双变量 Hardy-Sobolev 不等式及其尖锐稳定性

YingfangZhang*, Xuexiu Zhong†, WenmingZou‡

2026年2月4日

arXiv:2602.03191v1 [math.AP] 3 Feb 2026

摘要

本文建立了一个双变量 Hardy-Sobolev 不等式。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) 为一个开区域，$s \in (0, 2)$，$\alpha > 1, \beta > 1$ 满足 $\alpha + \beta = 2^*(s)$，且 $\kappa \in \mathbb{R}$。对于任意函数 $u, v \in D^{1,2}_0(\Omega)$，我们证明了如下不等式：

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \geq S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega) \left(\int_\Omega \left(\lambda \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} + \mu \frac{|v|^{2^*(s)}}{|x|^s} + 2^*(s)\kappa \frac{|u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^s} \right) \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*(s)}}.$$

我们推导出最佳常数 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)$，并刻画了极小值点集。此外，对于 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 和 $\kappa > 0$，我们得到了非负函数的尖锐稳定性结果。

2010年数学主题分类： 35B38, 35J10, 35J15, 35J20, 35J60.

关键词： 尖锐常数；Hardy-Sobolev 指数；双变量 Hardy-Sobolev 不等式；尖锐稳定性

*数学科学系，清华大学；电子邮箱：zhangyf22@mails.tsinghua.edu.cn

†数学科学学院，华南师范大学。X. Zhong 获国家自然科学基金委员会（编号：12271184）和广东省青年拔尖人才项目（2024TQ08A725）资助。电子邮箱：zhongxuexiu1989@163.com

‡数学科学系，清华大学。W. Zou 获国家重点研发计划（项目编号：2023YFA1010001）和国家自然科学基金委员会（编号：12171265 和 12271184）资助。电子邮箱：zou-wm@mail.tsinghua.edu.cn

1 引言

1.1 Hardy-Sobolev 不等式及其稳定性

著名的 Hardy-Sobolev 不等式指出，对于任意函数 $u \in D^{1,2}_0(\Omega)$，

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \geq \mu_s(\Omega) \left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*(s)}},$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ 中的一个开区域，$s \in (0, 2)$，且 $2^*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2}$。这里，$\mu_s(\Omega)$ 表示最佳常数，定义如下：

$$\mu_s(\Omega) := \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} : u \in D^{1,2}_0(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

当原点 0 位于 Ω 的内部时，众所周知 $\mu_s(\Omega) = \mu_s(\mathbb{R}^N)$，并且 $\mu_s(\Omega)$ 无法取到，除非 $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ 的容量为零。然而，当 $\partial\Omega$ 在 0 处有尖点，或 $\partial\Omega$ 在 0 处光滑时，情况与非奇异情形有显著差异。关于详细讨论，请参阅 Egnell [11] 以及 Ghoussoub 和 Kang [19]。

在 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 的情形下，Lieb [22] 证明了最佳常数可显式表示为

$$\mu_s(\mathbb{R}^N) = (N-2)(N-s) \left(\frac{1}{2-s} \omega_{N-1} \frac{\Gamma^2((N-s)/(2-s))}{\Gamma((2N-2s)/(2-s))} \right)^{\frac{2-s}{N-s}},$$

其中 ω_{N-1} 表示 $\mathbb{R}^N$ 中单位球面的体积。该不等式的极小化子集刻画如下：

$$\mathcal{M} = \left\{ U(k,\tau) = k k_0 \left(1 + |\tau x|^{2-s}\right)^{-\frac{N-2}{2-s}} \tau^{\frac{N-2}{2}} : k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\, \tau > 0 \right\}, \tag{1.1}$$

其中 k_0 是确保 $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^s} |U(1,1)|^{2^*(s)} \,\mathrm{d}x = 1$ 的归一化常数。该不等式的稳定性随后由 R˘adulescu、Smets 和 Willem 在 [24] 中证明：

定理 A. 存在一个常数 $L = L(N,s) > 0$，使得对每一个 $u \in D^{1,2}_0(\mathbb{R}^N)$，

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \mu_s(\mathbb{R}^N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \geq L \inf_{v \in \mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

关于泛函不等式稳定性的研究可追溯至 Brezis 和 Lieb 的工作 [4]，，而 Bianchi 和 Egnell 给出了首个明确结果 [2]。近年来，人们对各种泛函不等式和几何不等式的定量稳定性日益关注。突出的例子包括等周不等式 [1, 10, 12]，、Brunn-Minkowski 不等式 [14, 16]，、Sobolev 型不等式[8, 9, 13, 15, 17, 18, 23, 26, 28]，、Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式 [3, 6]，以及 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式 [5, 7, 21, 27, 31]。

1.2 双变量 ***Hardy-Sobolev*** 不等式及其稳定性

尽管单变量不等式的稳定性已得到广泛研究，但相应的双变量情形理论仍相对欠缺。该方向的一项基础性成果是双变量不等式（1.3），该不等式及其最佳常数、极值函数和正则性性质的分析，见第二和第三作者的论文 [30] 以及第二作者的博士论文[29,第 7 节。6]。

我们首先建立如下双变量 Hardy-Sobolev 不等式：

定理 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为开区域，$s \in (0,\ 2)$ $\kappa \in \mathbb{R}$，$\alpha > 1$，$\beta > 1$，$\alpha+\beta = 2^*(s)$，则存在 $C = C(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ \kappa,\ N,\ s) > 0$ 使得对每一个 $(u,\ v) \in \mathscr{D}(\Omega)$，成立

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\\ &\geq C\left(\int_\Omega \left(\lambda\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} + \mu\frac{|v|^{2^*(s)}}{|x|^s} + 2^*(s)\kappa\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Here

$$\mathscr{D}(\Omega) := D_0^{1,2}(\Omega) \times D_0^{1,2}(\Omega).$$

我们首先确定（1.3）的最佳常数，并刻画其极小化子。定义 e

$$\begin{aligned}&S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)\\ &:= \inf_{(u,v)\in\mathscr{D}(\Omega)\setminus\{(0,0)\}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \left(\lambda\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} + \mu\frac{|v|^{2^*(s)}}{|x|^s} + 2^*(s)\kappa\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

定理 1.2. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$，$0 < s < 2$，$\alpha > 1$，$\beta > 1$，$\alpha+\beta = 2^*(s)$ 中的开区域。

- 若 $\kappa \leq 0$，则 $S_{\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu}(\Omega) = (\max\{\lambda,\mu\})^{-2/2^*(s)}\mu_s(\Omega)$，且只有半平凡对能够取到该值：

$$\begin{cases}(\phi, 0), & \text{if } \lambda > \mu;\\ (0,\phi), & \text{if } \lambda < \mu;\\ (0,\phi)\ or\ (\phi,0), & \text{if } \lambda = \mu;\end{cases}$$

  其中 ϕ 是 $\mu_s(\Omega)$的一个极值函数。

- 若 $\kappa > 0$，则 $S_{\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu}(\Omega) = \inf_{t\in(0,\ \infty)} g(t)\mu_s(\Omega)$，其中

$$g(t) = \frac{1+t^2}{\left(\lambda + \mu t^{2^*(s)} + 2^*(s)\kappa t^\beta\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}.$$

  若 $(\phi,\psi) \subset \mathscr{D}(\Omega)\setminus\{(0,\ 0)\}$ 是 $S_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}(\Omega)$ 的极值函数，则 $|\psi| = |t_0\phi|$，其中$t_0 \in [0,\infty]$ 满足 $g(t_0) = \inf_{t\in(0,+\infty)} g(t)$，且 ϕ 是 $\mu_s(\Omega)$ 的极值函数（若 $t_0 = \infty$，则 $(\phi,\psi) = (0,\psi)$，且 ψ 是 $\mu_s(\Omega)$ 的极值函数）。

定义 g 的极小值点集为

$$\mathcal{S} := \left\{ t_0 \in [0,\infty] : g(t_0) = \inf_{t\in(0,\infty)} g(t) \right\} \tag{1.5}$$

那么对于$\Omega = \mathbb{R}^N$ 满足 $\kappa > 0$的情形，(1.3) 的极小值点集可刻画为

$$\mathcal{M}' = \{(U(k,\tau), \pm t_0 U(k,\tau)) : k \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \tau > 0,\ t_0 \in \mathcal{S}\} \tag{1.6}$$

其中 $U(k,\ \tau)$按照(1.1)中的定义给出；当 $t_0 = \infty$时，该表达式表示$(0,\ U(k,\ \tau))$。

接下来，我们聚焦于情形 $\Omega = \mathbb{R}^N$、 $\kappa > 0$ ，以建立该双变量 Hardy-Sobolev 不等式的尖锐稳定性结果。定义亏损函数 $\delta(u)$ 和 $\delta(u,\ v)$ 如下：

$$\delta(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \mu_s(\mathbb{R}^N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \tag{1.7}$$

对于 $u \in D^{1,\ 2}(\mathbb{R}^N)$，以及

$$\begin{aligned} \delta(u,v) := & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \\ & - S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\lambda \frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s} + \mu \frac{|v|^{2^*(s)}}{|x|^s} + 2^*(s)\kappa \frac{|u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^s} \right) \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \end{aligned} \tag{1.8}$$

对于 $(u,\ v) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$。令 $\|\cdot\|_r$表示 $1 \le r < \infty$ 的 $L^r(\mathbb{R}^N)$-范数，并定义 g 的退化极小化子集为

$$\tilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S} \cap \left(\{ t \in [0,\infty) : g''(t) = 0 \} \cup \{ \infty : \tilde{g}''(0) = 0 \} \right),$$

其中， $\tilde{g}$ 刻画了 g 在 ∞处的性质：

$$\tilde{g}(t) := g(1/t) = \frac{1+t^2}{(\mu + \lambda t^p + \kappa p t^\alpha)^{2/p}}. \tag{1.9}$$

于是我们得到以下稳定性定理：

定理 1.3. 假设 $s \in (0,2)$， $\kappa > 0$， $\alpha > 1$， $\beta > 1$和 $\alpha + \beta = 2^*(s)$。若 $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \neq (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$，则存在常数 $C = C(\lambda, \mu, \kappa, \alpha, \beta, N, s) > 0$，使得对于所有非负函数 $(u, v) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \setminus \{(0, 0)\}$，

$$\inf_{(U_0,V_0)\in\mathcal{M}'} \frac{\|\nabla(u-U_0)\|_2^2 + \|\nabla(v-V_0)\|_2^2}{\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2} \le C \left(\frac{\delta(u,v)}{\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2} \right)^\iota,$$

其中指数 ι 由下式确定：

(I) $\iota = 1$ 若 $\mathcal{S} = \emptyset$，即 g 的所有极小化子均非退化；

(II) $\iota = 1/2$ 若 $\mathcal{S} \neq \emptyset$，即 g 存在一个退化的极小值点。

更准确地说，**(II)** 包括以下四种情形： *[表 1 见此处]*

此外，指数 ι 在所有情形下都是尖锐的（参见注记 5.1）。

定理 1.3 中导致 $\iota = 1/2$的各情形汇总表

Case	参数条件	$\mathcal{S}$	$\tilde{\mathcal{S}}$
(II.1)	$\alpha,\ \beta \in (1,\ 2)$, $\lambda = \frac{2\kappa\alpha}{p-2}\left(\frac{2-\beta}{2-\alpha}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}$, $\mu = \frac{2\kappa\beta}{p-2}\left(\frac{2-\beta}{2-\alpha}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\left\{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\right\}$	$\left\{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\right\}$
(II.2)	$\beta = 2 \le \alpha,\ \mu < \lambda = 2\kappa$	$\{0\}$	$\{0\}$
(II.3)	$\alpha = 2 \le \beta,\ \lambda < \mu = 2\kappa$	$\{\infty\}$	$\{\infty\}$
(II.4)	$\min\{\alpha,\beta\} = 2 < \max\{\alpha,\beta\}$, $\lambda = \mu = 2\kappa$	$\{0,\infty\}$	$\{0\}$, 若 $\beta = 2$, $\{\infty\}$, 若 $\alpha = 2$

最后，通过一种变换，我们推导出一类双变量 Hardy-Sobolev 不等式的尖锐稳定性：

推论 1.1. 假设 $\ell \in (0,1)$ $s \in (0,\ 2)$，$\kappa > 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\alpha + \beta = 2^*(s)$。那么对于任意 $u, v \in \mathscr{U}$，有

$$\mathscr{U} := \{u \in L^{2^*(s)}(\mathbb{R}^N, |x|^{-(N-s)(1-\ell)-s}\,\mathrm{d}x) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N, |x|^{-(N-2)(1-\ell)}\,\mathrm{d}x)\},$$

成立

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(1-\ell)}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x \\
&\ge S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\mathbb{R}^N)\cdot \ell^{\frac{2}{2^*(s)}+1} \\
&\quad\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-s)(1-\ell)-s}(\lambda|u|^{2^*(s)} + \mu|v|^{2^*(s)} + 2^*(s)\kappa|u|^{\alpha}|v|^{\beta})\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(s)}},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

且等式成立当且仅当 $(u, v) = (w, t_0 w)$，其中 $g(t_0) = \inf_{t\in(0,\infty)} g(t)$ 且 $w \in \mathcal{M}_\ell$（$(u, v) = (0, w)$ 若 $t_0 = \infty$）：

$$\mathcal{M}_\ell := \{c(1 + |\lambda x|^{(2-s)\ell})^{-\frac{N-2}{2-s}}\lambda^{\frac{(N-2)\ell}{2}} : \lambda > 0,\ c \in \mathbb{R}\}.$$

记 $\mathcal{M}_\ell'$ 为 *(1.10)* 的极小值点集，$\delta_\ell(u, v)$ 为不等式 *(1.10)* 的亏量，则存在 $C = C(\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \mu, s, N, \ell) > 0$，使得对于任意非负的 $u, v \in \mathscr{U}$，有

$$\begin{aligned}
&\inf_{(U_0,V_0)\in\mathcal{M}_\ell'} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(1-\ell)}(|\nabla(u-U_0)|^2 + |\nabla(v-V_0)|^2)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x} \\
&\qquad\qquad \le C\left(\frac{\delta_\ell(u,v)}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x}\right)^{\iota},
\end{aligned}$$

其中，若出现 **(I)**，则 $\iota = 1$；若出现 **(II)**，则 $\iota = 1/2$。

1.3 论文结构

在第2节中，我们给出定理 1.2 的证明。然后，在第 3节中，我们陈述并证明稳定性证明所需的一些基本工具，包括 Hardy-Sobolev 不等式的谱分析、$g(t)$ 的性质以及一些初等不等式。在第 4节中，我们陈述定性稳定性结果。定理1.3 和推论 1.1 的证明将在第5节中给出。

2 最佳常数与极小化子

从现在起，为简便起见，我们记作 $p = 2^*(s) := \frac{2(N-s)}{N-2}$。由 $N \geq 3$和 $s < 2$，我们总有 $p > 2$。

对于 $(u, v) \in \mathscr{D}(\Omega)\backslash\{(0,0)\}$，定义

$$G(u,v) := \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^s}\left(\lambda|u|^p + \mu|v|^p + \kappa p|u|^\alpha|v|^\beta\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}},$$

则 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega) = \inf_{(u,v)\in\mathscr{D}(\Omega)\backslash\{(0,0)\}} G(u,v)$。

定理 1.2 的证明。 若 $\kappa \leq 0$，对于任意 $(u, v) \in \mathscr{D}(\Omega)\backslash\{(0,0)\}$，

$$\begin{aligned}
G(u,v) &\geq \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^s}\left(\lambda|u|^p + \mu|v|^p\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \\
&\geq (\max\{\lambda,\mu\})^{-2/p}\frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^s}\left(|u|^p + |v|^p\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \\
&\geq (\max\{\lambda,\mu\})^{-2/p}\mu_s(\Omega)\frac{\left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\right)^{2/p} + \left(\int_\Omega \frac{|v|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_\Omega \left(\frac{|u|^p}{|x|^s} + \frac{|v|^p}{|x|^s}\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \\
&\geq (\max\{\lambda,\mu\})^{-2/p}\mu_s(\Omega).
\end{aligned}$$

最后一步中，我们使用以下初等不等式：对于 $0 < \iota < 1$，

$$x^\iota + y^\iota \geq (x+y)^\iota, \quad \forall\, x, y \geq 0,$$

且当且仅当 x, y 其中之一为零时，等式成立。对 $G(u,v)$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)\backslash\{(0,0)\}$ 上取下确界，可得 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega) \geq (\max\{\lambda,\mu\})^{-2/p}\mu_s(\Omega)$。由于

$$\inf_{u\in D_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}} G(u,0) = \lambda^{-2/p}\inf_{u\in D_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^s}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}} = \lambda^{-2/p}\mu_s(\Omega),$$

$$\inf_{v\in D_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}} G(0,v) = \mu^{-2/p}\inf_{v\in D_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^s}|v|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}} = \mu^{-2/p}\mu_s(\Omega),$$

我们推导得出 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega) = (\max\{\lambda,\mu\})^{-2/p}\mu_s(\Omega)$。此外，根据证明过程，$S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)$ 仅在 $\lambda > \mu$ 时由 $(\phi,0)$ 取得（若 $\lambda < \mu$，则由 $(0,\phi)$ 取得），其中 ϕ 是 $\mu_s(\Omega)$ 的极值函数。

若 $\kappa > 0$。对于任意 $u \neq 0$，$v \neq 0$ 和 $t \geq 0$，我们有

$$G(u,tv) = \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 t^2\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^s}\left(\lambda|u|^p + \mu|v|^p t^p + \kappa p|u|^\alpha|v|^\beta t^\beta\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \tag{2.1}$$

因此，

$$G(u,tu)=\frac{1+t^2}{\left(\lambda+\mu t^p+\kappa p t^\beta\right)^{2/p}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}$$
$$=g(t)\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\frac{1}{|x|^s}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}.$$

注意到

$$\lim_{t\to\infty}G(u,tu)=g(\infty)\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}=G(0,u).$$

因此，

$$\begin{aligned}S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)&=\inf_{(u,v)\in\mathscr{D}(\Omega)\setminus\{(0,0)\}}G(u,v)\\&\le\inf_{u\in D_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}}\inf_{t\in(0,+\infty)}G(u,tu)\\&=\inf_{t\in(0,+\infty)}g(t)\inf_{u\in D_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega\frac{1}{|x|^s}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}\\&=\inf_{t\in(0,+\infty)}g(t)\mu_s(\Omega).\end{aligned}\tag{2.2}$$

为证明 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)=\inf_{t\in(0,+\infty)}g(t)\mu_s(\Omega)$，我们只需证明反向不等式。设 $\{(u_n,v_n)\}$ 是 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)$ 的一个极小化序列。由于对于所有 $t>0$，$G(u,v)=G(tu,tv)$，不失一般性，我们可以假设

$$\int_\Omega\frac{1}{|x|^s}\left(|u_n|^p+|v_n|^p\right)\mathrm{d}x=1,\quad\forall\,n\ge1,$$

and

$$G(u_n,v_n)=S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)+o(1).$$

情形 1. $\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega\frac{|u_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x=0$. 由于 $\{v_n\}$ 在 $L^p(\Omega,\frac{\mathrm{d}x}{|x|^s})$ 中有界，根据 Hölder 不等式，取一个子列后，

$$\int_\Omega\left(\lambda\frac{|u_n|^p}{|x|^s}+\mu\frac{|v_n|^p}{|x|^s}+\kappa p\frac{|u_n|^\alpha|v_n|^\beta}{|x|^s}\right)\mathrm{d}x=\mu\int_\Omega\frac{|v_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x+o(1)=\mu+o(1).$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}G(u_n,v_n)\ge\lim_{n\to\infty}G(0,v_n)$$

并且 $(0,v_n)$ 也是 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)$ 的一个极小化序列。因此，

$$S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)=\mu^{-2/p}\mu_s(\Omega)=g(\infty)\mu_s(\Omega)\ge\inf_{t\in(0,+\infty)}g(t)\mu_s(\Omega).$$

情形 2. $\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega\frac{|v_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x=0$. 同理，我们有

$$S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)=\lambda^{-2/p}\mu_s(\Omega)=g(0)\mu_s(\Omega)\ge\inf_{t\in(0,+\infty)}g(t)\mu_s(\Omega).$$

情形 3. 取一个子列，使得 $\exists \delta > 0$ s.t.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x = \delta > 0, \quad \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{|v_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x = 1-\delta > 0.$$

设 $t_n > 0$ 为

$$\int_\Omega \frac{|v_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|t_n u_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x,$$

则 $\{t_n\}$ 有界且远离0。至多取一子列，我们可以假设$t_n \to t_0 = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}$。设 $w_n = \frac{v_n}{t_n}$，则

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|w_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x$$

并由杨氏不等式,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|u_n|^\alpha |w_n|^\beta}{|x|^s}\,\mathrm{d}x &\le \frac{\alpha}{p}\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x + \frac{\beta}{p}\int_\Omega \frac{|w_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|w_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}G(u_n, v_n) &= G(u_n, t_n w_n) \\ &= \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \left(\lambda\frac{|u_n|^p}{|x|^s} + \mu t_n^p \frac{|w_n|^p}{|x|^s} + \kappa p t_n^\beta \frac{|u_n|^\alpha |w_n|^\beta}{|x|^s}\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \\ &\quad + \frac{\int_\Omega t_n^2 |\nabla w_n|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \left(\lambda\frac{|u_n|^p}{|x|^s} + \mu t_n^p \frac{|w_n|^p}{|x|^s} + \kappa p t_n^\beta \frac{|u_n|^\alpha |w_n|^\beta}{|x|^s}\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \\ &\ge \frac{1}{\left(\lambda + \mu t_n^p + \kappa p t_n^\beta\right)^{2/p}} \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{|u_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \\ &\quad + \frac{t_n^2}{\left(\lambda + \mu t_n^p + \kappa p t_n^\beta\right)^{2/p}} \frac{\int_\Omega |\nabla w_n|^2\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{|w_n|^p}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}} \\ &\ge \frac{1}{\left(\lambda + \mu t_n^p + \kappa p t_n^\beta\right)^{2/p}}\mu_s(\Omega) + \frac{t_n^2}{\left(\lambda + \mu t_n^p + \kappa p t_n^\beta\right)^{2/p}}\mu_s(\Omega) \\ &= g(t_n)\mu_s(\Omega). \end{aligned} \tag{2.3}$$

令 $n \to +\infty$，我们得到

$$S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega) \ge g(t_0)\mu_s(\Omega) \ge \inf_{t\in(0,+\infty)} g(t)\mu_s(\Omega).$$

由此证明了$S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega) = \inf_{t\in(0,+\infty)} g(t)\mu_s(\Omega)$。

若 (ϕ, ψ) 是 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(\Omega)$ 的极值函数，令 $(u_n, v_n) \equiv (\phi, \psi)$，则 (2.3) 中的每一步均取等式且 $t_0 \in \mathcal{S}$。因此 $|\psi| = |t_0\phi|$ 与 ϕ 是 $\mu_s(\Omega)$ 的极值函数（若 $t_0 = \infty$，则 $\phi = 0$ 与 ψ 是极值函数）。特别地，若 $\Omega = \mathbb{R}^N$，则极小化子不变号，从而 $\psi = \pm t_0\phi$。 □

3 稳定性证明的准备工作

此后，若无歧义，我们省略 $\mathbb{R}^N$。对于 $A, B \in \mathbb{R}$，若存在仅依赖于 $\alpha, \beta, \lambda, \mu, N, s$ 的常数 $C > 0$，使得 $A \le CB$，则称 $A \lesssim B$。若 $A \lesssim B$ 与 $B \lesssim A$同时成立，则称 $A \approx B$。

3.1 Hardy-Sobolev 不等式的谱分析

对于 $V \in \mathcal{M}\backslash\{0\}$，考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |x|^{-s} V^{p-2} u & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{3.1}$$

引理 3.1。 *(3.1)* 的前两个特征值(3.1) 为 $\Lambda_1 = \mu_s$和 $\Lambda_2 = (p-1)\mu_s$。特征子空间分别由 V 和 $\partial_\lambda V$张成。

其证明见 [25, 命题 4。6]。

3.2 $g(t)$ 的性质

设 $\mathcal{S}$ 由（1.5）定义。接下来，我们构造任意 $t_0 \in \mathcal{S}$的等式与不等式。

命题 3.1. 若 $t_0 \in \mathcal{S}\backslash\{0, \infty\}$，则其满足

$$\lambda - \mu t_0^{p-2} + \kappa\alpha t_0^{\beta} - \kappa\beta t_0^{\beta-2} = 0, \tag{3.2}$$

and

$$\alpha(2-\alpha)\kappa t_0^{\beta} + \kappa t_0^{\beta-2}\alpha\beta \ge (p-2)\lambda. \tag{3.3}$$

我们还可以得到

$$\lambda + \mu t_0^{p} + \kappa p t_0^{\beta} = (1+t_0^2)(\lambda + \kappa\alpha t_0^{\beta}). \tag{3.4}$$

此外， t_0 是退化的，即（3.3）的等式成立，当且仅当下列情形之一发生：

(i) $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$. *And* $g(t) \equiv \text{const.}$ *in such a case.*

(ii) α，$\beta \in$（1，2）以及

$$t_0 = \sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}, \quad \lambda = \frac{2\kappa\alpha}{p-2} t_0^{\beta-2}, \quad \mu = \frac{2\kappa\beta}{p-2} t_0^{2-\alpha}.$$

特别地， $g^{(i)}(t_0) = 0$ 对于 $i = 1$、2、3 以及 $g^{(4)}(t_0) > 0$ 在这种情形下。

证明。 我们计算 g的导数：

$$g'(t) = \frac{2t(\lambda + \mu t^p + \kappa p t^{\beta}) - 2(1+t^2)(\mu t^{p-1} + \kappa\beta t^{\beta-1})}{(\lambda + \mu t^p + \kappa p t^{\beta})^{2/p+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2t\lambda + 2\kappa\alpha t^{\beta+1} - 2\mu t^{p-1} - 2\kappa\beta t^{\beta-1}}{(\lambda + \mu t^p + \kappa p t^\beta)^{2/p+1}} \\
&= \frac{2t}{(\lambda + \mu t^p + \kappa p t^\beta)^{2/p+1}} (\lambda - \mu t^{p-2} + \kappa\alpha t^\beta - \kappa\beta t^{\beta-2}).
\end{aligned}
$$

由于 $t_0 \in (0, \infty)$ 是 g 的极小值点，因此有 $g'(t_0) = 0$，并推得 (3.2)。因此 (3.4) 成立：

$$
\lambda + \mu t_0^p + \kappa p t_0^\beta = \lambda + \kappa p t_0^\beta + t_0^2(\lambda + \kappa\alpha t_0^\beta - \kappa\beta t_0^{\beta-2}) = (1 + t_0^2)(\lambda + \kappa\alpha t_0^\beta).
$$

接下来，我们计算 $g''(t)$。设 $h(t) = \frac{2t}{(\lambda + \mu t^p + \kappa p t^\beta)^{2/p+1}}$，且 $r(t) = \lambda - \mu t^{p-2} + \kappa\alpha t^\beta - \kappa\beta t^{\beta-2}$，则

$$
g''(t) = h'(t)r(t) + h(t)r'(t). \tag{3.5}
$$

由于 h 在 $(0, \infty)$ 上光滑，且 $r(t_0) = 0$，$h(t_0) > 0$，由 $g''(t_0) \geq 0$ 这一事实，并将 μ 代入（3.2），可得（3.3）：

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq g''(t_0) = h(t_0)r'(t_0) = h(t_0)t^{-1}(-(p-2)\mu t_0^{p-2} + \kappa\alpha\beta t_0^\beta - \kappa\beta(\beta-2)t_0^{\beta-2}) \\
\Longrightarrow\ & 0 \leq -(p-2)\mu t_0^{p-2} + \kappa\alpha\beta t_0^\beta - \kappa\beta(\beta-2)t_0^{\beta-2} \\
& = -(p-2)\lambda + \alpha(2-\alpha)\kappa t_0^\beta + \alpha\beta\kappa t_0^{\beta-2}.
\end{aligned}
$$

剩下唯一要弄清楚的是 $g''(t_0) = 0$ 何时成立。事实上，若 $g''(t_0) = 0$，则由泰勒展开，

$$
g(t) = g(t_0) + \frac{1}{6}g^{(3)}(t_0)(t - t_0)^3 + \frac{1}{24}g^{(4)}(t + \theta(t - t_0))(t - t_0)^4.
$$

由于 t_0 是 $g(t)$ 的极小值点，且 $t_0 \in (0, +\infty)$ 是一个内点，因此必有$g^{(3)}(t_0) = 0$ 且 $g^{(4)}(t_0) \geq 0$。注意到 $r(t_0) = 0$ 且 $h(t_0) > 0$，（3.5）表明，当 $g''(t_0) = 0$ 时，$r'(t_0) = 0$。将 λ, μ 代入（3.2）、（3.3），得到

$$
\begin{aligned}
& 0 = g^{(3)}(t_0) = h''(t_0)r(t_0) + 2h'(t_0)r'(t_0) + h(t_0)r''(t_0) = h(t_0)r''(t_0) \\
\Longrightarrow\ & 0 = t_0^2 r''(t_0) \\
& = -(p-2)(p-3)\mu t^{p-2} + \kappa\alpha\beta(\beta-1)t_0^\beta - \kappa\beta(\beta-2)(\beta-3)t_0^{\beta-2} \\
& = -(p-2)(p-3)\lambda - (p-2)(p-3)\kappa\alpha t_0^\beta + (p-2)(p-3)\kappa\beta t_0^{\beta-2} \\
& \quad + \beta(\beta-1)\kappa\alpha t_0^\beta - (\beta-2)(\beta-3)\kappa\beta t_0^{\beta-2} \\
& = -(p-3)((2-\alpha)\kappa\alpha t_0^\beta + \alpha\kappa\beta t_0^{\beta-2}) \\
& \quad - (p-2)(p-3)\kappa\alpha t_0^\beta + (p-2)(p-3)\kappa\beta t_0^{\beta-2} \\
& \quad + \beta(\beta-1)\kappa\alpha t_0^\beta - (\beta-2)(\beta-3)\kappa\beta t_0^{\beta-2} \\
& = \beta(2-\alpha)\kappa\alpha t_0^\beta + (\beta-2)\alpha\kappa\beta t_0^{\beta-2}.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
(2-\alpha)t_0^2 + (\beta-2) = 0. \tag{3.6}
$$

将 (3.6) 代入 (3.3，得到

$$
(p-2)\lambda = \kappa\alpha t_0^{\beta-2}((2-\alpha)t_0^2 + \beta) = 2\kappa\alpha t_0^{\beta-2}. \tag{3.7}
$$

若 $\alpha = 2$，则 (3.6) 给出 $\beta = 2$ 且 $p = 4$。在这种情形下，(3.7) 给出 $\lambda = 2\kappa$。此外，由 (3.2)，我们得到 $\lambda - \mu t_0^2 + 2\kappa t_0^2 - 2\kappa = 0$，因此 $(2\kappa - \mu)t_0^2 = 0$。由于 $t_0 > 0$，我们也有 $\mu = 2\kappa$。因此，$g(t) \equiv (2\kappa)^{-2/p}$ 为常数。

否则，$\alpha \neq 2$由 (3.6) 可知，$\beta \neq 2$ 或者。于是 (3.6) 给出

$$t_0 = \sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}. \tag{3.8}$$

由 (3.7)，可得

$$\lambda = \frac{2\kappa\alpha}{p-2} t_0^{\beta-2} = \frac{2\kappa\alpha}{p-2} \left(\frac{2-\beta}{2-\alpha}\right)^{\frac{\beta-2}{2}}. \tag{3.9}$$

我们指出，直接计算可得 $2\alpha - (p-2)\beta + (p-2)\alpha t_0^2 = 2\beta t_0^2$，也就是说

$$2\alpha t_0^{-2} - (p-2)\beta t_0^{-2} + (p-2)\alpha = 2\beta. \tag{3.10}$$

因此，由 (3.2) 和 (3.10)，

$$\begin{aligned}
\mu t_0^{p-2} &= \lambda + \kappa\alpha t_0^{\beta} - \kappa\beta t_0^{\beta-2} \\
&= \frac{2\kappa\alpha}{p-2} t_0^{\beta-2} + \kappa\alpha t_0^{\beta} - \kappa\beta t_0^{\beta-2} \\
&= \frac{\kappa t_0^{\beta}}{p-2} \left[2\alpha t_0^{-2} - (p-2)\beta t_0^{-2} + (p-2)\alpha\right] \\
&= \frac{2\kappa\beta t_0^{\beta}}{p-2},
\end{aligned}$$

由此可得

$$\mu = \frac{2\kappa\beta}{p-2} t_0^{2-\alpha} = \frac{2\kappa\beta}{p-2} \left(\frac{2-\alpha}{2-\beta}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}. \tag{3.11}$$

现在，我们可以推导出

$$\begin{aligned}
& t_0^3 r^{(3)}(t_0) \\
&= -(p-2)(p-3)(p-4)\mu t_0^{p-2} \\
&\quad + \kappa\alpha\beta(\beta-1)(\beta-2)t_0^{\beta} - \kappa\beta(\beta-2)(\beta-3)(\beta-4)t_0^{\beta-2} \\
&= -(p-3)(p-4)2\kappa\beta t_0^{\beta} + \kappa\alpha\beta(\beta-1)(\beta-2)t_0^{\beta} \\
&\quad - \kappa\beta(\beta-2)(\beta-3)(\beta-4)t_0^{\beta-2} \\
&= \kappa\beta t_0^{\beta}\left[-2(p-3)(p-4) + \alpha(\beta-1)(\beta-2) - (\beta-2)(\beta-3)(\beta-4)t_0^{-2}\right] \\
&= \kappa\beta t_0^{\beta}\left[-2(\alpha+\beta-3)(\alpha+\beta-4) + \alpha(\beta-1)(\beta-2) + (2-\alpha)(\beta-3)(\beta-4)\right] \\
&= 2\kappa\alpha\beta t_0^{\beta}(2-\alpha).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

回顾 $g'(t_0) = g''(t_0) = g'''(t_0) = 0$ 以及 $h(t_0) > 0$，我们得到 $r(t_0) = r'(t_0) = r''(t_0) = 0$。因此

$$\begin{aligned}
0 \le g^{(4)}(t_0) &= h^{(3)}(t_0)r(t_0) + 3h''(t_0)r'(t_0) + 3h'(t_0)r''(t_0) + h(t_0)r^{(3)}(t_0) \\
&= h(t_0)r^{(3)}(t_0).
\end{aligned}$$

结合式（3.12），可得 $2\kappa\alpha\beta t_0^{\beta}(2-\alpha) \ge 0$。由于 $\alpha \neq 2,\alpha$我们看到 $\alpha < 2$。根据式（3.8），还可得 $\beta < 2$。也就是说，$2\kappa\alpha\beta h\ t_0\ t_0^{\beta-3}\ 2-\alpha\ > 0$ ，$\beta \in$ (1,2) 且 $g^{(4)}(t_0) = h(t_0)r^{(3)}(t_0)$ () () 在这种情形下。 □

命题 **命题 3.2**。假设 $0 \in \mathcal{S}$。则 $\beta \geq 2$ 和 $\lambda \geq \mu$。此外，以下结论成立：

1. $g''(0) > 0$ 当且仅当要么

   (a) $\beta > 2$，或 **(b)** $\beta = 2$ 且 $\lambda > 2\kappa$。

2. $g''(0) = 0$ 当且仅当 $\beta = 2$ 且 $\lambda = 2\kappa$。在此情形下，$g^{(3)}(0) = 0$，且 $g^{(4)}(0) > 0$当且仅当要么

   (a) $\alpha > 2$，或 **(b)** $\alpha = 2$ 且 $\mu < \lambda$。

3. $g''(0) = g^{(4)}(0) = 0$仅当$(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$时出现，在此情形下$g(t) \equiv (2\kappa)^{-2/p}$为常数。

由对称性可知，若 $t_0 = \infty$ 是 $g(t)$的极小值点，则交换 α 与 β、以及 λ 与 μ后，$\tilde{g}''(0)$和 $\tilde{g}^{(4)}(0)$ 也有类似结论。（关于(1.9) 中 $\tilde{g}(t)$的定义，参见该式。）

证明。由于 $t_0 = 0$ 使得 $g(t)$ 取极小值，因此有 $g(0) \leq g(\infty)$，这意味着 $\lambda \geq \mu$。定义

$$\bar{h}(t) = \frac{2}{(\lambda + \mu t^p + \kappa p t^\beta)^{2/p+1}}, \quad \bar{r}(t) = \lambda t - \mu t^{p-1} + \kappa\alpha t^{\beta+1} - \kappa\beta t^{\beta-1},$$

使得 $g'(t) = h(t)\bar{r}(t)$。显然，$g'(0) = 0$。为计算 $g''(0)$，注意到：

$$\begin{aligned} g''(0) &= \bar{h}(0)\bar{r}'(0) \\ &= 2\lambda^{-2/p-1} \frac{d}{dt}\left[\lambda - \mu(p-1)t^{p-2} + \kappa\alpha(\beta+1)t^\beta - \kappa\beta(\beta-1)t^{\beta-2}\right]\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

在 $t = 0$ 处计算导数，得到：

$$g''(0) = \begin{cases} -\infty, & \text{if } \beta \in (1,2), \\ 2\lambda^{-2/p}, & \text{if } \beta > 2, \\ 2\lambda^{-2/p-1}(\lambda - 2\kappa), & \text{if } \beta = 2. \end{cases}$$

由于 $g(0)$ 是一个极小值点，故 $g''(0) \geq 0$。因此，要么 $\beta > 2$，要么 $\beta = 2$且 $\lambda \geq 2\kappa$。具体而言：

- $g''(0) > 0$ 当且仅当 $\beta > 2$ 或（$\beta = 2$ 且 $\lambda > 2\kappa$）。
- $g''(0) = 0$ 当且仅当 $\beta = 2$ 且 $\lambda = 2\kappa$。

现在假设 $\beta = 2$ 和 $\lambda = 2\kappa$。那么 $\bar{r}(t) = -\mu t^{\alpha+1} + \kappa\alpha t^3$。由于 $\bar{r}''(0) = 0$，我们有 $g^{(3)}(0) = \bar{h}(0)\bar{r}''(0) = 0$。对于四阶导数：

$$\begin{aligned} g^{(4)}(0) &= \bar{h}(0)\bar{r}^{(3)}(0) \\ &= 2\lambda^{-2/p-1} \frac{d^3}{dt^3}\left[-\mu t^{\alpha+1} + \kappa\alpha t^3\right]\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\infty, & \text{if } \alpha \in (1,2), \\ 6\alpha\lambda^{-2/p}, & \text{if } \alpha > 2, \\ 12\lambda^{-2/p-1}(\lambda-\mu), & \text{if } \alpha = 2. \end{cases}$$

同样，由于 $g(0)$ 是一个极小值点，$g^{(4)}(0) \geq 0$。因此：

- $g_{(4)}(0) > 0$ 当且仅当 $\alpha > 2$ 或（$\alpha = 2$ 且 $\mu < \lambda$）。
- $g_{(4)}(0) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 2$ 且 $\mu = \lambda$。在此情形下，$(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$，并且 $g(t) \equiv (2\kappa)^{-2/p}$ 为常数。 □

命题 3.3。 </style}集合 是有限的，除非处于特殊情形 $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$。˜此外，若 $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \neq (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$ 且 $\mathcal{S} \neq \emptyset$，则 $\mathcal{S}$ 是单元素集或双元素集。更确切地说，这恰好发生在以下四种情形中：

(i) $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}} \right\}$ *with* $\alpha, \beta \in (1,2)$, $\lambda = \frac{2\kappa\alpha}{p-2} \left(\frac{2-\beta}{2-\alpha} \right)^{\frac{\beta}{2}-1}$, $\mu = \frac{2\kappa\beta}{p-2} \left(\frac{2-\beta}{2-\alpha} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$;

(ii) $\mathcal{S} = \{0\}$ 满足 $\beta = 2 \leq \alpha$, $\mu < \lambda = 2\kappa$; **(iii)** $\mathcal{S} = \{\infty\}$ 满足 $\alpha = 2 \leq \beta$, $\lambda < \mu = 2\kappa$; **(iv)** $\mathcal{S} = \{0, \infty\}$ 满足 最小值 $\{\alpha, \beta\} = 2 <$ 最大值 $\{\alpha, \beta\}$, $\lambda = \mu = 2\kappa$。

证明。 极小值点集满足以下包含关系：

$$\mathcal{S} \subset \{t \in (0,\infty) : g'(t) = 0\} \cup \{0, \infty\}.$$

由于 $g'(t) = 0$ 等价于

$$\lambda - \mu t^{p-2} + \kappa\alpha t^{\beta} - \kappa\beta t^{\beta-2} = 0,$$

由此可得

$$\mathcal{S} \subset \left\{ t \in (0,\infty) : \lambda - \mu t^{p-2} + \kappa\alpha t^{\beta} - \kappa\beta t^{\beta-2} = 0 \right\} \cup \{0, \infty\}.$$

定义函数

$$f(t) := \lambda - \mu t^{p-2} + \kappa\alpha t^{\beta} - \kappa\beta t^{\beta-2}.$$

根据 $f(t)$ 是否为常数，我们分两种情形讨论。

情形 1： $f(t)$ **为常数。** 要使 $f(t)$ 为常数，t 的所有幂次项的系数都必须为零。这要求 $\beta - 2 = 0$, $p - 2 = \beta$, $\kappa\alpha = \mu$。这些条件意味着 $(\alpha, \beta, \mu) = (2, 2, 2\kappa)$。在这种情形下，

$$f(t) \equiv \lambda - \kappa\beta = \lambda - 2\kappa.$$

若 $\lambda \neq 2\kappa$，则 $f(t)$ 是非零常数，因此没有零点。因此，$\mathcal{S} \subset \{0, \infty\}$ 是有限的。特殊情形出现在 $\lambda = 2\kappa$ 时，即 $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$。

情形 2： $f(t)$ **不是常数。** 于是，$f(t)$ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的解析函数，因此其零点是孤立的。要证明 $\mathcal{S}$ 有限，只需证明 $f(t)$ 的零点与 0 和 ∞ 都保持正距离。

当 $t \to \infty$**: 时的行为**

- 如果 $\alpha \neq 2$，那么当 $t \to \infty$ 时，主导项要么是 $-\mu t^{p-2}$（如果 $\alpha > 2$），要么是 $\kappa\alpha t^{\beta}$（如果$\alpha < 2$）。在这两种情形下，$|f(t)| \to \infty$。
- 若 $\alpha = 2$ 且 $\kappa\alpha \neq \mu$，主导项为 $(\kappa\alpha - \mu)t^{\beta}$，且 $|f(t)| \to \infty$。
- 若 $\alpha = 2$ 且 $\kappa\alpha = \mu$，则

$$f(t) = \lambda - \kappa\beta t^{\beta-2}.$$

ce $f(t)$ 不是常数，$\beta \neq 2$。那么 $f(t)$ 有一个唯一正零点 $t = \left(\frac{\lambda}{\kappa\beta}\right)^{\beta-}$ $\frac{1}{2}$.

Sin

当 $t \to 0^+$ 时的行为：

- 若 $\beta > 2$，或若 $\beta = 2$ 且 $\lambda \neq 2\kappa$，则 $f(0^+) \neq 0$。由连续性可知，存在 $t^* > 0$，使得当 $t \in (0, t^*)$ 时，$f(t)$ 与 $f(0^+)$ 符号相同。
- 若 $\beta = 2$ 且 $\lambda = 2\kappa$，则 $f(0^+) = 0$。在这种情形下，

$$f(t) = -\mu t^{\alpha} + \kappa\alpha t^2.$$

1

该函数有唯一正零点 $t = \left(\frac{\kappa\alpha}{\mu}\right)^{\alpha-2}$，除非 $\alpha = 2$。如果 $\alpha = 2$，那么 $f(t) = (2\kappa - \mu)t^2$。由于 $f(t)$ 不是常数，$\mu \neq 2\kappa$，因此 $f(t)$ 没有正零点。

在所有子情形中，$f(t)$ 的正零点都与 0 和 ∞ 保持一定距离。由于这些零点都是孤立的，因此只有有限多个。因此，$\mathcal{S}$ 是有限的。

接下来，回想一下 $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cap \big(\{t \in [0, +\infty) : g''(t) = 0\} \cup \{\infty : \tilde{g}''(0) = 0\}\big)$。根据命题 3.1 和 3.2，我们可以推知 $\mathcal{S}$ 是一个单元素集。具体而言：

- 若存在 $t_0 \in \mathcal{S}$ 满足 $0 < t_0 < \infty$，则命题 3.1 推出 α，$\beta \in (1, 2)$ 且 $t_0 = \sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}$。此外，命题 3.2 表明 0，$\infty \notin \tilde{\mathcal{S}}$，因此 $\tilde{\mathcal{S}} = \{t_0\}$。
- 若不存在这样的 t_0，则 $\tilde{\mathcal{S}} \subset \{0, \infty\}$。由命题 3.2，

$$\begin{cases} 0 \in \tilde{\mathcal{S}} \implies (\beta, \lambda) = (2, 2\kappa), \\ \infty \in \tilde{\mathcal{S}} \implies (\alpha, \mu) = (2, 2\kappa). \end{cases}$$

若 $\mathcal{S} = \{0, \infty\}$，则 $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (2, 2, 2\kappa, 2\kappa)$，这就产生了矛盾。因此，$\mathcal{S}$是一个单元素集。

现在我们证明，在每种情形下，$\mathcal{S}$ 本身都是单元素集或双元素集。

情形 1： $\tilde{\mathcal{S}} = \{t_0\}$ **满足** $t_0 = \sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}$。在这种情形下，$\alpha$，$\beta \in (1, 2)$。我们断言 $\mathcal{S} = \{t_0\}$。首先，注意到 0，$\infty \notin \mathcal{S}$：若 $0 \in \mathcal{S}$，则 $\beta \geq 2$，这与 $\beta \in (1, 2)$ 矛盾。类似地，$\infty \notin \mathcal{S}$。

现在，为了导出矛盾，假设存在 $t_1 \in \mathcal{S} \setminus \{t_0\}$ 且满足 $0 < t_1 < \infty$。由于$g'(t_0) = g'(t_1) = 0$，我们有

$$\lambda = \mu t^{p-2} + \kappa\beta t^{\beta-2} - \kappa\alpha t^{\beta} \quad \text{for } t = t_0, t_1. \tag{3.13}$$

定义函数

$$\varphi(t) := \mu t^{p-2} + \kappa\beta t^{\beta-2} - \kappa\alpha t^{\beta}.$$

于是 $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = \lambda$。我们计算其导数：

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (p-2)\mu t^{p-3} + \kappa\beta(\beta-2)t^{\beta-3} - \kappa\alpha\beta t^{\beta-1} \\ &= t^{\beta-3}\left[(p-2)\mu t^{\alpha} + \kappa\beta(\beta-2) - \kappa\alpha\beta t^2\right].\end{aligned}$$

代入 $\mu = \frac{2\kappa\beta}{p-2}t_0^{2-\alpha}$（由命题 3.1-(ii)）：

$$\varphi'(t) = \kappa\beta t^{\beta-3}\left[2t_0^{2-\alpha}t^{\alpha} + (\beta-2) - \alpha t^2\right] =: \kappa\beta t^{\beta-3}Q(t).$$

现在计算

$$Q'(t) = 2\alpha t_0^{2-\alpha}t^{\alpha-1} - 2\alpha t = 2\alpha t\left[(t_0/t)^{2-\alpha} - 1\right].$$

由于 $\alpha < 2$，我们有 $Q'(t) > 0$，当 $t \in$ 属于 $(0, t_0)$ 时；$Q'(t) < 0$，当 $t \in$ 属于 (t_0, ∞) 时。因此，$Q(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上递增，在 (t_0, ∞) 上递减，并在 $t = t_0$ 处达到最大值。注意

$$Q(t_0) = 2t_0^2 + (\beta-2) - \alpha t_0^2 = (2-\alpha)t_0^2 + (\beta-2) = 0,$$

因为 $t_0^2 = \frac{2-\beta}{2-\alpha}$。因此，$Q(t) < 0$，当 $t \neq t_0$ 时成立，从而 $\varphi'(t) < 0$，当 $0 < t \neq t_0$ 时成立。这意味着 $\varphi(t)$ 在 $(0, \infty)$ 上严格递减，这与 $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$ 矛盾。因此，$\mathcal{S} = \{t_0\}$。

~ ~ ~情形 2：$\mathcal{S} = \{0\}$ 或 $\mathcal{S} = \{\infty\}$。根据对称性，我们只考虑 $\mathcal{S} = \{0\}$。于是（β，λ）=（2，2κ），并且 $\alpha > 2$ 或 $\alpha = 2$ 且满足 $\mu < 2\kappa$。我们声称不存在满足 $0 < t_1 < \infty$ 的 $t_1 \in \mathcal{S}$。否则，由于 $\mathcal{S} = \{0\}$，有 $g''(0) = 0$，但 $g''(t_1) > 0$。条件（3.3）给出

$$\alpha(2-\alpha)\kappa t_1^{\beta} + \kappa t_1^{\beta-2}\alpha\beta > (p-2)\lambda.$$

代入 $\beta = 2$、$\lambda = 2\kappa$：

$$\alpha(2-\alpha)\kappa t_1^2 + 2\kappa\alpha > 2\kappa\alpha.$$

化简后得到 $\alpha(2-\alpha)t_1^2 > 0$，这意味着 $\alpha < 2$。这与假设 $\alpha > 2$ 或 $\alpha = 2$ 且满足 $\mu < 2\kappa$ 矛盾。

因此，$\mathcal{S} = \{0\}$ 或 $\{0, \infty\}$。更准确地说，

- 若 $\beta = 2 \leq \alpha$, $\mu < \lambda = 2\kappa$，则 $\mathcal{S} = \{0\}$。
- 若 $\beta = 2 < \alpha$, $\mu = \lambda = 2\kappa$，则 $S = \{0, \infty\}$。

~情形 $\mathcal{S} = \{\infty\}$ 可通过对称性得到类似结论。 □

3.3 一些初等不等式

Lem命题 3.2。对于任意 $m > 0$，存在 C_1，使得对于任意 x、$y \in \mathbb{R}$，均有

$$|x+y|^{\iota} - |x|^{\iota} \leq \iota|x|^{\iota-2}xy + \left(\frac{\iota(\iota-1)}{2} + m\right)|x|^{\iota-2}|y|^2 + C_1|y|^{\iota}, \quad \textit{if } \iota \geq 2;$$

$$|x+y|^{\iota} - |x|^{\iota} \leq \iota|x|^{\iota-2}xy + \left(\frac{\iota(\iota-1)}{2} + m\right)\frac{(|x| + C_1|y|)^{\iota}}{|x|^2 + |y|^2}|y|^2, \quad \textit{if } 1 < \iota < 2.$$

其证明见 [15, 引理 2。4]。

引理 3.3. 对于任意 $m>0$，存在 $C_2>0$，使得对任意 x、y、z、$w\in\mathbb{R}$，若满足 x、$z>0$，则有

(i) 若 α、$\beta\geq 2$，则

$$\begin{aligned}&|x+y|^\alpha|z+w|^\beta-x^\alpha z^\beta\\&\leq \alpha x^{\alpha-1}z^\beta y+\beta x^\alpha z^{\beta-1}w\\&\quad+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)x^{\alpha-2}z^\beta y^2+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)x^\alpha z^{\beta-2}w^2+\alpha\beta x^{\alpha-1}z^{\beta-1}yw\\&\quad+C_2\Big(x^\alpha|w|^\beta+z^\beta|y|^\alpha+x^{\alpha-1}z^{\beta-2}|y||w|^2+x^{\alpha-2}z^{\beta-1}|y|^2|w|+|y|^\alpha|w|^\beta\Big).\end{aligned}\tag{3.14}$$

特别地，若 $\alpha=2$ 且 $\beta>2$，则

$$\begin{aligned}&|x+y|^2|z+w|^\beta-x^2z^\beta\\&\leq 2xz^\beta y+\beta x^2z^{\beta-1}w+z^\beta y^2+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)x^2z^{\beta-2}w^2+2\beta xz^{\beta-1}yw\\&\quad+C_2\Big(x^2|w|^\beta+xz^{\beta-2}|y||w|^2+z^{\beta-1}|y|^2|w|+|y|^2|w|^\beta\Big).\end{aligned}\tag{3.15}$$

若 $\alpha=\beta=2$，则

$$\begin{aligned}&|x+y|^2|z+w|^2-x^2z^2\\&\leq 2xz^2y+2x^2zw+z^2y^2+x^2w^2+4xyzw\\&+C_2(x|y||w|^2+z|y|^2|w|+|y|^2|w|^2).\end{aligned}\tag{3.16}$$

(ii) 若 $1<\alpha<2\leq\beta$，则

$$\begin{aligned}&|x+y|^\alpha|z+w|^\beta-x^\alpha z^\beta\\&\leq \alpha x^{\alpha-1}z^\beta y+\beta x^\alpha z^{\beta-1}w\\&\quad+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)x^{\alpha-2}z^\beta y^2+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)x^\alpha z^{\beta-2}w^2+\alpha\beta x^{\alpha-1}z^{\beta-1}yw\\&\quad+C_2\Big(x^\alpha|w|^\beta+x^{\alpha-1}z^{\beta-2}|y||w|^2+x^{-1}z^{\beta-1}|y|^{\alpha+1}|w|+x^{-1}z^\beta|y|^{\alpha+1}+|y|^\alpha|w|^\beta\Big).\end{aligned}\tag{3.17}$$

特别地，如果 $\beta=2$，那么

$$\begin{aligned}&|x+y|^\alpha|z+w|^2-x^\alpha z^2\\&\leq \alpha x^{\alpha-1}z^2y+2x^\alpha zw\\&\quad+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)x^{\alpha-2}z^2y^2+x^\alpha w^2+2\alpha x^{\alpha-1}zyw\\&\quad+C_2\Big(x^{\alpha-1}|y||w|^2+x^{-1}z^2|y|^{\alpha+1}+x^{-1}z|y|^{\alpha+1}|w|+|y|^\alpha|w|^2\Big).\end{aligned}\tag{3.18}$$

(*iii*) 如果 $\alpha,\beta\in(1,\ 2)$，那么

$$
\begin{aligned}
&|x+y|^{\alpha}|z+w|^{\beta}-x^{\alpha}z^{\beta}\\
&\leq \alpha x^{\alpha-1}z^{\beta}y+\beta x^{\alpha}z^{\beta-1}w\\
&\quad+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)x^{\alpha-2}z^{\beta}y^{2}+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)x^{\alpha}z^{\beta-2}w^{2}+\alpha\beta x^{\alpha-1}z^{\beta-1}yw\\
&\quad+C_{2}\Big(x^{\alpha}z^{-1}|w|^{\beta+1}+x^{-1}z^{\beta}|y|^{\alpha+1}\\
&\qquad+x^{\alpha-1}z^{\frac{\beta-1}{2}}|y||w|^{\frac{\beta+1}{2}}+x^{\frac{\alpha-1}{2}}z^{\beta-1}|y|^{\frac{\alpha+1}{2}}|w|+|y|^{\alpha}|w|^{\beta}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

根据对称性， $\alpha\geq\beta$也成立类似的不等式。

证明。 不失一般性，设 $x=z=1$。对于 *(i)*，只需证明

$$
\begin{aligned}
&|1+y|^{\alpha}|1+w|^{\beta}\\
&\leq 1+\alpha y+\beta w\\
&\quad+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)y^{2}+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)w^{2}+\alpha\beta yw\\
&\quad+C_{2}\Big(|y|^{\alpha}+|w|^{\beta}+|y||w|^{2}+|y|^{2}|w|+|y|^{\alpha}|w|^{\beta}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

根据引理 3.2,

$$
\begin{aligned}
&|1+y|^{\alpha}|1+w|^{\beta}\\
&\leq\left[1+\alpha y+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)|y|^{2}+C_{1}|y|^{\alpha}\right]\\
&\quad\cdot\left[1+\beta w+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)|w|^{2}+C_{1}|w|^{\beta}\right]\\
&=1+\alpha y+\beta w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)|y|^{2}+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)|w|^{2}+\alpha\beta yw\\
&\quad+C\Big(|y|^{\alpha}+|w|^{\beta}+|y||w|^{2}+|y|^{2}|w|+|y|^{\alpha}|w|^{\beta}\\
&\qquad+|y|^{2}|w|^{2}+|y||w|^{\beta}+|y|^{\alpha}|w|+|y|^{2}|w|^{\beta}+|y|^{\alpha}|w|^{2}\Big).
\end{aligned}
$$

由于对于任意 $t\in(0,\alpha]$， $1+|y|^{\alpha}\gtrsim|y|^{t}$，我们可以利用 $|y|^{\alpha}|w|^{\beta}+|w|^{\beta}$ 吸收 $|y|^{2}|w|^{\beta}$ 和 $|y||w|^{\beta}$。类似地， $|y|^{\alpha}|w|$ 和 $|y|^{\alpha}|w|^{2}$ 可以被 $|y|^{\alpha}+|y|^{\alpha}|w|^{\beta}$ 吸收。最后， $|y|^{2}|w|^{2}$ 被 $|y||w|^{2}+|y|^{\alpha}|w|^{2}$ 吸收，因此基于同样的理由，也被 $|y||w|^{2}+|y|^{\alpha}|w|^{\beta}+|y|^{\alpha}$ 吸收。

若 $\alpha=2$、 $\beta>2$，则

$$
\begin{aligned}
&|1+y|^{\alpha}|1+w|^{\beta}\\
&\leq(1+2y+|y|^{2})\cdot\left[1+\beta w+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)|w|^{2}+C_{1}|w|^{\beta}\right]\\
&=1+2y+\beta w+|y|^{2}+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)|w|^{2}+2\beta yw\\
&\quad+C\Big(|y|^{2}|w|+|y||w|^{2}+|y|^{2}|w|^{2}+|w|^{\beta}+|y||w|^{\beta}+|y|^{2}|w|^{\beta}\Big).
\end{aligned}
$$

由于 $\beta>2$，我们可以用 $|y|^2|w|^\beta+|w|^\beta$ 吸收 $|y||w|^\beta$，并用 $|y|^2|w|+|y|^2|w|^\beta$ 吸收 $|y|^2|w|^2$。情形 $\alpha=\beta=2$ 显然成立，证明从略。

对于*(ii)*，只需证明

$$\begin{aligned}&|1+y|^\alpha|1+w|^\beta\\&\le 1+\alpha y+\beta w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)|y|^2+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)|w|^2+\alpha\beta yw\\&\quad+C_2\Big(|w|^\beta+|y||w|^2+|y|^{\alpha+1}|w|+|y|^{\alpha+1}+|y|^\alpha|w|^\beta\Big).\end{aligned}\tag{3.21}$$

由引理 3.2，固定一个 $m'>0$ 待定的，

$$\begin{aligned}&|1+y|^\alpha|1+w|^\beta\\&\le\left[1+\alpha y+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2\right]\cdot\\&\quad\left[1+\beta w+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m'\right)|w|^2+C_1|w|^\beta\right]\\&=1+\alpha y+\beta w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2\\&\quad+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m'\right)|w|^2+\alpha\beta yw\\&\quad+C\Big(|w|^\beta+|y||w|^2+|y||w|^\beta+\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2\big(|w|+|w|^2+|w|^\beta\big)\Big).\end{aligned}$$

由于 $\alpha>1$，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $D(\epsilon,\ C_1)>0$，使得

$$\begin{aligned}(1+C_1|y|)^\alpha&\le(1+\epsilon)+D|y|^\alpha\\&\le(1+|y|^2)\big((1+\epsilon)+\frac12 D|y|^{\alpha-1}\big).\end{aligned}$$

因此，

$$\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2\le\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)(1+\epsilon)|y|^2+C|y|^{\alpha+1},$$

$$\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2|w|\le C(|y|^2|w|+|y|^{\alpha+1}|w|).$$

$$\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2|w|^\beta<(1+C_1|y|)^\alpha|w|^\beta\lesssim|w|^\beta+|y|^\alpha|w|^\beta.$$

由 $\beta\ge2$、$|w|^2\lesssim|w|+|w|^\beta$。设 $m'>0$ 为 $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m=\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)(1+\epsilon)$，则

$$\begin{aligned}&|1+y|^\alpha|1+w|^\beta\\&\le1+\alpha y+\beta w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)|y|^2+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)|w|^2+\alpha\beta yw\\&\quad+C\Big(|y|^{\alpha+1}+|w|^\beta+|y||w|^2+|y||w|^\beta+|y|^2|w|+|y|^{\alpha+1}|w|+|y|^\alpha|w|^\beta\Big).\end{aligned}$$

由于 $|y||w|^\beta \lesssim |w|^\beta + |y|^\alpha |w|^\beta$ 和

$$\begin{aligned}|y|^2|w| &= (|y||w|^2)^{1-1/\alpha}(|y|^{\alpha+1})^{1-1/\alpha}(|y|^{\alpha+1}|w|)^{2/\alpha-1}\\ &\lesssim |y||w|^2 + |y|^{\alpha+1} + |y|^{\alpha+1}|w|,\end{aligned}$$

至此，证明完毕。若 $\beta = 2$，则

$$\begin{aligned}&|1+y|^\alpha|1+w|^2\\ &\le \left[1+\alpha y + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2\right]\cdot(1+2w+|w|^2)\\ &= 1+\alpha y+2w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2+|w|^2+2\alpha yw\\ &\quad + C\Big(|y||w|^2+\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2(|w|+|w|^2)\Big)\\ &\le 1+\alpha y+2w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)|y|^2+|w|^2+2\alpha yw\\ &\quad + C\Big(|y|^{\alpha+1}+|y||w|^2+|y|^{\alpha+1}|w|+|y|^\alpha|w|^2\Big).\end{aligned}$$

最后，对于*(iii)*，只需证明

$$\begin{aligned}&|1+y|^\alpha|1+w|^\beta\\ &\le 1+\alpha y+\beta w\\ &\quad +\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)y^2+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)w^2+\alpha\beta yw\\ &\quad + C_2\Big(|y|^{\alpha+1}+|w|^{\beta+1}+|y||w|^{\frac{\beta+1}{2}}+|y|^{\frac{\alpha+1}{2}}|w|+|y|^\alpha|w|^\beta\Big).\end{aligned}\tag{3.22}$$

由引理 3.2以及 *(ii)* 的证明中的估计，

$$\begin{aligned}&|1+y|^\alpha|1+w|^\beta\\ &\le \left[1+\alpha y+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2\right]\cdot\\ &\quad \left[1+\beta w+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|w|^2\right]\\ &= 1+\alpha y+\beta w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2\\ &\quad +\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m'\right)\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|w|^2+\alpha\beta yw\\ &\quad + C\Big(\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2|w|+\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|y||w|^2\\ &\qquad +\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|y|^2|w|^2\Big)\\ &\le 1+\alpha y+\beta w+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)|y|^2+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)|w|^2+\alpha\beta yw\\ &\quad + C\Big(|y|^{\alpha+1}+|w|^{\beta+1}+\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2|w|+\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|y||w|^2\end{aligned}$$

$$+\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|y|^2|w|^2\Big).$$

由于

$$(1+C_1|y|)^\alpha \lesssim (1+|y|^2)(|y|^{\frac{\alpha-1}{2}}+|y|^{\alpha-2}),$$

我们得到

$$\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}|y|^2|w| \lesssim |y|^{\frac{\alpha+1}{2}}|w|+|y|^\alpha|w|.$$

类似地,

$$\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|y||w|^2 \lesssim |y||w|^{\frac{\beta+1}{2}}+|y||w|^\beta.$$

$$\frac{(1+C_1|y|)^\alpha}{1+|y|^2}\frac{(1+C_1|w|)^\beta}{1+|w|^2}|y|^2|w|^2 \lesssim (|y|^{\frac{\alpha+1}{2}}+|y|^\alpha)(|w|^{\frac{\beta+1}{2}}+|w|^\beta).$$

容易证明, $|y|^{\frac{\alpha+1}{2}}|w|^{\frac{\beta+1}{2}}$, $|y|^{\frac{\alpha+1}{2}}|w|^\beta$, $|y|^\alpha|w|^{\frac{\beta+1}{2}}$可以被吸收到

$$|y|^{\alpha+1}+|w|^{\beta+1}+|y|^{\frac{\alpha+1}{2}}|w|+|y||w|^{\frac{\beta+1}{2}}+|y|^\alpha|w|^\beta,$$

因为 $(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2})$、$(\alpha,\frac{\beta+1}{2})$、$(\frac{\alpha+1}{2},\beta)$ 位于由五个点 $(\alpha+1,0)$、$(0,\beta+1)$、(α,β)、$(\frac{\alpha+1}{2},1)$、$(1,\frac{\beta+1}{2})$ 构成的凸集的闭包中（见图 1）。□

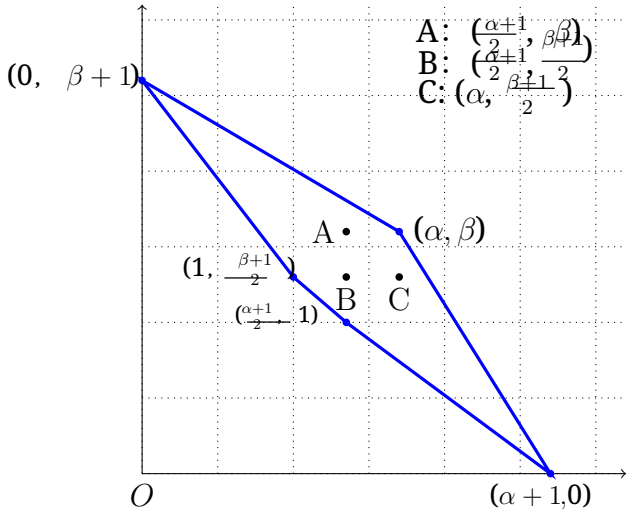

图 1：引理 3.3 情形 (iii)

4 定性分析与极小化子的存在性

固定一个极小值点 极小值点 $t_0 \in \mathcal{S}\backslash\{\infty\}$，对于非负的 $(u,\ v) \in \mathscr{D}\backslash\{(0,\ 0)\}$，考虑问题

$$\inf_{\sigma\in\mathbb{R},\,0<w\in\mathcal{M},\,\|w\|_{(s)}=1} \|\nabla(u-\sigma w)\|_2^2+\|\nabla(v-t_0\sigma w)\|_2^2, \tag{4.1}$$

其中

$$\|w\|_{(s)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w|^{2^*(s)}}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*(s)}}. \tag{4.2}$$

容易看出，极小值点 (σ, w) 存在。它们满足

$$\begin{aligned}\int \nabla(u+t_0v-(1+t_0^2)\sigma w)\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x=0,\\ \int \nabla(u+t_0v-(1+t_0^2)\sigma w)\cdot\nabla(\partial_\tau w)\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

这里对于 $w=U(k_0,\ \tau_0)\in\mathcal{M}$,

$$\partial_\tau w:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}U(k_0,\tau).$$

若 $t_0=\infty$，则改为考虑

$$\inf_{\sigma\in\mathbb{R},\,0<w\in\mathcal{M},\,\|w\|_{(s)}=1}\|\nabla(v-\sigma w)\|_2^2,\tag{4.4}$$

且极小值点 $(\sigma,\ w)$ 满足

$$\begin{aligned}\int \nabla(v-\sigma w)\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x=0,\\ \int \nabla(v-\sigma w)\cdot\nabla(\partial_\tau w)\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

我们先推导 σ 在 $t_0\in\mathcal{S}\backslash\{\infty\}$ 时的另一种表达式:

引理 4.1。 设 $(\sigma,\ w)$ 是问题 (4.1) 的极小值点，且 $w>0$，则

$$\sigma=\sup_{0<w_1\in\mathcal{M},\,\|w_1\|_{(s)}=1}\frac{\int\nabla(u+t_0v)\cdot\nabla w_1\,\mathrm{d}x}{(1+t_0^2)\mu_s}\geq 0.\tag{4.6}$$

因此，对于 $t_0\in(0,\ \infty)$，$\sigma=0$ 当且仅当 $u=v=0$；对于 $t_0=0$，$\sigma=0$ 当且仅当 $u=0$。

证明。 由于 (σ,w) 是问题 (4.1) 的极小值点，对于任意其他满足 $\sigma', w'\ \ 0<w'\in\mathcal{M}$, $\|w'\|_{(s)}=1$ 且 $\sigma'\in\mathbb{R}$ 的 (σ', w')，有

$$\|\nabla(u+t_0v-(1+t_0^2)\sigma w)\|_2^2\leq\|\nabla(u+t_0v-(1+t_0^2)\sigma' w')\|_2^2.$$

Let

$$\sigma'=\frac{\int\nabla(u+t_0v)\cdot\nabla w'\,\mathrm{d}x}{(1+t_0^2)\mu_s},$$

于是上面的不等式变为

$$\|\nabla(u+t_0v)\|_2^2-(1+t_0^2)^2\sigma^2\mu_s\leq\|\nabla(u+t_0v)\|_2^2-(1+t_0^2)^2(\sigma')^2\mu_s,$$

即 $\sigma^2\geq(\sigma')^2$。注意到

$$0=\int\nabla(u+t_0v-(1+t_0^2)\sigma w)\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x\implies\sigma=\frac{\int\nabla(u+t_0v)\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x}{(1+t_0^2)\mu_s}.$$

由 $0<w\in\mathcal{M}, t_0\geq 0$ 和 u, v 非负,

$$\sigma=\frac{\int\nabla(u+t_0v)\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x}{(1+t_0^2)\mu_s}=\frac{1}{1+t_0^2}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-1}(u+t_0v)\geq 0.$$

同样地， $\sigma'\geq 0$，因此 $\sigma\geq\sigma'$。由 w'的任意选取可知， σ取得上确界（4.1），并且 $\sigma=0$ 当且仅当 $u+t_0v=0$。 □

注记 4.1。 若 $t_0 = \infty$ 且（σ， w）使（4.4）达到最小值，则

$$\sigma = \sup_{0<w_1\in\mathcal{M},\,\|w_1\|_{(s)}=1} \frac{\int \nabla v\cdot\nabla w_1\,\mathrm{d}x}{\mu_s} = \frac{1}{\mu_s}\int \frac{1}{|x|^s} w^p v\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

且 $\sigma = 0$ 当且仅当 $v = 0$。

由引理 4.1 和注记 4.1，我们看到 $\sigma = \sigma$（u， v， t_0）由u、 v和 t_0 确定。在不引起任何误解的情况下，我们可以省略符号 u、 v。并且请记住， σ（t_0）是（u， v）的一个泛函。现在我们可以陈述定性稳定性结果：

定理 4.1. 假设 （α， β， λ， μ） $\neq$ （2，2，2κ，2κ）。对任意 $\epsilon_1 > 0$，存在 $\epsilon_0 > 0$，使得若 δ（u， v） $< \epsilon_0$（$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2$），则对某个极小值点 $t_0 \in \mathcal{S}$ 及相应的 $\sigma = \sigma$（t_0），下列估计成立：

$$\eta < \epsilon_1\sigma^2, \tag{4.7}$$

其中对于 $t_0 \in [0,\infty)$，

$$\eta = \eta(t_0) := \|\nabla(u-\sigma w)\|_2^2 + \|\nabla(v - t_0\sigma w)\|_2^2,$$

其中 (σ, w) 是问题 (4.1)的一个极小值点；对于 $t_0 = \infty$,

$$\eta = \eta(\infty) := \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla(v-\sigma w)\|_2^2,$$

其中 (σ, w) 是问题 (4.4)的一个极小值点。

证明。 我们用反证法。假设该陈述不成立。那么存在$\epsilon_1 > 0$ 以及一个序列 (u_i, v_i)，满足 $\|\nabla u_i\|_2^2 + \|\nabla v_i\|_2^2 = 1$，使得

$$\delta(u_i, v_i) \leq i^{-1}, \tag{4.8}$$

$$\eta_i(\tilde{t}) \geq \epsilon_1\sigma_i(\tilde{t})^2 \quad \text{for all } \tilde{t}\in\mathcal{S}. \tag{4.9}$$

这里，为简便起见，我们分别用 $\eta_i(\tilde{t})$ 和 $\sigma_i(\tilde{t})$ 表示 $\eta(u_i, v_i, \tilde{t})$ 和 $\sigma(u_i, v_i, \tilde{t})$。由于 $g(\tilde{t}) = \inf_{t>0} g(t)$，我们有

$$\lambda u_i^p + \mu v_i^p + \kappa p u_i^\alpha v_i^\beta = \left(\frac{u_i^2+v_i^2}{g(\frac{v_i}{u_i})}\right)^{p/2} \leq \left(\frac{u_i^2+v_i^2}{g(\tilde{t})}\right)^{p/2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\delta(u_i, v_i) &= \|\nabla u_i\|_2^2 + \|\nabla v_i\|_2^2 - g(\tilde{t})\mu_s\left(\int \frac{1}{|x|^s}\left(\lambda u_i^p + \mu v_i^p + \kappa p u_i^\alpha v_i^\beta\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p} \\
&\geq \|\nabla u_i\|_2^2 + \|\nabla v_i\|_2^2 - \mu_s\left(\int \frac{1}{|x|^s}(u_i^2+v_i^2)^{p/2}\,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \\
&\geq \|\nabla u_i\|_2^2 + \|\nabla v_i\|_2^2 - \mu_s\left(\|u_i\|_{(s)}^2 + \|v_i\|_{(s)}^2\right) \\
&= \delta(u_i) + \delta(v_i).
\end{aligned}$$

最后一个 该不等式由以下初等估计得出：对于 $p>2$ 和 $f,\ g\in L^p(\mathbb{R}^N)$,

$$\|\sqrt{f^2+g^2}\|_p^2=\|f^2+g^2\|_{p/2}\le\|f^2\|_{p/2}+\|g^2\|_{p/2}=\|f\|_p^2+\|g\|_p^2.$$

由（4.8），$\delta(u_i)\ \delta(v_i)\to 0$。应用 Hardy-Sobolev 不等式的稳定性结果（定理 A），存在序列 $\{a_if_i\},\ \{b_ig_i\}\subset\mathcal{M}$ 满足 $a_i,\ b_i\ge 0,\ f_i>0,\ g_i>0,\ \|f_i\|_{(s)}=\|g_i\|_{(s)}=1$，使得

$$\|\nabla(u_i-a_if_i)\|_2\to 0,\quad \|\nabla(v_i-b_ig_i)\|_2\to 0. \tag{4.10}$$

特别地，$\|\nabla u_i\|_2\to\|\nabla(a_if_i)\|_2$、$\|\nabla v_i\|_2\to\|\nabla(b_ig_i)\|_2$，并且

$$\lim_{i\to\infty}(a_i^2+b_i^2)=\mu_s^{-1}, \tag{4.11}$$

这意味着 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 有界。因此，不妨设经过取子列后

$$a_i\to a_0,\quad b_i\to b_0\quad \text{in }\mathbb{R}_{\ge 0},\quad \text{with}\quad a_0^2+b_0^2=\mu_s^{-1}. \tag{4.12}$$

由对称性，不妨设 $a_0\ne 0$，从而 $a_0\in(0,\ \infty)$。记 $f_i=U(1,\ \lambda_i)$、$g_i=U(1,\ \mu_i)$，并令 $\gamma_i=\mu_i/\lambda_i$。于是，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{|x|^s}f_i^\alpha g_i^\beta&=k_0^p\int\frac{1}{|x|^s}(1+|\lambda_ix|^{2-s})^{-\frac{N-2}{2-s}\alpha}(1+|\mu_ix|^{2-s})^{-\frac{N-2}{2-s}\beta}\lambda_i^{\frac{N-2}{2}\alpha}\mu_i^{\frac{N-2}{2}\beta}\,\mathrm{d}x\\&=k_0^p\int\frac{1}{|x|^s}U(1,1)^\alpha U(1,\gamma_i)^\beta\,\mathrm{d}x \qquad (4.13)\\&=k_0^p\int\frac{1}{|x|^s}U(1,\tfrac{1}{\gamma_i})^\alpha U(1,1)^\beta\,\mathrm{d}x \qquad (4.14)\end{aligned}$$

情形 1： $b_0>0$。

若 $\{\gamma_i\}$ 无界，则取一个子列，可得 $\frac{1}{\gamma_i}\to 0$。于是 $U(1,\ \frac{1}{\gamma_i})\rightharpoonup 0$ 属于 $D^{1,\,2}(\mathbb{R}^N)$，从而 $U(1,\ \frac{1}{\gamma_i})^\alpha\rightharpoonup 0$ 属于 $L^{p/\alpha}(\mathbb{R}^N,\ \frac{1}{|x|^s}\mathrm{d}x)$。由于 $U(1,\ 1)^\beta\in L^{p/\beta}(\mathbb{R}^N,\ \frac{1}{|x|^s}\mathrm{d}x)$ 是 $L^{p/\alpha}(\mathbb{R}^N,\ \frac{1}{|x|^s}\mathrm{d}x)$ 的对偶空间（由 $p=\alpha+\beta$ 可知），因此我们有

$$\int\frac{1}{|x|^s}U(1,\tfrac{1}{\gamma_i})^\alpha U(1,1)^\beta\,\mathrm{d}x\to 0. \tag{4.15}$$

因此，由（4.14），$\int\frac{1}{|x|^s}f_i^\alpha g_i^\beta\,\mathrm{d}x\to 0$。类似地，若 $\gamma_i\to 0$，利用（4.13），同样的结论成立。由（4.8），

$$\begin{aligned}1-i^{-1}&\le g(\tilde{t})\mu_s\left(\int\frac{1}{|x|^s}\left(\lambda u_i^p+\mu v_i^p+\kappa p u_i^\alpha v_i^\beta\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}\\&=g(\tilde{t})\mu_s\left(\int\frac{1}{|x|^s}\left(\lambda(a_if_i)^p+\mu(b_ig_i)^p+\kappa p(a_if_i)^\alpha(b_ig_i)^\beta\right)\mathrm{d}x\right)^{2/p}+o(1) \qquad (4.16)\\&=g(\tilde{t})\mu_s\left(\lambda a_i^p+\mu b_i^p+\kappa p a_i^\alpha b_i^\beta\int\frac{1}{|x|^s}f_i^\alpha g_i^\beta\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}+o(1).\end{aligned}$$

因此，对于 $\gamma_i\to\infty$ 或 $\gamma_i\to 0$，令 $i\to\infty$ 代入（4.16），可得

$$1\le g(\tilde{t})\mu_s\left(\lambda a_0^p+\mu b_0^p\right)^{2/p}$$

$$
\begin{aligned}
&= g(\tilde{t})\frac{1}{a_0^2+b_0^2}\left(\lambda a_0^p+\mu b_0^p\right)^{2/p} \quad \text{(by (4.12))}\\
&< g(\tilde{t})\frac{1}{a_0^2+b_0^2}\left(\lambda a_0^p+\mu b_0^p+\kappa p a_0^\alpha b_0^\beta\right)^{2/p} \quad \text{(since } a_0>0, b_0>0\text{)}\\
&= \frac{g(\tilde{t})}{g(b_0/a_0)} \le 1 \text{ (since } \tilde{t}\in\mathcal{S}\text{)},
\end{aligned}
$$

这与矛盾相矛盾。

因此，我们可以假设 $\gamma_i \to \gamma_0 \in (0,\infty)$. 再次在 ($i\to\infty$ 4.16) 中取值，并利用 H¨older 不等式和 (4.11)，得到

$$
\begin{aligned}
1 &\le g(\tilde{t})\mu_s\left(\lambda a_0^p+\mu b_0^p+\kappa p a_0^\alpha b_0^\beta\int\frac{1}{|x|^s}U(1,1)^\alpha U(1,\gamma_0)^\beta\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}\\
&\le g(\tilde{t})\mu_s\left(\lambda a_0^p+\mu b_0^p+\kappa p a_0^\alpha b_0^\beta\right)^{2/p}\\
&= g(\tilde{t})\frac{1}{a_0^2+b_0^2}\left(\lambda a_0^p+\mu b_0^p+\kappa p a_0^\alpha b_0^\beta\right)^{2/p}\\
&= \frac{g(\tilde{t})}{g(b_0/a_0)} \le 1.
\end{aligned}
$$

因此，处处等式成立，并且

$$
g(b_0/a_0) = g(\tilde{t}), \quad \gamma_0 = 1. \tag{4.17}
$$

因此，存在 $t_0\in\mathcal{S}$ 使得 $b_0/a_0 = t_0$。由于 $a_0\in(0,\infty)$，我们有 $t_0\in(0,\infty)$，且 $(1+t_0^2)a_0^2 = a_0^2+b_0^2 = \mu_s^{-1}$，由此可得

$$
a_0 = \left(\frac{1}{(1+t_0^2)\mu_s}\right)^{1/2}. \tag{4.18}
$$

现在，考虑 (4.9)。计算得

$$
\begin{aligned}
\eta_i(t_0) &= \|\nabla u_i\|_2^2+\|\nabla(\sigma_i w)\|_2^2+\|\nabla v_i\|_2^2+\|\nabla(t_0\sigma_i w)\|_2^2\\
&\quad -2\int\left(\nabla u_i\cdot\nabla(\sigma_i w)+\nabla v_i\cdot\nabla(t_0\sigma_i w)\right)\mathrm{d}x\\
&= \|\nabla u_i\|_2^2+\|\nabla v_i\|_2^2+(1+t_0^2)\sigma_i^2\mu_s-2\int\nabla(u_i+t_0v_i)\cdot\nabla(\sigma_i w)\,\mathrm{d}x\\
&= \|\nabla u_i\|_2^2+\|\nabla v_i\|_2^2-(1+t_0^2)\sigma_i(t_0)^2\mu_s = 1-(1+t_0^2)\sigma_i(t_0)^2\mu_s.
\end{aligned}
$$

于是，(4.9) 推出

$$
\sigma_i(t_0)^2 \le \frac{1}{(1+t_0^2)\mu_s+\epsilon_1}. \tag{4.19}
$$

由于 $\gamma_0=1$，我们有 $U(1,\gamma_i)\rightharpoonup U(1,1)$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中，并且

$$
\int\frac{1}{|x|^s}U(1,1)^{p-1}U(1,\gamma_i)\,\mathrm{d}x \to \int\frac{1}{|x|^s}U(1,1)^p\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.20}
$$

因此，

$$
\int\nabla(f_i-g_i)\cdot\nabla f_i\,\mathrm{d}x = \mu_s\int\frac{1}{|x|^s}f_i^{p-1}(f_i-g_i)\,\mathrm{d}x
$$

$$= \mu_s - \mu_s \int \frac{1}{|x|^s} U(1,\lambda_i)^{p-1} U(1,\mu_i)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mu_s - \mu_s \int \frac{1}{|x|^s} U(1,1)^{p-1} U(1,\gamma_i)\,\mathrm{d}x \to 0.$$

根据引理4.1,

$$\begin{aligned}\sigma_i(t_0) &\geq \frac{\int \nabla(u_i + t_0 v_i)\cdot\nabla f_i\,\mathrm{d}x}{(1+t_0^2)\mu_s} \\ &= \frac{\int \nabla(u_i - a_i f_i + t_0(v_i - b_i g_i))\cdot\nabla f_i\,\mathrm{d}x + t_0 b_i \int \nabla(g_i - f_i)\cdot\nabla f_i\,\mathrm{d}x}{(1+t_0^2)\mu_s} \\ &\quad + \frac{(a_i + t_0 b_i)\mu_s}{(1+t_0^2)\mu_s}.\end{aligned}$$

令 $i \to \infty$ 在（4.19）中，并利用（4.10）、（4.17）、（4.18）以及上述收敛性，可得

$$\left(\frac{1}{(1+t_0^2)\mu_s + \epsilon_1}\right)^{1/2} \geq \limsup_{i\to\infty} \sigma_i(t_0) \geq \frac{(a_0 + t_0 b_0)\mu_s}{(1+t_0^2)\mu_s} = a_0 = \left(\frac{1}{(1+t_0^2)\mu_s}\right)^{1/2},$$

这就导出了矛盾。

情形 2： $b_0 = 0$。

于是 $a_0^2 = \mu_s^{-1}$，并且

$$0 = \lim_{i\to\infty} \delta(u_i, v_i) = 1 - g(\tilde{t})\mu_s(\lambda a_0^p)^{2/p}$$
$$= 1 - \inf_{t\in(0,\infty)} g(t)\cdot\lambda^{2/p}.$$

因此，$\inf_{t\in(0,\infty)} g(t) = \lambda^{-2/p} = g(0)$。由（4.9），取 $\tilde{t} = 0$,

$$\eta_i(0) = \|\nabla u_i\|_2^2 + \|\nabla v_i\|_2^2 - \sigma_i(0)^2\mu_s \implies \sigma_i(0)^2 \leq \frac{1}{\mu_s + \epsilon_1}.$$

另一方面，由引理 4.1 和（4.10），

$$\sigma_i(0) \geq \frac{\int \nabla u_i\cdot\nabla f_i\,\mathrm{d}x}{\mu_s} = \frac{\int \nabla(u_i - a_i f_i)\cdot\nabla f_i\,\mathrm{d}x}{\mu_s} + a_i \to a_0 \quad \text{as } i\to\infty.$$

因此,

$$\frac{1}{(\mu_s+\epsilon_1)^{1/2}} \geq \limsup_{i\to\infty} \sigma_i(0) \geq a_0 = \frac{1}{\mu_s^{1/2}},$$

这再次构成矛盾。 □

5 尖锐定量稳定性估计

固定一个 $\epsilon_1 > 0$ 作为待定参数，并令 ϵ_0 如定理4.1所述。注意到 (0,0) 属于 $\mathcal{M}'$的闭包，这意味着

$$\inf_{(U_0,V_0)\in\mathcal{M}'} [\|\nabla(u-U_0)\|_2^2 + \|\nabla(v-V_0)\|_2^2] \leq \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2,$$

thus

$$\inf_{(U_0,V_0)\in\mathcal{M}'} \frac{\|\nabla(u-U_0)\|_2^2+\|\nabla(v-V_0)\|_2^2}{\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2} \le 1.$$

因此，若 $\delta(u,v) \ge \epsilon_0(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2)$，则取 $C=\epsilon^-$ 即可完成证明 $_0{}^{\iota}$.

否则， δ（u， v） $\le \epsilon_0$（$\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2$），则由定理 4.1，存在 $t_0 \in \mathcal{S}$使得极小值点（σ， w）在问题（4.1）或（4.4）中满足 $\eta \le \epsilon_1\sigma^2$，其中 $\eta=\eta$（t_0）如定理 4.1中所定义。由于 $t_0=0$ 与 $t_0=\infty$ 具有对称性，在下文讨论中我们可以假设$t_0 \in [0,\infty)$。

考虑算子$Lu=\frac{-|x|^s\Delta u}{w^{p-2}}$，则 ———

$$Lw=\mu_s w, \quad L(\partial_\tau w)=(p-1)\mu_s\partial_\tau w,$$

并由引理 3.1， L 的前两个特征值为 $\Lambda_1=\mu_s$， $\Lambda_2=$ $(p-1)$ μ_s，其相应的特征子空间分别由 w 与 $\partial_\tau w$张成。我们可以将 u 与 v 分解为如下形式：

$$\begin{aligned} u &= aw+r\frac{\partial_\tau w}{k_1}+\sum_{i=3}^{\infty} r_i\varphi_i,\\ v &= bw+q\frac{\partial_\tau w}{k_1}+\sum_{i=3}^{\infty} q_i\varphi_i, \end{aligned} \tag{5.1}$$

这里 $k_1:=\left(\int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(\partial_\tau w)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$，$\varphi_i$是满足条件的第 i 个特征函数

$$L\varphi_i=\Lambda_i\varphi_i, \quad \int \frac{1}{|x|^s}w^{p-2}\varphi_i^2\,\mathrm{d}x=1,$$

且 Λ_i 是 L的第 i 个特征值， $\Lambda_i \ge \Lambda_3 > \Lambda_2=(p-1)\mu_s$。由（4.3），我们还可得到

$$\begin{cases} a+t_0b=(1+t_0^2)\sigma,\\ r+t_0q=0, \end{cases} \tag{5.2}$$

这意味着

$$t_0(b-t_0\sigma)=-(a-\sigma), \quad t_0q=-r. \tag{5.3}$$

此外，由于

$$\begin{aligned} \|\nabla(u-\sigma w)\|_2^2 &= \|\nabla(u-aw+(a-\sigma)w)\|_2^2\\ &= \|\nabla(u-aw)\|_2^2+(a-\sigma)^2\mu_s\\ &\ge (a-\sigma)^2\mu_s,\\ \|\nabla(v-t_0\sigma w)\|_2^2 &\ge (b-t_0\sigma)^2\mu_s, \end{aligned}$$

根据 $\eta \le \epsilon_1\sigma^2$ 和（5.3），我们得到

$$\begin{cases} (b/\sigma-t_0)^2 \le \frac{1}{(1+t_0^2)\mu_s}\epsilon_1,\\ (a/\sigma-1)^2 \le \frac{t_0^2}{(1+t_0^2)\mu_s}\epsilon_1. \end{cases} \tag{5.4}$$

这表明 $(a/\sigma,\ b/\sigma)$ 接近于 $(1,\ t_0)$。我们还提到， a， $b \ge 0$：

$$a=\int \frac{1}{|x|^s}w^{p-1}u\,\mathrm{d}x \ge 0, \quad b=\int \frac{1}{|x|^s}w^{p-1}v\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

记

$$\gamma := \|\nabla(u-aw)\|_2^2 + \|\nabla(v-bw)\|_2^2, \tag{5.5}$$

于是 $\gamma \le \eta \le \epsilon_1\sigma^2$。利用初等不等式 $x^{2/p}-1 \le \frac{2}{p}(x-1)$（对于 $x>0$），可得

$$\begin{aligned}
\gamma &= \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 - (a^2+b^2)\mu_s \\
&= \delta(u,v) + g(t_0)\mu_s\left(\int \frac{1}{|x|^s}(\lambda u^p + \mu v^p + \kappa p u^\alpha v^\beta)\,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \\
&\quad - g(b/a)\mu_s(\lambda a^p + \mu b^p + \kappa p a^\alpha b^\beta)^{2/p} \\
&= \delta(u,v) - (g(b/a)-g(t_0))B^{2/p}\mu_s \\
&\quad + g(t_0)\mu_s\left(\left(\int \frac{1}{|x|^s}(\lambda u^p + \mu v^p + \kappa p u^\alpha v^\beta)\,\mathrm{d}x\right)^{2/p} - B^{2/p}\right) \\
&\le \delta(u,v) - (g(b/a)-g(t_0))B^{2/p}\mu_s \\
&\quad + g(t_0)\mu_s\frac{2}{p}B^{2/p-1}\left(\int \frac{1}{|x|^s}(\lambda u^p + \mu v^p + \kappa p u^\alpha v^\beta)\,\mathrm{d}x - B\right),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中

$$B := \int \frac{1}{|x|^s}\big(\lambda(aw)^p + \mu(bw)^p + \kappa p(aw)^\alpha(bw)^\beta\big)\,\mathrm{d}x = \lambda a^p + \mu b^p + \kappa p a^\alpha b^\beta.$$

由 $a+t_0 b = (1+t_0^2)\sigma$ 和 $a,\ b \ge 0$，可直接得到 $\max\{a,b\} \approx \sigma$，因此 $B \approx \sigma^p$。

引理 5.1. 设 $a,\ b$ 由 (5.1) 给出，且 γ 由 (5.5)定义。若 $t_0 > 0$，则对充分小的 ϵ_1，有

$$\frac{\gamma}{\sigma^2} + (g(b/a) - g(t_0)) \lesssim \frac{\delta(u,v)}{\sigma^2}. \tag{5.7}$$

证明。若 $t_0 > 0$，由 (5.4)，对充分小的 ϵ_1，

$$\begin{cases} |b/\sigma - t_0| \le \sqrt{\frac{\epsilon_1}{(1+t_0^2)\mu_s}} < \frac{1}{2}t_0, \\ |a/\sigma - 1| \le \sqrt{\frac{t_0^2\epsilon_1}{(1+t_0^2)\mu_s}} < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5.8}$$

利用引理 3.2，取一个 $m>0$（稍后确定），可得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{|x|^s}(u^p - (aw)^p)\,\mathrm{d}x \\
&\le p\int \frac{1}{|x|^s}(u-aw)(aw)^{p-1}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)\int \frac{1}{|x|^s}\Big((aw)^{p-2}(u-aw)^2\,\mathrm{d}x + C_1|u-aw|_p^p\Big)\,\mathrm{d}x \\
&\le \left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)a^{p-2}\int \frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-aw)^2\,\mathrm{d}x + C_1\mu_s^{-p/2}\|\nabla(u-aw)\|_2^p.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

在此，根据5.1式对 u，$\int \frac{1}{|x|^s}(u-aw)\,\underline{w^{p-1}}\,\mathrm{d}x = 0$。类似地，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{|x|^s}(v^p - (bw)^p)\,\mathrm{d}x \\
&\le \left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)b^{p-2}\int \frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(v-bw)^2\,\mathrm{d}x + C_1\mu_s^{-p/2}\|\nabla(v-bw)\|_2^p.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

为了处理项 $u^\alpha v^\beta$，我们使用引理3.3 ，推导得

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{|x|^s}(u^\alpha v^\beta-(aw)^\alpha(bw)^\beta)\,\mathrm{d}x\\
&\le \alpha a^{\alpha-1}b^\beta\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-1}(u-aw)\,\mathrm{d}x+\beta a^\alpha b^{\beta-1}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-1}(v-bw)\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)a^{\alpha-2}b^\beta\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-aw)^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)a^\alpha b^{\beta-2}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(v-bw)^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\alpha\beta a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-aw)(v-bw)\,\mathrm{d}x+\kappa p\,C_3 f(\alpha,\beta,u,v).
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

这里 $f(\alpha,\ \beta,\ u,\ v)$ 是引理 3.2 中所示的常驻项。具体而言，若 $\alpha,\ \beta>2$,

$$
\begin{aligned}
&f(\alpha,\beta,u,v)\\
&=\int\frac{1}{|x|^s}\Big((aw)^\alpha|v-bw|^\beta+(bw)^\beta|u-aw|^\alpha+(aw)^{\alpha-1}(bw)^{\beta-2}|u-aw||v-bw|^2\\
&\qquad+(aw)^{\alpha-2}(bw)^{\beta-1}|u-aw|^2|v-bw|+|u-aw|^\alpha|v-bw|^\beta\Big)\,\mathrm{d}x\\
&\le a^\alpha\mu_s^{-\beta/2}\|\nabla(v-bw)\|_2^\beta\\
&\quad+b^\beta\mu_s^{-\alpha/2}\|\nabla(u-aw)\|_2^\alpha+a^{\alpha-1}b^{\beta-2}\mu_s^{-3/2}\|\nabla(u-aw)\|_2\|\nabla(v-bw)\|_2^2\\
&\quad+a^{\alpha-2}b^{\beta-1}\|\nabla(u-aw)\|_2^2\|\nabla(v-bw)\|_2+\mu_s^{-p/2}\|\nabla(u-aw)\|_2^\alpha\|\nabla(v-bw)\|_2^\beta\\
&\lesssim(1+O(1)\epsilon_1)^\alpha\sigma^\alpha\gamma^{\beta/2}+(t_0+O(1)\epsilon)^\beta\sigma^\beta\gamma^{\alpha/2}\\
&\quad+(1+O(1)\epsilon_1)^{\alpha-1}(t_0+O(1)\epsilon_1)^{\beta-2}\sigma^{p-3}\gamma^{3/2}\\
&\quad+(1+O(1)\epsilon_1)^{\alpha-2}(t_0+O(1)\epsilon_1)^{\beta-1}\sigma^{p-3}\gamma^{3/2}+\gamma^{p/2}\\
&\lesssim\sigma^\alpha\gamma^{\beta/2}+\sigma^\beta\gamma^{\alpha/2}+\sigma^{p-3}\gamma^{3/2}+\gamma^{p/2}.
\end{aligned}
$$

其他情形同理可得

$f(\alpha,\beta,u,v)\lesssim$

$$
\begin{cases}
\sigma^\alpha\gamma^{\beta/2}+\sigma^\beta\gamma^{\alpha/2}+\sigma^{p-3}\gamma^{3/2}+\gamma^{p/2}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\}>2;\\
\sigma^2\gamma^{\max\{\alpha,\beta\}/2}+\sigma^{\max\{\alpha,\beta\}-1}\gamma^{3/2}+\gamma^{p/2}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\}=2<\max\{\alpha,\beta\};\\
\sigma\gamma^{3/2}+\gamma^2, & \text{if}\,\alpha=\beta=2;\\
\sigma^{\min\{\alpha,\beta\}}\gamma^{\max\{\alpha,\beta\}/2}+\sigma^{p-3}\gamma^{3/2}\\
\quad+\sigma^{\max\{\alpha,\beta\}-2}\gamma^{1+\min\{\alpha,\beta\}/2}\\
\quad+\sigma^{\max\{\alpha,\beta\}-1}\gamma^{\frac{\min\{\alpha,\beta\}+1}{2}}+\gamma^{p/2}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\}<2<\max\{\alpha,\beta\};\\
\sigma^{p-3}\gamma^{3/2}+\sigma\gamma^{\frac{\min\{\alpha,\beta\}+1}{2}}+\gamma^{p/2}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\}<2=\max\{\alpha,\beta\};\\
\sigma^{\alpha-1}\gamma^{\frac{\beta+1}{2}}+\sigma^{\beta-1}\gamma^{\frac{\alpha+1}{2}}+\sigma^{\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{\beta+3}{4}}\\
\quad+\sigma^{\beta+\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{\alpha+3}{4}}+\gamma^{p/2}, & \text{if } \max\{\alpha,\beta\}<2.
\end{cases}
$$

由（5.9）-（5.11），

$$
\int\frac{1}{|x|^s}(\lambda u^p+\mu v^p+\kappa p u^\alpha v^\beta)\,\mathrm{d}x-B
$$

$$\le k^{p-2}\bigg(A_u\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-aw)^2\,\mathrm{d}x+A_v\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(v-bw)^2\,\mathrm{d}x$$
$$+A_{u,v}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-aw)(v-bw)\,\mathrm{d}x\bigg)$$
$$+C_1\mu_s^{-p/2}\gamma^{p/2}+\kappa p\,C_3 f(\alpha,\beta,u,v).$$

其中

$$A_u=\lambda(a/\sigma)^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)+\kappa p(a/\sigma)^{\alpha-2}(b/\sigma)^{\beta}\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right),\tag{5.12}$$

$$A_v=\mu(b/\sigma)^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)+\kappa p(a/\sigma)^{\alpha}(b/\sigma)^{\beta-2}\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right),\tag{5.13}$$

$$A_{u,v}=\kappa p\alpha\beta(a/\sigma)^{\alpha-1}(b/\sigma)^{\beta-1}.\tag{5.14}$$

将所有估计代入（5.6）可得

$$\gamma+(g(b/a)-g(t_0))B^{2/p}\mu_s$$
$$\le\delta(u,v)+g(t_0)\mu_s\frac{2}{p}B^{2/p-1}\bigg(\int\frac{1}{|x|^s}(\lambda u^p+\mu v^p+\kappa p u^\alpha v^\beta)\,\mathrm{d}x-B\bigg)$$
$$\le\delta(u,v)+g(t_0)\mu_s\frac{2}{p}(B/\sigma^p)^{2/p-1}\bigg(A_u\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-aw)^2\,\mathrm{d}x\tag{5.15}$$
$$+A_v\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(v-bw)^2\,\mathrm{d}x+A_{u,v}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-aw)(v-bw)\,\mathrm{d}x\bigg)$$
$$+C\sigma^{2-p}(\gamma^{p/2}+f(\alpha,\beta,u,v)).$$

记

$$A_u^0=\lambda\left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)+\kappa p\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)t_0^\beta,\tag{5.16}$$

$$A_v^0=\mu t_0^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)+\kappa p t_0^{\beta-2}\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right),\tag{5.17}$$

$$A_{u,v}^0=\kappa p\alpha\beta t_0^{\beta-1}.\tag{5.18}$$

由于当~~ι~~≥ 1 或 $\iota\le 0$时，$\frac{x^\iota-1}{x-1}$ 递增；当 $0<\iota<1$时递减，因此对每个$x\in(1/2,3/2)$,

$$\left|\frac{x^\iota-1}{x-1}\right|\le\begin{cases}2((3/2)^\iota-1), & \iota\ge 1,\\ 1, & 0<\iota<1,\\ 2^{1-p}-2, & \iota<0.\end{cases}\tag{5.19}$$

因此，由（5.8），将（5.12）-（5.14）与（5.16）-（5.18）进行比较,

$$|A_u-A_u^0|+|A_v-A_v^0|+|A_{u,v}-A_{u,v}^0|\lesssim|a/\sigma-1|+|b/\sigma-t_0|\lesssim\epsilon_1^{1/2}.\tag{5.20}$$

同样,

$$\left|g(t_0)(B/\sigma^p)^{2/p-1}-\frac{1+t_0^2}{\lambda+\mu t_0^p+\kappa p t_0^\beta}\right|$$
$$=\frac{1+t_0^2}{\lambda+\mu t_0^p+\kappa p t_0^\beta}\left|\left(\frac{\lambda(a/\sigma)^p+\mu(b/\sigma)^p+\kappa p(a/\sigma)^\alpha(b/\sigma)^\beta}{\lambda+\mu t_0^p+\kappa p t_0^\beta}\right)^{2/p-1}-1\right|\tag{5.21}$$
$$\lesssim|a/\sigma-1|+|b/\sigma-t_0|$$
$$\lesssim\epsilon_1^{1/2}.$$

我们声称（将在下文证明），当 m 足够小时，存在一个常数$c_1 = c_1(\lambda, \mu, \kappa, \alpha, \beta, N, s, m) \in (0,1)$，使得

$$c_1\gamma \geq \mu_s \frac{2}{p} \cdot \frac{1+t_0^2}{\lambda + t_0^p + \kappa p t_0^\beta} \Bigg(A_u^0 \int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(u-aw)^2 \,\mathrm{d}x + A_v^0 \int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(v-bw)^2 \,\mathrm{d}x + A_{u,v}^0 \int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(u-aw)(v-bw) \,\mathrm{d}x \Bigg). \tag{5.22}$$

将 (5.20)-(5.22代入 (5.15),

$$\begin{aligned}
&\gamma + (g(b/a) - g(t_0))B^{2/p}\mu_s \\
&\leq \delta(u,v) + \mu_s \frac{2}{p} \cdot \frac{1+t_0^2}{\lambda + t_0^p + \kappa p t_0^\beta} \Bigg(A_u^0 \int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(u-aw)^2 \,\mathrm{d}x \\
&\quad + A_v^0 \int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(v-bw)^2 \,\mathrm{d}x + A_{u,v}^0 \int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(u-aw)(v-bw) \,\mathrm{d}x \Bigg) \\
&\quad + C\epsilon_1^{1/2} \left(\int \frac{1}{|x|^s} \left(w^{p-2}(u-aw)^2 + w^{p-2}(v-bw)^2 \right) \mathrm{d}x \right) \\
&\quad + C\sigma^{2-p}(\gamma^{p/2} + f(\alpha, \beta, u, v)) \\
&\leq \delta(u,v) + c_1\gamma + C\epsilon^{1/2}\gamma + C\sigma^{2-p}(\gamma^{p/2} + f(\alpha, \beta, u, v)).
\end{aligned}$$

因此，若 ϵ_1 足够小，使得 $c_1 + C\epsilon_1^{1/2} < 1$，我们便可推出

$$\gamma + (g(b/a) - g(t_0))\sigma^2 \lesssim \delta(u,v) + \sigma^{2-p}(\gamma^{p/2} + f(\alpha, \beta, u, v)).$$

从而，

$$\frac{\gamma}{\sigma^2} + (g(b/a) - g(t_0)) \lesssim \begin{cases}
\frac{\delta(u,v)}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{p/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\beta/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\alpha/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{3/2}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\} > 2; \\
\frac{\delta(u,v)}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\max\{\alpha,\beta\}/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{p/2}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\} = 2 < \max\{\alpha,\beta\}; \\
\frac{\delta(u,v)}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{2}, & \text{if } \alpha = \beta = 2; \\
\frac{\delta(u,v)}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{p/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\max\{\alpha,\beta\}/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{3/2} & \\
\quad + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\min\{\alpha,\beta\}/2+1} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\min\{\alpha,\beta\}+1}{2}}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\} < 2 < \max\{\alpha,\beta\}; \\
\frac{\delta(u,v)}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{p/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\min\{\alpha,\beta\}+1}{2}}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\} < 2 = \max\{\alpha,\beta\}; \\
\frac{\delta(u,v)}{\sigma^2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{p/2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\beta+1}{2}} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} & \\
\quad + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\beta+3}{4}} + \left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\alpha+3}{4}}, & \text{if } \max\{\alpha,\beta\} < 2.
\end{cases}$$

在每种情形下，右侧所有 $\frac{\gamma}{\sigma^2}$ 的指数均大于 1，这表明若$\frac{\gamma}{\sigma^2} \leq \epsilon_1$ 足够小，则所有这些项都可以吸收到左侧项中。因此，为完成证明，我们只需证明 (5.22)。

□

证明(5.22)。 由（5.1）和（5.3），

$$\int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(u-aw)^2 \,\mathrm{d}x = r^2 + \sum_{i=3}^{\infty} r_i^2,$$

$$\int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(v-bw)^2 \,\mathrm{d}x = t_0^{-2} r^2 + \sum_{i=3}^{\infty} q_i^2,$$

$$\int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(u-aw)(v-bw) \,\mathrm{d}x = rq + \sum_{k=i}^{\infty} r_i q_i,$$

$$= -t_0^{-1} r^2 + \sum_{i=3}^{\infty} r_i q_i$$

$$\|\nabla(u-aw)\|_2^2 = (p-1)\mu_s r^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \Lambda_i r_i^2$$

$$\|\nabla(v-bw)\|_2^2 = (p-1)\mu_s t_0^{-2} r^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \Lambda_i q_i^2.$$

因此，（5.22）等于

$$\begin{aligned} & c_1(1+t_0^{-2})(p-1)r^2 + c_1 \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\Lambda_i}{\mu_s}(r_i^2+q_i^2) \\ & \geq \frac{2}{p} \cdot \frac{1+t_0^2}{\lambda + \mu t_0^p + \kappa p t_0^\beta} \cdot \\ & \left((A_u^0 + t_0^{-2} A_v^0 - t_0^{-1} A_{u,v}^0) r^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \left(A_u^0 r_i^2 + A_v^0 q_i^2 + A_{u,v}^0 r_i q_i \right) \right). \end{aligned} \tag{5.23}$$

当我们令

$$c_1(1+t_0^{-2})(p-1) \geq \frac{2}{p} \cdot \frac{1+t_0^2}{\lambda + \mu t_0^p + \kappa p t_0^\beta} (A_u^0 + t_0^{-2} A_v^0 - t_0^{-1} A_{u,v}^0), \tag{5.24}$$

$$c_1(\Lambda_i \mu_s^{-1}(r_i^2+q_i^2)) \geq \frac{2}{p} \cdot \frac{1+t_0^2}{\lambda + \mu t_0^p + \kappa p t_0^\beta} (A_u^0 r_i^2 + A_v^0 q_i^2 + A_{u,v}^0 r_i q_i), \quad i \geq 3. \tag{5.25}$$

接下来，我们需要严格计算 A_u^0、A_v^0、$A_{u,v}^0$。根据（5.16）、（5.17）和（3.2），

$$\begin{aligned} A_u^0 &= \frac{p(p-1)}{2} \left(\lambda + \kappa \alpha t_0^\beta \right) - \frac{1}{2} \kappa p \alpha \beta t_0^\beta + (\lambda + \kappa p t_0^\beta) m, \\ &= \frac{p(p-1)}{2} \left(\lambda + \kappa \alpha t_0^\beta \right) - \frac{1}{2} \kappa p \alpha \beta t_0^\beta + O(1) m; \\ A_v^0 &= \frac{p(p-1)}{2} \left(\mu t_0^{p-2} + \kappa \beta t_0^{\beta-2} \right) - \frac{1}{2} \kappa p \alpha \beta t_0^{\beta-2} + (\mu t_0^{p-2} + \kappa p t_0^{\beta-2}) m \\ &= \frac{p(p-1)}{2} \left(\lambda + \kappa \alpha t_0^\beta \right) - \frac{1}{2} \kappa p \alpha \beta t_0^{\beta-2} + O(1) m. \end{aligned}$$

因此，(5.24) 的右侧变为

$$\begin{aligned} & \frac{2}{p} \cdot \frac{1+t_0^2}{\lambda + \mu t_0^p + \kappa p t_0^\beta} (A_u^0 + t_0^{-2} A_v^0 - t_0^{-1} A_{u,v}^0) \\ & = \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{\lambda + \kappa \alpha t_0^\beta} \cdot \\ & \left(\frac{p(p-1)}{2} (1+t_0^{-2}) \left(\lambda + \kappa \alpha t_0^\beta \right) - \frac{1}{2} \kappa p \alpha \beta t_0^\beta (1 + t_0^{-4} + 2 t_0^{-2}) + O(1) m \right) \end{aligned}$$

$$= (1+t_0^{-2})(p-1) - (1+t_0^{-2})^2 \frac{\kappa\alpha\beta t_0^\beta}{\lambda+\kappa\alpha t_0^\beta} + O(1)m,$$

而 (5.24) 等于

$$(p-1)c_1 \geq (p-1) - (1+t_0^{-2}) \frac{\kappa\alpha\beta t_0^\beta}{\lambda+\kappa\alpha t_0^\beta} + O(1)m. \tag{5.26}$$

由（3.3），

$$\begin{aligned}(p-1) - (1+t_0^{-2}) \frac{\kappa\alpha\beta t_0^\beta}{\lambda+\kappa\alpha t_0^\beta} &= \frac{(p-2)\lambda + \kappa\alpha t_0^\beta (p-2) - \kappa\alpha\beta t_0^\beta - \kappa\alpha\beta t_0^{\beta-2}}{\lambda+\kappa\alpha t_0^\beta} + 1 \\ &= \frac{(p-2)\lambda - \alpha(2-\alpha)\kappa t_0^\beta - \kappa t_0^{\beta-2}\alpha\beta}{\lambda+\kappa\alpha t_0^\beta} + 1 \\ &\leq 1,\end{aligned}$$

因此，由于 $p-1>1$，当 m 足够小时，（5.26）右侧小于 $p-1$。类似地，（5.25）的右侧变为

$$\begin{aligned}&\frac{2}{p} \cdot \frac{1+t_0^2}{\lambda+\mu t_0^p + \kappa p t_0^\beta} (A_u^0 r_i^2 + A_v^0 q_i^2 + A_{u,v}^0 r_i q_i) \\ &= \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{\lambda+\kappa\alpha t_0^\beta} \cdot \\ &\quad \left(\frac{p(p-1)}{2} \left(\lambda + \kappa\alpha t_0^\beta\right)(r_i^2+q_i^2) - \frac{1}{2}\kappa p\alpha\beta t_0^{\beta-2}(t_0^2 r_i^2 + q_i^2 - 2t_0 r_i q_i) \right) \\ &\quad + O(1)m(r_i^2+q_i^2) \\ &\leq (p-1+O(1)m)(r_i^2+q_i^2),\end{aligned}$$

结合 $\Lambda_i \geq \Lambda_3$，$\forall i \geq 3$，（5.25）对每个 $i \geq 3$ 均成立，若

$$c_1 \geq \frac{p-1+O(1)m}{\Lambda_3 \mu_s^{-1}}. \tag{5.27}$$

由于 $\Lambda_3 > (p-1)\mu_s$，当 m 足够小时，（5.27）右侧小于 **1**，最后我们可以选取某个 $0<c_1<1$，使其满足（5.22）。 □

引理 5.2. 设 a，b 由 (5.1) 给出，且 γ 由 (5.5)定义。若 $t_0=0$，则 $a=\sigma$，并且当 ϵ_1 足够小时，我们仍有

$$\frac{\gamma}{\sigma^2} + (g(b/a) - g(0)) \lesssim \frac{\delta(u,v)}{\sigma^2}. \tag{5.28}$$

证明。 在这种情形下，0 是 $g(t)$ 的极小值点，这意味着 $\inf_{t\in(0,\infty)} g(t) = \lambda^{-2/p}$。因此，命题 3.2 表明 $\beta \geq 2$。由（5.3），$a=\sigma$，$r=0$ 因此通过谱分析，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(u-\sigma w)^2 \,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{\Lambda_3} \|\nabla(u-\sigma w)\|_2^2. \\ \int \frac{1}{|x|^s} w^{p-2}(v-bw)^2 \,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{(p-1)\mu_s} \|\nabla(v-bw)\|_2^2.\end{aligned} \tag{5.29}$$

此外，（5.4）表明

$$(b/\sigma)^2 \le \mu_s^{-1}\epsilon_1. \tag{5.30}$$

由（5.6），

$$\begin{aligned}
\gamma :=& \|\nabla(u-aw)\|_2^2 + \|\nabla(v-bw)\|_2^2 \\
&\le \delta(u,v) - (g(b/\sigma)-g(0))\sigma^2(\lambda+\mu(b/\sigma)^p+\kappa p(b/\sigma)^\beta)^{2/p} \\
&\quad + \Big[\mu_s\frac{2}{p}\sigma^{2-p}\Big(1+\frac{\mu}{\lambda}(b/\sigma)^p+\frac{\kappa p}{\lambda}(b/\sigma)^\beta\Big)^{2/p-1}\lambda^{-1}\Big] \\
&\qquad \cdot\Big[\int\frac{1}{|x|^s}\Big(\lambda(u^p-(\sigma w)^p)+\mu(v^p-(bw)^p) \\
&\qquad\quad +\kappa p(u^\alpha v^\beta-(\sigma w)^\alpha(bw)^\beta)\Big)\,\mathrm{d}x\Big].
\end{aligned}$$

注意到 $a=\sigma$，这意味着 $\int_{\frac{1}{|x|^s}}(u-\sigma w)\underline{\quad}w^{p-1}\,\mathrm{d}x=0$。因此，由引理 3.2 和（5.29）-（5.30），

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{|x|^s}(u^p-(\sigma w)^p)\,\mathrm{d}x \\
&\le \sigma^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-\sigma w)^2 + C\int\frac{1}{|x|^s}|u-\sigma w|^p\,\mathrm{d}x \\
&\le \sigma^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2\Lambda_3}+\frac{m}{\Lambda_3}\right)\|\nabla(u-\sigma w)\|_2^2 + C\gamma^{p/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{|x|^s}(v^p-(bw)^p)\,\mathrm{d}x \\
&\le b^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(v-bw)^2 + C\|\nabla(v-bw)\|_2^p \\
&\le \sigma^{p-2}(\mu_s^{-1}\epsilon_1)^{p/2-1}\left(\frac{p(p-1)}{2}+m\right)\frac{1}{(p-1)\mu_s}\|\nabla(v-bw)\|_2^2 + C\|\nabla(v-bw)\|_2^p \\
&\le C(\epsilon_1^{p/2-1}\gamma+\gamma^{p/2}).
\end{aligned}$$

由引理 3.3和（5.29）-（5.30），

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{|x|^s}(u^\alpha v^\beta-(\sigma w)^\alpha(bw)^\beta)\,\mathrm{d}x \\
&\le \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+m\right)\sigma^{\alpha-2}b^\beta\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-\sigma w)^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)\sigma^\alpha b^{\beta-2}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(v-bw)^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \alpha\beta\sigma^{\alpha-1}b^{\beta-1}\int\frac{1}{|x|^s}w^{p-2}(u-\sigma w)(v-bw)\,\mathrm{d}x + C_3 f(\alpha,\beta,u,v) \\
&\le \frac{1}{(p-1)\mu_s}\left(\frac{\beta(\beta-1)}{2}+m\right)\sigma^{p-2}(\mu_s^{-1}\epsilon_1)^{\beta/2-1}\|\nabla(v-bw)\|_2^2 + C(\epsilon_1^{\beta/2}+\epsilon_1^{\frac{\beta-1}{2}})\gamma \\
&\quad + C_3 f(\alpha,\beta,u,v),
\end{aligned}$$

其中

$f(\alpha,\ \beta,\ u,\ v) \lesssim$

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha}\gamma^{\beta/2} + b^{\beta}\gamma^{\alpha/2} + (\sigma^{\alpha-1}b^{\beta-2} + \sigma^{\alpha-2}b^{\beta-1})\gamma^{3/2} + \gamma^{p/2}, & \text{if } \min\{\alpha,\beta\} > 2; \\ \sigma^{2}\gamma^{\beta/2} + (kb^{\beta-2} + b^{\beta-1})\gamma^{3/2} + \gamma^{p/2}, & \text{if } \alpha = 2 < \beta; \\ b^{2}\gamma^{\alpha/2} + (\sigma^{\alpha-2}b + \sigma^{\alpha-1})\gamma^{3/2} + \gamma^{p/2}, & \text{if } \alpha > 2 = \beta; \\ (k+b)\gamma^{3/2} + \gamma^{p/2}, & \text{if } \alpha = \beta = 2; \\ \sigma^{\alpha}\gamma^{\beta/2} + (\sigma^{\alpha-1}b^{\beta-2} + \sigma^{\alpha-2}b^{\beta-1})\gamma^{3/2} & \\ \qquad + \sigma^{-1}b^{\beta-1}\gamma^{\frac{\alpha+3}{4}} + \gamma^{p/2}, & \text{if } \alpha < 2 < \beta; \\ \sigma^{-1}b^{2}\gamma^{\frac{\alpha+1}{2}} + \sigma^{\alpha-1}\gamma^{3/2} + (\sigma^{-1}b+1)\gamma^{p/2}, & \text{if } \alpha < 2 = \beta. \end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned} &\gamma + (g(b/\sigma) - g(0))\sigma^2\lambda^{2/p} \\ &\le \delta(u,v) + \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}(b/\sigma)^p + \frac{\kappa p}{\lambda}(b/\sigma)^{\beta}\right)^{2/p-1} \\ &\quad \cdot \left(\left(\frac{p-1}{\Lambda_3/\mu_s} + \frac{2\mu_s m}{p\Lambda_3} \right) \|\nabla(u-\sigma w)\|_2^2 + \right. \\ &\qquad \left. (\mu_s^{-1}\epsilon_1)^{\beta/2-1} \frac{\sigma}{(p-1)\lambda} \left(\beta(\beta-1) + 2m\right) \|\nabla(v-bw)\|_2^2 \right) \\ &\quad + C_4\Big((\epsilon_1^{\beta/2} + \epsilon_1^{\frac{\beta-1}{2}} + \epsilon_1^{p/2-1})\gamma + \gamma^{p/2} + f(\alpha,\beta,u,v) \Big). \end{aligned} \tag{5.31}$$

由于 $p > 2$,

$$\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}(b/\sigma)^p + \frac{\kappa p}{\lambda}(b/\sigma)^{\beta}\right)^{2/p-1} \le 1.$$

根据 $\Lambda_3 > (p-1)\mu_s$,

$$\frac{p-1}{\Lambda_3/\mu_s} + \frac{2\mu_s m}{p\Lambda_3} + C_4(\epsilon_1^{\beta/2} + \epsilon_1^{\frac{\beta-1}{2}} + \epsilon_1^{p/2-1}) < 1$$

只要 m, ϵ_1 足够小。根据命题 3.2, $\beta \ge 2$。若 $\beta > 2$, 则

$$(\mu_s^{-1}\epsilon_1)^{\beta/2-1} \frac{\sigma}{(p-1)\lambda} \left(\beta(\beta-1) + 2m\right) + C_4(\epsilon_1^{\beta/2} + \epsilon_1^{\frac{\beta-1}{2}} + \epsilon_1^{p/2-1}) \lesssim \epsilon_1^{\beta/2-1} < 1$$

只要 m, ϵ_1 足够小。若 $\beta = 2$, 则 $\kappa \le \frac{\lambda}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} &(\mu_s^{-1}\epsilon_1)^{\beta/2-1} \frac{\sigma}{(p-1)\lambda} \left(\beta(\beta-1) + 2m\right) + C_4(\epsilon_1^{\beta/2} + \epsilon_1^{\frac{\beta-1}{2}} + \epsilon_1^{p/2-1}) \\ &\le \frac{m+1}{p-1} + C\epsilon_1^{\frac{\beta-1}{2}} < 1 \end{aligned}$$

鉴于 m, ϵ_1 足够小。总之, 我们可以取 m, ϵ_1 充分小, 使得存在 $c_2 \in (0,\ 1)$, 从而使 (5.31) 右端可由以下量控制:

$$\delta(u,v) + c_2\gamma + C_4(\gamma^{p/2} + f(\alpha,\beta,u,v)).$$

因此, 根据 $f(\alpha,\ \beta,\ u,\ v)$的估计并采用与上文类似的推导, 我们可直接得到(5.28)。 □

定理1.3的证明。若情形(I) 成立，则有 $g''(\tilde{t}) > 0$， $\forall\, \tilde{t} \in \mathcal{S}$。由于

$$|b/a - t_0| = \left|\frac{b/\sigma}{a/\sigma} - t_0\right| \lesssim \epsilon_1^{1/2},$$

由 $g''(t_0) > 0$，当 ϵ_1 充分小时，我们有

$$g(b/a) - g(t_0) = \frac{1}{2}g''(t_0)(b/a - t_0)^2 + o((b/a - t_0)^2) \geq \frac{1}{4}g''(t_0)(b/a - t_0)^2,$$

因此，引理 5.1 (若 $t_0 > 0$) 或引理 5.2 (若 $t_0 = 0$) 可得

$$\gamma \lesssim \delta(u, v), \quad (b/a - t_0)^2 \lesssim g(b/a) - g(t_0) \lesssim \frac{\delta(u, v)}{\sigma^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\nabla(u - \sigma w)\|_2^2 + \|\nabla(v - t_0\sigma w)\|_2^2 &= \gamma + (a - \sigma)^2\mu_s + (b - t_0\sigma)^2\mu_s \\ &= \gamma + \frac{a^2\mu_s}{1 + t_0^2}(b/a - t_0)^2 \\ &\lesssim \delta(u, v).\end{aligned}$$

若情形 (II) 发生，由命题 3.3，可知 $\mathcal{S}$ 是一个单元素集，且等于 $\{0\}$、$\{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\}$ 或 $\{\infty\}$ 中的一个。由对称性，不妨设 $\tilde{\mathcal{S}} = \{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\}$ 或 $\mathcal{S} = \{0\}$。

若 $\tilde{\mathcal{S}} = \{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\}$ 发生，令 $t_0 = \sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}$，由命题 3.1， $g^{(i)}(t_0) = 0$ 对 $i = 1$、2、3 以及 $g^{(4)}(t_0) > 0$。因此，当 ϵ_1 充分小时，我们有

$$g(b/a) - g(t_0) = \frac{1}{24}g^{(4)}(t_0)(b/a - t_0)^4 + o((b/a - t_0)^4) \geq \frac{1}{30}g^{(4)}(t_0)(b/a - t_0)^4.$$

因此，当 ϵ_1 足够小时，引理 5.1 给出

$$\gamma \lesssim \delta(u, v), \quad (b/a - t_0)^4 \lesssim g(b/a) - g(t_0) \lesssim \frac{\delta(u, v)}{\sigma^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\nabla(u - \sigma w)\|_2^2 + \|\nabla(v - t_0\sigma w)\|_2^2 &= \gamma + \frac{a^2\mu_s}{1 + t_0^2}(b/a - t_0)^2 \\ &\lesssim \delta(u, v) + \sigma^2\sqrt{\frac{\delta(u, v)}{\sigma^2}} \\ &\lesssim \delta(u, v)^{1/2}(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

这里我们用到以下事实：

$$\sigma = \frac{\int \nabla(u + t_0 v) \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x}{(1 + t_0^2)\mu_s} \lesssim \|\nabla(u + t_0 v)\|_2 \lesssim (\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2)^{1/2}.$$

若 $\tilde{\mathcal{S}} = \{0\}$ 发生，则由 $g''(0) = 0$，命题3.2给出 $g^{(3)}(0) = 0$ 与 $g^{(4)}(0) > 0$。于是，当 ϵ_1 充分小时，

$$g(b/\sigma) - g(0) = \frac{1}{24}g^{(4)}(0)(b/\sigma)^4 + o((b/\sigma)^4) \geq \frac{1}{30}(b/\sigma)^4.$$

因此，引理5.2 给出

$$\gamma \lesssim \delta(u,v), \quad (b/\sigma)^4 \lesssim g(b/\sigma) - g(0) \lesssim \frac{\delta(u,v)}{\sigma^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\|\nabla(u-\sigma w)\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 = \gamma + b^2\mu_s \\ &\lesssim \delta(u,v) + \delta(u,v)^{1/2}k \lesssim \delta(u,v)(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

这里我们利用如下事实：

$$\sigma = \frac{\int \nabla u \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x}{\mu_s} \lesssim \|\nabla u\|_2 \lesssim (\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2)^{1/2}.$$

我们完成证明。 □

注 5.1. 指数 $1/2$ 与 1 在定理 *1.3* 中是尖锐的。

事实上，当 $\mathcal{S} \neq \emptyset$时，命题 *3.3* 表明 $\mathcal{S}$ 是一个单元素集，等于$\{0\}$、 $\{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\}$或 $\{\infty\}$之一。由于情形 $\tilde{\mathcal{S}} = \{0\}$与 $\tilde{\mathcal{S}} = \{\infty\}$之间的对称性，我们不妨假设要么 $\tilde{\mathcal{S}} = \{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\}$要么 $\tilde{\mathcal{S}} = \{0\}$。

定义 t_0 如下：

$$t_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}, & if\ \tilde{\mathcal{S}} = \left\{\sqrt{\frac{2-\beta}{2-\alpha}}\right\}, \\ 0, & if\ \tilde{\mathcal{S}} = \{0\}. \end{cases}$$

根据命题*3.1* 和*3.2*，我们得到如下展开：

$$g(t) = g(t_0) + \frac{g^{(4)}(t_0)}{24}(t-t_0)^4 + o((t-t_0)^4).$$

现在，令 $(u,v) = (aw, bw)$，其中 $(a,b) = (1, t_0+\varepsilon)$，其中 $w \in \mathcal{M}'$ 且 $\|w\|_{(s)} = 1$。定义 $\sigma = \frac{a+t_0 b}{1+t_0^2}$。那么，当 ε 充分小时，我们有：

$$\begin{aligned}\inf_{(U_0,V_0)\subset\mathcal{M}'} \left[\|\nabla(u-U_0)\|_2^2 + \|\nabla(v-V_0)\|_2^2\right] &= (a-\sigma)^2\mu_s + (b-t_0\sigma)^2\mu_s \\ &= \frac{a^2\mu_s}{1+t_0^2}(b/a - t_0)^2 \\ &= O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\delta(u,v) &= (a^2+b^2)\mu_s - g(t_0)\mu_s(\lambda a^p + \mu b^p + \kappa p a^\alpha b^\beta)^{2/p} \\ &= \mu_s(g(b/a) - g(t_0))(\lambda a^p + \mu b^p + \kappa p a^\alpha b^\beta)^{2/p} \\ &= \mu_s(\lambda a^p + \mu b^p + \kappa p a^\alpha b^\beta)^{2/p}\left(\frac{g^{(4)}(t_0)}{24}(b/a-t_0)^4 + o((b/a-t_0)^4)\right) \\ &= O(\varepsilon^4).\end{aligned}$$

因此，在**情形 (II)**中，指数 $1/2$ 是尖锐的。

˜对于**情形 (I)**，即 $\mathcal{S}=\emptyset$，任取 $t_0\in\mathcal{S}$。由对称性，不妨设 $0\le t_0<\infty$。于是我们得到如下展开：

$$g(t)=g(t_0)+\frac{g''(t_0)}{2}(t-t_0)^2+o((t-t_0)^2).$$

取$(u,v)=(aw,bw)$，其中$(a,b)=(1,t_0+\varepsilon)$。按照与前面类似的计算，我们得到：

$$\delta(u,v)=O(\varepsilon^2),$$
$$\inf_{(U_0,V_0)\subset\mathcal{M}}\left[\|\nabla(u-U_0)\|_2^2+\|\nabla(v-V_0)\|_2^2\right]=O(\varepsilon^2).$$

这表明指数1 是尖锐的。

推论 1.1 的证明。 关键思路是 [20, 21] 中的变换。对于

$$u,v\in\{u\in L^{2^*(s)}(\mathbb{R}^N,|x|^{-(N-s)(1-\ell)-s}\,\mathrm{d}x):\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^N,|x|^{-(N-2)(1-\ell)}\,\mathrm{d}x)\},$$

令 $\tilde{u}(x)=\tilde{u}(r\theta):=\ell^{1/2}u(r^{1/\ell}\theta)$，$\tilde{v}(x):=\ell^{1/2}v(r^{1/\ell}\theta)$，则

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\tilde{u}|^2\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_0^\infty(|\nabla_r\tilde{u}|^2+r^{-2}|\nabla_\theta\tilde{u}|^2)r^{N-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\ell\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_0^\infty(\ell^{-2}r^{2/\ell-2}|\nabla_r u|^2(r^{1/\ell}\theta)+r^{2/\ell}|\nabla_\theta u|^2(r^{1/\ell}\theta))r^{N-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_0^\infty(|\nabla_r u|^2+\ell^2r^{-2}|\nabla_\theta u|^2)r^{(N-1)\ell+1-\ell}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&\le\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_0^\infty(|\nabla_r u|^2+r^{-2}|\nabla_\theta u|^2)r^{(N-2)(\ell-1)+N-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\quad(\text{since }\ell<1)\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-(N-2)(1-\ell)}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{5.32}$$

并且，(5.32) 取等式当且仅当 u 是径向的。类似地，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x|^s}|\tilde{u}|^p\,\mathrm{d}x&=\ell^{p/2}\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_0^\infty|u(r^{1/\ell}\theta)|^pr^{-s+N-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\ell^{p/2+1}\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_0^\infty|u(r\theta)|^pr^{(-s+N-1)\ell+\ell-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\ell^{p/2+1}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-(N-s)(1-\ell)-s}|u|^p\,\mathrm{d}x,\\
\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x|^s}|\tilde{u}|^\alpha|\tilde{v}|^\beta&=\ell^{p/2+1}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-(N-s)(1-\ell)-s}|u|^\alpha|v|^\beta\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\delta(\tilde{u},\tilde{v})\\
&\le\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-(N-2)(1-\ell)}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x\\
&\quad-S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}\ell^{2/p+1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-(N-s)(1-\ell)-s}(\lambda|u|^p+\mu|v|^p+\kappa p|u|^\alpha|v|^\beta)\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}\\
&=\delta_\ell(u,v).
\end{aligned}\tag{5.33}$$

由 $\delta(\tilde{u},\tilde{v}) \geq 0$，我们得到 (1.10)。同时，我们可以通过 (1.1) 的极小化子推导出 (1.10) 的极小化子：若 $\delta_\ell(u,v) = 0$，则 $\delta(\tilde{u},\tilde{v}) = 0$ 且 $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \mathcal{M}'$，这意味着 $(u,v) \in \mathcal{M}'_\ell$。另一方面，若 $(u,v) \in \mathcal{M}'_\ell$，则它们是径向的，且 (5.32) 取等式，这意味着 $\delta_\ell(u,v) = \delta(\tilde{u},\tilde{v}) = 0$。证明还给出了最佳常数 $S_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}\ell^{2/p+1}$。

由（5.32），我们还可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^\infty (|\nabla_r u|^2 + \ell^2 r^{-2} |\nabla_\theta u|^2) r^{(N-1)\ell+1-\ell} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &\geq \ell^2 \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^\infty (|\nabla_r u|^2 + r^{-2} |\nabla_\theta u|^2) r^{(N-2)(\ell-1)+N-1} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \ell^2 \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{5.34}$$

因此，对于情形 **(I)**，由定理 1.3 以及（5.33）-（5.34），

$$\begin{aligned}&\inf_{(U_0,V_0)\in\mathcal{M}'_\ell} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)} (|\nabla(u-U_0)|^2 + |\nabla(v-V_0)|^2) \,\mathrm{d}x \\ &\leq \ell^{-2} \inf_{(\tilde{U}_0,\tilde{V}_0)\in\mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\tilde{u}-\tilde{U}_0)|^2 + |\nabla(\tilde{v}-\tilde{V}_0)|^2) \,\mathrm{d}x \\ &\leq \ell^{-2} C\delta(\tilde{u},\tilde{v}) \\ &\leq \ell^{-2} C\delta_\ell(u,v).\end{aligned}$$

对于情形**(II)**，由定理1.3以及（5.32）-（5.34），

$$\begin{aligned}&\inf_{(U_0,V_0)\in\mathcal{M}'_\ell} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(1-\ell)} (|\nabla(u-U_0)|^2 + |\nabla(v-V_0)|^2) \,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \,\mathrm{d}x} \\ &\leq \ell^{-2} \inf_{(\tilde{U}_0,\tilde{V}_0)\in\mathcal{M}'} \frac{\|\nabla(\tilde{u}-\tilde{U}_0)\|_2^2 + \|\nabla(\tilde{v}-\tilde{V}_0)\|_2^2}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \,\mathrm{d}x} \\ &\leq \ell^{-2} C \frac{\delta(\tilde{u},\tilde{v})^{1/2} (\|\nabla\tilde{u}\|_2^2 + \|\nabla\tilde{v}\|_2^2)^{1/2}}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \,\mathrm{d}x} \\ &\leq \ell^{-2} C \left(\frac{\delta_\ell(u,v)}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)(\ell-1)} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \,\mathrm{d}x} \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

□

声明

数据可用性声明。 本文不涉及数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

竞争利益。 作者声明不存在需要披露的相关财务或非财务利益。

作者贡献。 所有作者对本文的撰写贡献相同。所有作者均已阅读并批准最终稿。

参考文献

[1] T. Aubin, 等周问题与索伯列夫空间，《微分几何杂志》，第 *11* 卷，*1976* 年。[2] G. Bianchi and H. Egnell, 关于索伯列夫不等式的一则注记，《函数分析杂志》，第 *100* 卷，第 *18–24* 页，*1991* 年。[3] M. Bonforte, J. Dolbeault, B. Nazaret, and N. Simonov, *Gagliardo-Nirenberg-Sobolev* 不等式的稳定性：流、正则性与熵方法，美国数学会回忆录，第 *308* 卷，第 *1554* 号，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，*2025* 年。[4] H. Brezis and E. H. Lieb, 带余项的索伯列夫不等式，《函数分析杂志》，第 *62* 卷，第 *73–86* 页，*1985* 年。[5] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, 带权的一阶插值不等式，《数学汇刊》，第 *53* 卷，第 *259–275* 页，*1984* 年。[6] E. A. Carlen and A. Figalli, *GNS* 不等式与对数 *Hardy-Littlewood-Sobolev* 不等式的稳定性及其在临界质量 *Keller-Segel* 方程中的应用，《杜克数学杂志》，第 *162* 卷，*2013* 年。[7] C. Cazacu, J. Flynn, N. Lam, and G. Lu, *Caffarelli-Kohn-Nirenberg* 恒等式、不等式及其稳定性，《纯粹与应用数学杂志》，第 *182* 卷，第 *253–284* 页，*2024* 年。[8] S. Chen, R. Frank, and T. Weth, 分数阶索伯列夫不等式中的余项，《印第安纳大学数学杂志》，第 *62* 卷，第 *1381–1397* 页，*2013* 年。[9] A. Cianchi, 有界变差函数上的定量索博列夫不等式，《函数分析杂志》，第 *237* 卷，第 *466–481* 页，*2006* 年。[10] A. Cianchi, N. Fusco, F. Maggi, and A. Pratelli, 高斯空间中的等周亏量，《美国数学杂志》，第 *133* 卷，第 *131–186* 页，*2011* 年。[11] H. Egnell, 锥中的半线性方程正解，《美国数学会汇刊》，第 *330* 卷，第 *191–201* 页，*1992* 年。[12] A. Figalli, F. Maggi, and A. Pratelli, 定量等周不等式的质量输运方法，《数学新进展》，第 *182* 卷，第 *167–211* 页，*2010* 年。[13] A. Figalli, 有界变差函数上的各向异性索伯列夫不等式与对数索伯列夫不等式的尖锐稳定性定理，《数学进展》，第 *242* 卷，第 *80–101* 页，*2013* 年。[14] A. Figalli and D. Jerison, *Brunn–Minkowski* 不等式的定量稳定性，《数学进展》，第 *314* 卷，第 *1–47* 页，*2017* 年。[15] A. Figalli and Y. R.-Y. Zhang, 索伯列夫不等式的尖锐梯度稳定性，《杜克数学杂志》，第 *171* 卷，*2022* 年。

[16] A. Figalli, P. van Hintum, and M. Tiba，通过最优质量输运证明 *Brunn–Minkowski* 不等式的尖锐稳定性，*arXiv:2407.10932*。[17] N. Fusco, F. Maggi, and A. Pratelli，有界变差函数的尖锐定量索伯列夫不等式，《函数分析杂志》，第 *244* 卷，第 *315–341* 页，*2007* 年。[18] F. Gazzola and T. Weth，高阶索博列夫不等式中的余项，《数学档案》，第 *95* 卷，第 *381–388* 页，*2010* 年。[19] N. Ghoussoub and X. S. Kang，带边界奇点的 *Hardy–Sobolev*临界椭圆方程，《亨利·庞加莱研究所年刊 *C* 辑：非线性分析》，第 *21* 卷，第 *767–793* 页，*2004* 年。[20] T. Horiuchi，权为到原点距离的幂的加权索博列夫不等式的最佳常数，《不等式与应用杂志》，第 *1997* 卷，文章号 *878396*，*1997* 年。[21] N. Lam and G. Lu，一类 *Caffarelli-Kohn-Nirenberg* 不等式的尖锐常数与极值函数，《高级非线性研究》，第 *17* 卷，第 *457–480* 页，*2017* 年。[22] E. H. Lieb，*Hardy–Littlewood–Sobolev* 不等式及相关不等式的尖锐常数，《数学年刊》，第 *118* 卷，第 *349–374* 页，*1983* 年。[23] R. Neumayer，关于索伯列夫不等式强形式稳定性的一则注记，《变分法与偏微分方程》，第 *59* 卷，文章号 *25*，*2020* 年。[24] V. D. Rădulescu, D. Smets, and M. Willem，带余项的 *Hardy-Sobolev*不等式，《非线性分析中的拓扑方法》，第 *20* 卷，文章号 *145*，*2002* 年。[25] D. Smets and M. Willem，若干椭圆变分问题的部分对称性与渐近行为，《变分法与偏微分方程》，第 *18* 卷，第 *57–75* 页，*2003* 年。[26] G. Talenti，索伯列夫不等式的最佳常数，《纯粹与应用数学年刊》，第 *110* 卷，第 *353–372* 页，*1976* 年。[27] J. Wei and Y. Wu，*Caffarelli-Kohn-Nirenberg* 不等式的稳定性：极小化子的存在性，《数学杂志》，第 *308* 卷，文章号 *64*，*2024* 年。[28] Y. Zhang, Y. Zhou, and W. Zou，分数阶索博列夫迹不等式的尖锐定量稳定性，《数学杂志》，第 *310* 卷，文章号 *90*，*2025* 年。[29] X. Zhong，涉及临界*Hardy-Sobolev*指数的非线性椭圆方程与方程组的解，[清华大学，博士学位论文]。中国知网（*CNKI*），*2015* 年。[30] X. Zhong and W. Zou，关于双变量不等式及涉及临界 *Hardy-Sobolev*指数的椭圆方程组，*arXiv:1711.10477*。[31] Y. Zhou and W. Zou，*Caffarelli-Kohn-Nirenberg* 不等式的定量稳定性，*arXiv:2312.15735*。