用于微型化超导量子比特的可调谐、无模型且无杂化交叉克尔耦合器

Gihwan Kim,[1,2] Andreas Butler,[1,2] 和 Oskar Painter[1,2,*]

[1] *Kavli Nanoscience Institute and Thomas J. Watson, Sr., Laboratory of Applied Physics, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA.*

[2] *Institute for Quantum Information and Matter,California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA.*（日期：2026年2月4日）

超导量子电路通常采用电容式电荷线性耦合方案，来控制量子比特等元件之间的相互作用。这种耦合方案简单有效，但难以同时满足相互竞争的电路设计要求，例如在保持较大量子比特非简谐性和相干性的同时，实现高度的量子比特连通性和封装密度。此外，利用线性耦合元件实现可调相互作用，会导致模式杂化动态变化，进而可能引发非绝热跃迁，造成泄漏错误并限制门速度。在本研究中，我们提出一种基于结的耦合架构，以应对这些挑战。该架构采用约瑟夫森能量相对较小的超导量子干涉器件（超导量子干涉器件）耦合器。超导量子干涉器件耦合器具有固有的交叉克尔相互作用，可由外部磁通控制，且不依赖模式杂化。耦合器较小的约瑟夫森能量使相互作用保持在微扰尺度，从而限制耦合元件之间不需要的高阶混合，同时借助对角耦合元件实现足够强的交叉克尔相互作用。基于这些特性，我们证明，超导量子干涉器件耦合器可用于实现快速、绝热且高保真的受控-Z门，无需引入额外模式；对于高频量子比特，该操作还能有效抵抗结不对称性。尽管结不对称性以及与旁观量子比特的寄生杂化可能导致非常规串扰，但我们证明，对于现实的电路参数，这些影响足够小。作为此类基于结的耦合方案用途的示例，我们提出一种可扩展平铺策略，用于构建基于合并元件跨蒙量子比特的微型化超导量子处理器。

arXiv:2602.03186v1 [quant-ph] 3 Feb 2026

I. 引言

超导量子处理器利用电容器实现量子比特、可调耦合器和读出谐振器等电路元件之间的线性耦合 [1–6]。然而，电容的设计可能受到其他目标的限制，例如抑制介电损耗 [7–9], 、保持较大的量子比特非简谐性 [1, 6], , 以及优化量子比特的外形尺寸和大小 [10]。此外，采用线性耦合元件的可调耦合方案依赖于模式杂化随时间变化，这可能通过非绝热跃迁引入泄漏错误，从而限制门速度和保真度 [2, 11, 12]。

合并元件型跨蒙（mergemons） [13–15] 是线性电容耦合所面临挑战的一个典型例子。mergemon量子比特的设计理念是将量子比特的电容局限在约瑟夫森结这一狭小体积内，从而限制可能导致量子比特退相干的二能级系统缺陷（TLSs）的（光谱）密度 [7–9] 。电路中额外的几何电容（例如用于实现量子比特之间的耦合，以及与谐振器耦合以进行量子比特读出）会增加相互作用的二能级系统数量。减弱量子比特与二能级系统之间相互作用的强度可以通过增大电容器体积并降低电场强度来实现；然而，这会导致量子比特体积更大、局域性更差，也更容易与其他电路元件发生寄生串扰 [1, 16]。

为克服标准电容耦合架构体积庞大且存在模式杂化的问题，我们提出使用SQUID（超导量子干涉器件）耦合器对元件进行动态耦合。这种方法与近期其他基于结的耦合器方案 [4, 5, 17–25], 类似，主要区别在于，我们聚焦于由隧穿能相对较小的约瑟夫森结构成的超导量子干涉器件，以保持所需的相互作用层级，并限制结的非理想性和噪声的影响。基于结的耦合方案的一个主要优点是，无需向系统中引入任何额外模式；在实施量子比特门操作时，这些模式可能成为泄漏错误的通道 [26, 27]。在采用线性耦合元件的传统方案中，纠缠相互作用是通过量子比特自身的非线性间接产生的 [2, 3, 5, 12, 22, 28]。相比之下，SQUID耦合器会直接引入固有的交叉克尔相互作用，并可通过外部磁通将其开启或关闭。由于交叉克尔相互作用不依赖相互作用元件之间的杂化，因此可以独立设计并抑制量子比特之间的混合 [19]。此外，去除几何耦合电容，也放宽了介电损耗与量子比特尺寸之间的权衡——

* opainter@caltech.edu；http://painterlab.caltech.edu

介电损耗与量子比特尺寸之间的权衡。

除了SQUID耦合器的潜在优势之外，还必须考虑若干技术挑战。特别是，制造引起的结不对称性的影响，以及通过耦合器的接地连接形成的多余SQUID回路的存在，会限制耦合器性能 [25, 29]。SQUID耦合器中的结不对称性会导致开关消光比降低、与旁观量子比特发生串扰，并且与多余的SQUID回路相结合时，还会提高对磁通噪声的灵敏度。与浮置跨导量子比特配合使用的SQUID耦合器消除了多余外侧SQUID回路的存在 [17]; 然而，这种设计会引入可介导寄生相互作用和泄漏错误的振荡模。在本工作中，我们采取了不同的方法，并表明：由约瑟夫森隧穿频率相对较小（$\lesssim 1$ GHz）、相较于被耦合在一起的元件的跃迁频率（~ 5 GHz）而言较小的结构成的SQUID耦合器，在结不对称性高达20%时，仍可实现数十兆赫的交叉克尔相互作用速率，同时具有高消光比和对邻近元件的低寄生串扰，并在典型磁通噪声水平下保持低不保真度。

我们对所提出的 SQUID 耦合器的分析概述如下。第二节首先回顾了用于耦合两个失谐跨导量子比特的 SQUID 耦合器的哈密顿量和外部磁通控制参数，并通过对耦合器结能量相对较小的系统进行量子化电路模型数值模拟，表明可以实现高保真、快速的受控-Z（CZ）门，同时将绝热性开销降至最低。第三节中，我们通过微扰分析和数值计算，研究 CZ 门性能对耦合器结不对称性的鲁棒性。结果表明，在整个结不对称性范围内，门时间为 22 纳秒时，相干误差均低于 5×10^{-7}。随后，第四节对磁通噪声进行了灵敏度分析，结果显示，对于约瑟夫森能量较小、量子比特频率相对较高的情形，CZ 门的纠缠相位能够抵御超导电路中的典型磁通噪声。第五节中，我们指出了 SQUID 耦合器可能引发的两种新型串扰，并表明在现实的电路参数下，这两种串扰都足够小。最后，第VI节介绍了一种可扩展的 mergemon 架构，其中所有相互作用均由基于结的 SQUID 耦合器介导，并突显了实现完全微型化量子处理器的潜力。

II. 通过SQUID耦合器实现可调谐交叉Kerr效应相互作用

为了阐明所提出耦合方案的核心方面，我们首先分析图1a所示的电路，该电路由两个通过SQUID耦合器耦合的transmon量子比特组成。$E_{J,i}$、 $E_{C,i}$和 C_i 分别是跨蒙 $i\in\{1,2\}$的约瑟夫森能、充电能和对地电容，$E_{J,C1}, E_{J,C2} \ll E_{J,1}, E_{J,2}$和 $C_{C1}, C_{C2} \ll C_1, C_2$分别是SQUID耦合器中结的约瑟夫森能和电容。$\Phi_{e,1}$ 和$\Phi_{e,2}$ 分别是穿过SQUID耦合器内部SQUID回路以及沿接地连接形成的外部SQUID回路的外磁通。

描述该电路的哈密顿量为：

$$\hat{H}_{\rm tot} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{\rm int}, \tag{1}$$

$$\hat{H}_i = 4E_{C,i}\hat{n}_i^2 - E_{J,i}\cos\hat{\varphi}_i \ \ (i\in\{1,2\}), \tag{2}$$

$$\hat{H}_{\rm int} = -E_{J,C1}\cos\left(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \varphi_{e,1} + \varphi_{e,2}\right) - E_{J,C2}\cos\left(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \varphi_{e,2}\right) + g\hat{n}_1\hat{n}_2, \tag{3}$$

其中，$\hat{}\varphi_1$、$\hat{}\varphi_2$、$\hat{}n_1$和$\hat{}n_2$ 为相位与电荷算符，$g = 4e^2C_C/C^2$ 表示由耦合器结的电容引起的电荷耦合率，其中$C_C \equiv C_{C1} + C_{C2}$、 $C^2 \equiv C_1C_2 + C_CC_1 + C_CC_2$和$\varphi_{e,\,k} \equiv 2\pi\Phi_{e,\,k}/\Phi_0$ ($k\in\{1,2\}$)为约化外部磁通。电路量子化的详细信息见附录A。

我们引入磁通“工作条件”$\varphi_{e,\,1} + 2\varphi_{e,\,2} = 0$，以确保偶宇称相互作用（如激发跃迁和交叉Kerr效应相互作用）占主导地位，而非奇宇称相互作用（如纵向相互作用和双光子交换相互作用）。在此约束下，可以利用三角关系将相互作用哈密顿量改写为：

$$\hat{H}_{\rm int}|_{\varphi_{e,1}+2\varphi_{e,2}=0} = -\Sigma E_{J,C}\cos\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\cos\left(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1\right) + \Delta E_{J,C}\sin\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\sin\left(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1\right) + g\hat{n}_1\hat{n}_2, \tag{4}$$

其中，$\Sigma E_{J,\,C} \equiv E_{J,\,C1} + E_{J,\,C2}$ 和 $\Delta E_{J,\,C} \equiv E_{J,\,C1} - E_{J,\,C2}$ 分别为总约瑟夫森能与差分约瑟夫森能。与 $\Sigma E_{J,\,C}$ 成正比的余弦项产生偶宇称相互作用，而与 $\Delta E_{J,\,C} \ll \Sigma E_{J,\,C}$ 相关的正弦项则产生奇宇称相互作用。我们首先关注对称SQUID耦合器（$\Delta E_{J,\,C} = 0$），它们只保留偶宇称项。结的非对称性所产生的影响将在后续章节中讨论。

由于$E_{J,C}$较小，可用微扰理论由激发数守恒的矩阵元计算有效线性耦合率 $g_{\rm eff} \equiv \hat{}\langle 10|H_{\rm int}|01\rangle$，以及一阶和二阶修正$\zeta^{(1)}$ 和 $\zeta_c^{(2)}$对ZZ 相互作用速率 $\zeta \equiv \omega_{|\tilde{00}\rangle} - \omega_{|\tilde{01}\rangle} - \omega_{|\tilde{10}\rangle} + \omega_{|\tilde{11}\rangle}$的贡献：

$$g_{\rm eff} = -\Sigma E'_{J,C}\cos\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\varphi_1^{zpf}\varphi_2^{zpf} + gn_1^{zpf}n_2^{zpf}, \tag{5}$$

$$\zeta^{(1)} = -\Sigma E'_{J,C}\cos\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)(\varphi_1^{zpf})^2(\varphi_2^{zpf})^2, \tag{6}$$

$$\zeta_c^{(2)} = \frac{|\langle 02|H_{\rm int}|11\rangle|^2}{\omega_{|11\rangle} - \omega_{|02\rangle}} + \frac{|\langle 20|H_{\rm int}|11\rangle|^2}{\omega_{|11\rangle} - \omega_{|20\rangle}} \approx \frac{4g_{\rm eff}^2\eta}{\Delta^2 - \eta^2}. \tag{7}$$

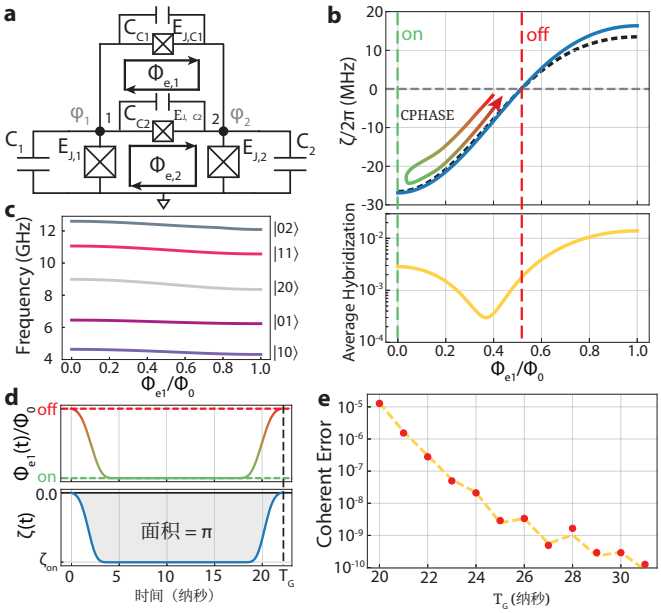

图 1. **通过 SQUID耦合器实现的可调交叉Kerr耦合和 CZ门。** **a**，两个 transmon 通过 SQUID耦合器耦合的电路示意图。**b**，ZZ 相互作用速率 ζ 和平均杂化随 $\Phi_{e,\,1}$的变化。红色（绿色）虚线表示 ζ 为零（最大）的位置。黑色虚线表示通过微扰理论计算得到的 ζ。**c**，工作条件为 $\Phi_{e,\,2} = -\Phi_{e,\,1}/2$时，前 5 个激发态的本征频率随 $\Phi_{e,\,1}$ 的变化。**d**，磁通波形$\Phi_{e,\,1}(t)$及其对应的 $\zeta(t)$，用于一个持续 22 纳秒的 CZ门。**e**，不同门持续时间 T_{G} 下 CZ门的相干误差（红色圆圈）。黄色虚线表示非绝热态跃迁的贡献。

$E_{J,1}/2\pi$	11.5 GHz	$E_{J,2}/2\pi$	20.0 GHz
C_1	77.5 飞法	C_2	69.2 飞法
$E_{J,C1}/2\pi$	0.40 GHz	$E_{J,C2}/2\pi$	0.40 GHz
C_{C1}	0.78 飞法	C_{C2}	0.78 飞法
$\omega_1/2\pi$	4.49 GHz	$\omega_2/2\pi$	6.33 GHz
$\eta_1/2\pi$	-0.284 GHz	$\eta_2/2\pi$	-0.306 GHz
Φ_{off}	0.516 Φ_0	$\zeta_{\mathrm{on}}/2\pi$	-26.9 兆赫

表 I. 数值分析所用参数。表示能量的参数以约化普朗克常数 $\hbar$ 归一化。

此处$\Sigma E'_{J,C} \equiv \Sigma E_{J,C} e^{-\frac{(\varphi_1^{zpf})^2}{2}} e^{-\frac{(\varphi_2^{zpf})^2}{2}}$刻画了正规序的副产物，$\eta_1, \eta_2 \approx \eta$为裸跨蒙非谐性，$\omega_1, \omega_2$ 为裸跨蒙基态到第一激发态跃迁频率，而 $\Delta \equiv \omega_1 - \omega_2$ 为跨蒙特量子比特失谐。$|ij\rangle$、$i, j \in \{0, 1\}$表示裸本征态，其中第一个（第二个）指标分别指transmon 1（transmon 2）的激发数。裸本征态和本征频率由$\hat{} \; \hat{} \; H_1$ 和 H_2 得到。$\omega_{|\tilde{ij}\rangle}$ 为相应的缀饰本征态和本征频率。余弦项按产生算符（$\hat{a}_i^\dagger$）和湮灭算符（$\hat{a}_i$）展开，相应的相位算符和电荷算符为$\hat{}\varphi_i = \varphi_i^{zpf}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)$和$\hat{}n_i = in_i^{zpf}(\hat{} a_i - \hat{a}_i^\dagger)$，其中$\varphi_i^{zpf}$和 n_i^{zpf} 为零点涨落。更多细节见附录 B。

一阶修正 $\zeta^{(1)}$ 源于对角微扰项，在 $\Phi_{e,\,1} = 0$（“开启”）处达到最大值，在 $\Phi_{e,\,1} = 0.5\Phi_0$ （“关闭”）处为零。不同于由杂化产生的 ZZ 相互作用，$\zeta^{(1)}$ 仅弱依赖于失谐，因此即使在较大的失谐下，也能实现较高的 ZZ 相互作用速率。有效线性耦合 g_{eff} 可以减小，甚至可在 $\Phi_{e,\,1} \in [0.0\Phi_0, 0.5\Phi_0)$ 范围内通过适当选择而抵消因 C_C 方程（5）[4, 17, 19]中各项的符号相对关系所致。在 g_{eff} 足够小且失谐较大时，诸如 $\zeta_c^{(2)}$这样的杂化诱导的 ZZ 相互作用，可以在相当大的 $\Phi_{e,\,1}$范围内受到抑制。在这种条件下，$\zeta^{(1)}$ 主导 ZZ 相互作用速率，并且至少存在一个空闲外部磁通 Φ_{off}，使得 ZZ 相互作用可以被关闭 $\zeta(\Phi_{\mathrm{off}}) = 0$，从而两个跨蒙可以处于空闲状态。

图 1 展示了一个具体的数值示例：对于表 I 所列的一组耦合器和量子比特参数，两个远失谐 transmon 量子比特之间的可调交叉克尔耦合。请注意，表中的结隧穿能和电容的选取与实验上可实现的结参数一致 [13–15, 30–33]。在此，我们通过对电路模型进行量子化，直接模拟式 (1) 中的完整哈密顿量，且未采用旋波近似 [34–36]。图 1b 显示了 ζ 随 $\Phi_{e,\,1}$变化的情况。我们发现，空闲外部磁通为 $\Phi_{\mathrm{off}} = 0.516\Phi_0$，且在 $\Phi_{\mathrm{on}} = 0$ 处 ZZ 相互作用速率较大，达到$\zeta_{\mathrm{on}}/2\pi = -26.9$ 兆赫。尽管ζ 变化明显，但如图 1c 所示，在整个调谐范围内，两个量子比特的本征频率变化均小于 320 兆赫，从而最大限度地降低了对磁通噪声的敏感性 [1, 6, 37, 38]。我们选择了耦合器的电容 $C_C/2 = C_{C1} = C_{C2}$，以最大限度地降低其在相关调谐范围内与其他态的杂化 $[0, \Phi_{\mathrm{off}}]$。为对此进行量化，采用与其他态的平均杂化程度 $\sum_{mn}(1 - P_{|mn\rangle})/4$，其中$P_{|mn\rangle} = |\langle mn|\tilde{mn}\rangle|^2$ 表示裸态（$|mn\rangle$）与着装态（$|\tilde{mn}\rangle$）本征态之间的重叠。如图 1b 所示，在整个范围 $[0, \Phi_{\mathrm{off}}]$内，平均杂化程度低于 0.3%。

受控相位（CPHASE）可通过将外部磁通从空闲偏置点 Φ_{off} 动态调谐至 Φ_{on}，再返回 Φ_{off}来实现，如图 1d所示。为实现CZ门，我们希望累积受控相位等于 π，即– $\int_0^{T_G} \zeta(t)dt = \pi \,(\mathrm{mod}\ 2\pi)$，其中 T_G 为总门持续时间，$\zeta(t)$为瞬时ZZ 相互作用速率。我们采用一种简化的绝热控制技术，类似于参考文献 [11, 39] 中所用的方法，将$|11\rangle$ 和 $|02\rangle$视为二能级系统，并据此定制两态之间杂化（混合角）的变化速率。目标混合角波形

首先通过将持续时间为 βT_G 的方波脉冲与持续时间为$(1-\beta)T_G$的类 Slepian 脉冲进行卷积而生成，其中 β 在保持 T_G 固定的同时控制绝热性。随后，通过将混合角映射到外部磁通得到磁通波形，并进一步与 $\sigma = 0.5$ 纳秒的高斯核卷积以实现低通滤波，从而计入实际的磁通信号调理 [40, 41]。示例波形$\Phi_{e,1}(t)$及相应的 $\zeta(t)$如图 1d所示。

CZ门的相干误差随 T_G变化的情况如图 1e 所示。对于每个 T_G，仅校准 β 以实现目标纠缠相位。在这种校准下，频率相对接近的态之间的非绝热态跃迁（例如 ~ ~、$|10\rangle \leftrightarrow |01\rangle$ 和~ ~ ~$|11\rangle \rightarrow |20\rangle$，$|02\rangle$）是误差的主要来源；增大 T_G可以降低这些误差。我们发现，可以在 22 纳秒内实现相干误差低于3×10^{-7} 的 CZ 门；与最短门时间 min $T_G = \pi/|\zeta_{\text{on}}| \approx 18.6$ 纳秒相比，绝热性开销仅约为 3.4 纳秒。通过采用更先进的绝热控制技术 [39] 并放宽滤波要求，还可以进一步降低这一开销。请注意，仿真使用完整哈密顿量，未采用旋波近似。我们还仿真了存在 T_1 弛豫误差时的门操作；假设两个跨蒙的$T_1 = 1$ 均为 ms，可得相干性限制的不保真度 $1 - F$ 约为 $1.8 \times 10^{-5} \approx 0.8 T_G/T_1$ （见附录 D）。

III. 对结不对称性的鲁棒性

奇宇称相互作用与$\Delta E_{J,\,C} \sin(\varphi_{e,\,1}/2)$成正比，在 $\Phi_{\text{off}} \approx 0.5\Phi_0$的空闲点附近达到最大值。该项包含纵向（$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i(\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j)$）和双光子交换（$(\hat{a}_i^\dagger)^2\hat{a}_j + h.c.$）相互作用。奇宇称相互作用对 ZZ 相互作用速率的贡献 $\zeta^{(2)}_{\text{odd}}$与量子比特频率的奇宇称组合成反比，并与更高阶的相位零点涨落成正比，

$$\zeta^{(2)}_{\text{odd}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Delta E^2_{J,C}(\varphi^{zpf})^6}{m\omega_1 + n\omega_2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta E^2_{J,C}(\varphi^{zpf})^4}{\omega^2}\eta\right),$$

其中 $(m,\ n) \in \{(1,\ 0)、(0,\ 1)、(2,\ -1)、(2,\ -1)\}$。附录 B 给出了详细计算。注意，对于$(\varphi^{zpf})^6 \approx (2E_C/E_J)^{3/2}$，典型跨蒙中的该值小于 0。02，其中 $E_J/E_C > 30$。因此，对于结隧穿能（$E_{J,\,C}$）远小于量子比特频率的超导量子干涉器件耦合器，以及具有相对较小 φ^{zpf}，我们预计奇宇称相互作用对 ZZ 相互作用的贡献将受到强烈抑制，从而保留空闲点 Φ_{off} 的存在。

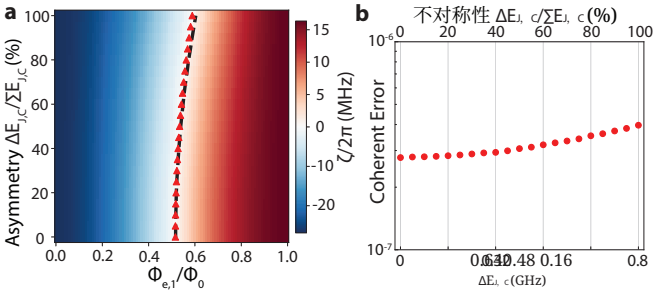

图 2. **对结不对称性的鲁棒性。a**，ZZ 相互作用速率随$\Phi_{e,\,1}$ 及结不对称性的变化。结电容不对称性设为与约瑟夫森能不对称性相同。红色三角形表示通过电路量子化 Φ_{off} 获得的结果，黑色虚线表示通过微扰理论估算的结果 Φ_{off}。**b**，22 纳秒 CZ门的相干误差随结不对称性的变化。

在图 2 中，我们针对表 I 中的标称电路参数，研究了超导量子干涉器件耦合器中结不对称性的影响。利用电路量子化，ζ 被估算为结不对称性 $\Delta E_{J,\,C}/\Sigma E_{J,\,C}$ 的函数，同时保持$\Sigma E_{J,\,C}$ 恒定，如图 2a 所示。假设约瑟夫森能的不对称性与结电容的不对称性相同。正如上述分析所预期的，我们发现 ZZ 相互作用速率对结不对称性并不敏感，且在 $\Delta E_{J,\,C}$ 的整个范围内都存在空闲外部磁通。考虑总激发数相差至多一个激发的一阶和二阶微扰理论估算结果（黑色虚线） Φ_{off}，与通过电路量子化进行的完整数值计算结果（红色三角形）吻合良好。我们进一步通过估算结不对称性对 CZ门相干误差的影响来检验结不对称性的作用，如图 2b 所示。对于时长为 22 ns 的 CZ门，在可能的结不对称性范围内，相干误差始终低于 5×10^{-7} （100% 不对称性对应于参考文献 [4, 5] 中的单结耦合器）。更多细节请参见附录 E。

IV. 对磁通噪声的敏感性

为了准确评估所提出的结耦合器架构对磁通噪声的敏感性，从物理外部磁通到电路磁通变量 $\Phi_{e,\,1}$ 和$\Phi_{e,\,2}$ 的映射必须考虑电连接地中的电感 [43–45]。在考虑二维晶格上量子比特和SQUID耦合器的铺砌时（见第VI节），这一点尤为重要，因为通往地的多条路径会形成额外的寄生SQUID回路。因此，为进行此类分析，我们考虑图 3a所示的SQUID耦合器电路，其中电感 L 和 L'远小于结的约瑟夫森电感，以此模拟方形晶格铺砌中的实际接地连接

。考虑这些接地连接后，我们发现所得电路包含一个由外部磁通 $\Phi_{e,\,i}$ 贯穿的内侧SQUID回路，以及两个分别由外部磁通 $\Phi_{e,\,o}$ 和$\Phi'_{e,\,o}$贯穿的外侧SQUID回路；与之对应的约化外部磁通变量为 $\varphi_{e,\,i}$、 $\varphi_{e,\,o}$和$\varphi'_{e,\,o}$。更多详情请参见附录A。

在 $L = L'$ 处，电路哈密顿量仅取决于$\Phi_{e,\,i}$ 以及外部差分磁通 $\Delta\Phi_{e,\,o} \equiv \Phi_{e,\,o} - \Phi'_{e,\,o}$，由此形成所谓的“梯度计式 SQUID 耦合器”。图 1 中原始SQUID耦合器电路的磁通参数化与梯度计式 SQUID 耦合器之间的映射关系为$\Phi_{e,\,1} = \Phi_{e,\,i}$ 以及 $\Phi_{e,\,2} = (\Delta\Phi_{e,\,o} - \Phi_{e,\,i})/2$，其中原始工作条件 $\Phi_{e,\,1} + 2\Phi_{e,\,2} = 0$ 等价于 $\Delta\Phi_{e,\,o} = 0$。梯度计式 SQUID 耦合器在该工作条件下，量子比特本征频率对外部磁通的灵敏度为：

$$\frac{\partial\omega_{|\tilde{i}\tilde{j}\rangle}}{\partial\varphi_{e,i}}|_{\Delta\Phi_{e,o}=0} = \frac{1}{2}\Sigma E_{J,C}\sin\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\langle\cos(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1)\rangle, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\omega_{|\tilde{i}\tilde{j}\rangle}}{\partial\varphi_{e,o}}|_{\Delta\Phi_{e,o}=0} = \frac{1}{2}\Delta E_{J,C}\sin\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\langle\cos(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1)\rangle, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\omega_{|\tilde{i}\tilde{j}\rangle}}{\partial\varphi'_{e,o}}|_{\Delta\Phi_{e,o}=0} = -\frac{1}{2}\Delta E_{J,C}\sin\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\langle\cos(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1)\rangle, \quad (10)$$

其中我们采用了近似 $\langle\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\rangle \approx 0$。从式（8–10）可以看出，对内侧SQUID磁通噪声的灵敏度随 $\Sigma E_{J,\,C}$变化，而对外侧SQUID回路中磁通噪声的灵敏度则与耦合器结的不对称性 $\Delta E_{J,\,C}$成比例。

我们首先评估外侧SQUID回路中的噪声所产生的影响。由于这些外侧回路的回路面积和周长可能相对较大，因此其中可能存在显著的磁通噪声 [29]。图 3b 给出了在存在磁通噪声时，量子比特态 $|\tilde{10}\rangle$ 和 $|\tilde{01}\rangle$ 的回波退相干时间估算值，该估算值是$\Delta E_{J,C}$的函数。在此分析中，我们假设耦合器偏置于工作点（$\Phi_{e,1} = \Phi_{\rm off}$），并采用外部磁通噪声模型：较小的内侧SQUID回路具有振幅为$A_{\Phi_{e,i}} = 10^{-6}\Phi_0$ 的 $1/f$噪声，而较大的外侧SQUID回路具有振幅为$A_{\Phi_{e,o}} = A_{\Phi'_{e,\,o}} = 5\times10^{-6}\Phi_0$的 $1/f$噪声。这与超导电路中通常测得的磁通噪声 [29] 一致，电路布局也与下文第VI节提出的方案相似。回波退相干时间按照参考文献 [37]中的方法计算：

$$\frac{1}{T^{1/f,|ij\rangle}_{\phi,\rm echo}} = \sqrt{\ln 2}\sqrt{A^2_{\Phi_{e,i}}\left|\frac{\partial\omega_{|\tilde{i}\tilde{j}\rangle}}{\partial\Phi_{e,i}}\right|^2 + A^2_{\Phi_{e,o}}\left|\frac{\partial\omega_{|\tilde{i}\tilde{j}\rangle}}{\partial\Phi_{e,o}} - \frac{\partial\omega_{|\tilde{i}\tilde{j}\rangle}}{\partial\Phi'_{e,o}}\right|^2}, \quad (11)$$

其中，我们认为内侧和外侧超导量子干涉器件磁通噪声彼此不相关，但假设存在最坏情况的相关性 $\delta\Phi'_{e,\,o} = -\delta\Phi_{e,\,o}$ 外层超导量子干涉器件磁通中的噪声之间。此分析表明，即使结不对称性达到 $\Delta E_{J,\,C}/2\pi = 160$ 兆赫（20%），我们仍发现相干时间为 $T_{\phi,\,\rm echo} > 160$ μ秒，这表明对于现实的噪声水平以及实验上可实现的结制造和电路布局，我们预计量子比特相干性不会受到显著损害。

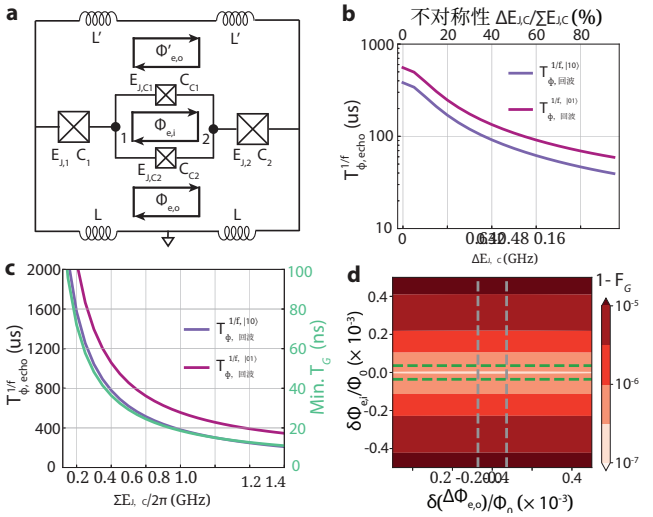

图 3. 对磁通噪声的敏感性。a，具有物理外部磁通和实际电感网络的SQUID耦合器电路。为简洁起见，省略了电容器。b，在幅度为$A_{\Phi_{e,\,i}} = 10^{-6}\Phi_0$和$A_{\Phi_{e,\,o}} = A_{\Phi'_{e,\,o}} = 5\times10^{-6}\Phi_0$的 $1/f$磁通噪声下计算得到的回波退相干时间$T^{1/f,\,|10\rangle}_{\phi,\,\rm echo}$、$T^{1/f,\,|01\rangle}_{\phi,\,\rm echo}$和echo。这里假设最坏情况，即外侧SQUID磁通噪声反相关。c，对于与b中幅度相同的 $1/f$ 磁通噪声，计算得到的回波退相干时间和最短可实现门时间（$\pi/\zeta_{\rm on}$）随$\Sigma E_{J,\,C}$的变化。d，22纳秒CZ门的相干误差随外部磁通偏移$\delta\Phi_{e,\,1}$和$\delta\Phi_{e,\,2}$的变化。绿色和灰色虚线表示：对于幅度为$A_{\Phi_{e,\,i}} = A_{\Phi_{e,\,o}} = A_{\Phi'_{e,\,o}} = 5\times10^{-6}\Phi_0$的 $1/f$ 磁通噪声，假设外侧SQUID磁通噪声反相关时，1小时漂移周期内均方根偏差对应的磁通偏移范围。

考察了与结不对称性相关的量子比特退相干的主要贡献后，现在我们令$\Delta E_{J,\,C} = 0$，并讨论由$\Sigma E_{J,\,C}$引起的退相干贡献。在这种情况下，由于交叉克尔相互作用速率和磁通灵敏度都源自同一个正比于$\Sigma E_{J,\,C}$的对角项，且 $\Phi_{\rm off}$ 几乎不受影响，因此磁通噪声诱导的退相干与门速度之间存在明显的权衡。我们通过比较回波退相干时间和最短可实现门时间 $\min T_G = \pi/|\zeta_{\rm on}|$来分析这种权衡。

我们采用参考文献 [46] 中提出的方法，模拟磁通噪声对 CZ 门误差的影响。由于 ZZ 相互作用在甜点处达到最大值，$\Phi_{e,\,i} = \Delta\Phi_{e,\,o} = 0$，我们预计 CZ 门的纠缠相位对磁通噪声具有鲁棒性。图 3d 展示了持续 22 纳秒的 CZ 门的估计相干误差随添加到磁通波形中的静态偏置 $\delta\Phi_{e,\,i}$ 和 $\delta(\Delta\Phi_{e,\,o})$ 的变化情况。在此分析中，我们使用零偏置下得到的局部 Z 相位，模拟磁通噪声导致的局部相位漂移。绿色和灰色虚线将零偏置校准为 1 小时漂移周期内的均方根（RMS）磁通偏差，对应于幅度为 $A_{\Phi_{e,\,i}} = A_{\Phi_{e,\,o}} = 5\times10^{-6}\Phi_0$ 的 $1/f$ 磁通噪声，以及两个外侧超导量子干涉器件磁通噪声之间的反相关性。

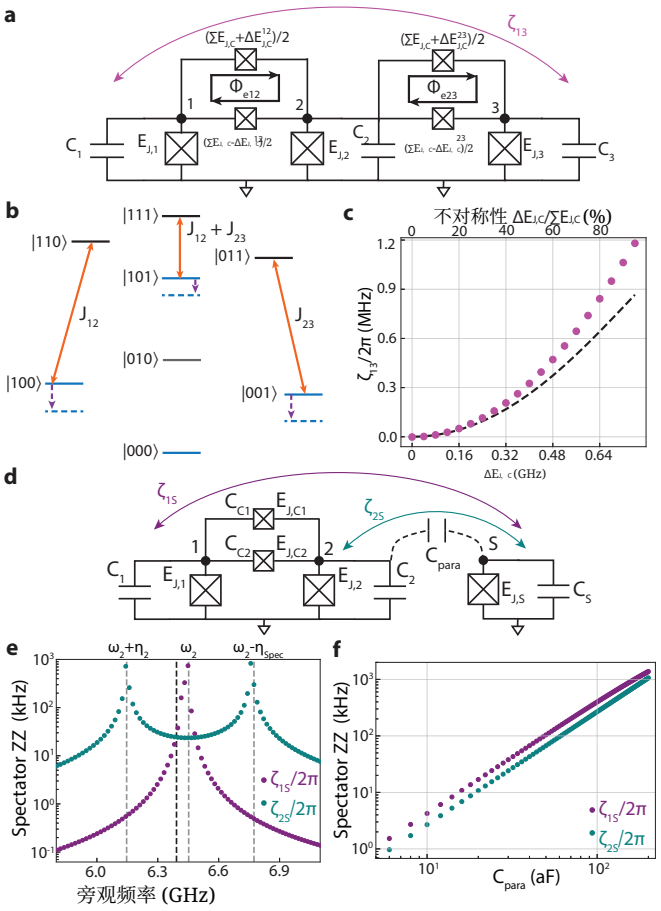

图 4. **由 SQUID耦合器介导的非常规串扰**。**a**，由三个跨蒙组成的链式电路示意图，它们通过 SQUID耦合器进行最近邻连接。为简洁起见，省略耦合器电容。**b**，**a** 的能级图，其中跃迁矩阵元（橙色实线）源于公式 (13) 所给出的纵向相互作用。**c**，通过电路量子化数值计算得到的 ZZ 相互作用速率 ζ_{13} 随 $\Delta E_{J变化C}$（紫色圆点）。黑色虚线表示由微扰理论得到的 ζ_{13}。**d**，两个跨蒙通过 SQUID耦合器耦合的电路示意图，以及一个通过寄生电容 C_{para}与跨蒙 2 耦合的旁观跨蒙。**e**，旁观ZZ相互作用率 ζ_{1S} 和 ζ_{2S} 随旁观 0-1 跃迁频率 ω_S的变化关系，其中 $C_{\mathrm{para}} = 30$ 阿法拉第。**f**，ζ_{1S} 和 ζ_{2S} 随C_{para}的变化关系，取值为 $\omega_S/2\pi = \omega_2/2\pi - 60$ 兆赫（**e**中的黑色虚线）。

通过这一分析，我们发现，在 1 小时漂移周期内，CZ 门的相干误差始终低于 10^{-6} 水平。

V. 非常规串扰

在耦合量子比特阵列中，我们发现，SQUID耦合器中的结不对称会在次近邻量子比特对之间引起串扰，如图 4a 所示。这种串扰源于奇宇称

ˆ 相互作用，表示为 $H_{\mathrm{asym-asym}}$：

$$\hat{H}_{\mathrm{asym-asym}} = \Delta E^{12}_{J,C} \sin\left(\frac{\varphi_{e12}}{2}\right) \sin\left(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1\right) + \Delta E^{23}_{J,C} \sin\left(\frac{\varphi_{e23}}{2}\right) \sin\left(\hat{\varphi}_3 - \hat{\varphi}_2\right), \quad (12)$$

其中 $\Delta E^{12}_{J,C}$ 和$\Delta E^{23}_{J,C}$ 分别是由于SQUID耦合器内结不对称性而产生的差分约瑟夫森能量，这些耦合器分别直接连接最近邻量子比特对和次近邻量子比特对；φ_{e12} 和 φ_{e23} 则是穿过这些SQUID耦合器的相应外部磁通。

将式（12）展开至三阶，可得纵向相互作用：

$$\hat{H}_{\mathrm{longitudinal}} \approx \left(J_{12}\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + J_{23}\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3\right)\left(\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\right), \quad (13)$$

其中 $J_{12} \approx \Delta E^{12'}_{JC}\cdot(\varphi_1^{zpf})^2\varphi_2^{zpf}\sin(\varphi_{e12}/2)$，以及 $J_{23} \approx -\Delta E^{23'}_{JC}\cdot(\varphi_3^{zpf})^2\varphi_2^{zpf}\sin(\varphi_{e23}/2)$。这等价于对跨蒙 2 进行 Z_1/Z_3-宇称依赖驱动；对于失谐量子比特，该驱动可在跨蒙 1 和 3 之间实现有效ZZ相互作用，类似于参考文献 [47] 中所述的门方案。相关跃迁如图 4b 所示。通过二阶微扰理论得到的 ZZ 相互作用速率 ζ_{13} 为：

$$\zeta_{13} \approx \frac{(J_{12}+J_{23})^2}{-\omega_2} - \frac{J_{12}^2}{-\omega_2} - \frac{J_{23}^2}{-\omega_2} = \frac{-2J_{12}J_{23}}{\omega_2}. \quad (14)$$

采用电路量子化，数值计算了 ζ_{13} 关于$\Delta E^{12}_{J,C} = \Delta E^{23}_{J,C} = \Delta E_{J,C}$的函数关系，并绘制于图4c中。在每个$\Delta E_{J,C}$处，更新结电容以维持等离子体频率，并在空闲条件 $\zeta_{12} = \zeta_{23} = 0$下估算 ζ_{13}。式（14）的微扰预测与数值电路量子化结果吻合良好，表明 ζ_{13} 主要源于纵向相互作用。请注意，对于$\Sigma E_{J,C}/2\pi = 0.8$ GHz，只需将结不对称性控制在20%以下，即可将 $\zeta_{13}/2\pi$抑制到60 kHz以下。

由于结耦合器介导的交叉Kerr效应相互作用依赖性较弱，人们无法依靠量子比特频率色散来抑制耦合量子比特阵列内不需要的相互作用。因此，在与旁观量子比特相互作用的背景下，串扰是任何基于SQUID耦合器的架构的一个潜在限制 [48–50]。如图4d所示的电路所示，SQUID耦合器可以将交叉Kerr效应相互作用从一个并未直接耦合到旁观量子比特的量子比特传播出去。在该电路中，transmon 1和2通过一个SQUID耦合器直接连接，频率为 ω_S（下标为“S”）的旁观跨蒙以速率 g_{para} 通过寄生电容 C_{para}耦合到transmon 2。这种耦合使transmon 2与旁观量子比特发生杂化：$\hat{a}_2 \to \sqrt{1-|\gamma|^2}\hat{a}_2 + \gamma\hat{a}_S$，其中

$\gamma \approx g_{\mathrm{para}}/(\omega_2 - \omega_S)$。根据式(4)，这种寄生杂化被转化为transmon 1与旁观量子比特之间的ZZ相互作用 ζ_{1S}，如下所示：

$$\zeta_{1S} \approx -\Sigma E'_{J,C} \cos\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)(\varphi_1^{zpf})^2(\varphi_2^{zpf})^2|\gamma|^2 \approx \zeta^{(1)}|\gamma|^2. \tag{15}$$

当两个跨蒙1和2之间的ZZ相互作用达到最大值时，也就是执行CZ 门操作期间，这种“间接”ZZ 串扰也达到最大值。如图4e所示，对于表I中列出的参数、 $C_S = 69.2$ 飞法和 $C_{\mathrm{para}} = 30$ 阿法拉第，我们计算了 ζ_{1S} 随 ω_S 在 $\varphi_{e,\ 1} = 0$处变化的函数关系。通过改变$E_{J,\ S}$来调整 ω_S。我们还将结果与传统的“直接”ZZ 串扰 ζ_{2S}进行了比较。如图4e和f所示，在共振条件 $\omega_S \approx \omega_2$ 附近，间接ZZ 串扰达到最大值，甚至可能强于 ζ_{2S}。这进一步强调了分配量子比特频率 [51, 52], 时避免共振频率碰撞 $\omega_S \approx \omega_2$ 的重要性，也说明有必要将杂散电容抑制在数十阿法拉第或更低的水平（见图4f）。

VI. 全微型化 Mergemon 架构

本节介绍一种量子比特拼接策略，旨在构建由 mergemon 量子比特组成、并通过 SQUID耦合器相互耦合的全微型化超导量子处理器。图 5 展示了所提电路的示意图。在这种架构中，所有量子比特和耦合元件均由约瑟夫森结实现，无需庞大的电容元件，从而大幅提高阵列中可能容纳的量子比特密度。我们设想，SQUID耦合器和高频 Mergemon 可以采用相同的氧化物势垒厚度，在保持高 CZ门性能的同时，降低电路制造的复杂性（见附录 E）。请注意，同样的拼接策略也可用于配备专用并联电容的 transmon量子比特，只需加长延伸引线，使其充当电容器焊盘。

对于图 5 所示的电路布局，所有 mergemon量子比特低电压侧的下结电极（紫色）均连接至一个公共接地（蓝色）。mergemon量子比特高电压侧的上结电极（橙色和黄色）各有四个引线延伸段，通过 SQUID耦合器将每个 mergemon量子比特连接到其四个最近邻。mergemon量子比特的低电压侧结电极与公共接地层电连接，由此形成前文讨论过的外侧SQUID回路。两个结电极

每个SQUID耦合器的层将方形晶格中的mergemon量子比特分为交替的“高”（H）和“低”（L）组，其中标记为 Q_L （橙色）的mergemon量子比特，其上结电极与每个基于结的耦合器的上层金属化层相连，而标记为

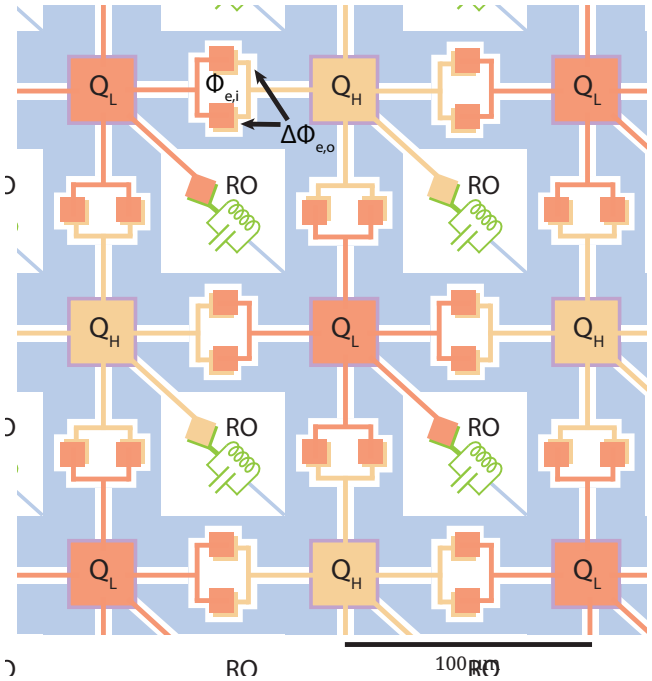

图 5. **用于微型化量子处理器的方形晶格上的mergemons**。 橙色（黄色）形状对应于低频（高频）量子比特的高压侧金属化，其与低压侧金属化层（紫色）重叠即形成mergemon。每个mergemon的高压侧金属化延伸至其最近邻，形成SQUID耦合器。低压侧金属化层与接地金属化层（蓝色）电连接，形成外侧SQUID回路。每个mergemon通过一个约瑟夫森结与其集总元件读出谐振器（绿色）电连接，用于结读出。为便于图示，包括约瑟夫森结在内的元件被有意绘制得大于其实际相对长度尺度。比例尺表示正文中给出的预期晶格常数。

Q_H （黄色）的mergemon量子比特，其上结电极与耦合器的下结电极相连。

这种金属化层的分离避免了跨越式布线元件，并限制了量子比特晶格中多余的超导回路。规则的方形晶格布局还形成一种梯度计设计，使电路对均匀磁通 [43–45, 53]不敏感。为实现最大控制，每个SQUID耦合器需要两条磁通输送线（控制线未示出）。另一种方案是使用满足工作条件$\Delta\Phi_{e,\ o} = 0$的磁通输送线。

在该架构中，得益于SQUID耦合器即使在较大的量子比特失谐下仍能提供的强交叉克尔耦合，量子比特频率可以分散在相对较大的范围内。例如，数据量子比特可分配到约4.5 GHz的低频段，辅助量子比特可分配到约6.3 GHz的高频段。这减轻了频率colli-

sion于最近邻对之间，从而能够使用固定频率量子比特，并最大化CZ门中的绝热性。为避免与强耦合的TLS缺陷发生意外碰撞，也可使用磁通可调跨蒙量子比特[13–15]。

如图 5 所示，每个 mergemon 量子比特的上结电极通过一个约瑟夫森结与集总元件读出谐振器电连接，以实现量子比特态读出。基于结的读出技术不仅无需使用读出耦合电容，还可免去额外的 Purcell滤波器，从而简化读出电路 [19, 20]。此外，结式读出引入的超导量子干涉器件可使非线性相互作用和有效线性耦合具有可调性，正如参考文献 [20] 所示。我们预计，可通过激活与读出谐振器的杂化，利用这种可调性实现无条件量子比特重置或抑制泄漏 [20, 26, 40, 54–58]。

采用占位尺寸紧凑的集总元件读出谐振器 [59–63], 还可进一步实现量子比特晶格的微型化铺设。此外，借助倒装芯片架构 [64, 65], ，电荷驱动线、磁通输送线和读出馈线可布置在对侧的“布线”芯片上，而不占用量子比特芯片的空间。综合这些特点，我们估计，量子比特晶格常数为 100 um 的微型化 mergemon处理器可以实现，从而能够在 10 cm $\times$ 10cm 的面积内集成多达 10^6 个量子比特，并可在单片 6 英寸晶圆 [10] 上制造。

展望未来，在这种mergemon量子比特架构中，还可以考虑诸多其他制造和布局考量。全结架构所带来的一个尤其引人注目的机遇，是利用声学带隙结构来设计电路元件的声子浴环境。正如 [66, 67] 所提出的，并且最近 [33, 68],通过关闭双能级系统（TLS）缺陷的主要声子浴退相干通道得到证实的那样，这可以显著改善TLS的相干特性，并相应地改善与TLS耦合的电学或声学元件的相干特性。对于表面积较小、因而在光谱上附近仅有一组离散双能级系统（TLS）的元件而言，例如约瑟夫森结，这种效果尤其显著。其他考量因素，例如最小化拼接式mergemon量子比特布线引线中的能量参与度，以及减少与旁观量子比特之间的寄生电容，详见附录F和G。

VII. 超导量子干涉器件耦合器的其他用途

本节将探讨 SQUID耦合器的几种替代用途，其耦合器结能量与操作频率的层级关系类似于跨蒙或 mergemon 量子比特架构中的设定。其中一个有趣的应用是设计双光子交换相互作用，用于耗散性地稳定猫态量子比特 [69–72]。在 SQUID耦合器的工作条件 $\varphi_{e,1}+\hat{}2\varphi_{e,2}=\pi$ 下，可得到奇宇称相互作用 H_{sine}：

$$\hat{H}_{\text{sine}}=\Sigma E_{J,C}\cos\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\sin\left(\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1\right). \tag{16}$$

通过对SQUID回路磁通施加时变驱动，$\varphi_{e,\ 1}(t)\ =\pi+\epsilon_d$ cos $(\omega_d t)$，其中 $\omega_d\approx 2\omega_1-\omega_2on\varphi_{e,\ 1}$，在旋波近似下可得到双光子交换相互作用 $H_{\text{two-photon}}$，与参考文献 [21]中的结果类似:

$$\hat{H}_{\text{two-photon}}\approx g_2\hat{a}_1^2\hat{a}_2^\dagger+h.c., \tag{17}$$

其中 $g_2\equiv\frac{1}{8}\epsilon_d\Sigma E'_{J,\ C}(\varphi_1^{zpf})^2(\varphi_2^{zpf})$。在耗散稳定的猫量子比特系统中，模式1可以是谐振子存储模式，模式2则可以是跨蒙量子比特，例如用于“缓冲”存储模式。值得注意的是，g_2 耦合速率与两个模式的裸零点涨落成正比，而非与其杂化值成正比。这使双光子耗散的强度与非线性缓冲电路因模式杂化而在存储模式上引起的自Kerr和/或交叉Kerr效应相互独立 [73, 74]。此外，与传统的电容耦合情形相比，这种方式在分配存储模式和缓冲模式频率时更加灵活；在传统情形下，元件之间可以采用大得多的失谐。

所提出的SQUID耦合器的另一种潜在用途，是构造次近邻量子比特相互作用。对于图4c所示的三跨蒙电路，在工作条件$\varphi_{e,\ 1}+2\varphi_{e,\ 2}=\pi$下，我们得到奇宇称相互作用:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{sine}-\text{sine}}=&\Sigma E_{J,C}^{12}\cos\left(\frac{\varphi_{e12}}{2}\right)\sin\left(\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1\right)\\&+\Sigma E_{J,C}^{23}\cos\left(\frac{\varphi_{e23}}{2}\right)\sin\left(\hat{\varphi}_3-\hat{\varphi}_2\right).\end{aligned} \tag{18}$$

该相互作用使次近邻量子比特对之间产生与式（13-14）所给相同的纵向相互作用和ZZ相互作用速率 ζ_{13} 。值得注意的是，如图4f所示，当$\Sigma E_{J,\ C}/2\pi\ =\ 0.8$ GHz时，$\zeta_{13}/2\pi$ 可大于1 MHz；并且通过增大$\Sigma E_{J,\ C}$ s，可使其按二次关系增强。

最后，SQUID耦合器可提供可调谐的XX相互作用，可用于在双轨跨蒙~~[75, 76]~~之间实现绝热√iSWAP门。其依据是，单个跨蒙的Pauli-Z（Z）算符等价于包含该跨蒙的双轨跨蒙的Pauli-X（X_{DR}）算符，二者相差一个整体相位，如下所示:

$$(\hat{I}_1\hat{Z}_2)(\hat{Z}_3\hat{I}_4)=-\hat{X}_{DR,a}\hat{X}_{DR,b}, \tag{19}$$

其中，下标 $i\in\{1,2,3,4\}$ 表示跨蒙 i，双轨跨蒙 a (b)由跨蒙 1、2（3、

4）组成。因此，如果 SQUID耦合器在跨蒙 2 和 3 之间提供形式为 $(\zeta/4)Z_2Z_3$ 的可调谐 ZZ ^ ^ 相互作用，则这等效于双轨跨蒙 a 和 b之间形式为 $(-\zeta/4)X_{DR,\,a}X_{DR,\,b}$ 的可调谐 XX相互作用。这样便可实现一个持续时间为 $T_G^{\min}=\pi/|\zeta|$ 的 √iSWAP 门，另加绝热性开销[75], ，其时长可短至跨蒙之间 CZ门的时长。在双轨量子比特和擦除检测的背景下，SQUID耦合器不会引入导致泄漏错误的额外通道 [75–77]，从而保持错误层级。此外，在人工甜点 [75, 76]处运行可抑制频率噪声的影响。双轨跨蒙的平铺方式见附录 H。

VIII. 结论

该超导量子干涉器件耦合器可提供无模型且可调谐的交叉Kerr耦合，使跨蒙之间能够实现快速、高保真度的 CZ门，同时将绝热性开销降至最低。通过选择较高的量子比特频率和相对较小的结能量，可抑制对结不对称性和磁通噪声的敏感性。研究还表明，由于寄生杂化而与旁观量子比特产生的非常规串扰，以及结不对称性引起的串扰，在现实的电路参数下都足够小。在mergemon量子比特架构中，超导量子干涉器件耦合器尤其值得关注，因为预计该架构会采用较小的约瑟夫森能量结，并且由于无需笨重的并联电容，超导量子干涉器件回路尺寸也会减小。借助基于结的耦合方案，我们提出了一种可扩展的平铺策略，以实现完全小型化的超导量子处理器。

致谢

我们感谢 Aashish A. Clerk 对稿件进行细致审阅并提出建设性意见。感谢 John Parker、Benjamin Boone、Lucia De Rose、Piero Chiappina、David P. Lake、Utku Hatipoglu、Sameer Sonar、Matt Davidson、Olivia Pitcl、Eunjong Kim、Arbel Haim、Ziwen Huang、Kyungjoo Noh、Yufeng Ye、Yoni Schattner 和 Connor T. Hann 提供有益的讨论。本研究由与亚马逊云科技签订的赞助研究协议提供支持。

附录A：电路量子化

按照标准电路量子化流程 [78–80] 分析 SQUID耦合器电路。我们将 $\Phi_{e,\mathrm{top}}$ ($\Phi_{e,\mathrm{bot}}$) 定义为 SQUID耦合器顶部（底部）约瑟夫森结两端的外部磁通降，分别以蓝色（红色）箭头标示；$\Phi_{e,Ji}$s 则表示跨蒙两端的外部磁通降

结。跨蒙 1 和 2 的约瑟夫森结两端的支路磁通为 Φ_{J1}、 Φ_{J2} ，而跨

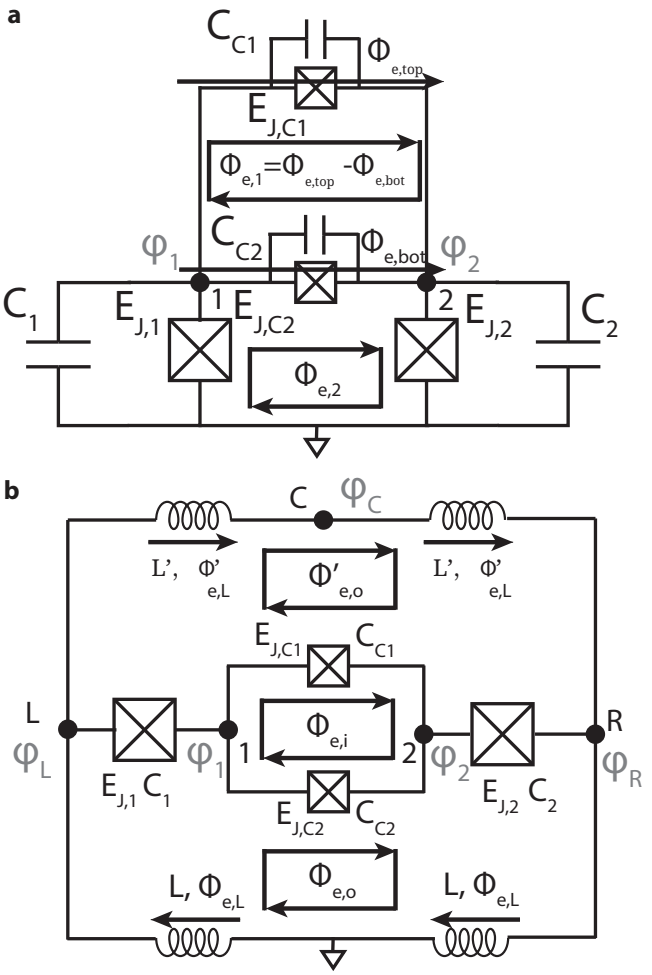

图 A1. **带有两个跨蒙的 SQUID 耦合器**。**a**，带有两个跨蒙的单侧 SQUID 耦合器。**b**，接地连接周围带有小电感的 SQUID 耦合器，形成物理 SQUID 回路。

SQUID耦合器的顶部和底部约瑟夫森结表示如下：

$$\begin{aligned}
&\Phi_{J1}=\phi_1+\Phi_{e,J1},\ \Phi_{J2}=-\phi_2+\Phi_{e,J2},\\
&\Phi_{\mathrm{bot}}=\phi_2-\phi_1+\Phi_{e,\mathrm{bot}},\ \Phi_{\mathrm{top}}=\phi_2-\phi_1+\Phi_{e,\mathrm{top}},\\
&\Phi_{e,2}=\Phi_{e,J1}+\Phi_{e,\mathrm{bot}}+\Phi_{e,J2},\\
&\Phi_{e,1}=\Phi_{e,\mathrm{top}}-\Phi_{e,\mathrm{bot}},
\end{aligned}\tag{A1}$$

其中， ϕ_1、 ϕ_2 是两个跨蒙的节点变量。

该电路的拉格朗日量为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}C_1(\dot{\phi}_1+\dot{\Phi}_{e,J1})^2+\frac{1}{2}C_2(\dot{\phi}_2-\dot{\Phi}_{e,J2})^2\\ &+\frac{1}{2}C_{C1}(\dot{\phi}_2-\dot{\phi}_1+\dot{\Phi}_{e,\mathrm{top}})^2+\frac{1}{2}C_{C2}(\dot{\phi}_2-\dot{\phi}_1+\dot{\Phi}_{e,\mathrm{bot}})^2\\ &+E_{J,1}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_1+\Phi_{e,J1})}{\Phi_0}\right)+E_{J,2}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_2-\Phi_{e,J2})}{\Phi_0}\right)\\ &+E_{J,C1}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_2-\phi_1+\Phi_{e,\mathrm{top}})}{\Phi_0}\right)\\ &+E_{J,C2}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_2-\phi_1+\Phi_{e,\mathrm{bot}})}{\Phi_0}\right),\end{aligned}\tag{A2}$$

以及勒让德变换：

$$\begin{aligned}Q_1&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_1}=C_1(\dot{\phi}_1+\dot{\Phi}_{e,J1})+C_C(\dot{\phi}_1-\dot{\phi}_2-\dot{\Phi}_{\mathrm{e},12}),\\ Q_2&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_2}=C_2(\dot{\phi}_2-\dot{\Phi}_{e,J2})+C_C(\dot{\phi}_2-\dot{\phi}_1+\dot{\Phi}_{\mathrm{e},12}),\end{aligned}\tag{A3}$$

可得哈密顿量：

$$\begin{aligned}H&=Q_1\dot{\phi}_1+Q_2\dot{\phi}_2-\mathcal{L}\\ &=\frac{C_2+C_C}{2C^2}Q_1^2+\frac{C_1+C_C}{2C^2}Q_2^2+\frac{C_C}{C^2}Q_1Q_2\\ &+Q_1\left(\frac{C_2C_C\dot{\Phi}_{\mathrm{e},12}-C_1(C_2+C_C)\dot{\Phi}_{e,J1}+C_2C_C\dot{\Phi}_{e,J2}}{C^2}\right)\\ &+Q_2\left(\frac{-C_1C_C\dot{\Phi}_{\mathrm{e},12}-C_1C_C\dot{\Phi}_{e,J1}+C_2(C_1+C_C)\dot{\Phi}_{e,J2}}{C^2}\right)\\ &-E_{J,1}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_1+\Phi_{e,J1})}{\Phi_0}\right)-E_{J,2}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_2-\Phi_{e,J2})}{\Phi_0}\right)\\ &-E_{J,C1}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_2-\phi_1+\Phi_{e,\mathrm{top}})}{\Phi_0}\right)\\ &-E_{J,C2}\cos\left(2\pi\frac{(\phi_2-\phi_1+\Phi_{e,\mathrm{bot}})}{\Phi_0}\right),\end{aligned}\tag{A4}$$

为简洁地描述，我们引入以下定义，

$$\begin{aligned}C_C&\equiv C_{C1}+C_{C2},\\ \Phi_{e,12}&\equiv\frac{C_{C1}}{C_C}\Phi_{e,\mathrm{top}}+\frac{C_{C2}}{C_C}\Phi_{e,\mathrm{bot}},\\ C^2&\equiv C_1C_2+C_1C_C+C_2C_C.\end{aligned}\tag{A5}$$

通过消去包含外部磁通时间导数的项，可以得到无旋约束：

$$\begin{aligned}C_2C_C\dot{\Phi}_{\mathrm{e},12}-C_1(C_2+C_C)\dot{\Phi}_{e,J1}+C_2C_C\dot{\Phi}_{e,J2}=0,\\ -C_1C_C\dot{\Phi}_{\mathrm{e},12}-C_1C_C\dot{\Phi}_{e,J1}+C_2(C_1+C_C)\dot{\Phi}_{e,J2}=0,\end{aligned}\tag{A6}$$

该条件可通过以下分压参数化形式满足：

$$C_1\dot{\Phi}_{e,J1}=C_2\dot{\Phi}_{e,J2}=C_C\dot{\Phi}_{e,12}.\tag{A7}$$

通过求解线性方程并对时间积分，可得出支路外部磁通降与外部磁通之间的关系：

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{e,\ top}}&=\Phi_{e,12}+\frac{1-d_C}{2}\Phi_{e,1},\\ \Phi_{\mathrm{e,\ bot}}&=\Phi_{e,12}-\frac{d_C+1}{2}\Phi_{e,1},\\ \Phi_{e,2}&=\Phi_{e,J1}+\Phi_{e,J2}+\Phi_{e,\mathrm{bot}},\\ &=C_C\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_C}\right)\Phi_{e,12}-\frac{d_C+1}{2}\Phi_{e,1},\end{aligned}\tag{A8}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{e,12}&=\frac{C_1C_2}{2C^2}\left((d_C+1)\Phi_{e,1}+2\Phi_{e,2}\right),\\ \Phi_{e,J1}&=\frac{C_2C_C}{2C^2}\left((d_C+1)\Phi_{e,1}+2\Phi_{e,2}\right),\\ \Phi_{e,J2}&=\frac{C_1C_C}{2C^2}\left((d_C+1)\Phi_{e,1}+2\Phi_{e,2}\right),\\ \Phi_{e,\mathrm{top}}&=\Phi_{e,\mathrm{bot}}+\Phi_{e,1},\\ \Phi_{e,\mathrm{bot}}&=\left(\frac{C_1C_2}{C^2}-1\right)\frac{(d_C+1)}{2}\Phi_{e,1}+\frac{C_1C_2}{C^2}\Phi_{e,2},\end{aligned}\tag{A9}$$

其中，$d_C\equiv(C_{C1}-C_{C2})/C_C$ 是 SQUID耦合器中的结电容不对称性。注意，如果结电容和约瑟夫森能大致都与结面积成正比，那么假设约瑟夫森能不对称性与电容不对称性相同是合理的。

我们可以考察极端情形，以检验解的一致性。当 $C_{C2}\to\infty$ （下结被短路取代）时，可得$\Phi_{e,\ \mathrm{bot}}\to 0$ 和$\Phi_{e,\ \mathrm{top}}\to\Phi_{e,\ 1}$，这与单结短路的情形一致。当 $C_1\to 0$（transmon 1 的结被纯电感或开路取代）时，可得$\Phi_{e,\ \mathrm{bot}}\to -C_{C1}\Phi_{e,\ 1}/C_C$、$\Phi_{e,\ \mathrm{top}}\to C_{C2}\Phi_{e,\ 1}/C_C$，以及$\Phi_{e,\ J1}\to\Phi_{e,\ 2}$，这与 You 等人 [79] 给出的直流超导量子干涉仪和 fluxonium 示例一致。最后，如果移除 SQUID耦合器中的上结，$C_{C1}\to 0$，就能得到 Campbell 等人 [4] 附录A中的解。

哈密顿量的完整表达式如下：

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\\ &4E_{C,1}\hat{n}_1^2-E_{J,1}\cos\left(\hat{\varphi}_1+\frac{C_2C_C}{2C^2}((d_C+1)\varphi_{e,1}+2\varphi_{e,2})\right)\\ &4E_{C,2}\hat{n}_2^2-E_{J,2}\cos\left(\hat{\varphi}_2-\frac{C_1C_C}{2C^2}((d_C+1)\varphi_{e,1}+2\varphi_{e,2})\right)\\ &-E_{J,C1}\cos\left(\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1+\varphi_{e,\mathrm{top}}\right)\\ &-E_{J,C2}\cos\left(\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1+\varphi_{e,\mathrm{bot}}\right)+g\hat{n}_1\hat{n}_2,\end{aligned}\tag{A10}$$

其中，节点变量由算符（带帽变量）取代。$\hat{}\varphi_i\equiv\frac{2\pi}{\Phi_0}\hat{}\phi_i$s 是约化磁通算符，$\hat{}n_i\equiv\frac{Q_i}{2e}$ 是约化电荷算符。$E_{C,\ 1}\equiv e^2(C_2+C_C)/2C^2$，$E_{C,2}\equiv e^2(C_1+C_C)/2C^2$ 是两个模式的充电能，且 $g\equiv 4e^2C_C/C^2$

是电荷耦合率。外部磁通归一化为 $\varphi_{e,k} \equiv 2\pi\Phi_{e,k}/\Phi_0$ ($k \in \{1,2\}$)。

在对称 SQUID 近似 $d_C \approx 0$和小结近似 $C_C \ll C_1$, C_2 （请注意，直到式 (A10) 的推导都是精确的），φ_{top} 和φ_{bot} 趋近于 $\varphi_{e,\ 2}$ 以及 $\varphi_{e,\ 1}+\varphi_{e,\ 2}$，并从跨蒙结势能中消去外部磁通。因此，我们得到正文中给出的哈密顿量：

$$\begin{aligned}\hat{H} \approx\ & 4E_{C,1}\hat{n}_1^2 - E_{J,1}\cos(\hat{\varphi}_1) + 4E_{C,2}\hat{n}_2^2 - E_{J,2}\cos(\hat{\varphi}_2) \\ & - E_{J,C1}\cos(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \varphi_{e,1} + \varphi_{e,2}) \\ & - E_{J,C2}\cos(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \varphi_{e,2}) + g\hat{n}_1\hat{n}_2. \end{aligned} \tag{A11}$$

恢复不对称性和 C_C 项后，理想外部磁通约束 $\varphi_{e,\ 1} = -2\varphi_{e,\ 2}$ 给出以下不含近似的全电路哈密顿量：

$$\begin{aligned}&\hat{H}|_{\varphi_{e,2}=-\varphi_{e,1}/2} = \\ &\quad 4E_{C,1}\hat{n}_1^2 - E_{J,1}\cos\left(\hat{\varphi}_1 - \frac{C_2C_C}{2C^2}d_C\varphi_{e,1}\right) \\ &\quad 4E_{C,2}\hat{n}_2^2 - E_{J,2}\cos\left(\hat{\varphi}_2 + \frac{C_1C_C}{2C^2}d_C\varphi_{e,1}\right) + g\hat{n}_1\hat{n}_2 \\ &\quad - \Sigma E_{J,C}\cos\left(\frac{\varphi_{e1}}{2}\right)\cos\left(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \frac{(C_1+C_2)C_C}{2C^2}d_C\varphi_{e,1}\right) \\ &\quad + \Delta E_{J,C}\sin\left(\frac{\varphi_{e1}}{2}\right)\sin\left(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \frac{(C_1+C_2)C_C}{2C^2}d_C\varphi_{e,1}\right). \end{aligned} \tag{A12}$$

其中，使用了 $\Sigma E_{J,\ C} \equiv E_{J,\ C1}+E_{J,\ C2}$、 $\Delta E_{J,\ C} \equiv E_{J,\ C1}-E_{J,\ C2} \approx d_C\Sigma E_{J,\ C}$以及三角关系来合并余弦项和正弦项。在包含节点变量的余弦项中，外部磁通项被压低至 d_CC_C/C_1 和 d_CC_C/C_2的量级；在本文采用的适度不对称性 $d_C \approx 0.2$ 和 C_C 下，它们约为 0。002。这验证了不包含这些项的微扰分析。

对于图 A1b 所示的 SQUID耦合器（它反映了铺砌示意图图 5 所示的真实电路），电路量子化时应适当考虑由低阻抗外环周围的小电感所确定的平衡节点相位。电感网络由 4 个电感组成，其电感为 L, $L' \ll L_J$，其中 L_J是约瑟夫森结的电感；该网络引入节点 L （左）、R （右）和 C （中），以及相应的节点磁通 ϕ_L、 ϕ_R 和 ϕ_C。在此电路中，我们引入三个外部磁通 $\Phi_{e,\ i}$, $\Phi_{e,\ o}$ 和 $\Phi'_{e,\ o}$ ，它们分别穿过三个不同的 SQUID回路。

将电感处的外部磁通降定义为 $\Phi_{e,\ L}$和 $\Phi'_{e,\ L}$，根据磁通子量子化可得到以下方程组：

$$\begin{aligned} 2\Phi'_{e,L} - (\Phi_{e,J1} + \Phi_{e,\text{top}} + \Phi_{e,J2}) &= \Phi'_{e,o}, \\ 2\Phi_{e,L} + (\Phi_{e,J1} + \Phi_{e,\text{bot}} + \Phi_{e,J2}) &= \Phi_{e,o}, \\ \Phi_{e,\text{top}} - \Phi_{e,\text{bot}} &= \Phi_{e,i}, \\ \rightarrow 2\Phi_{e,L} + 2\Phi'_{e,L} = \Phi_{e,i} + \Phi_{e,o} + \Phi'_{e,o} &\equiv \Sigma\Phi_e. \end{aligned} \tag{A13}$$

由于假设 L 和 L' 很小，节点相位 ϕ_L、 ϕ_R 和 ϕ_b 局域在平衡点 ϕ_{L0}、 ϕ_{R0} 和 ϕ_{C0}附近。电感能表示为：

$$\begin{aligned} E_{\text{ind}} = & \frac{1}{2}E_L(\phi_L + \Phi_{e,L})^2 + \frac{1}{2}E_L(-\phi_R + \Phi_{e,L})^2 \\ & + \frac{1}{2}E'_L(\phi_C - \phi_L + \Phi'_{e,L})^2 + \frac{1}{2}E'_L(\phi_R - \phi_C + \Phi'_{e,L})^2, \end{aligned} \tag{A14}$$

其中， $E_L \equiv (\Phi_0/2\pi)^{\ 2}/L$ 和 $E_L \equiv (\Phi_0/2\pi)^{\ 2}/L'$ 分别是电感的感性能量。通过求解以下方程组，使式 (A14) 最小化，即可得到平衡点：

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{ind}}}{\partial\phi_C} &= E'_L(\phi_C - \phi_L + \Phi'_{e,L}) - E'_L(\phi_R - \phi_C + \Phi'_{e,L}), \\ \frac{\partial E_{\text{ind}}}{\partial\phi_L} &= E_L(\phi_L + \Phi_{e,L}) - E'_L(\phi_C - \phi_L + \Phi'_{e,L}), \\ \frac{\partial E_{\text{ind}}}{\partial\phi_R} &= -E_L(-\phi_R + \Phi_{e,L}) + E'_L(\phi_R - \phi_C + \Phi'_{e,L}), \\ \rightarrow \phi_{L0} = -\phi_{R0} &= \frac{E'_L\Phi'_{e,L} - E_L\Phi_{e,L}}{E_L + E'_L},\ \phi_{C0} = 0. \end{aligned} \tag{A15}$$

与单侧 SQUID 耦合器相比， ϕ_{L0} 和 ϕ_{R0}的作用是使量子比特 1 和 2 上的外部磁通降分别偏移 $\Phi_{e,\ J1} \rightarrow \Phi_{e,\ J1} - \phi_{L0}$ 和 $\Phi_{e,\ J2} \rightarrow \Phi_{e,\ J2} + \phi_{R0}$。因此，无旋约束及后续代数运算得到：

$$\begin{aligned} C_1\dot{\tilde{\Phi}}_{e,J1} = C_2\dot{\tilde{\Phi}}_{e,J2} &= C_C\dot{\Phi}_{e,12}, \\ \tilde{\Phi}_{e,J1} \equiv \Phi_{e,J1} - \phi_{L0},\ \tilde{\Phi}_{e,J2} &\equiv \Phi_{e,J2} + \phi_{R0}, \end{aligned} \tag{A16}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{e,o} &= (\Phi_{e,J1} - \phi_{L0}) + (\Phi_{e,J2} + \phi_{R0}) + \Phi_{e,\text{bot}} \\ &\quad + 2\Phi_{e,L} + \phi_{L0} - \phi_{R0} \\ &= \tilde{\Phi}_{e,J1} + \tilde{\Phi}_{e,J2} + \Phi_{e,\text{bot}} + \frac{E'_L(2\Phi_{e,L} + 2\Phi'_{e,L})}{E_L + E'_L}, \\ \rightarrow &\tilde{\Phi}_{e,J1} + \tilde{\Phi}_{e,J2} + \Phi_{e,\text{bot}} = \Phi_{e,o} - \frac{E'_L}{E_L + E'_L}\Sigma\Phi_e. \end{aligned} \tag{A17}$$

方程 (A17) 的最后一行表明，单侧 SQUID 耦合器的解可按如下方式使用：

$$
\begin{aligned}
\Phi_{e,1} \equiv & \Phi_{e,i}, \quad \Phi_{e,2} \equiv \Phi_{e,o} - \frac{E_L'}{E_L + E_L'} \Sigma \Phi_e, \\
\Phi_{e,12} &= \frac{C_1 C_2}{2C^2} \left((d_C + 1)\Phi_{e,i} + 2\Phi_{e,2} \right), \\
\tilde{\Phi}_{e,J1} &= \frac{C_2 C_C}{2C^2} \left((d_C + 1)\Phi_{e,1} + 2\Phi_{e,2} \right), \\
\tilde{\Phi}_{e,J2} &= \frac{C_1 C_C}{2C^2} \left((d_C + 1)\Phi_{e,1} + 2\Phi_{e,2} \right), \\
\Phi_{e,\mathrm{top}} &= \Phi_{e,\mathrm{bot}} + \Phi_{e,1}, \\
\Phi_{e,\mathrm{bot}} &= \left(\frac{C_1 C_2}{C^2} - 1 \right) \frac{(d_C + 1)}{2} \Phi_{e,1} + \frac{C_1 C_2}{C^2} \Phi_{e,2}.
\end{aligned}
\tag{A18}
$$

$\Phi_{e,\ 2}$ 当外环电感之比趋近于 $0\ L/L' \to 0$ ($E_L'/E_L \to 0$) 时，收敛至 $\Phi_{e,\ o}$ ，这与单侧 SQUID 耦合器的情况一致。在对称电感 $L = L' \to \Phi_{e,\ 2} =$ (ΔΦ$_{e,\ o}$ − Φ$_{e,\ i}$)/2这一特殊情形下，电路仅对外环外磁通的差分ΔΦ$_{e,\ o} \equiv \Phi_{e,\ o} - \Phi'_{e.o}$以及内环外磁通敏感，因此称为“梯度计式 SQUID 耦合器”。

最后，工作条件 $\Phi_{e,1} + 2\Phi_{e,2} = 0$ 对于一般情形和梯度计情形可分别重新表示如下：

$$
\begin{aligned}
(1 - \frac{E_L'}{E_L})\Phi_{e,i} + 2(\Phi_{e,o} - \frac{E_L'}{E_L}\Phi'_{e,o}) &= 0, \\
\xrightarrow{L=L'} \Delta\Phi_{e,o} &= 0.
\end{aligned}
\tag{A19}
$$

附录 B：微扰理论

1. 余弦算符的正规序展开

为了利用湮灭算符（$\hat{a}_i$）和产生算符（$\hat{a}_i^\dagger$ ）展开含有相位变量$\hat{}\varphi_i$ 的余弦项，可将这些项改写为位移算符 $\mathcal{D}_i(\alpha) \equiv e^{\alpha \hat{a}_i^\dagger - \alpha^* \hat{}a_i}$ ，其对应的振幅$\alpha = \pm i\varphi_i^{zpf}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
\cos\hat{\varphi}_i &= \cos\left(\varphi_i^{zpf}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi_i^{zpf}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)} + e^{-i\varphi_i^{zpf}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}(i\varphi_i^{zpf}) + \mathcal{D}(-i\varphi_i^{zpf}) \right),
\end{aligned}
\tag{B1}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\hat{\varphi}_i &= \sin\left(\varphi_i^{zpf}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi_i^{zpf}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)} - e^{-i\varphi_i^{zpf}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)} \right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{D}_i(i\varphi_i^{zpf}) - \mathcal{D}_i(-i\varphi_i^{zpf}) \right).
\end{aligned}
\tag{B2}
$$

利用由 Baker-Campbell-Hausdorff 公式 $\mathcal{D}_i(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}_i^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{}a_i}$ [81] 得到的正规序表示，可得以下正规序展开式：

$$
\begin{aligned}
&\hat{}\text{余弦}\ \hat{\varphi}_i \\
&= \frac{e^{-\frac{(\varphi_i^{zpf})^2}{2}}}{2}\left(e^{i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i^\dagger} e^{i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i} + e^{-i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i^\dagger} e^{-i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i} \right) \\
&= e^{-\frac{(\varphi_i^{zpf})^2}{2}} \sum_n \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^n (\varphi_i^{zpf})^{2n}}{k!(2n-k)!} (\hat{a}_i^\dagger)^k (\hat{a}_i)^{2n-k}, \\
&\text{正弦}\hat{} \\
&\varphi_i \\
&= \frac{e^{-\frac{(\varphi_i^{zpf})^2}{2}}}{2i}\left(e^{i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i^\dagger} e^{i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i} - e^{-i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i^\dagger} e^{-i\varphi_i^{zpf}\hat{a}_i} \right) \\
&= e^{-\frac{(\varphi_i^{zpf})^2}{2}} \sum_n \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n (\varphi_i^{zpf})^{2n+1}}{k!(2n+1-k)!} (\hat{a}_i^\dagger)^k (\hat{a}_i)^{2n+1-k}.
\end{aligned}
\tag{B3, B4}
$$

这些算符用于计算正文中给出的矩阵元并进行微扰分析。

2. 估算零点涨落

在裸跨蒙哈密顿量 H_i 中展开余弦势，保留至二阶，得到以下表达式：

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_i \approx & \left(8E_{C,i}(n_i^{zpf})^2 - E_{J,i} e^{-\frac{(\varphi_i^{zpf})^2}{2}} (\varphi_i^{zpf})^2 \right) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \\
& + \left(-4E_{C,i}(n_i^{zpf})^2 + \frac{1}{2} E_{J,i} e^{-\frac{(\varphi_i^{zpf})^2}{2}} (\varphi_i^{zpf})^2 \right) (\hat{a}_i^2 + (\hat{a}_i^\dagger)^2).
\end{aligned}
\tag{B5}
$$

消去 $\hat{a}_i^2 + (\hat{a}_i^\dagger)^2$ 项的条件和归一化条件 $n_i^{zpf}\varphi_i^{zpf} = 1/2$ 给出以下方程，可用于数值计算φ_i^{zpf}：

$$
(\varphi_i^{zpf})^4 e^{-\frac{(\varphi_i^{zpf})^2}{2}} = \frac{2E_{C,i}}{E_{J,i}}.
\tag{B6}
$$

3. ZZ 相互作用速率

通过微扰理论ζ_{pert} 得到的 ZZ 相互作用速率计算至二阶，并考虑被认为对 ZZ 相互作用速率起主导作用的单激发数差，具体分解如下：

$$
\zeta_{\mathrm{pert}} \approx \zeta^{(1)} + \zeta_{\mathrm{c}}^{(2)} + \zeta_{\mathrm{odd}}^{(2)},
\tag{B7}
$$

其中，偶宇称相互作用负责一阶贡献 $\zeta^{(1)}$ 和二阶贡献 $\zeta_{\mathrm{c}}^{(2)}$，这些贡献源于守恒激发数的跃迁，直至单激发跃迁；而由结不对称性引起的奇宇称相互作用则负责

由于单激发数差异产生的二阶贡献 $\zeta^{(2)}$ 奇宇称。

$\zeta^{(2)}$ 奇数计算如下：

$$
\begin{aligned}
&g_{ijkl} \equiv \langle ij|\,\hat{H}_{\rm int}|kl\rangle, \quad \omega_{ij} \equiv \langle ij|\,\hat{H}_0\,|ij\rangle\,,\\
&E^{\rm sin}_{J,C} \equiv \Delta E_{J,C} e^{-\frac{(\varphi_1^{zpf})^2+(\varphi_2^{zpf})^2}{2}} \sin\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right),\\
&g_{0100} = E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_2^{zpf}, \quad g_{1000} = -E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_1^{zpf},\\
&g_{0201} = \sqrt{2}E^{\rm sin}_{J,C}\left(\varphi_2^{zpf} - \frac{1}{2}(\varphi_2^{zpf})^3\right),\\
&g_{2010} = -\sqrt{2}E^{\rm sin}_{J,C}\left(\varphi_1^{zpf} - \frac{1}{2}(\varphi_1^{zpf})^3\right),\\
&g_{1110} = E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_2^{zpf}\left(1-(\varphi_1^{zpf})^2\right),\\
&g_{1101} = -E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_1^{zpf}\left(1-(\varphi_2^{zpf})^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{1211} = \sqrt{2}E^{\rm sin}_{J,C}\left(1-(\varphi_1^{zpf})^2\right)\left(\varphi_2^{zpf} - \frac{1}{2}(\varphi_2^{zpf})^3\right),\\
&g_{2111} = -\sqrt{2}E^{\rm sin}_{J,C}\left(1-(\varphi_2^{zpf})^2\right)\left(\varphi_1^{zpf} - \frac{1}{2}(\varphi_1^{zpf})^3\right),\\
&g_{2001} = E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_2^{zpf}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_1^{zpf})^2\right),\\
&g_{0210} = -E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_1^{zpf}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_2^{zpf})^2\right),\\
&g_{3011} = E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_2^{zpf}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}(\varphi_1^{zpf})^2 + \frac{\sqrt{6}}{6}(\varphi_1^{zpf})^4\right),\\
&g_{0311} = -E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_1^{zpf}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}(\varphi_2^{zpf})^2 + \frac{\sqrt{6}}{6}(\varphi_2^{zpf})^4\right),
\end{aligned}
\tag{B8}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta^{(2)}_{\rm odd} &= \sum_{ij}(-1)^{i+j}E^{(2)}_{ij,\rm odd}\\
&= \frac{g_{3011}^2}{\omega_{11}-\omega_{30}} + \frac{g_{0311}^2}{\omega_{11}-\omega_{03}} - \frac{g_{0210}^2}{\omega_{10}-\omega_{02}} - \frac{g_{2001}^2}{\omega_{01}-\omega_{20}}\\
&+ \frac{g_{2111}^2}{\omega_{11}-\omega_{21}} + \frac{g_{1211}^2}{\omega_{11}-\omega_{12}} + \frac{2g_{1110}^2}{\omega_{11}-\omega_{10}} + \frac{2g_{1101}^2}{\omega_{11}-\omega_{01}}\\
&- \frac{g_{2010}^2}{\omega_{10}-\omega_{20}} - \frac{g_{0201}^2}{\omega_{01}-\omega_{02}} - \frac{2g_{1000}^2}{\omega_{10}-\omega_{00}} - \frac{2g_{0100}^2}{\omega_{01}-\omega_{00}}\\
&\approx -(E^{\rm sin}_{J,C}\varphi_1^{zpf}\varphi_2^{zpf})^2 \times \left(\frac{(\varphi_1^{zpf})^2}{2\omega_1-\omega_2} + \frac{(\varphi_2^{zpf})^2}{2\omega_2-\omega_1}\right.\\
&\left. + \frac{4(\varphi_1^{zpf})^2}{\omega_1} + \frac{4(\varphi_2^{zpf})^2}{\omega_2} + \frac{4\eta_1}{\omega_1^2} + \frac{4\eta_2}{\omega_2^2}\right)\\
&\sim \mathcal{O}\left(\frac{\Delta E^2_{J,C}(\varphi^{zpf})^6}{m\omega_1+n\omega_2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta E^2_{J,C}(\varphi^{zpf})^4\eta}{\omega^2}\right).
\end{aligned}
\tag{B9}
$$

其中，ω_1 和 ω_2 是两个量子比特的裸0-1跃迁频率，$(m,\ n) \in \{(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ -1),\ (-1,\ 2)\}$，并采用了近似$(\varphi^{zpf})^2 \ll 1$和 $|\eta_1|,\ |\eta_2| \ll m\omega_1 + n\omega_2$。

附录 C：仿真方法

1. 数值模拟工具

使用 Python 软件包 scQubits [34] 和 QuTiP [35]进行数值电路量子化、对角化和时域仿真。

2. 计算子空间

通过扫描$\Phi_{e,\ 1}$，在满足$\Phi_{e,\ 2} = -\Phi_{e,\ 1}/2$的约束下，找到 ZZ 关闭点 $\Phi_{\rm off}$。在此处，我们进行数值对角化以确定计算本征态。通过分层对角化程序 [82, 83]，建立缀饰本征态与裸本征态之间的映射。

3. 门保真度

CZ门的相干误差（$1-F_G$）使用标准的平均门保真度 [42] 进行估算：

$$
F_G(\hat{U}) = \frac{{\rm Tr}(\hat{U}_{proj}^{\dagger}\hat{U}_{proj}) + |{\rm Tr}(\hat{U}_{CZ}^{\dagger}\hat{U}_{proj})|^2}{20}, \tag{C1}
$$

其中，$\hat{}\ U_{proj} \equiv \hat{}P\,\hat{}U\,\hat{}P^{\dagger}$ 是投影到计算子空间上的模拟幺正传播算符，投影算符为$\hat{}\ \hat{}\ P$；U_{CZ} 是CZ门的理想幺正算符，用计算本征态表示。

对于包含非相干过程的门不保真度（$1-F$），我们使用涉及 Kraus 算符 [42] 的标准门保真度：

$$
F(\hat{U}) = \frac{{\rm Tr}(\sum_k \hat{M}_k^{\dagger}\hat{M}_k) + \sum_k |{\rm Tr}(\hat{M}_k)|^2}{20}, \tag{C2}
$$

其中，$\hat{}\ M_k \equiv \hat{}P\hat{U}_{CZ}\hat{}G_k\,\hat{}P^{\dagger}$和 $\hat{}\ G_k$s 是 Kraus 算符。

通过求解以下优化问题，我们报告消除可通过虚拟 Z 操作 [84] 抵消的局部相位影响后的相干误差和门不保真度：

$$
\min_{\phi_1,\phi_2}\left(1 - F_G(\hat{U}e^{-i\phi_1\hat{Z}_1}e^{-i\phi_2\hat{Z}_2})\right), \tag{C3}
$$

$$
\min_{\phi_1,\phi_2}\left(1 - F(\hat{U}e^{-i\phi_1\hat{Z}_1}e^{-i\phi_2\hat{Z}_2})\right), \tag{C4}
$$

$\hat{}\ \hat{}$其中，Z_1 和 Z_2 是量子比特的泡利 Z 算符。

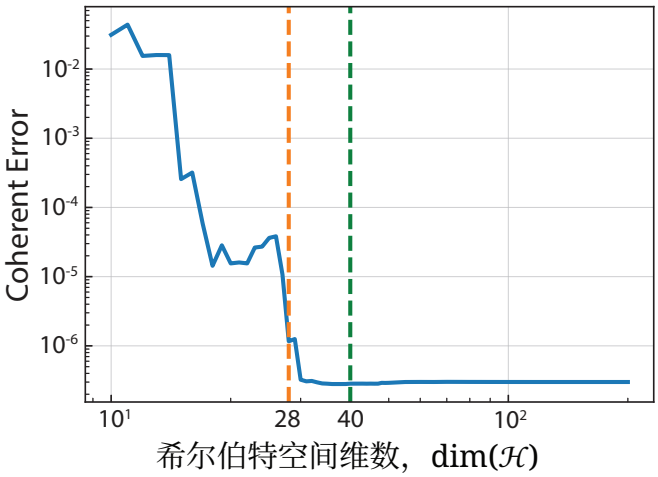

图 A2. **希尔伯特空间截断的影响**。模拟的 22 纳秒 CZ门的相干误差随希尔伯特空间维数 $dim(\mathcal{H})$ 的变化（蓝色实线）。正文报告的时域模拟采用 $dim(\mathcal{H})$ =40（绿色虚线）；含弛豫过程的 CZ门模拟则采用 $dim(\mathcal{H}) = 28$ （橙色虚线）。

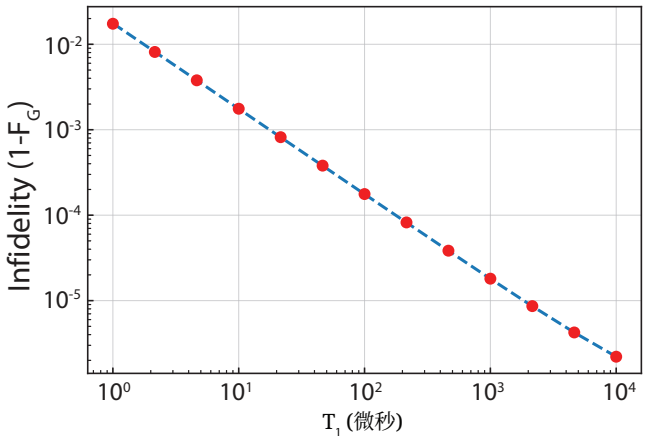

图 A3。**存在马尔可夫弛豫时的门保真度**。模拟的 22 纳秒 CZ门的不保真度随两个跨蒙的弛豫时间（T_1）变化的关系（红点）。蓝色虚线为对公式（D1）的拟合。

4. 希尔伯特空间截断

为在可行的计算时间内进行时域模拟，我们将希尔伯特空间截断至包含能量最低的 40 个能量本征态。为考察希尔伯特空间截断的影响，我们扫描希尔伯特空间维数 dim（$\mathcal{H}$），并估算正文中所示的 22 纳秒 CZ门的相干误差，如图 A2 所示。对于 dim（$\mathcal{H}$）≥ 40，相干误差的变化小于 2×10^{-8}，这足以估算正文中报告的 3×10^{-7}的相干误差。对于附录 D 中的非相干模拟，我们采用 dim（$\mathcal{H}$）$= 28$ 以缩短计算时间，同时将希尔伯特空间截断导致的数值误差控制在 10^{-6}以下。

附录 D：存在弛豫误差时的门保真度

通过仿真 Lindblad 主方程，考察了存在马尔可夫弛豫时 CZ门的性能，如图 A3 所示。我们通过将裸跨蒙的湮灭算符作为跳跃算符 $\sqrt{1/T_1}\hat{a}_i$ 加入模型，来描述弛豫过程，其中 T_1 是 transmon 的裸弛豫时间。两个量子比特采用相同的 T_1。构造裸湮灭算符时，我们使用分层对角化过程 [82, 83]。

门不保真度拟合为式（D1）所示的线性模型：

$$1 - F \approx a\frac{T_G}{T_1} + b, \tag{D1}$$

恢复出 $a = 0.799$ 和 $b = 4.5 \times 10^{-7}$，这与基于参考文献 [42]中的分析所得预测 $a = 0.8$ 一致。

附录 E：具有各种电路参数的 SQUID耦合器

1. 可用于空闲操作且能够抵抗电容定向的电路参数

至少存在一个可关闭 ZZ 相互作用速率的空闲工作点 Φ_{off}（Φ_{off}）$= 0$至关重要。通过研究由二阶微扰理论得到的以下表达式，可以近似找到这一条件：

$$\zeta_{\text{pert}}(\varphi_{e,1}) = -\Sigma E'_{J,C}\cos\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)(\varphi_1^{zpf})^2(\varphi_2^{zpf})^2 + \frac{4g_{\text{eff}}^2\eta}{\Delta^2 - \eta^2}, \tag{E1}$$

$$g_{\text{eff}} = -\Sigma E'_{J,C}\cos\left(\frac{\varphi_{e,1}}{2}\right)\varphi_1^{zpf}\varphi_2^{zpf} + gn_1^{zpf}n_2^{zpf}. \tag{E2}$$

当两个量子比特远失谐时，$|\Delta| \gg |\eta|$，ζ_{pert} 中的第二项为负，因为跨蒙特非谐性为负。因此，只有在$\varphi_{e,1} > \pi$ 时，才能关闭 ZZ 相互作用速率，此时第一项变为正。由于始终满足 $\zeta_{\text{pert}}(0) > 0$，根据介值定理，以下条件保证存在一个空闲外部磁通：

$$0 \leq \zeta_{\text{pert}}(2\pi) = \Sigma E'_{J,C}(\varphi_1^{zpf})^2(\varphi_2^{zpf})^2 + \frac{4(\Sigma E'_{J,C}\varphi_1^{zpf}\varphi_2^{zpf} + gn_1^{zpf}n_2^{zpf})^2\eta}{\Delta^2 - \eta^2}. \tag{E3}$$

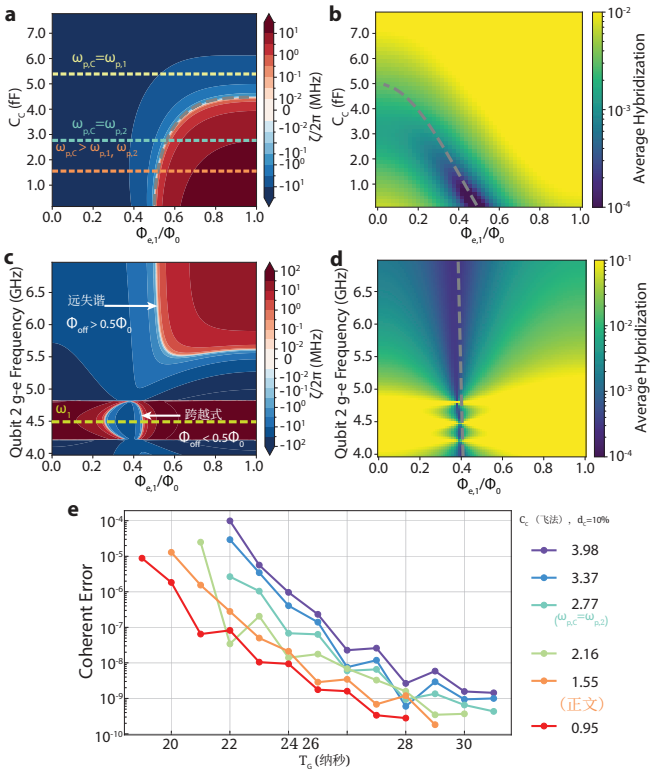

图 A4. ZZ相互作用速率与杂化 a，由电路量子化得到的ZZ 相互作用速率，作为总SQUID耦合器电容 C_C 和外部磁通Φ_e,1的函数，其余参数与正文表1相同。黄色（浅蓝色）虚线对应于耦合器结与transmon 1（跨蒙 2）具有相同等离子体频率的情形。橙色虚线表示正文分析中所使用的电容。灰色虚线曲线显示由微扰分析预测的 Φ_{off}。b，平均杂化 $\sum_{mn}(1-P_{|ij\rangle})/4$ 作为 C_C 和Φ_e,1的函数。c，ZZ 相互作用速率作为量子比特2频率 ω_2 和Φ_e,1的函数，其余参数与正文表1相同。 ω_2 通过改变E_J,2而变化。黄色虚线表示量子比特1频率 ω_1。d，平均杂化作为 ω_2 和Φ_e,1的函数。在b和d中，灰色虚线标出有效线性耦合被抵消 $g_{\text{eff}}(\Phi_e,1) = 0$处的偏置$\Phi_e$,1，该结果由微扰理论预测。e，模拟CZ门的相干误差作为门持续时间 T_G的函数，对应于不同的 C_C。

由于第一项始终为正，因此应抑制源自杂化且为负的第二项。可以通过降低电荷耦合率 g 并增大量子比特间失谐的绝对值 $|\Delta|$来实现这一点。

相比之下，当两个跨蒙处于跨越式区域 ω_{02}时，$\omega_{20} < \omega_{11}$ 或 $|\Delta| < |\eta|$，公式 (E2) 中的第二项变为正值，如果空闲工作点存在，则其将位于 $\varphi_{e,\ 1} < \pi$。

图 A4a 展示了通过电路量子化和

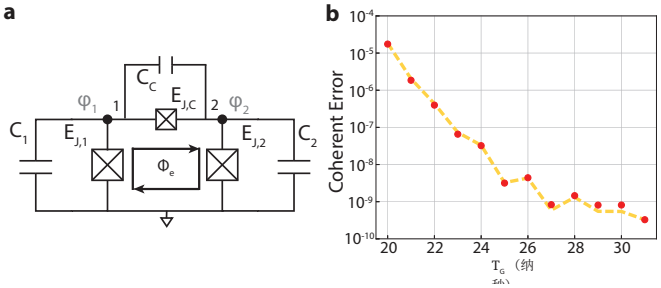

图 A5. **带结耦合器的 CZ门**。**a**，结耦合器的电路示意图。**b**，由结耦合器实现的 CZ门相干误差随门持续时间 T_G 的变化。黄色虚线表示非绝热态跃迁的贡献。

数值对角化计算得到的 ZZ相互作用速率随外部磁通的变化，其中 C_C 被扫描。我们发现，当 C_C 足够小时，存在空闲工作点。将耦合器结的等离子体频率$\omega_{p,\ C}$ 与量子比特结的等离子体频率 $\omega_{p,\ 1}$ 和 $\omega_{p,\ 2}$ 进行比较可以看出，无需采用极端的氧化条件来进一步降低 $\omega_{p,\ C}$，也能够存在空闲工作点。在 $\omega_{p,\ C} = \omega_{p,\ 2}$ 处存在空闲工作点，且其对 C_C具有鲁棒性，这意味着量子比特之一所采用的相同结氧化条件也可用于 SQUID耦合器中的结。如图 A4b 所示，在能够提供空闲偏置点的类似 C_C 范围内，平均杂化可被抑制到 1% 或更低。此外，采用具有较厚氧化物势垒的此类结工艺，由于其单位面积隧穿能量较小，因而有助于实现结面积的精确设计。

图 A4c 展示了通过改变 $E_{J,\ 2}$，量子比特 2 的 g-e跃迁频率扫描时的 ZZ相互作用速率。量子比特 1 的 g-e频率约为 4.49 GHz。正如预期，在足够大的失谐下，$\Phi_{\text{off}} > 0.5\Phi_0$ ($\varphi_{e,\ 1} > \pi$) 存在，而在跨越式区域中则存在 $\Phi_{\text{off}} < 0.5\Phi_0$ ($\varphi_{e,\ 1} < \pi$)。

为了检验SQUID耦合器运行对电路参数设定误差的容忍度，并探索SQUID耦合器中结可用的结等离子体频率，我们针对不同的 C_C，估计了10个最短门持续时间下CZ门的相干误差，如图A4e所示。我们假设SQUID耦合器中两个结的不对称性为$d_C = \Delta E_{J,C}/\Sigma E_{J,C} = (C_{C,\ 1} - C_{C,2})/C_C$ =10%，其中我们将结能量与电容的不对称性相关联。我们发现，在 [0.95、3.98] 飞法这一宽范围内，所有 C_C均能以较小的绝热性开销实现快速的高保真 CZ 门，表明该门方案对耦合器电容设定具有稳健性。需要注意的是，最短CZ门时间的差异源于电荷耦合引起的杂化诱导ZZ 相互作用速率 $\zeta^{(2)}$ 的变化。

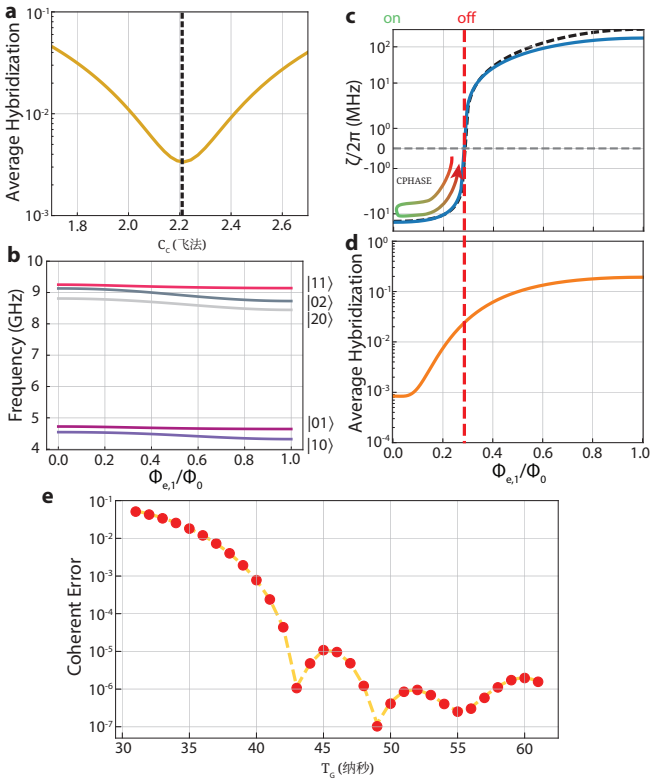

图 A6. **跨越区间内通过超导量子干涉器件耦合器连接的两个跨蒙。a**，总耦合器结电容 C_C 在 $\Phi_{e,1} = 0$ 时的平均杂化。黑色虚线表示提供最小杂化的 C_C。**b**，五个最低本征态的本征频率随外部磁通 $\Phi_{e,1}$ 的变化。**c, d** ZZ 相互作用速率和平均杂化随 $\Phi_{e,1}$ 的变化。红色虚线表示 ZZ 相互作用关闭点 Φ_{off}。**e**，使用跨越区间参数实现的 CZ门的相干误差。

2. 结耦合器

不对称性为100%或-100%的极限情形对应于SQUID耦合器中的一个结被去除的情况，如图A5a所示。因此，相互作用哈密顿量如下所示：

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}} &\approx -E_{J,C}\cos(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \varphi_e) + g\hat{n}_1\hat{n}_2 \\ &= -E_{J,C}\cos(\varphi_e)(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1) \\ &\quad + E_{J,C}\sin(\varphi_e)(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1) + g\hat{n}_1\hat{n}_2, \end{aligned} \tag{E4}$$

其中 $\varphi_e \equiv 2\pi\Phi_e/\Phi_0$。在 $\Sigma E_{J,C}$，$\Delta E_{J,C} \to E_{J,C}$ 和 $\Phi_{e,1} + \Phi_{e,2} \to \Phi_e$ 条件下，超导量子干涉器件耦合器的相互作用哈密顿量映射为结耦合器的相互作用哈密顿量。定义 $\Phi_{e,1} \equiv -2\Phi_e$ 后，我们便可用一致的方式比较结耦合器与超导量子干涉器件耦合器。

结耦合器是一个极端例子，展现了SQUID耦合器对结不对称性的鲁棒性。结耦合器仍能实现空闲外部磁通，并能实现与对称SQUID耦合器同样高效且具有高保真度的绝热CZ门，其相干误差见图A5b。然而，当与更多耦合器和量子比特串联时，它们会引入纵向相互作用，从而形成串扰通道，正文中对此已有讨论。

3. 跨越区间中的CZ门

超导量子干涉器件耦合器可用于在跨越式区间内实现两个transmon之间的CZ门。在此示例中，将transmon 2的频率 ω_2 调至接近ω_1，以满足跨骑条件 $\omega_{|20\rangle}$，$\omega_{|02\rangle} < \omega_{|11\rangle}$，如图A6b所示。在此参数区间内，抑制线性耦合至关重要，因为线性耦合对ZZ相互作用速率的贡献相对较大。我们选择使 $\Phi_e = 0$处的平均杂化最小化的C_C，如图A6a所示。

如前所述，在跨越区间内，空闲外部磁通 Φ_{off} 小于 $0.5\Phi_0$，如图A6c所示。与一对远失谐的transmon类似，可以通过动态调节外部磁通来实现CZ门。我们发现，可以实现一个时长为43纳秒、相干误差为 10^{-6} 的CZ门，如图A6e所示，这体现了超导量子干涉器件耦合器在跨越区间内的实用性。

附录 F：界面介电层损耗的计算

由于 SQUID 耦合器不需要平面电容提供电容耦合，因此可以抑制用于电偶连接的引线对地电容。这样一来，我们便能使用更窄的金属化层和更小的对地间隙，同时保持受污染界面介电层造成的损耗较低。图 A7a 所示几何结构引起的界面损耗，通过将引线近似为具有均匀几何结构的共面波导（CPW）来建模，其中引线宽度为 W，对地间隙为 G，二者为共面波导参数。

如图 A7b 所示，单个 mergemon 对地的电容可分解为结电容 C_J 和引线电容 C_{Lead}。因此，引线对品质因数 Q_{Lead} 的贡献可建模如下：

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q_{Lead}} &= \frac{U_{Lead}}{U_{tot}} \sum_{i\in\{MS,SA,MA\}} \frac{U_i}{U_{Lead}} \tan\delta_i \\ &\approx \frac{C_{Lead}}{C_\Sigma} \sum_{i\in\{MS,SA,MA\}} p_{i,CPW}\tan(\delta_i). \end{aligned} \tag{F1}$$

其中，U_{Lead} 和 U_{tot} 分别表示储存在引线中的能量和总能量，而 U_i 表示储存的能量

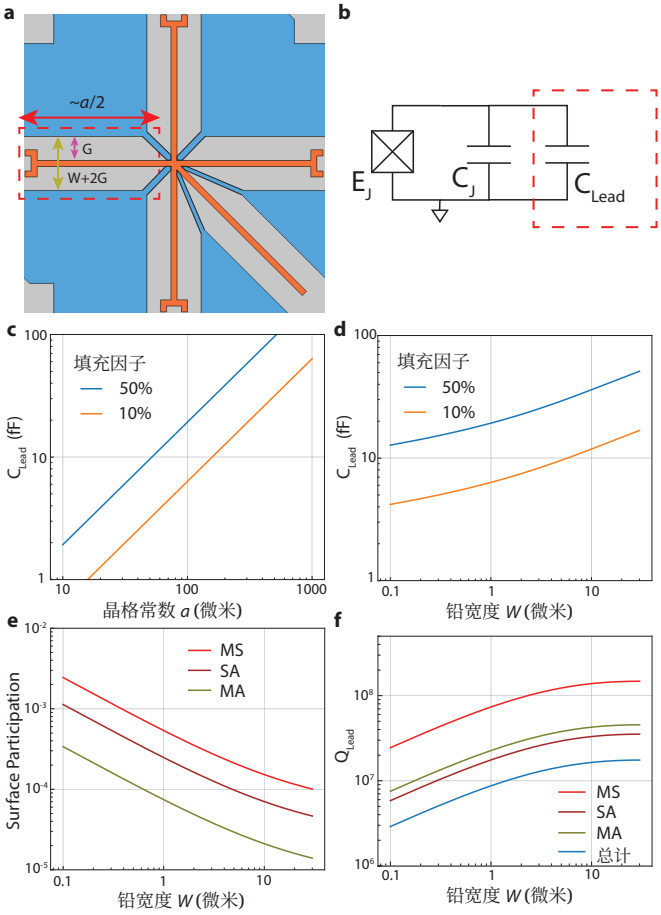

图 A7. **界面介电层损耗的计算**。**a**，将单个 mergemon 建模为十字形金属化层（橙色），其中 mergemon 结位于中心，金属化层的其余部分视为“引线”。接地金属化层（蓝色）在中心与 mergemon 的低压侧金属化层相连（隐藏）。**b**，mergemon 的电路示意图。 C_J 表示结的贡献，C_{Lead} 表示引线的贡献。**c**，解析计算得到的 C_{Lead} 随晶格常数的变化。对地间隙 G 取 8 um，引线宽度 W 取 1 um。**d**，解析计算得到的 C_{Lead} 随引线宽度的变化。对地间隙 G 取 8 um，晶格常数取 100 um。**e**，根据参考文献 [85]提供的公式解析计算得到的表面参与率随引线宽度的变化。分别将刻槽因子 1/4、1/3 和 4 乘以 MS、SA 和 MA 界面。**f**，解析计算得到的 Q_{Lead} 以及各界面层对 Q_{Lead} 的贡献随引线宽度的变化。

在界面层 i中， $p_{i,\ CPW}$ 表示界面层 i 的表面参与率，该值通过将引线几何结构近似为共面波导（CPW）来计算，并假设全部能量都储存在引线中（即分母为 U_{Lead}）；$\tan\delta_i$ 为相应的损耗角正切，而$C_\Sigma = C_J + C_{Lead}$ 为合并子量子比特的总电容。我们考虑三种界面层：金属-基底（MS）、基底-空气（SA）和金属-空气（MA）。我们根据参考文献 [86], 中给出的公式，针对硅基底（ $\epsilon_{si} = 11.47$ ）和对地间隙 $G = 8$ 微米，计算了 C_{Lead} 的解析结果，并在图 A7b 和 c 中将其表示为两个参数的函数：晶格常数（a）和引线宽度 W。在此模型中， C_{Lead} 与引线总长度成正比。我们假设引线总长度为 2.5×倍晶格常数，这是基于其与最近邻量子比特的四处连接以及与读出谐振器的连接，如图 A7a 所示。为降低 C_{Lead}，我们考虑对衬底开槽，并假设填充因子为 10%。以下分析假设晶格常数为 100 微米。

我们将引线几何形状近似为共面波导（CPW），并使用参考文献 [85], 中给出的解析模型，计算表面参与度随引线宽度的变化，如图 A7 所示。我们假设所有界面层中污染介电层的厚度均匀，为 2 纳米。为一致引用参考文献 [87]中给出的损耗角正切值，分别采用 MS、SA 和 MA 的相对介电常数 11.4、10 和 4。为考虑衬底开槽的影响（该处理会降低 MS 和 SA 的参与度并提高 MA 的参与度） [88, 89], ，MS、SA 和 MA 的参与度分别乘以 1/4、1/3 和 4。

最后，假设 C_Σ 为 80 飞法，使用公式 (F1) 计算品质因数的各项贡献，如图 A7 所示。MS 和 SA 损耗角正切取自[87]。考虑到将钽薄膜用于引线时，已知其可提供最洁净的 MA 表面之一 [90–94], ，我们采用参考文献 [92] 中给出的 MA损耗角正切，并按照参考文献 [88] 的建议，结合界面层厚度和相对介电常数进行一致的缩放。正如预期，随着引线宽度增加，表面参与度降低，品质因数随之提高；当 C_{Lead} 的增加抵消了这一效应后，品质因数便趋于稳定在 $G \ll W$。当引线宽度为 1 um 时，我们得到 $Q_{Lead} \approx 8.7 \times 10^6$，其对弛豫时间的贡献为 $T_1^{Lead} = 1/(\omega Q_{Lead}) \approx 309$ us，对应于频率为 $\omega/2\pi = 4.5$ GHz 的量子比特。

附录 G：寄生电容

采用 COMSOL 静电仿真模块，通过有限元法（FEM）估算所提出平铺方案中的寄生电容。我们按照图 A8a 所示，对 mergemon 处理器中的金属化层进行建模。每个带有标签 Q_{ij} 的彩色十字（橙色、黄色）表示位于 (i, j) 位置的 mergemon 高压侧金属化层，其中包括用于与 SQUID耦合器进行电偶连接的延长引线。我们假设引线厚度为 1um。SQUID 的占位位置建模为最近邻量子比特之间的电容器，其占位尺寸为 5 um × 5 um，高压侧引线之间的间隙为 1um。引线与接地金属化层之间的距离

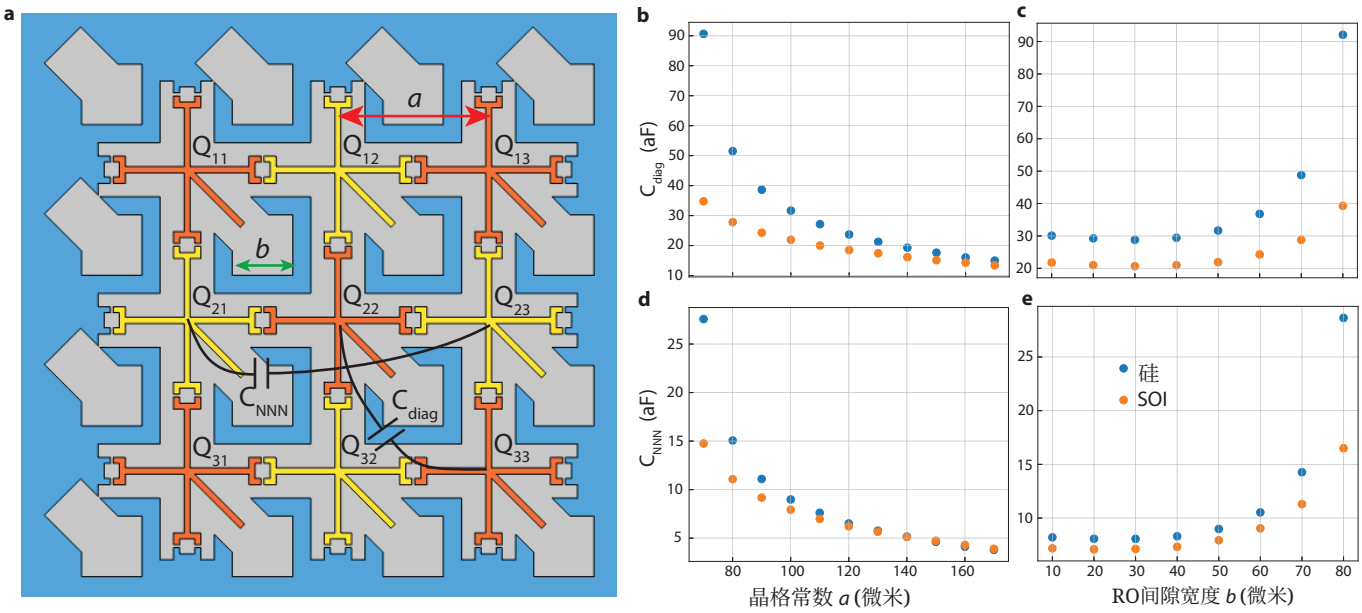

图 A8. **寄生电容估算**。**a**，静电模拟的几何结构。标出了晶格常数（a）、RO间隙宽度（b）以及寄生电容 C_{diag} 和 C_{NNN}。**b、d**，当 RO 间隙宽度为 $= 50$ 微米时，C_{diag} 和 C_{NNN} 随晶格常数的变化。**c、e**，当晶格常数为 $= 100$ 微米时，C_{diag} 和 C_{NNN} 随 RO 间隙宽度的变化。模拟采用了两种不同的衬底材料设置：硅和绝缘体上硅。

（蓝色）为 8um。我们考虑两种不同的衬底：1）相对介电常数为 $\epsilon_r = 11.47$ 的 500 um 厚硅基底；2）绝缘体上硅（SOI）衬底，包含 220 nm 厚的悬空硅层、3 um 厚的真空间隙层，以及 725 um 厚的硅承载层 [95]。对于这两种衬底，均将金属化层上方的区域设为真空。

在此模型中，用于实现电流连接的延长引线预计是电容的主要来源。我们确定了两个影响寄生电容的关键尺寸。首先，晶格常数（a）决定了引线之间的距离以及引线的周长。其次，用于布置集总元件读出谐振器的间隙区域宽度（RO间隙宽度，b）决定了给定晶格常数下每个晶格点周围接地金属化层的面积，从而屏蔽电场。请注意，为减少计算开销，省略了从 mergemon 的低电压金属化层延伸出的引线；省略这些引线可能会导致寄生电容被高估。

图 A8b-e 展示了估算得到的寄生电容随上述参数的变化关系。我们绘出了最大的两个寄生电容：晶格点 (i, j) 与 $(i+1, j+1)$ 之间的对角寄生电容 C_{diag}，以及次近邻寄生电容 C_{NNN}；后者位于晶格点 (i, j) 与 $(i+2, j)$ 之间，或位于晶格点 (i, j) 与 $(i, j+2)$ 之间，如图 A8a 所示。

我们发现，在相同的 RO 间隙宽度下，增大晶格常数会降低寄生电容。这表明寄生电容的降低，是由于接地金属化层面积增大所致，其速度快于较长引线带来的寄生电容增幅。增大 RO 间隙宽度会缩小接地金属化层面积，从而显著增强寄生电容。对于能够提供足够接地金属化层面积的参数组合（a 较大、b 较小），两种不同衬底的寄生电容数值会更加接近。这意味着，在此类参数范围内，大部分寄生电容由金属化层上方真空层中的杂散电容所贡献。我们发现，当晶格常数为 100 um、RO 间隙宽度为 50 um 时，两种衬底材料的寄生电容均约为 30 阿法拉第或更低。正如正文中所述，预计纳入衬底开槽以及与对置芯片相连的电偶连接元件的模拟，将通过降低衬底填充因子并增加更多可屏蔽电场的接地金属化层，估算出更小的杂散电容。

附录 H：带并联电容器的平铺式 transmon 与双轨 transmon

采用平面并联电容的传统跨蒙，其平铺策略可以通过从 mergemon 平铺方案出发，简单地加宽引线和接地间隙来实现，如图 A9a 所示。并联电容要求扩大外侧 SQUID 回路，这就需要在外侧 SQUID 回路中由磁通噪声引起的退相干与

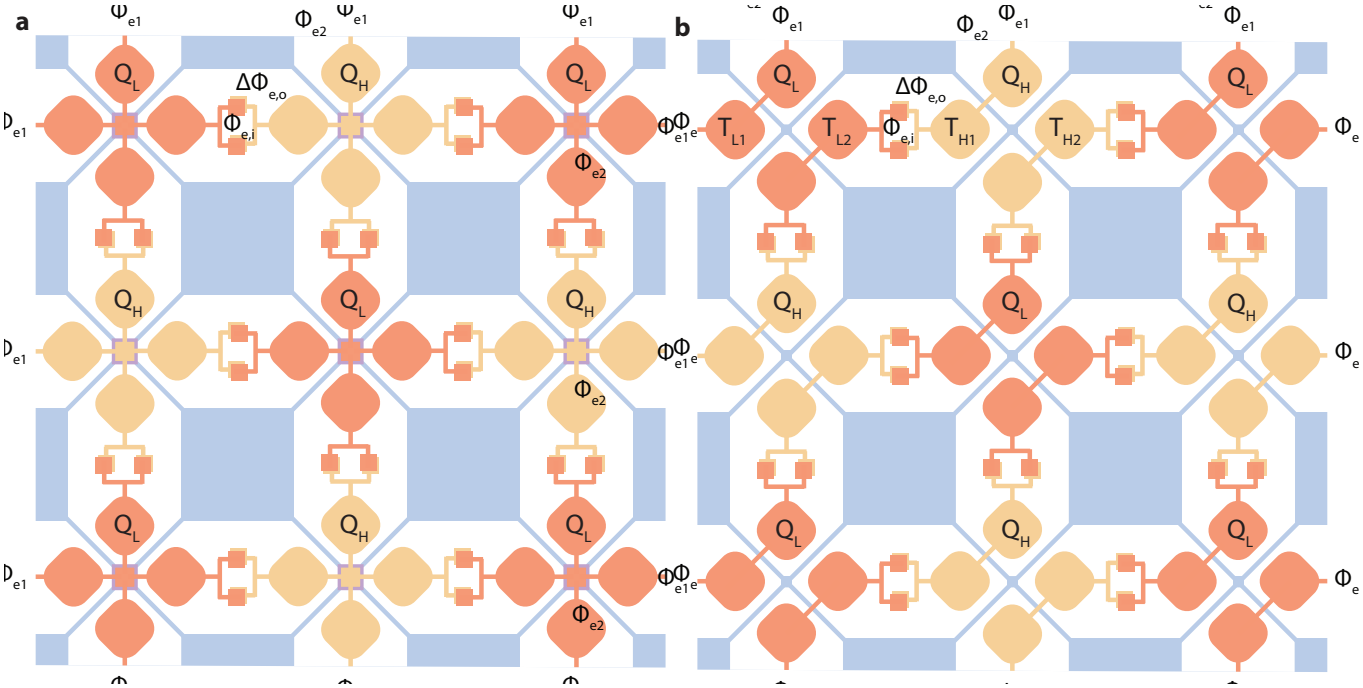

图 A9. **在方形晶格上平铺带并联电容的 transmon 与双轨跨蒙**。**a**，在方形晶格上平铺的 transmon。高电压金属化层（黄色、橙色）提供 transmon 所需的并联电容。约瑟夫森结位于每个晶胞的中心，如图所示，它们是高电压金属化层与低电压金属化层（紫色）的重叠部分；这两层分别与四条延伸引线电连接。**b**，在方形晶格上平铺的双轨跨蒙。每个晶胞由两个 transmon 组成，它们通过电容耦合。高电压引线（黄色、橙色）与接地金属化层（蓝色）的重叠部分代表一个约瑟夫森结，可用于实现固定频率 transmon；也可代表构成 SQUID 回路的两个约瑟夫森结，用于实现频率可调跨蒙。

电容器焊盘上受污染的界面层所导致的介电损耗之间进行权衡。体积较大的电容器焊盘还可能产生更大的杂散电容，从而导致更强的旁观量子比特 ZZ 相互作用。

相比之下，使用双轨跨蒙可以抑制磁通噪声的影响，这是因为它们在人工甜点处工作，能够抵御频率噪声 [75, 76]。我们在图 A9b 中给出了一个采用双轨跨蒙的铺排示例，其中每个晶胞由两个电容耦合的跨蒙组成。

[1] J. Koch、T. M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《源自库珀对盒的电荷不敏感量子比特设计》，Physical Review A **76**，042319（2007）。[2] F. Yan、P. Krantz、Y. Sung、M. Kjaergaard、D. L. Campbell、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《用于实现高保真双量子比特门的可调耦合方案》，《物理评论应用》**10**，054062（2018年）。[3] J. Stehlik、D. M. Zajac、D. L. Underwood、T. Phung、J. Blair、S. Carnevale、D. Klaus、G. A. Keefe、A. Carniol、M. Kumph、M. Steffen 和 O. E. Dial，《用于固定频率 transmon 超导量子比特的可调耦合架构》，《物理评论快报》**127**，080505（2021年）。[4] D. L. Campbell、A. Kamal、L. Ranzani、M. Senatore 和 M. D. LaHaye，《用于超导电路的模块化可调耦合器》，《物理评论应用》**19**，064043（2023年）。[5] H. Goto，双跨蒙耦合器：快速两比特门

对于大失谐超导量子比特，无残余耦合，《物理评论应用》**18**，034038（2022）。[6] P. Krantz、M. Kjaergaard、F. Yan、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《量子工程师的超导量子比特指南》，应用物理评论**6**，021318（2019）。[7] J. M. Martinis、K. B. Cooper、R. McDermott、M. Steffen、M. Ansmann、K. D. Osborn、K. Cicak、S. Oh、D. P. Pappas、R. W. Simmonds 和 C. C. Yu，《介电损耗导致约瑟夫森量子比特退相干》，《物理评论快报》**95**，210503（2005）。[8] J. Lisenfeld、A. Bilmes、A. Megrant、R. Barends、J. Kelly、P. Klimov、G. Weiss、J. M. Martinis 和 A. V. Ustinov，《transmon量子比特中材料缺陷的电场谱学》，npj Quantum Information **5**，105（2019）。[9] C. E. Murray，《超导量子比特中的材料因素》，材料科学与工程R: 报告**146**，100646（2021）。

[10] C. Gidney, 《如何用少于一百万个含噪量子比特分解2048位RSA整数》（ 2025 2505 15917 ）, [ ] arXiv: . quant-ph . [11] J. M. Martinis 和 M. R. Geller, 《仅使用 σ_z 控制的快速绝热量子比特门》, Physical Review A **90**, 022307（2014）。[12] Y. Sung、L. Ding、J. Braum¨uller、A. Veps¨al¨ainen、B. Kannan、M. Kjaergaard、A. Greene、G. O. Samach、C. McNally、D. Kim、A. Melville、B. M. Niedzielski、M. E. Schwartz、J. L. Yoder、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver, 《利用可调耦合器实现高保真CZ门和无 zz 的 iSWAP 门》, 《物理评论X》**11**, 021058 2021( )。[13] R. Zhao、S. Park、T. Zhao、M. Bal、C. McRae、J. Long 和 D. Pappas, 《合并元件跨蒙》, 《物理评论应用》**14**, 064006（2020）。[14] H. Mamin、E. Huang、S. Carnevale、C. Rettner、N. Arellano、M. Sherwood、C. Kurter、B. Trimm、M. Sandberg、R. Shelby、M. Mueed、B. Madon、A. Pushp、M. Steffen 和 D. Rugar, 《合并元件型跨蒙：设计与量子比特性能》, 《物理评论应用》**16**, 024023（2021）。[15] E. Daum、B. Berlitz、S. Deck、A. V. Ustinov 和 J. Lisenfeld, 《合并元件跨蒙量子比特中寄生二能级系统的研究》（2025）, arXiv:2509.22593 [凝聚态物理·超导]。[16] A. Blais、R.-S. Huang、A. Wallraff、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf, 《超导电路的腔量子电动力学：一种量子计算架构》, Physical Review A **69**, 062320（2004）。[17] M. Kounalakis、C. Dickel、A. Bruno、N. K. Langford 和 G. A. Steele, 《高相干超导电路中的可调跃迁与非线性交叉克尔相互作用》, npj Quantum Information **4**, 38（2018）。[18] Y. Ye、K. Peng、M. Naghiloo、G. Cunningham 和 K. P. O'Brien, 《利用四元件实现超导量子比特间的纯非线性耦合》, 《物理评论快报》**127**, 050502（2021）。[19] A. A. Chapple、O. Benhayoune-Khadraoui、S. Richer 和 A. Blais, 《用于超导量子比特读出的平衡交叉克尔耦合》, arXiv预印本 arXiv:2501.09010（2025）。[20] C. Wang、F.-M. Liu、H. Chen、Y.-F. Du、C. Ying、J.-W. Wang、Y.-H. Huo、C.-Z. Peng、X. Zhu、M.-C. Chen、C.-Y. Lu 和 J.-W. Pan, 《用于超导量子比特高保真读出的纵向与非线性耦合》, 《物理评论快报》**135**, 060803（2025）。[21] E. V. Stolyarov、V. L. Andriichuk 和 A. M. Sokolov, 《经由约瑟夫森元件的双光子耦合：利用磁场打破对称性》, Physical Review B **111**, 214517 2025( )。[22] R. Li、K. Kubo、Y. Ho、Z. Yan、Y. Nakamura 和 H. Goto, 《基于双跨蒙耦合器实现高保真CZ门》, 《物理评论X》**14**, 041050（2024）。[23] A. Chakraborty、B. Bhandari、D. D. Brise¯no-Colunga、N. Stevenson、Z. Pedramrazi、C.-H. Liu、D. I. Santiago、I. Siddiqi、J. Dressel 和 A. N. Jordan, 《用于fluxonium量子比特的可调超导量子干涉器件耦合器》（2025）, arXiv:2508.16907 [quant-ph]。[24] P. Brooks、A. Kitaev 和 J. Preskill, 《超导量子比特的受保护门》, Physical Review A**87**, 052306（2013）。[25] M. Hays、J. Kim 和 W. D. Oliver, 《非简并抗噪超导量子比特》（2025）, arXiv:2502.15459 [quant-ph]。

[26] M. McEwen、D. Kafri、Z. Chen、J. Atalaya、K. J. Satzinger、C. Quintana、P. V. Klimov、D. Sank、C. Gid- ney、A. G. Fowler、F. Arute、K. Arya、B. Buckley、B. Bur- kett、N. Bushnell、B. Chiaro、R. Collins、S. Demura、A. Dunsworth、C. Erickson、B. Foxen、M. Giustina、T. Huang、S. Hong、E. Jeffrey、S. Ki m、K. Kechedzhi、F. Kostritsa、P. Laptev、A. Megrant、X. Mi、J. Mu- tus、O. Naaman、M. Neeley、C. Neill、M. Niu、A. Paler、N. Redd、P. Roushan、T. C. White、J. Yao、P. Yeh、A. Zalc man、Y. Chen、V. N. Smelyanskiy、J. M. Martinis、H. Neven、J. Kelly、A. N. Korotkov、A. G. Petukhov和R. Barends, 《在超导量子纠错中消除泄漏诱导的相关误差》, 《自然·通讯》**12**, 1761（2021年）。[27] K. C. Miao、M. McEwen、J. Atalaya、D. Kafri、L. P. Pryadko、A. Bengtsson、A. Opremcak、K. J. Satzinger、Z. Chen、P. V. Klimov、C. Quintana、R. Acharya、K. An- derson、M. Ansmann、F. Arute、K. Arya、A. Asfaw、J. C. Bardin、A. Bourassa、J. Bovaird、L. Brill、B. B. Buckley、D. A. Buell、T. Burger、B. Burkett、N. Bush- nell、J. Campero、B. Chiaro、R. Collins、P. Conner、A. L. Crook、B. Curtin、D. M. Debroy、S. Demura、A. Dunsworth、C. Erickson、R. Fatemi、V. S. Ferreira、L. F. Burgos、E. Forati、A. G. Fowler、B. Foxen、G. Gar- cia、W. Giang、C. Gidney、M. Giustina、R. Gosula、A. G. Dau、J. A. Gross、M. C. Hamilton、S. D. Har- rington、P. Heu、J. Hilton、M. R. Hoffmann、S. Hong、T. Huang、A. Huff、J. Iveland、E. Jeffrey、Z. Jiang、C. Jones、J. Kelly、S. Kim、F. Kostritsa、J. M. Kreike- baum、D. Landhuis、P. Laptev、L. Laws、K. Lee、B. J. Lester、A. T. Lill、W. Liu、A. Locharla、E. Lucero、S. Martin、A. Megrant、X. Mi、S. Montazeri、A. Mor- van、O. Naaman、M. Neeley、C. Neill、A. Nersisyan、M. Newman、J. H. Ng、A. Nguyen、M. Nguyen、R. Pot- ter、C. Rocque、P. Roushan、K. Sankaragomathi、H. F. Schurkus、C. Schuster、M. J. Shearn、A. Shorter、N. Shutty、V. Shvarts、J. Skruzny、W. C. Smith、G. Ster- ling、M. Szalay、D. Thor、A. Torres、T. White、B. W. K. Woo、Z. J. Yao、P. Yeh、J. Yoo、G. Young、A. Zal- cman、N. Zhu、N. Zobrist、H. Neven、V. Smelyanskiy、A. Petukhov、A. N. Korotkov、D. Sank和Y. Chen, 《克服量子纠错中的泄漏》, 《自然·物理》**19**, 1780（2023年）。[28] Y. Chen、C. Neill、P. Roushan、N. Leung、M. Fang、R. Barends、J. Kelly、B. Campbell、Z. Chen、B. Chiaro、A. Dunsworth、E. Jeffrey、A. Megrant、J. Y. Mu- tus、P. J. J. O' Malley、C. M. Quintana、D. Sank、A. Vainsencher、J. Wenner、T. C. White、M. R. Geller、A. N. Cleland和J. M. Martinis, 《具有高相干性和快速可调耦合的量子比特架构》, Physical Review Letters **113**, 220502（2014年）。[29] J. Brau m¨uller、L. Ding、A. P. Veps¨al¨ainen、Y. Sung、M. Kjaergaard、T. Menke、R. Winik、D. Kim、B. M. Niedzielski、A. Melville、J. L. Yoder、C. F. Hirjibehedin、T. P. Orlando、S. Gustavsson和W. D. Oliver, 《基于SQUID几何结构表征并优化量子比特相干性》, 《物理评论应用》**13**, 054079（2020年）。[30] B. Josephson, 《超导隧穿中的可能新效应》, 《物理学快报》**1**, 251（1962年）。[31] W. C. Stewart, 《约瑟夫森结的电流-电压特性》, 《应用物理快报》**12**, 277（1968年）, https://pubs.aip.org/aip/apl/article- pdf/12/8/277/18421008/277 1 online.pdf。[32] D. E. McCumber, 《交流阻抗对直流

超导弱连接结电压-电流特性的影响》，应用物理学杂志**39**，3113（1968年），https://pubs.aip.org/aip/jap/article-pdf/39/7/3113/18346890/3113 1 online.pdf。[33] M. Chen、J. C. Owens、H. Putterman、M. Sch¨afer和O. Painter，《超导量子电路中原子尺度缺陷的声子工程》，《科学进展》**10**，eado6240（2024年）。[34] P. Groszkowski和J. Koch，《Scqubits：用于超导量子比特的Python软件包》，《Quantum》**5**，583（2021年）。[35] J. Johansson、P. Nation和F. Nori，《QuTiP：用于开放量子系统动力学的开源Python框架》，《计算物理通讯》**183**，1760（2012年）。[36] L. Allen和J. H. Eberly，*Optical resonance and two-level atoms* 2012（Courier Corporation，）。[37] J. Bylander、S. Gustavsson、F. Yan、F. Yoshihara、K. Harrabi、G. Fitch、D. G. Cory、Y. Nakamura、J.-S. Tsai和W. D. Oliver，《利用超导磁通量子比特通过动态解耦进行噪声谱学》，《自然·物理》**7**，565（2011年）。[38] J. M. Ch´avez-Garcia、F. Solgun、J. B. Hertzberg、O. Jinka、M. Brink和B. Abdo，《弱磁通可调超导量子比特》，《物理评论应用》**18**，034057（2022年）。[39] A. Baksic、H. Ribeiro和A. A. Clerk，《利用缀饰态加速绝热量子态转移》，Physical Review Letters**116**，230503（2016年）。[40] N. Lacroix、L. Hofele、A. Remm、O. Benhayoune- Khadraoui、A. McDonald、R. Shillito、S. Lazar、C. Hellings、F. Swiadek、D. Colao-Zanuz、*et al.*，《超导量子电路的快速磁通激活泄漏抑制》，arXiv预印本 arXiv:2309.07060 https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.07060（2023年）。[41] C. Hellings、N. Lacroix、A. Remm、R. Boell、J. Her- r mann、S. Laz˘ar、S. Krinner、F. Swiadek、C. K. Ander- se n、C. Eichler和A. Wallraff，《通过补偿失真校准超导电路中的磁通控制，时间尺度从纳秒到数十微秒》（2025年），arXiv:2503.04610 [quant-ph]。[42] L. H. Pedersen、N. M. Møller和K. Mølmer，《量子操作保真度》，《物理快报A》**367**，47（2007年）。[43] M. J. Schwarz、J. Goetz、Z. Jiang、T. Niemczyk、F. Deppe、A. Marx和R. Gross，《具有可调能隙的梯度计式磁通量子比特》，《新物理学杂志》**15**，045001（2013年）。[44] J. Braum¨uller、M. Sandberg、M. R. Vissers、A. Schneider、S. Schl¨or、L. Gr¨unhaupt、H. Rotzinger、M. Marthaler、A. Lukashenko、A. Dieter、A. V. Ustinov、M. Weides和D. P. Pappas，《具有快速可调性和各向异性磁偶极矩的同心式Transmon量子比特》，《应用物理快报》**108**，032601（2016年）。[45] Y. Ye、J. B. Kline、A. Yen、G. Cunningham、M. Tan、A. Zang、M. Gingras、B. M. Niedzielski、H. Stickler、K. Serniak、M. E. Schwartz和K. P. O'Brien，《超导电路中的近超强非线性光-物质耦合》，《自然·通讯》**16**，3799（2025年）。[46] E. L. Rosenfeld、C. T. Hann、D. I. Schuster、M. H. Ma- theny和A. A. Clerk，《利用谐振器耦合器实现Fluxonium量子比特间的高保真双量子比特门》，《PRX Quantum》**5**，040317（2024年）。[47] A. V. Gorshkov、D. Cohen、A. Haim、A. Rotem、O. Golan、G. Kim、A. Butler、C. T. Hann、O. Painter、F. G. S. L. Brand˜ao和A. Retzker，《腔介导交叉-交叉共振门（2025 2506 03239），[ ]arXiv：. quant-ph .[48] T.-Q. Cai、X.-Y. Han、Y.-K. Wu、Y.-L. Ma、J.-H. Wang、Z.-L. Wang、H.-Y. Zhang、H.-Y. Wang、Y.-P. Song 和 L.-M. Duan，《旁观者对可调耦合超导电路中两比特门的影响》，Physical Review Letters **127**，060505（2021年）。[49] S. Krinner、S. Lazar、A. Remm、C. Andersen、N. Lacroix、G. Norris、C. Hellings、M. Gabureac、C. Eichler 和 A. Wallraff，《旁观量子比特引起的受控相位门相干误差基准测试》，《物理评论应用》**14**，024042（2020年）。[50] P. Jurcevic 和 L. C. G. Govia，《旁观量子比特弛豫引起的有效量子比特退相位》，《量子科学与技术》**7**，045033（2022年）。[51] M. Brink、J. M. Chow、J. Hertzberg、E. Magesan 和 S. Rosenblatt，《近期超导量子处理器的器件挑战：频率碰撞》，载于*2018 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM)* 2018 6 1 1 6 1 3 ( ) 第 . . . – . . . 页。[52] A. Morvan 、 L. Chen 、 J. M. Larson 、 D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，《优化固定频率超导量子处理器的频率分配》，Phys. Rev. Res. **4**，023079（2022年）。[53] E. Hyypp¨a、S. Kundu、C. F. Chan、A. Gunyh´o、J. Hotari、D. Janzso、K. Juliusson、O. Kiuru、J. Kotilahti、A. Lan-dra、W. Liu、F. Marxer、A. M¨akinen、J.-L. Orgiazzi、M. Palma、M. Savytskyi、F. Tosto、J. Tuorila、V. Vadi-mov、T. Li、C. Ockeloen-Korppi、J. Heinsoo、K. Y. Tan、J. Hassel 和 M. M¨ott¨onen，《Unimon量子比特》，《自然·通讯》**13**，6895（2022年）。[54] M. D. Reed、B. R. Johnson、A. A. Houck、L. DiCarlo、J. M. Chow、D. I. Schuster、L. Frunzio 和 R. J. Schoelkopf，《超导量子比特的快速复位与自发发射抑制》，应用物理快报 **96**，203110（2010年）。[55] P. Magnard、P. Kurpiers、B. Royer、T. Walter、J.-C. Besse、S. Gasparinetti、M. Pechal、J. Heinsoo、S. Storz、A. Blais 和 A. Wallraff，《超导量子比特的快速、无条件全微波复位》，《物理评论快报》**121**，060502（2018年）。[56] Y. Zhou、Z. Zhang、Z. Yin、S. Huai、X. Gu、X. Xu、J. Allcock、F. Liu、G. Xi、Q. Yu、H. Zhang、M. Zhang、H. Li、X. Song、Z. Wang、D. Zheng、S. An、Y. Zheng 和 S. Zhang，《可调超导量子比特的快速无条件参数复位方案》，《自然·通讯》**12**，5924（2021年）。[57] J. F. Marques、H. Ali、B. M. Varbanov、M. Finkel、H. M. Veen、S. L. M. van der Meer、S. Valles-Sanclemente、N. Muthusubramanian、M. Beekman、N. Haider、B. M. Terhal 和 L. DiCarlo，《用于超导transmon量子比特量子纠错的全微波泄漏抑制单元》，《物理评论快报》**130**，250602（2023年）。[58] G. Kim、A. Butler、V. S. Ferreira、X. S. Zhang、A. Hadley、E. Kim 和 O. Painter，《通过工程化耗散浴实现可调超导量子比特的快速无条件复位与泄漏抑制》，《物理评论应用》**24**，014013（2025年）。[59] J. Zotova、R. Wang、A. Semenov、Y. Zhou、I. Khrapach、A. Tomonaga、O. Astafiev 和 J.-S. Tsai，《基于铝-氧化铝-铝电容器的紧凑型超导微波谐振器》，《物理评论应用》**19**，044067（2023年）。[60] M. T. Bell、I. A. Sadovskyy、L. B. Ioffe、A. Y. Kitaev 和 M. E. Gershenson

，具有可调谐

非线性的量子超电感，《物理评论快报》**109**，137003（2012年）。[61] L. B. Nguyen、Y.-H. Lin、A. Somoroff、R. Mencia、N. Grabon 和 V. E. Manucharyan，高相干性通量-onium量子比特，《物理评论X》**9**，041041（2019年）。[62] I. V. Pechenezhskiy、R. A. Mencia、L. B. Nguyen、Y.- H. Lin 和 V. E. Manucharyan，超导准电荷量子比特，《自然》**585**，368（2020年）。[63] C. J¨unger、T. Chistolini、L. B. Nguyen、H. Kim、L. Chen、T. Ersevim、W. Livingston、G. Koolstra、D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，可扩展悬浮超电感器的实现，《应用物理快报》**126**，044003 2025年( ), https://pubs.aip.org/aip/apl/article- pdf/doi/10.1063/5.0250341/20367496/044003 1 5.0250341.pd

[64]C. R. Conner, A. Bienfait, H.-S. Chang, M.-H. Chou, E. Dumur, J. Grebel, G. A. Peairs, R. G. Povey, H. Yan, Y. P. Zhong, and A. N. Cleland，《倒装芯片架构中的超导量子比特》，《应用物理快报》**118**，232602（2021年）。[65] S. Kosen, H.-X. Li, M. Rommel, D. Shiri, C. War- ren, L. Gr¨onberg, J. Salonen, T. Abad, J. Bizn´arov´a, M. Caputo, L. Chen, K. Grigoras, G. Johansson, A. F. Kockum, C. Kriˇzan, D. P. Lozano, G. J. Norris, A. Os- man, J. Fern´andez-Pend´as, A. Ronzani, A. F. Roud- s ari, S. Simbierowicz, G. Tancredi, A. Wallraff, C. Eich- ler, J. Govenius, and J. Bylander，《倒装芯片集成超导量子处理器的构成模块》，《量子科学与技术》**7**，035018（2022年）。[66] R. O. Behunin, F. Intravaia, and P. T. Rakich，缺陷诱导噪声、耗散和非线性的维度转换，Physical Review B **93**，224110（2016）。[67] G. S. MacCabe, H. Ren, J. Luo, J. D. Co- hen, H. Zhou, A. Sipahigil, M. Mirhosseini, and O. Painter，具有超长声子寿命的纳米声学谐振器，《科学》**370**，840（2020），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.abc7312。[68] M. Odeh, K. Godeneli, E. Li, R. Tangirala, H. Zhou, X. Zhang, Z.-H. Zhang, and A. Sipahigil，声子带隙中超导量子比特的非马尔可夫动力学，《自然·物理》**21**，406（2025年）。[69] M. Mirrahimi, Z. Leghtas, V. V. Albert, S. Touzard, R. J. Schoelkopf, L. Jiang, and M. H. Devoret，动态保护的猫态量子比特：通用量子计算的新范式，《新物理学杂志》**16**，045014（2014）。[70] Z. Leghtas, S. Touzard, I. M. Pop, A. Kou, B. Vlastakis, A. Petrenko, K. M. Sliwa, A. Narla, S. Shankar, M. J. Hatridge, M. Reagor, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, M. Mirrahimi, and M. H. Devoret，通过工程化双光子损耗将光态限制在量子流形中，《科学》**347**，853（2015），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.aaa2085。[71] R. Lescanne, M. Villiers, T. Peronnin, A. Sarlette, M. Delbecq, B. Huard, T. Kontos, M. Mirrahimi, and Z. Leghtas，将量子比特编码在振荡器中以指数级抑制比特翻转，《自然·物理》**16**，509（2020）。[72] H. Putterman, K. Noh, C. T. Hann, G. S. MacCabe, S. Aghaeimeibodi, R. N. Patel, M. Lee, W. M. Jones, H. Moradinejad, R. Rodriguez, N. Mahuli, J. Rose, J. C. Owens, H. Levine, E. Rosenfeld, P. Reinhold, L. Mon- celsi, J. A. Alcid, N. Alidoust, P. Arrangoiz-Arriola, J. Barnett, P. Bienias, H. A. Carson, C. Chen, L. Chen, H. Chinkezian, E. M. Chisholm, M.-H. Chou, A. Clerk, A. Clifford, R. Cosmic, A. V. Curiel, E. Davis, L. De-

Lorenzo, J. M. D'Ewart, A. Diky, N. D'Souza, P. T. Dumitrescu, S. Eisenmann, E. Elkhouly, G. Evenbly, M. T. Fang, Y. Fang, M. J. Fli ng, W. Fon, G. Gar- cia, A. V. Gorshkov, J. A. Grant, M. J. Gray, S. Grim- berg, A. L. Grimsmo, A. Haim, J. Hand, Y. He, M. Her- nandez, D. Hover, J. S. C. Hung, M. Hunt, J. Iverson, I. Jarrige, J.-C. Jaskula, L. Jiang, M. Kalaee, R. Kara- balin, P. J. Karalekas, A. J. Keller, A. Khalajhedayati, A. Kubica, H. Lee, C. Leroux, S. Lieu, V. Ly, K. V. Madrigal, G. Marcaud, G. McCabe, C. Miles, A. Mil- sted, J. Minguzzi, A. Mishra, B. Mukherjee, M. Naghiloo, E. Oblepias, G. Ortuno, J. Pagdilao, N. Pancotti, A. Pan- duro, J. Paquette, M. Park, G. A. Peairs, D. Perello, E. C. Peterson, S. Ponte, J. Preskill, J. Qiao, G. Refael, R. Resnick, A. Retzker, O. A. Reyna, M. Runyan, C. A. Ryan, A. Sahmoud, E. Sanchez, R. Sanil, K. Sankar, Y. Sato, T. Scaffidi, S. Siavoshi, P. Sivarajah, T. Skog- land, C.-J. Su, L. J. Swenson, S. M. Teo, A. Tomada, G. Torlai, E. A. Wollack, Y. Ye, J. A. Zerrudo, K. Zhang, F. G. S. L. Brand˜ao, M. H. Matheny, and O. Painter, 通过串联玻色子量子比特实现高效硬件量子纠错，《自然》**638**, 927 (2025年)。[73] A. Marquet, A. Essig, J. Cohen, N. Cottet, A. Murani, E. Albertinale, S. Dupouy, A. Bienfait, T. Peronnin, S. Jezouin, R. Lescanne, and B. Huard，通过自参数共振将猫量子比特的比特翻转时间延长至0.3秒，《物理评论X》**14**, 021019 (2024年)。[74] H. Putterman, K. Noh, R. N. Patel, G. A. Peairs, G. S. MacCabe, M. Lee, S. Aghaeimeibodi, C. T. Hann, I. Jar- rige, G. Marcaud, Y. He, H. Moradinejad, J. C. Owens, T. Scaffidi, P. Arrangoiz-Arriola, J. Iverson, H. Levine, F. G. S. L. Brand˜ao, M. H. Matheny, and O. Painter，通过指数级比特翻转抑制保持猫量子比特的相位相干性和线性度，《物理评论X》**15**, 011070 2025年( )。[75] A. Kubica, A. Haim, Y. Vaknin, H. Levine, F. Brand˜ao, and A. Retzker，擦除量子比特：克服超导电路中的 T_1 限制，《物理评论X》**13**, 041022 (2023年)。[76] H. Levine, A. Haim, J. S. C. Hung, N. Alidoust, M. Kalaee, L. DeLorenzo, E. A. Wollack, P. Arrangoiz- Arriola, A. Khalajhedayati, R. Sanil, H. Moradinejad, Y. Vaknin, A. Kubica, D. Hover, S. Aghaeimeibodi, J. A. Alcid, C. Baek, J. Barnett, K. Bawdekar, P. Bienias, H. A. Carson, C. Chen, L. Chen, H. Chinkezian, E. M. Chisholm, A. Clifford, R. Cosmic, N. Crisosto, A. M. Dalzell, E. Davis, J. M. D'Ewart, S. Diez, N. D'Souza, P. T. Dumitrescu, E. Elkhouly, M. T. Fang, Y. Fang, S. Flammia, M. J. Fling, G. Garcia, M. K. Gharzai, A. V. Gorshkov, M. J. Gray, S. Grimberg, A. L. Grimsmo, C. T. Hann, Y. He, S. Heidel, S. Howell, M. Hunt, J. Iverson, I. Jarrige, L. Jiang, W. M. Jones, R. Karabalin, P. J. Kar- alekas, A. J. Keller, D. Lasi, M. Lee, V. Ly, G. MacCabe, N. Mahuli, G. Marcaud, M. H. Matheny, S. McArdle, G. McCabe, G. Merton, C. Miles, A. Milsted, A. Mishra, L. Moncelsi, M. Naghiloo, K. Noh, E. Oblepias, G. Or- tuno, J. C. Owens, J. Pagdilao, A. Panduro, J.-P. Pa- quette, R. N. Patel, G. Peairs, D. J. Perello, E. C. Pe- terson, S. Ponte, H. Putterman, G. Refael, P. Reinhold, R. Resnick, O. A. Reyna, R. Rodriguez, J. Rose, A. H. Rubin, M. Runyan, C. A. Ryan, A. Sahmoud, T. Scaffidi, B. Shah, S. Siavoshi, P. Sivarajah, T. Skogland, C.-J. Su, L. J. Swenson, J. Sylvia, S. M. Teo, A. Tomada, G. Tor- lai, M. Wistrom, K. Zhang, I. Zuk, A. A. Clerk, F. G.

S. L. Brand˜ao, A. Retzker, and O. Painter，展示使用可调谐跨蒙特实现的长相干时间双轨擦除量子比特，《物理评论X》**14**, 011051 (2024年)。[77] K. S. Chou, T. Shemma, H. McCarrick, T.-C. Chien, J. D. Teoh, P. Winkel, A. Anderson, J. Chen, J. C. Cur- tis, S. J. de Graaf, J. W. O. Garmon, B. Gudlewski, W. D. Kalfus, T. Keen, N. Khedkar, C. U. Lei, G. Liu, P. Lu, Y. Lu, A. Maiti, L. Mastalli-Kelly, N. Mehta, S. O. Mundhada, A. Narla, T. Noh, T. Tsunoda, S. H. Xue, J. O. Yuan, L. Frunzio, J. Aumentado, S. Puri, S. M. Girvin, S. H. Moseley, and R. J. Schoelkopf，一种具有擦除探测逻辑测量功能的超导双轨腔量子比特，《自然·物理》**20**, 1454 (2024年)。[78] U. Vool and M. Devoret，量子电磁电路导论，International Journal of Circuit Theory and Applications**45**, 897 (2017年), https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cta.2359 . [79] X. You、J. A. Sauls 和 J. Koch，《时变外部磁通存在时的电路量子化》，Physical Review B **99**，174512（2019年）。[80] R. P. Riwar 和 D. P. DiVincenzo，《适用于现实几何结构的时变磁场下的电路量子化》，npj Quantum Information **8**，36（2022年）。[81] W. McCrea，《某些恒等式的操作性证明》，The Mathematical Gazette **17**，43（1933年）。[82] A. J. Kerman，《复杂约瑟夫森量子电路的高效数值模拟》（ 2020 2010 14929 ），[ ] arXiv：. quant-ph。[83] S. P. Chitta、T. Zhao、Z. Huang、I. Mondragon-Shem 和 J. Koch，《超导电路的计算机辅助量子化与数值分析》，《新物理学杂志》**24**，103020（2022年）。[84] D. C. McKay、C. J. Wood、S. Sheldon、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta，《用于量子计算的高效 z 门》，Physical Review A **96**，022330（2017年）。[85] C. E. Murray、J. M. Gambetta、D. T. McClure 和 M. Steffen，《超导共面架构中参与度的解析确定》，IEEE Transactions on Microwave T heory and Techniques **66**，3724（2018年）。[86] R. N. Simons，*Coplanar waveguide circuits, components, and systems* 2004 （J ohn Wiley & Sons，）。[87] A. Melville、G. Calusine、W. Woods、K. Serniak、E. Golden、B. M. Niedzielski、D. K. Kim、A. Sevi、J. L. Yoder、E. A. Dauler 和 W. D. Oliver，《氮化钛与铝超导谐振器中介电损耗的比较》，《应用物理快报》**117**，124004 （2020年）。[88] G. Calusine、A. Melville、W. Woods、R. Das、C. Stull、V. Bolkhovsky、D. Braje、D. Hover、D. K. Kim、X. Miloshi、D. Rosenberg、A. Sevi、J. L. Yoder、E. Dauler 和 W. D. Oliver，《开槽超导共面波导谐振器中界面损耗的分析与缓解》，应用物理快报**112**，062601（2018年）。[89] C. E. Murray，《通过衬底开槽对超导共面谐振器和量子比特设计中的参与度降低进行解析建模》，IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques **68**，3263（2020年）。[90] A. P. M. Place、L. V. H. Rodgers、P. Mundada、B. M. Smitham、M. Fitzpatrick、Z. Leng、A. Premkumar、J. Bryon、A. Vrajitoarea、S. Sussman、G. Cheng、T. Madhavan、H. K. Babla、X. H. Le、Y. Gang、B. J¨ack、A. Gyenis、N. Yao、R. J. Cava、N. P. de Leon 和 A. A. Houck，《具有超过0.3毫秒相干时间的超导transmon量子比特新材料平台》，《自然·通讯》**12**，1779（2021年）。[91] L. Shi、T. Guo、R. Su、T. Chi、Y. Sheng、J. Jiang、C. Cao、J. Wu、X. Tu、G. Sun、J. Chen 和 P. Wu，《具有超高本征品质因数的钽微波谐振器》，应用物理快报**121**，242601（2022年）。[92] K. D. Crowley、R. A. McLellan、A. Dutta、N. Shumiya、A. P. M. Place、X. H. Le、Y. Gang、T. Madhavan、M. P. Bland、R. Chang、N. Khedkar、Y. C. Feng、E. A. Umbarkar、X. Gui、L. V. H. Rodgers、Y. Jia、M. M. Feldman、S. A. Lyon、M. Liu、R. J. Cava、A. A. Houck 和 N. P. de Leon，《解耦钽超导电路中的损耗》，《物理评论X》**13**，041005（2023年）。[93] G. Marcaud、D. Perello、C. Chen、E. Umbarkar、C. Weiland、J. Gao、S. Diez、V. Ly、N. Mahuli、N. D'Souza、Y. He、S. Aghaeimeibodi、R. Resnick、C. Jaye、A. K. Rumaiz、D. A. Fischer、M. Hunt、O. Painter 和 I. Jarrige，《由室温生长的钽薄膜制备的低损耗超导谐振器》，《通讯材料》**6**，182（2025年）。[94] T. A. van Schijndel、A. P. McFadden、A. N. Engel、J. T. Dong、W. J. Y´anez-Parre˜no、M. Parthasarathy、R. W. Simmonds 和 C. J. Palmstrøm，《用于低损耗超导电路的钽薄膜低温生长》，《物理评论应用》**23**，034025（2025年）。[95] A. J. Keller、P. B. Dieterle、M. Fang、B. Berger、J. M. Fink 和 O. Painter，《用于量子器件集成的绝缘体上硅铝Transmon量子比特》，《应用物理快报》**111**，042603 2017（），https://pubs.aip.org/aip/apl/article-pdf/doi/10.1063/1.4994661/14502344/042603 1 online.pd

f.