所产生的速度。速度 $v_f(\theta)$ 是一个单调递增函数，因为随着气泡尺寸的增大，Π_f 的等值线

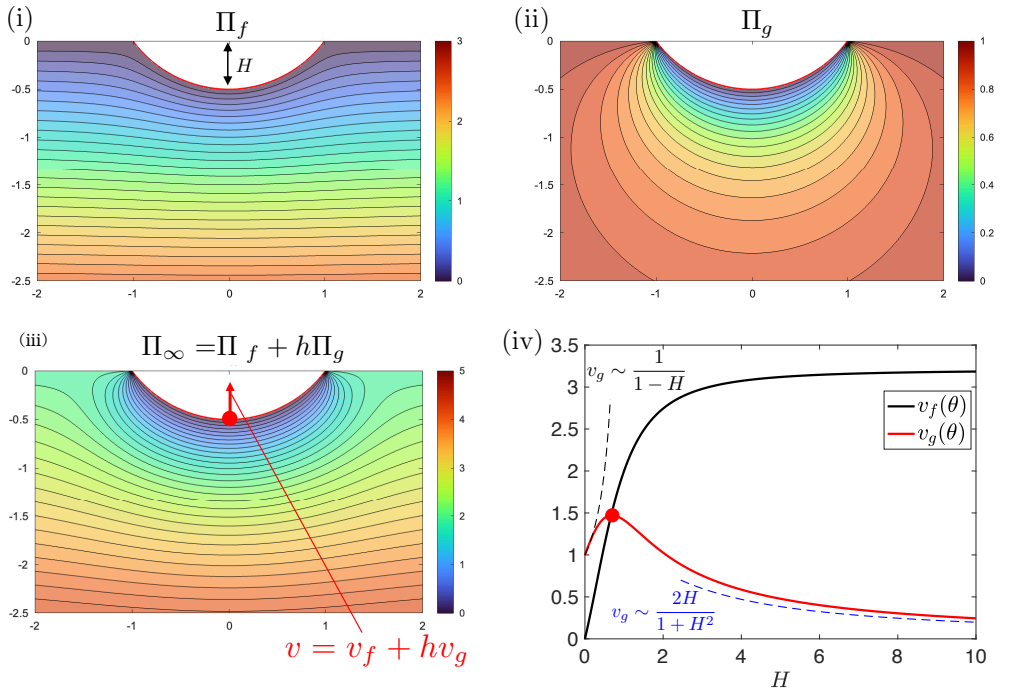

FIGURE 12. 对特定浸没深度 h 和气泡高度 H，速度 $v(\theta)$为何存在最优值的直观解释。浸没深度为 h 时，压力冲量为 $\Pi_f + \Pi_g \times h$。由 Π_f 诱导的速度 v_f 是关于 H的单调递增函数，但由 Π_g 诱导的 v_g 在 $H = 0.7$附近达到最大值。因此，存在一个最优值 H，使速度 $v(\theta) = v_f(\theta) + hv_g(\theta)$ 关于 h达到最大。

会变得越来越扭曲，如图12所示。这会在气泡底部产生较大的压力梯度，从而形成最大的射流速度。

然而，对于 $v_g(\theta)$，我们的数值计算表明，$v_g(\theta)$存在一个局部最大值，如图12所示。这可以通过电势的类比来解释。速度 $v_g(\theta)$由 $-\partial g_\theta/\partial z$ 给出，其中(3.8)在底部求值。当 H 变大时，气泡可视为一个半径为 $1/\sin(\theta) \to \infty$、电势为0的球体，并与电势为1的地面相接。这给出了渐近电势：

$$g_\theta(\alpha(\xi, z), \beta(\xi, z)) \sim 1 - \frac{\sin\theta}{\sqrt{\xi^2 + (z - 1/\tan\theta)^2}}, \tag{6.1}$$

由此得到

$$v_g(\theta) = -\frac{\partial g_\theta}{\partial z}(0, \pi + \theta) \sim \frac{2H}{1 + H^2}, \tag{6.2}$$

其中我们使用了 (2.5)。这给出了当 $H \to \infty$ 时 $v_g(\theta)$ 的渐近行为。

当 H较小时，随着 H 增大，从气泡顶部到地面区域 $z = 0$ 的距离会变小，因为该距离是沿电通量线测量的曲线长度。考虑到 $v_g(0) = 1$，并将气泡底部到地面的虚拟距离定义为 r_v，假设速度 v_g 具有如下渐近行为

如下:

$$v_g(\theta) \sim \frac{r_v}{r_v - H} = \frac{1}{1 - H/r_v}. \tag{6.3}$$

图12展示了（iv）式（6.2）和（6.3）给出的两种渐近行为，并将其与我们的数值计算结果进行了比较。这两种渐近结果与我们对 v_g的数值计算结果吻合良好。此外，这些行为表明，对于 v_g（θ），应存在一个局部最大值。这可以解释为什么存在一种能产生最快射流的最优形状。

尽管我们的方法适用于较小的 λ，但当 λ大于约0.3时，要推导射流速度，就需要对解析解（3.7）和（3.8）加入修正项。在这种情况下，在小气泡极限下，对外边界处的压力冲量进行匹配渐近展开，可能是一种很有前景的方法。一般而言，匹配渐近展开将内区的行为与外区的行为相匹配，这一方法最初由 Van Dyke（1975）研究。Masoud & Stone（2019）综述了常用的扰动方法。近年来，这种方法已应用于各种流体问题领域，例如评估多个气泡的蒸发（Masoud 等 2021年）以及超疏水通道的滑移长度。匹配渐近展开也能很好地近似摩擦阻力（参见 Miyoshi 等 （2024a，b）；Miyoshi, H. and Crowdy, D. G.（2023）；Rodriguez- Broadbent 等 （2024年））。未来的工作将聚焦于这一课题，以阐明侧壁的影响，并推导另一个闭式解，而非级数解。

总之，本研究建立了一个扩展的分析框架，用于描述弯曲流体界面形成冲量驱动射流的过程。通过求解具有任意接触角的球形气泡的压力–冲量问题，我们表明射流速度由曲率诱导的冲量聚焦与浸没诱导的压力再分布之间的竞争所支配。这种竞争产生了使射流速度最大化的最优界面几何形状，为实验观察到的非单调趋势提供了清晰的物理解释。

除本文所考虑的特定构型之外，当前表述为系统探索更一般轴对称几何形状中的冲量聚焦提供了基础。将界面曲率直接与射流速度相关联的能力，为几何形状控制的射流工程开辟了途径，例如锥形界面，并对高速微射流生成、流动聚焦装置以及冲击驱动注入技术具有潜在意义。

致谢

第一作者获得JSPS博士后奖学金（JSPS-24KJ0041）以及东京大学优秀青年研究员奖学金的支持。本研究由JSPS科研费（编号JP24H00289）资助。

Declaration of Interests

作者声明不存在利益冲突。

Appendix A. 解析公式 (3.7) 和 (3.8 的推导)

本节说明如何使用环面坐标系求解三维拉普拉斯方程。按照 Lebedev (1965) 第 222 页给出的数学设定，我们考虑从柱坐标 (ξ， z) 到 (α， β) 的变量代换，形式如下

:

$$\xi = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha - \cos\beta}, \quad z = \frac{\sin\beta}{\cosh\alpha - \cos\beta}, \tag{A 1}$$

其中　　气泡区域外的负半无限区域由以下参数表示

$$0 \leqslant \alpha < \infty, \qquad \pi + \theta < \beta \leqslant 2\pi. \tag{A 2}$$

使用这些新坐标，球形气泡的边界 $\mathcal{S}$ 对应于$\beta = \pi+\theta$，而区域 $\xi \geqslant 1$ 对应于 $\beta = 2\pi$。坐标 $(\alpha,\ \beta)$ 关于 ξ 和 z 的导数为

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} = \frac{\xi+1}{z^2+(1+\xi)^2} - \frac{\xi-1}{z^2+(1-\xi)^2}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\xi} = -\frac{4z\xi}{(\xi^2+z^2-1)^2+4z^2}, \tag{A 3}$$

and

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} = z\left(\frac{1}{z^2+(1+\xi)^2} - \frac{1}{z^2+(1-\xi)^2}\right), \quad \frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{2(\xi^2-z^2-1)}{(\xi^2+z^2-1)^2+4z^2}. \tag{A 4}$$

通过直接　计算，我们可以求得度量张量 h_α、 h_β和 h_φ 如下　　:

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{1}{\cosh\alpha - \cos\beta}, \quad h_\varphi = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha - \cos\beta}, \tag{A 5}$$

其中 φ 是方位角。具有旋转对称条件的柱坐标系下三维拉普拉斯方程变为

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha-\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha-\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0. \tag{A 6}$$

考虑变量代换 $u = \sqrt{2(\cosh\alpha - \cos\ \beta)}v$，得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \coth\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{1}{4}v = 0. \tag{A 7}$$

Now 我们可以采用分离变量法。令 $v = A(\alpha)B(\beta)$，有　　e

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}\beta^2} = -\nu^2 B \\ \dfrac{1}{\sinh\alpha}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\sinh\alpha\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}) - \left(\nu^2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{\mu^2}{\sinh^2\alpha}\right) = 0. \end{cases} \tag{A 8}$$

u 的解可表示为以下函数的叠加:

$$u(\alpha,\beta) = \sqrt{2(\cosh\alpha-\cos\beta)}[M_\tau\cosh\beta\tau + N_\tau\sinh\beta\tau]P_{-1/2+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha), \tag{A 9}$$

其中，勒让德函数 $v = P_\nu(z)$ 满足

$$(1-z^2)v'' - 2zv' + \nu(\nu+1)v = 0. \tag{A 10}$$

为推导由 $f_\theta(\alpha,\beta)$ 定义的压力冲量 (3.7) 的公式，我们遵循 Lebedev (1965) 第 8.12 节中的步骤。函数$f_\theta(\alpha,\beta)$ 的边界条件如下:

$$\left\{ f_\theta(\alpha,\beta) = -z = -\frac{\sin\beta}{\cosh\alpha-\cos\beta}, \quad \text{for } \alpha \geqslant 0,\ \beta = \pi+\theta,\ 2\pi. \right. \tag{A 11}$$

注意，　$f_\theta \to 0$ 关于 $z \to -\infty$ 的条件由边界条件 $f_\theta(\alpha,\ 2\pi) = 0$ 在 $\alpha \to 0$时自动满足。

现在我们使用勒让德函数$P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\ \alpha)$的如下性质（Lebedev，1965）：

$$\frac{1}{\sqrt{2\cosh\alpha-2\cos\beta}}=\int_0^\infty\frac{\cosh(\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau, \tag{A 12}$$

而 (A 12) 对 β 的导数为

$$-\frac{\sin\beta}{(2\cosh\alpha-2\cos\beta)^{3/2}}=-\int_0^\infty\tau\frac{\sinh(\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau. \tag{A 13}$$

(A 13) 的左侧为

$$-\frac{\sin\beta}{(2\cosh\alpha-2\cos\beta)^{3/2}}=2\cdot\frac{f_\theta(\alpha,\beta)}{\sqrt{2(\cosh\alpha-\cos\beta)}},\quad\text{for }\beta=\pi+\theta,\ 2\pi, \tag{A 14}$$

由此得到 Lebedev (1965) 的式 (8.12.11) 中被积函数的系数如下:

$$\Phi_1=0,\quad\Phi_2=2\tau\frac{\sinh\theta\tau}{\cosh\pi\tau} \tag{A 15}$$

现在，将 (A 13) 的被积函数代入 Lebedev (1965) 的式 (8.12.11)，其中 $\beta_1=0$，且 $\beta_2=\pi+\theta$，得到

$$f_\theta(\alpha,\beta)=2\sqrt{2(\cosh\alpha-\cos\beta)}\int_0^\infty\tau\frac{\sinh\theta\tau\sinh(2\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau\sinh(\pi-\theta)\tau}P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau, \tag{A 16}$$

通过类似的推导，可得 (3.8) 中定义的 $g_\theta(\alpha,\ \beta)$ 的公式。注意，函数$g_\theta(\alpha,\ \beta)$ 的推导过程与 Lebedev (1965) 第 229 页示例中的过程相同；该示例考虑了球冠上取常数值的边界条件。

注意，$\partial\alpha/\partial z=0$ 和

$$\frac{\partial\beta}{\partial z}(0,-H)=\frac{-2(H^2+1)}{(H^2-1)^2+4H^2}=-\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}. \tag{A 17}$$

关于 β 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_\theta}{\partial\beta}(\alpha,\beta)=&\frac{2\sin\beta}{\sqrt{2(\cosh\alpha-\cos\beta)}}\int_0^\infty\tau\frac{\sinh\theta\tau\sinh(2\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau\sinh(\pi-\theta)\tau}P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau\\&-2\sqrt{2(\cosh\alpha-\cos\beta)}\int_0^\infty\tau^2\frac{\sinh\theta\tau\cosh(2\pi-\beta)\tau}{\cosh\pi\tau\sinh(\pi-\theta)\tau}P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{A 18}$$

利用 $P_{-\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\tau}(1)\ =1$，我们得到

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial\beta}(0,\pi+\theta)=\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}}\int_0^\infty\tau\frac{\sinh\theta\tau}{\cosh\pi\tau}\left(\sin\theta+2(1+\cos\theta)\tau\frac{\cosh(\pi-\theta)\tau}{\sinh(\pi-\theta)\tau}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{A 19}$$

然后，利用由 Mehler–Fock定理推导出的勒让德函数 $P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}$及其导数的一些恒等式,

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial z}(0,\pi+\theta)=\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+8\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^\infty\tau^2\frac{\sinh\theta\tau\cosh(\pi-\theta)\tau}{\cosh\pi\tau\sinh(\pi-\theta)\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{A 20}$$

g_θ 相对于 z 的导数可用类似的方法求得。

附录 B. 勒让德函数的计算 $P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\,\alpha)$

所有数值计算均使用标准 MATLAB 平台完成。然而，Matlab 中原有的“legendreP”函数不接受复数阶数。因此，有必要编写数值代码来计算 $P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}$。

众所周知，$P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\,\alpha)$有若干种积分表示：

$$P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)=\frac{2}{\pi}\cosh\pi\tau\int_0^\infty\frac{\cos\tau\theta}{\sqrt{2\cosh\theta+2\cosh\alpha}}\mathrm{d}\theta. \tag{B 1}$$

我们注意到，对于 $\tau<\tau_0\in\mathbb{R}$的范围，表示式（B 1）的数值效果良好。尽管当 $\tau\to\infty$ 时，$P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\,\alpha)$收敛，但对于较大的 τ，由于项$\cosh\,\pi\tau$，表示式（B 1）会变得数值不稳定。对于较大的 τ，我们使用表示式（B 2）代替（B1）：

$$P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\alpha)=\frac{2}{\pi\tanh\pi\tau}\int_\alpha^\infty\frac{\sin\tau\theta}{\sqrt{2\cosh\theta-2\cosh\alpha}}\mathrm{d}\theta. \tag{B 2}$$

$P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(\cosh\,\alpha)$关于 α的导数，使用方程（B1）中被积函数的导数计算。所有数值计算均采用固定值 $\tau_0=3$。注意，对于 $\alpha=0$，很容易看出$P_{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\tau}(1)=0$。

REFERENCES

Andrade, K. Catalán J. Marín J. F. Salinas V. Castillo G. Gordillo L. &, Gutiérrez P. 2023
,,,,,,,,,,,旋转流体可减轻部分充液容器的反弹。*Phys. Rev. Lett.* **130** (24), 244001. Antkowiak, A., Bremond, N., Le Dizès, S. & Villermaux, E. 2007 撞击后密度界面的短时动力学。
J. Fluid Mech. **577**, 241–250. Bartolo, D., Josserand, C. & Bonn, D. 2006 液滴撞击中的奇异射流与气泡。*Phys. Rev. Lett.* **96** (12), 124501. Batchelor,
G. K. 2000 *An introduction to fluid dynamics*。剑桥大学出版社。Baxter, J. & Mitragotri, S. 2006 无针液体射流注射：机制与应用。 *Expert Rev. Med. Devices.* **3** (5), 565–574. Cheng, X., Chen, X.-P., Ding, H., Zhang, C.-Yu., Hu, H. & Jia, L. 2024黏性对脉冲生成聚焦射流的影响。
Phys. Rev. Fluids **9** (8), L082001. Dixit, A., Oratis, A., Zinelis, K., Lohse, D. & Sanjay, V. 2025 破裂气泡产生的黏弹性沃辛顿射流与液滴。 *J. Fluid Mech.* **1010**, A2. Dombrovsky, Leonid A., Levashov, Vladimir Yu., Shoval, Shraga & Bormashenko,Edward 2025 液滴蒸发研究进展：基础与应用。 *Advances in Colloid and Interface Science* **344**, 103605. Eggers, J. & Villermaux, E. 2008 液体射流物理学。 *Rep. Prog. Phys.* **71** (3), 036601. Gekle, S., Gordillo, J. M., van der Meer, D. & Lohse, D. 2009 固体物体撞击后的高速射流形成。
Phys. Rev. Lett. **102** (3), 034502. Gordillo, J. M. & Blanco-Rodríguez, F. J. 2023 空腔惯性塌陷后喷射射流的理论及其在气泡破裂射流中的应用。

Phys. Rev. Fluids ( ), .

8 7 073606
Gordillo, J. M., Onuki, H. & Tagawa, Y. 2020流动聚焦产生射流的脉冲生成。*J. Fluid Mech.* **894**, A3. Kamamoto, K., Onuki, H. & Tagawa, Y. 2021 高黏度液体的按需液滴喷涂。 *Flow* **1**, E6.
Kiyama, A., Tagawa, Y., Ando, K. & Kameda, M. 2016 水锤与空化对试管中射流形成的影响。
J. Fluid Mech. **787**, 224–236. Kobayashi, K., Watanabe, H., Yee, J., Torii, S., Kurita, M. & Tagawa, Y. 2024 高黏度液体按需打印技术的开发与评估。
J. Imaging Soc. Jpn. (Japan.) **63** (5), 014035.

Krishnan, S., Bharadwaj, S. V. & Vasan, V. 2022 自由落体液体容器的撞击及随后的射流。 *Exp. Fluids* **63** (7), 108. Kurihara, C., Kiyama, A. & Tagawa, Y. 2025 短时加速下液体的压力波动。 *J. Fluid Mech.* **1003**, A20. Lebedev, N. N. 1965 特殊函数及其应用。Lohse, D. 2022 *Annu. Rev. Fluid* 喷墨打印中 *Mech.* **54** 1 349 382
的基础流体动力学挑战。( ), – . Masoud, H. Howell P. D. & Stone H. A. 2021 *J. Fluid* , , , 多液滴 *Mech.* **927** 4 4
蒸发。(R), R . Masoud, H. & Stone, H. A. 2019 流体动力学与输运现象中的互易定理。 *J. Fluid Mech.* **879**, P1. Miyoshi, H., Kirk, T. L., Hodes, M. & Crowdy, D. G. 2024*a* 罩式翅片阵列中的充分发展流：精确解与渐近解。 *J. Fluid Mech.* **991** (A2), A2. Miyoshi, H., Rodriguez-Broadbent, H. & Crowdy, D. G. 2024*b* 含液体灌注表面的通道流解析公式的数值验证。 *J. Eng. Math.* **144** (1), 14.Miyoshi, H. and Crowdy, D. G. 2023 利用渐近匹配估算共形容量。 *IMA J. Appl. Math.* . Mohizin, A. & Kim, J. K. 2023 小容量无针射流注射新型机电系统的概念设计。 *EACFM* **17** (1), 2240868. Onuki, H. Oi Y. & Tagawa Y. 2018 *Phys. Rev.* , , , 高黏度流 *Appl.* **9** 1 014035
体微射流发生器。( ), . Philippi, J., Antkowiak, A. & Lagrée, P.-Y. 2018 半球液体撞击问题的压力冲量理论。 *Eur. J. Mech. - B/Fluids* **67**, 417–426. Popov, Y. O. 2005 *Phys.* 蒸发沉积图 *Rev. E* **71** 3 036313
案：沉积物的空间尺寸。( ), . Reuter, F. & Ohl, C.-D. 2021 单个空化泡产生的超音速针形射流。 *Appl. Phys. Lett.* **118** (13). Rodriguez-Broadbent, H., Miyoshi, H. & Crowdy, D. G. 2024 含液体灌注表面的通道流的渐近精确公式。 *IMA J Appl Math* p. hxae026. Rohilla, P. & Marston, J. 2023 毛细管中低压火花诱导的聚焦高速液体射流。 *Exp. Fluids* **64** (5), 90. Srivastava, A., Kundu, A. & Paul, A. R. 2025 无针给药装置最新进展详述。 *J. Med. Eng. Technol.* 第1–20页。Tagawa, Y., Oudalov, N., Visser, C. W., Peters, I. R., van der Meer, D., Sun, C., Prosperetti A. & Lohse D. 2012 *Phys. Rev. X* , , 高度聚焦 **2** 3 031002
的超音速微射流。( ), . Van Dyke, M. 1975 流体力学中的摄动方法／注释版。 *NASA STI/Recon Technical Report A* **75** 46926 , .

Watanabe, H., Kusuno, H. & Tagawa, Y. 2025 收敛形容器形状对撞击诱导聚焦液体射流速度的影响。 *Int. J. Multiphase Flow* **193**, 105348. Wilson, S. K. & D'Ambrosio H.-M. 2023 *Annu. Rev. Fluid* , 固着液滴 *Mech.* **55** 55, 2023 481 509
的蒸发。(第 卷), – . Xie, W. 2025 充满旋转流体的反弹容器中动量交换的初步半解析研究：中心射流诱导的压力冲量。 *Mech. Res.* , . *Com.* **144** 104380