置换群与对称 Hecke 代数

何家伟和**李晓刚***

摘要

传递置换群的置换模的自同态代数称为 Hecke 代数，是表示论中的基本对象。众所周知，群代数在任意域上都是对称的，因此自然会问，这一性质是否也适用于 Hecke 代数。为研究这一问题，我们引入了新的概念：p-S-置换群（其中p为素数）和S-置换群。p-S-置换群 是指其相应 Hecke 代数在每个特征为p的域上都对称的传递置换群。S-置换群 是指对所有素数p而言均为p-S-置换群的传递置换群。本文从群论视角研究 Hecke 代数，并证明若干类置换群在我们的意义下是p-S-置换群和S-置换群。这一结果大幅拓展了李晓刚和何家伟此前的工作（Transform Groups，30(4)，2025），并将确定代数 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$何时对称的问题置于一个更一般的理论框架中。

arXiv:2602.03193v1 [math.RT] 3 Feb 2026

1 引言

置换群理论历史悠久，声誉卓著，至少可以追溯到伽罗瓦时代。当时，伽罗瓦利用根的置换，解决了多项式方程能否通过根式求解的问题。著名的凯莱定理表明，每个抽象群都可以实现为一个置换群，因此从代数结构的角度看，抽象群与置换群并无区别。然而，置换群理论本身也颇具研究价值，因为传递性、本原性和点稳定子等概念在抽象群理论中都没有对应物。此外，置换群在数学的其他分支中也发挥着重要作用，包括图论、伽罗瓦理论和函数论。与置换群理论密切相关的是G-集合的概念，即一个配备了群G作用的集合 Ω。由此诱导的置换群记作 Ω上的G^{Ω}。对于群代数KG 和KG^{Ω}上的置换模$K\Omega$，有 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong \mathrm{End}_{KG^{\Omega}}(K\Omega)$。若$G$ 在 Ω 上的作用是传递的，且点稳定子为H，则 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 可自然地与 Hecke 代数$\mathcal{H}_K(G,H)$ 等同（该记号的定义见第 2 节）。由此建立了 Hecke 代数与传递置换群的置换模自同态代数之间的关系。

代数 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 在数学的许多分支中都有应用。利用这一族代数，舒尔 [28] 成功证明，任何包含复合阶正则子群的本原置换群必为 2-传递。在组合学中，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 在结合方案 [34] 和相干构形 [28]的框架下被视为中心化子环加以研究；这类研究是分析图及其相关自同构群不可或缺的一部分。在有限群表示论中，阿尔珀林 [2] 提出研究自同态代数 $\mathrm{End}_{KG}(K(G/P))$，以此作为解决阿尔珀林权重猜想的一种途径，其中 P 表示G的 Sylow$p$子群。在此框架基础上，格林 [13] 构造了一个双射，将 $K(G/P)$ 的根基中所含的单模与 $\mathrm{End}_{KG}(K(G/P))$ 的单模对应起来，前提是 $\mathrm{End}_{KG}(K(G/P))$ 是自内射的。基于格林的结果，Cabanes [6]验证了阿尔珀林权重

* 通讯作者。电子邮件：2200501002@cnu.edu.cn。2020年数学主题分类：主要分类 20C08，次要分类 20C05。关键词：置换群；Hecke 代数；舒尔环；对称代数。

猜想对所有具有分裂*BN*-对的有限群 G 均成立。在特殊函数经典理论以及微分几何中的黎曼对称空间理论中，寻找盖尔范德对 (G,H)（由一个群G和一个子群 H组成）是一项持续进行的研究计划；这等价于在给定群 G 中寻找子群 H，使得对任意域 K，Hecke 代数 $\mathrm{End}_{KG}(K(G/H))$ 都是交换的。尽管 L. Scott 在 [29] 中致力于为模群代数发展 Brauer 主定理的类似结果，且关于经典 Hecke 代数和群代数的研究文献浩繁，抽象 Hecke 代数 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 的表示论仍鲜为人知。值得注意的是，任意域上的群代数总是对称代数，而对称代数是表示论中至关重要的一类代数。本研究旨在确定群代数这一优良性质在多大程度上能够推广到 Hecke 代数 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$；为此，本研究的一项重要目标是刻画那些相应的 Hecke 代数 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 为对称代数的传递置换群。

在一项近期研究中， [19], A. Kleshchev 探讨了对称代数的极大对称子代数，为分析 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 在对称代数范畴中作为子对象时的子结构提供了新的视角。在 [10], Kevin Coulembier 及其合作者研究了张量范畴和与代数群相关的 Verlinde 范畴中的有限对称代数，从而建立了一个系统的理论框架，用于在更一般的范畴背景下研究 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 的对称性。$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 本身是否具有对称代数的结构，很大程度上取决于域K的特征。关于这一方向的初步结果见 [23],，其中证明了：若满足以下任一条件，则 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 是域K 上的对称代数，其中域的特征为p：

(1) G 是本原置换群， $|\Omega| < 6p$ 且 $(p\ |\Omega|) \neq (5,25)$；

(2) G 是拟本原置换群，且 $|\Omega| < 4p$。

为了进一步推进这项研究，并以更一般的方式探讨它们之间的关系，我们引入以下定义。

定义 1.1. 若集合 Ω 上的传递置换群 G 满足：对于特征为p的每个域 K，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 都是对称代数，则称其为p-S-置换群（其中p为素数）。若G 对所有素数p都是p-S-置换群，则简称G为S-置换群。

[23] 的主要结果及其推论表明，度为n 的本原置换群在$p >_n 6$ 且 $(p,n) \neq (5,25)$ 时是p-S-置换群；度为n 的拟本原置换群在$\bar{p} >_n 4$ 时是p-S-置换群。S-置换群的典型例子包括 2-传递置换群和正则置换群。回顾一下，正则置换群是点稳定子平凡的传递置换群。

另一方面，置换群理论已经取得了许多卓越成果。一个众所周知的例子是 O'Nan-Scott定理，它将所有本原群划分为若干个族。关于如何刻画秩、度或点稳定子受到限制的置换群，已有大量富有成果的研究。这些结果在我们的研究中具有很大的应用潜力。因此，我们特别关注那些已得到广泛研究的置换群。本文从群论的角度研究 Hecke 代数，并给出若干充分条件，以判定一个置换群是否为p-S-置换群或S-置换群。

在陈述主要结果之前，我们先回顾置换群的一些基本记号。设$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$。我们称群$G$为：

传递：若G恰有 y 在 Ω上有一个轨道；
1 2-传递 （或半传递）：如果 Ω 上所有G-轨道的基数相同；3 2-传递：如果
G是传递的，且点稳定子G_α在 $\Omega \setminus \{\alpha\}$ 上半传递；

2-传递：如果G_α在 $\Omega\setminus\{\alpha\}$ 上传递，或者等价地，G 在 Ω 的不同元素构成的有序对集合上传递作用。

在分类 3 2-传递置换群的背景下，近期进展已确立此类群可分为六个族：2-传递群、Frobenius群、1维仿射群、AGL(2，q) 的仿射可解子群、特殊射影线性群 PSL(2，q)，以及射影半线性群 PΓL(2，q)，其中 $q=2^p$ 为素数p。我们将证明，任何 3 2-传递置换群必然是一个*S*-置换群。

The 以下是我们的主要结果（对于未作解释的记号，请参阅第 2 节).

定理 1.2. 设 G 是集合 Ω 上的一个传递置换群，该集合的基数为 n。则以下结论成立。

(1) 设 p 为素数。若满足以下条件之一，则 G 是一个 p-*S*-置换群：$(i)G$ 的所有子度均与 p 互素；(ii) 对于 G 的任意非平凡子阶 m，$p\nmid |G|\,nm$；$(iii)G$ 有一个阿贝尔正则 p'-子群；$(iv)\,n<2p$；$(v)\,p\nmid n$ 且 G 的秩为3；(vi) $\Omega=G(q)/\mathcal{P}$ 且 G 是由 $G(q)$ 在Ω上的右乘所诱导的置换群，其中 $G(q)$ 是一个特征为 $q\neq p$ 的有限群，具有分裂 *BN*-对，且 $\mathcal{P}$ 是 $G(q)$ 的一个抛物子群，使得 $p\nmid|\mathcal{P}:B|$。

(2) 若群 G 满足以下条件之一，则称 G 为 *S*-置换群：

(1) G 是一个 *3 2*-传递置换群；*(2)* G 含有一个阶为两个不同素数之积的循环正则子群；*(3)* G 含有一个阿贝尔正则子群，其阶与 G 的每个次轨道长度互素；*(4)* G 是一个次轨道长度为 $1\le a<b$ 的秩 *3* 置换群，且 $gcd(a+b+1, ab\ \lambda(G), b-\lambda(G)b\ a)=1$（$\lambda(G)$ 的定义见注 *3.8*）；*(5)* G 是一个阶不被 *8* 整除的二面体群；*(6)* $\Omega=G(q)/B$，且 G 是由 $G(q)$ 在 Ω 上的右乘所诱导的置换群，其中 $G(q)$ 是一个特征为 q、具有分裂 *BN*-对的有限群，并且 $W_G\ncong S_3$ 的秩为 *2*。

本文结构安排如下。第 2 节将介绍基本记号，回顾基本定义和术语，并汇集后续证明所需的若干预备引理。第 3 节将给出定理 1.2 的证明。第 4 节将给出两个例子，以说明我们的主要结果。第 5 节将提出若干有待未来研究的开放问题。其中一个有趣的问题是确定哪些群上的所有舒尔环都是对称代数。

2 预备知识

本节确立记号，回顾基本定义和术语，并给出后续证明所需的若干预备引理。

2.1 记号与术语

设K 为任意域，其单位元为 1_K。除非另有说明，本文中的群均为有限群，模均为有限维右模。设A 为一个K-代数。所有有限维右A-模构成的范畴记为A-mod。对于A的任意代数自同构群，A 中由H作用的不动点构成的子代数记为A^H。

设 Ω 为有限集，G 为有限群。符号 $|\Omega|$ 和 $|G|$ 分别表示 Ω 的基数和群 G 的阶。对于素数 p，如果 $|G|$ 是 p 的幂（分别是 $p \nmid |G|$），则称群 G 为 p-群（分别称为 p′-群）。$H < G$ 和 $H \leq G$ 分别表示 H 是 G 的真子群和子群；我们用 $|G : H|$ 表示 H 在 G 中的指数。对于有限群 G 及其子群 H，我们用 K_H 表示平凡的 KH-模。对于 KH-模 M，我们将诱导模记为 $M_H^G := M \otimes_{KH} KG$。对于 KG-模 N，$N_H$ 表示 N 限制为 KH-模。对于两个 KG-模 M 和 N，$M \mid N$ 表示 M 同构于 N 的一个直和项（作为 KG-模）。关于有限群模表示的 Green 理论，例如不可分解模的顶点和 Green 对应，请参阅 [1]。

设 $\Omega := \{1, 2, \ldots, n\}$ 为一个有限集。我们分别用 A_n 和 S_n 表示 Ω 上的交错群与对称群。全文中，我们用 1_Ω 表示笛卡尔积 $\Omega \times \Omega$ 的对角子集，它由 $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$给出。对于子集 $\Delta \subseteq \Omega$，我们用 1_Δ表示 $\Delta \times \Delta$ 中由 $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$组成的对角子集。对于子集 $r \subseteq \Omega \times \Omega$和元素 $\gamma \in \Omega$，我们定义

$$r^* := \{(\beta, \alpha) \mid (\alpha, \beta) \in r\}, \quad \gamma r := \{\delta \in \Omega \mid (\gamma, \delta) \in r\}, \quad \text{and} \quad \Omega(r) := \{\alpha \in \Omega \mid \alpha r \neq \emptyset\}.$$

设 $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ 为一个传递置换群，其中我们用 $\mathrm{Sym}(\Omega)$ 表示非空集合 Ω 上的对称群。我们把点 $\alpha \in \Omega$ 的点稳定子记为 G_α，并把 G_α-轨道的基数称为 G 的**子度** 。群 G 是本原的，如果G的每个点稳定子都是G的极大子群。 Ω 的K-线性张成记为 $K\Omega$，并按如下方式成为一个KG-模（称为**自然** KG-模）：

$$\Big(\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \alpha\Big) \cdot g := \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha (\alpha \cdot g), \quad , \forall\, g \in G,\ \forall\ \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \alpha \in K\Omega.$$

对于任意非空子集 $X \subseteq G$，我们将 X 的**和元素** 定义为 $X = \sum_{x \in X} x$。固定一个点 $\alpha \in \Omega$，并令 $H = G_\alpha$ 为它的点稳定子。于是可直接验证，$K\Omega \cong HKG$ 作为 KG-模成立。此外，令 p 表示 K 的特征。如果 $p \nmid |G : H|$，则 HKG 具有如下分解

$$\underline{H}KG = \underline{G}KG \oplus \big(\underline{H} - [G : H]^{-1}\underline{G}\big) KG.$$

这一分解表明，只要 $p \nmid |G|$，$K_G \cong G\underline{K}\underline{G}$ 就是 $K\Omega$ 的一个直和项。本文将始终使用这一事实，而不再特别说明。

对于正整数 n，我们用 $M_n(K)$ 表示 $n \times n$ 阶全矩阵代数（定义在 K 上）；进一步，用 $P_n(K)$ 表示 $M_n(K)$ 中置换矩阵的集合。对于 $1 \leq i, j \leq n$，矩阵单位 $e_{ij} \in M_n(K)$ 是一个在 (i, j) 项为 1、其余位置为 0 的矩阵。对于置换 $\sigma \in S_n$，相应的置换矩阵为 $\sum_{j=1}^n e_{j\,\sigma(j)}$。

2.2 切瓦莱群与具有分裂型BN-对的群

设 $\mathfrak{g}$ 是一个具有根系 Φ 的有限维复单李代数。在 [9] 中，切瓦莱发现 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{g}$的给定嘉当分解至少有一个良好的基，称为**切瓦莱基**。该基的 $\mathbb{Z}$-张成是 $\mathfrak{g}$的一个李子代数，记为 $\mathfrak{g}_0$。给定任意域 K，切瓦莱在 [9]

中构造了李代数 $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} K$ 的自同构群中的一个群，称为与 $(\mathfrak{g}, K)$ 相关联的*Chevalley* 群。令 GF(q) 为一个含有 q 个元素的有限域。我们将 $G(\mathfrak{g}, \mathrm{GF}(q))$ 简记为 $G(\mathfrak{g}, q)$。素数幂对应的切瓦莱群 $G(\mathfrak{g}, q)$ 是李型有限单群，只有极少数例外。它们包括四个线性单群系列：PSL(n, q)（射影特殊线性群）、PSU(n, q)（射影特殊酉群）、PSp(n, q)（射影辛群），以及 $\mathrm{P}\Omega^{\varepsilon}(n, q)$，其中 $\varepsilon = \pm 1$。下表列出了例外（未扭曲）切瓦莱群。

群	秩	备注
$G_2(q)$	2	$q = 3^{2n+1}$
$F_4(q)$	4	$q = 2^{2n+1}$
$E_6(q)$	6	$q = 2^{2n+1}$
$E_7(q)$	7	
$E_8(q)$	8	

*BN*对的概念源于蒂茨在 [33]中的工作。它们不仅对切瓦莱群的研究有用，而且也与其他类型的经典单群有关。

定义 2.1. 群 G 的一对子群 B、N 称为特征 p 的 *BN*对，如果满足以下公理：

设 BN 对由 G、B、N 构成，其中 B、$N \leqslant G$。$H = B \cap N$ 是 N 的正规子群。$W = N/H$ 由对合 w_i（$i \in I$）生成，w_i 的一个原像记为 w_i。对于任意 $n \in N$ 和任意 $i \in I$，$Bw_iB \cdot BnB = Bw_inB \cup BnB$，且 $Bw_iB \neq B$。

如果满足以下附加条件，则称该 BN 对是特征 p 下的分裂 BN 对：

H 是阿贝尔 p-群，且 B 有一个正规 p-子群 U，使得 $B = U\ H$。

设 G 是一个具有特征 p 下分裂 BN 对的有限群。BN.3 中的群 W 通常称为 G 的 Weyl 群，记作 W_G。B 的任一共轭子群称为 G 的一个 Borel 子群，而任何包含 Borel 子群的子群都称为 G 的一个抛物子群。有限群中具有分裂 BN 对的一个经典例子是有限域上的一般线性群，其中其上三角矩阵子群和单项矩阵子群（即每行每列都只有一个非零元素的矩阵）构成一个分裂 BN 对。众所周知，任意有限 Chevalley 群 $\mathrm{G}(\mathfrak{g},''')$ 都具有特征 p 下的分裂 BN 对（例如参见第 8]章。

以下结果最初由 N. Tinberg 在 [32] 中证明。

引理 2.2. 设 G 是一个在特征 p 下具有分裂 *BN*-对的有限群，K 是一个特征为 p 的域。那么 $\mathrm{End}_{KG}(K(G/U))$ 是一个 *Frobenius* 代数。

2.3 Hecke 代数

Hecke 代数的研究源于 E. HECKE 于 1937 年关于椭圆模形式空间自同态的工作 [15]。抽象 Hecke 代数和 Hecke 对的概念后来由 G. SHIMURA 在 1959 [30] 中引入。Hecke 代数与经典群的表示论密切相关，现有文献大多集中于特征为零的域上的 Hecke 代数及其变形。然而，在本文中，我们将在适合研究目的的背景下引入并研究抽象 Hecke 代数。

定义 2.3。 设 G 为一个群（不一定有限），H 为其子群。若对于任意 $g \in G$，双陪集 HgH 都可分解为有限个 H 的左陪集以及有限个 H 的右陪集，则称对 (G, H) 为一个 *Hecke* 对。

显然，只要 H 是有限子群，(G, H) 就总是一个 Hecke 对。设 R 为交换环，且 (G, H) 是一个 Hecke 对。设 $T = \{t_1, t2, \cdots, t_i, \cdots\}$ 是 H 在 G 中的一个右横截系，并设 $T_0 = \{t\, j_1, t\, j2, \cdots, t\, j_k, \cdots\}$ 是 G 中 (H, H)-双陪集的一组代表元。令 $H_R(G, H) = \mathrm{span}_R\{Ht\, j_k H \mid t\, j_k \in T_0\}$，它是一个自由 R-模，其基为 G 中所有 (H, H)-双陪集。

另一方面，G 中 H 的所有右陪集的 R-线性张成自然构成一个 RG-模。自同态环 $\mathrm{End}_{RG}(R(G/H))$ 中的任意元素 φ 都由它在陪集 H 上的作用唯一确定，即对所有 $g \in G$，都有 $(Hg)\varphi = (H)\varphi \cdot g$。特别地，对所有 $h \in H$，都有 $(H)\varphi \cdot h = (H)\varphi$。对于任意 $t_{j_k} \in T_0$,，设 φj_k 是 $\mathrm{End}_{RG}(R(G/H))$ 中满足 $(H)\varphi j_k = \sum_{t_i \in T \cap Ht_{j_k}H} Ht_i$ 的唯一元素。那么显然，所有 φ_{j_k}（其中 $t\, j_k$ 遍历 T_0 中的元素）构成 $\mathrm{End}_{RG}(R(G/H))$ 的一个 R-基。现在有如下 R-模同构

$$\phi : \mathcal{H}_R(G,H) \to \mathrm{End}_{RG}(R(G/H)),\ \sum_{t_{j_k} \in T_0} a_{j_k} H t_{j_k} H \mapsto \sum_{t_{j_k} \in T_0} a_{j_k} \varphi_{j_k}.$$

定义 2.4。 自由 *R*-模 $\mathcal{H}_R(G, H)$ 上的乘法定义为 $x \cdot y := ((x)\phi \cdot (y)\phi)\phi^{-1}$，对所有 $x, y \in \mathcal{H}_R(G,H)$ 均成立。由此得到一个 *R*-代数，称为与 *Hecke* 对 (G,H) 相关联的 *R* 上的 *Hecke* 代数。

设 H 是群 G 的一个子群。G 中 H 的核记作 H_G，定义为其所有共轭子群 $H^G = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ 的交。显然，H_G 是 G 的正规子群。于是下面的陈述显而易见。

引理 2.5。 设 (G,H) 是一个 *Hecke* 对。那么，$(G/H_G, H/H_G)$ 也是一个 *Hecke* 对，并且 *Hecke* 代数 $\mathcal{H}_R(G,H)$ 与 $\mathcal{H}_R(G/H_G, H/H_G)$ 在任意交换环 R 上同构。

G/H_G 在 H/H_G 的右陪集上的右乘是核自由的，因此 G/H_G 可视为作用在 H/H_G 的右陪集上的传递置换群。这建立了 Hecke 代数与传递置换群的置换模自同态代数之间的关系。

以下结果最初由 Iwahori 在 [18,定理 3.2]中证明。

引理 2.6. 设 $G = G(\mathfrak{g}, q)$ 是一个具有 *Borel* 子群 B 的有限 *Chevalley* 群。假设 K 是一个域，使得 $q \cdot 1_K$ 是一个可逆元素。则 $\mathcal{H}_K(G, B) \cong K\mathcal{W}_G$ 作为代数。

该结果可以推广到任意具有分裂 *G BN*-对的有限群，而不必局限于切瓦莱群。

引理 2.7。 设 G 是一个具有特征 q 下的分裂 *BN*-对的有限群。假设 K 是一个域，其中 $q \cdot 1_K$ 是可逆元素。那么 $\mathcal{H}_K(G,B) \cong K\mathcal{W}_G$ 作为代数。

2.4 相干代数与舒尔环

2.4.1 相干代数

在本小节中，我们介绍相干代数的概念。

为了介绍相干代数，我们需要先了解相干构形的概念。相干构形定义为一对 $\mathcal{C} = (\Omega, S)$，其中 S 划分 $\Omega \times \Omega$，并满足以下条件：

(1) $1_\Omega \in S^\cup$，其中 $S^\cup$ 的元素是来自 S 的某些元素的并，(2) $S^* = S$，其中 S^* :

$= \{r^* \mid r \in S\}$,

(3) 对任意$r,s,t \in S$，数$C_{rs}^{t} := |\alpha r \cap \beta s^{*}|$不依赖于$(\alpha,\beta) \in t$的选取，此处$|\alpha r \cap \beta s^{*}|$是$\gamma \in \Omega$的个数，使得$(\alpha,\gamma) \in r, (\gamma,\beta) \in s$。

集合S中的每个元素都称为一个基本集。对于任意$\delta \in \Omega(s)$，正整数$|\delta s|$等于交数$c^{1_{\Omega(s)}}{}_{ss^{*}}$，因此不依赖于$\delta$的选择，我们称其为$s$的价。由[8],可得以下等式：

$$|t|C_{rs}^{t^{*}} = |r|C_{st}^{r^{*}} = |s|C_{tr}^{s^{*}}, \quad r,s,t \in S.$$

对于置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$，可以按 [8, 第 2]章所述，将相干构形 Inv(G Ω)与之关联。其基本关系集合恰好由G在$\Omega \times \Omega$上的作用的所有 2-轨道组成。若关系$s \in \mathrm{Orb}(G\ \Omega^{2})$满足：对于某个（因而对于所有）$\alpha \in \Omega$，有$(\alpha,\alpha) \in s$，则称其为自反的。

现在令$A_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}) := \mathbb{Z}S$为以$S$中的元素为基的自由 $\mathbb{Z}$-模。通过在基元素上定义乘法如下，使其成为一个环：

$$r \cdot s := \sum_{t \in S} c_{rs}^{t} t \qquad (r,s \in S),$$

并将其线性扩张到$A_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C})$的所有元素。对于交换环$R$，代数$A_R(\mathcal{C}) = A_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$称为与$\mathcal{C}$相关联的$R$-相干代数。 $\mathbb{C}$-相干代数最初由 D. Higman[16],在研究拟对称设计时提出。

以下结果说明了K-相干代数在研究置换群的置换模的自同态代数时的重要性。

引理 2.8. 设 G 是集合 Ω 上的一个置换群（不一定是传递的）。那么对于任意交换环 R，都存在一个同构$\mathrm{End}_{RG}(R\Omega) \cong A_R(\mathcal{C})$，其中$\mathcal{C} = (\Omega, S)$，而 S 是 G 在 $\Omega \times \Omega$ 上诱导的对角作用的轨道集合。

不失一般性，我们可以取 Ω 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$。那么K-相干代数$A_K(\mathcal{X})$ 可以如下实现为矩阵代数$M_n(K)$ 的子代数：对于每个$X \in S$，定义$A_X \in M_n(K)$ 为满足下述条件的矩阵

$$(A_X)_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in X \\ 0 & (i,j) \notin X \end{cases}$$

那么，矩阵A_X（其中$X \in S$）的线性张成 $\sum_{X \in S} KA_X$ 确实是$M_n(K)$ 的一个子代数，并且可以直接验证$A_K(\mathcal{C}) \cong \sum_{X \in S} KA_X$。在本文余下部分中，我们也将 $\sum_{X \in S} KA_X$ 称为K-相干代数。

2.4.2 舒尔环

在文献中，舒尔代数通常指对称群上某个特定模的自同态代数，因此本文沿用惯常记号，使用“舒尔环”这一概念（尽管按本文的定义，它们是K-代数）。舒尔环通常作为复数域上的代数来研究，并与置换群和组合学相关。但本文将研究任意域上的舒尔环。

给定有限群 G，代数 KG 的子环 $\mathcal{A}$ 称为 K-舒尔环，若它有一个线性K-基，由元素 X组成，其中 X遍历族 $\mathcal{S}(\mathcal{A})$；该族由G 的两两不交的非空子集构成，并且

(1) $\{e\} \in \mathcal{S}$,

(2) $\bigcup X = G$, $X \in \mathcal{S}$ (3) $X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\} \in$
$\mathcal{S}$ 对任意 $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$。

S (A) 的元素称为 A 的基本集。这些基本集构成 G 的一个划分，称为 G 的舒尔划分。显然，若域 K 固定，则舒尔环由与之关联的舒尔划分唯一确定。群代数 KG 以及由 1, $\sum_{1 \neq g \in G} g$ 线性张成的代数，是 G 上 K-舒尔环的平凡例子，称为 G 上的平凡舒尔环。若子群 H 是若干基本集的并，则称 H 为 A-子群。显然，单位子群和群 G 本身始终是 A-子群。设 H 是正规 A-子群。则容易验证，对于任意两个基本集 X,Y $\in$ S (A)，要么 HX = HY，要么 HX $\cap$ HY $= \emptyset$。因此，对于所有 X $\in$ S (A)，HX 的线性张成是 G/H 上的一个舒尔环，记作 $A^{G/H}$。

给定一个 K-舒尔环 A，对所有 X $\in$ S (A) 定义 X′ = {(g, gx) $\in$ (G, G) | x $\in$ X, g $\in$ G)}。则 ZA := {X′ | X $\in$ S (A)} 中的元素构成 G × G 的一个划分，并且可以直接验证 (G, ZA) 是一个相干构形。我们称该相干构形为与 A 的舒尔划分相关联的相干构形。采用这一记号，下述结果是显然的。

引理 2.9. 任一 K-舒尔环都同构于由其舒尔划分得到的相干构形所关联的 K-相干代数。

尽管 K-舒尔环可以实现为 K-相干代数，但它们本身仍具有研究价值，因为它们与有限群的表示密切相关。

设 $\mathcal{A}$ 是 G 上的一个 K-舒尔环。若存在真 $\mathcal{A}$-子群 $H < G$，以及包含于 H 中的 G 的正规 $\mathcal{A}$-子群 $U > 1$，使得任一基本集 $X \subseteq G \setminus H$ 都是 U-陪集的并，则称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}_H$ 与 $\mathcal{A}^{G/U}$ 的楔积，并将 $\mathcal{A}$ 记为 $\mathcal{A}_H \wr_{H/U} \mathcal{A}^{G/U}$。当 $U = H$ 时，我们简记为 $\mathcal{A}_H \wr \mathcal{A}^{G/H}$。

回顾一下，对于任意 $\underline{X} = \sum_{x \in X} x$，其中 $X \subseteq G$，我们都如此定义。由 [27, 定理 16] 可知，对于 $T \leq \mathrm{Aut}(G)$，K-线性空间 $\mathrm{span}\{\underline{X} \mid X \in \mathrm{Orb}(T, G)\}$ 是 G 上的一个 K-舒尔环。这个舒尔环称为 G 上的分圆 K-*Schur* 环。此外，$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \mathrm{Orb}(T, G)$。

给定群 H 和 G 上的两个舒尔环 $\mathcal{A}_H$ 和 $\mathcal{A}_G$，则 K-线性空间

$$\mathrm{span}\{(\underline{X}, \underline{Y}) \mid X \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_H), Y \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_G)\}$$

显然也是群 $H \times G$ 上的一个 K-舒尔环。这个舒尔环称为 $\mathcal{A}_H$ 和 $\mathcal{A}_G$ 的张量积，记作 $\mathcal{A}_H \otimes \mathcal{A}_G$。

现在设 G 是集合 Ω 上的一个传递置换群，它包含一个正则子群 N。固定一个点 $\alpha \in \Omega$；则 $G = G_\alpha N$。定义一个双射 $\pi\colon \Omega \to N$，令 $(\beta)\pi$ 为 N 中满足 $\alpha \cdot (\beta)\pi = \beta$ 的唯一元素，对每个 $\beta \in \Omega$ 均如此。利用 π，我们可以通过以下方式将 G 的作用转移到 N 上：

$$(\beta)\pi \cdot g := (\beta \cdot g)\pi \qquad (\beta \in \Omega,\ g \in G),$$

这使 N 成为一个 G-集合，并将 N_{right}（N 在自身上的右正则置换表示）识别为 G 的子群。下面的事实是众所周知的。

引理 2.10. 设 G 是集合 Ω 上的一个有限传递群，且含有正则子群 N。那么 $\mathrm{Orb}(G^{\{1\}}, N)$ 中的轨道构成 N 的一个舒尔划分，并且 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 同构于由该舒尔划分定义的 K-舒尔环 $\mathcal{A}_H$。

根据引理 2.10，若有限群 G 在集合 Ω 上作用传递，且包含正则子群 N，则 Hecke 代数 $\mathcal{H}_K(G, G_\alpha)$ 与舒尔环 $\mathcal{A}_H$ 同构，其中 G_α 是 G 中某个 $\alpha \in \Omega$ 的点稳定子。

2.5 对称代数、Frobenius代数和自内射代数

设A是一个K-代数。若$\mathrm{Hom}_K(A,K) \cong A$作为$A$-$A$-双模同构，则称代数$A$是对称的。等价地，存在一个非退化对称结合双线性型$f: A \times A \to K$，也就是说，存在一个映射$f: A \times A \to K$满足以下条件：

(i) $f(a+b,c) = f(a,c) + f(b,c)$且$f(a,b+c) = f(a,b) + f(a,c)$对所有$a,b,c \in A$；(ii) $f(ab,c) = f(a,bc)$对所有$a,b,c \in A$；

(iii) $f(a,b) = f(b,a)$对所有$a,b \in A$；

(iv) $f(ta,b) = f(a,tb) = tf(a,b)$对所有$t \in K$和$a,b \in A$；

(v) 若对所有$b \in A$，都有$a = 0$，则$f(a,b) = 0$。

若A是对称代数，那么对于任意幂等元$e \in A$，eAe也是对称代数。

若代数A中的f满足除(iii)以外的所有条件，则称A为*Frobenius*。显然，对称代数总是Frobenius代数，但反之一般不成立。Frobenius代数有许多良好的性质；系统介绍请参阅[31]。

若代数A的A正则模是内射模，则称A为自内射代数；等价地，所有投射A-模都是内射模；也等价地，对于所有A-模，Ext函子$\mathrm{Ext}^1_A(-,A)$均为零。众所周知，Frobenius代数必定是自内射代数。以下事实也广为人知（例如参见[31, 命题 4.6，第 348]页）：

所有交换自内射代数都是对称代数。

2.6 预备结果

本节给出一些命题，它们将在后续证明中发挥作用。有限循环群上的舒尔环分类由Leung和Man[21, 22]建立。他们的工作直接导出以下结果。

命题 2.11。设K是一个域，且$\mathcal{A}$是循环群G上的一个K-舒尔环。那么以下情形之一成立：

(i) $\mathcal{A}$是平凡的；

(ii) $\mathcal{A}$是一个分圆*K-Schur*环；

(iii) 存在$\mathcal{A}$-子群H和U，使得$G = H \times U$，且$\mathcal{A} = \mathcal{A}_H \times \mathcal{A}_U$是两个$K$-舒尔环$\mathcal{A}_H$和$\mathcal{A}_U$的张量积；(iv) 存在真$\mathcal{A}$-子群$U \leq H \leq G$，使得$\mathcal{A} = \mathcal{A}_H \wr_{H/U} \mathcal{A}^{G/U}$是两个$K$-舒尔环$\mathcal{A}_H$和$\mathcal{A}^{G/U}$的楔积。

命题 2.12。设K为域，G是集合Ω上的半传递置换群。假设对于每个$\alpha \in \Omega$，G在Ω上的α-轨道大小在域K中均可逆。那么自同态代数$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$是对称代数。

证明。 为方便起见，取 Ω 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$。于是 $G \leq S_n$。将G在 $\Omega\times\Omega$ 上的对角作用轨道记为 $S=\{s1,\cdots,s_t,s_{t+1},\cdots,s_m\}$，其中 $\{s1,\cdots,s_t\}$恰好是自反轨道。于是$\mathcal{C}=(G,S)$ 是一个相干构形，并且由引理 2.8 可得代数同构

$$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)\cong A_K(\mathcal{C})=\bigoplus_{i=1}^{m} KA_{s_i}.$$

为完成证明，我们需要证明$A_K(\mathcal{C})$是一个对称代数。我们固定$\mathcal{B}=\{A_{s_i},1\leq i\leq m\}$作为$A_K(\mathcal{C})$的一组基。对于$s_k\in S$，由 [8, 第 1 节1] 可知， $\Omega(s_k)$是一个G-轨道。对于所有$A_{s_k},A_{s_l}\in\mathcal{B}$，我们定义如下映射:

$$\varphi: A_K(\mathcal{C})\times A_K(\mathcal{C})\to K,\ (A_{s_k},A_{s_l})\mapsto C_{s_ks_l}^{1_{\Omega(s_k)}}1_K.$$

根据 [8,第 1] 章， φ显然是双线性的，而 φ(A$_{s_k}$, A$_{s_l}$A$_{s_r}$)和 φ(A$_{s_k}$A$_{s_l}$, A$_{s_r}$)恰好是将A$_{s_k}$A$_{s_l}$A$_{s_r}$表示为基B中元素的线性组合时，A$^{1_{\Omega(s_k)}}$的系数。因此， φ(A$_{s_k}$, A$_{s_l}$A$_{s_r}$)和 φ(A$_{s_k}$A$_{s_l}$, A$_{s_r}$)相等，故 φ是结合的。现在只需证明 φ 是对称且非退化的。

要证明 φ 是对称的，只需证明$C^{1_{\Omega(s_k)}}{}_{s_ks_l}\ \ 1_K=C^{1_{\Omega(s_l)}}{}_{s_ls_k}\ \ 1_K$对所有$s_k$,$s_l\in S$都成立。由于$G$在 Ω 上是半传递的，也就是说，所有G-轨道大小相同，由 [8, 第 1] 章可知

$$C_{s_ks_l}^{1_{\Omega(s_k)}}|\Omega(s_k)|1_K=C_{s_ls_k}^{1_{\Omega(s_l)}}|\Omega(s_l)|1_K,$$

由此得到所需的等式 $C^{1_{\Omega(s_k)}}{}_{s_ks_l}\ \ 1_K=C^{1_{\Omega(s_l)}}{}_{s_ls_k}\ \ 1_K$。

最后， 我们证明 φ 是非退化的，也就是说，我们需要证明 0 是唯一的元素 in

$$\mathrm{rad}(\varphi):=\{x\in A_K(\mathcal{C})\mid \varphi(x,y)=0 \text{ for all } y\in A_K(\mathcal{X})\}.$$

令 x $\in$rad(φ) 为任意元素。由于 A$_K$(C) =m$\oplus$i=1KA$_{s_i}$，我们可以写成 x $=\sum_{i=1}^{m}$a$_{s_i}$A$_{s_i}$，其中 a $_{s_i}\in$K 对于 $1\leq$i $\leq$m。对于任意 s$_k$， s$_l\in$S，显然 C$^{1_{\Omega(s_k)}}$s$_k$s$_l$ $=0$ 当 s$_k\neq$s$_l^*$时。因此，对于 $1\leq$ k $\leq$m，我们得到 $0=$φ(x, s$_k^*$) =a$_{s_k}$C$^{1_{\Omega(s_k)}}$ s$_k$s$_k^*$。令 (α,β) $\in$s$_k$。则 C$^{1_{\Omega(s_k)}}$ s$_k$s$_k^*$ $=|\beta^{G_\alpha}|$，其中 $\beta^{G_\alpha}=\{\beta\cdot$x $\mid$x $\in$G$_\alpha\}$。根据我们对 Gα 的假设，$|\beta^{G_\alpha}|$ 在 K 中可逆。这意味着对于 $1\leq$k $\leq$m, a$_{s_k}=0$，由此 x $=0$。证明完毕。

□

由命题 2.12 可得以下结果。

命题 2.13. 设 G 是作用在集合 Ω 上的传递置换群。假设 G 含有一个阿贝尔正则子群 T，且 G 的所有子度都与 T 的阶互素。那么 G 是一个 S-置换群。

证明。 设 K 是特征为 p 的任意域。我们将证明 End$_{KG}$($K\Omega$) 是一个对称代数。根据命题 2.12，我们只需考虑 G 的某个次轨道长度被 p 整除的情形。

假设 p 整除 G 的某个次轨道长度。根据我们的假设，gcd(p $|T|$) = 1。引理 2.10 表明，存在一个定义在 T 上的 K-舒尔环 $\mathcal{A}$，使得 End$_{KG}$($K\Omega$) $\cong\mathcal{A}$作为代数同构。由于 p 不整除 $|T|$，Maschke 定理表明 KT 是半单的。特别地，KT 没有非零幂零理想，因此也没有非零幂零中心元。由于T 是阿贝尔群，群代数 KT 是交换的；因此，KT 的每个元素都是中心元。由此，KT 不含非零幂零元素。因此，$\mathcal{A}$ 作为 KT 的子代数，也不含非零幂零元素，故$\mathcal{A}$ 是半单的。因此，End$_{KG}$ ($K\Omega$) $\cong\mathcal{A}$ 是半单代数，因而是对称代数，证毕。

□

命题 2.14。 设 K 是一个域，G 是作用在集合 Ω上的置换群。若 G 有一个传递子群 H，使得 秩(H) = 秩(G)，则 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong \mathrm{End}_{KH}(K\Omega)$ 作为代数同构。

证明。令 n 表示 Ω 的基数，令 S_1 （分别为 S_2）表示 G（分别为 H）在笛卡尔积 $\Omega\times\Omega$ 上的对角作用的轨道。则 $C_1 := (\Omega,S_1)$ 和 $C_2 := (\Omega,S_2)$ 是相干构形，并且由引理 2.8 可得，End_{KG}(KΩ) $\cong A_K(C_1)$ 和 $\mathrm{End}_{KH}(K\Omega) \cong A_K(C_2)$ 作为代数成立。由于 H $\leq$ G，我们推出 S_1 中的任一轨道都是 S_2 中若干轨道的并。注意，$|S_1|$ =rank(G)，且 $|S_2|$ =rank(H)。因此，由假设 rank(H) = rank(G) 可知 $|S_1| = |S_2|$。结合 $A_K(C_1) \subseteq A_K(C_2)$，可推出 $A_K(C_1) = A_K(C_2)$。因此，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong A_K(C_1) = A_K(C_2) \cong \mathrm{End}_{KH}(K\Omega)$。

□

命题 2.15. 设 G 是作用于集合 Ω 上的3 2-传递置换群，且对某个 $\alpha\in\Omega$，有 $H := G_\alpha$。那么，对于任意整除 G 的非平凡次轨道长度的素数 p，H 中 *Sylow* p-子群的正规化子包含于 H 中。

证明。由于 G 是3 2-传递的，G 的所有非平凡次轨道长度都相同。设 p 是整除 G 的非平凡次轨道长度的素数，且 P 是 H 的 Sylow p-子群。若 $N_G(P)$ 不包含于 H，则存在元素 x $\in N_G($P$)\setminus$H，使得 P $\leq$H $\cap$H^x。因此，p 不整除|H : H $\cap$H^x|。然而，|H : H $\cap$H^x| = |{$\alpha\cdot$xh | h $\in$ H}| 是 G 的一个次轨道长度。这与我们的假设矛盾。

□

结合引理 2.2 和 2.6，我们可以证明如下结论。

命题 2.16. 设 G 是一个特征为 q 且具有分裂 BN-对的有限群。那么，$\mathcal{H}_K(G,B)$ 是域 K 上的 *Frobenius* 代数，其中 K 为任意域。

证明 设 p 是K的特征。假设 $p \neq q$。由引理 2.2，$\mathcal{H}_K(G,B) \cong KW_G$ 是对称代数，因为任意域上的群代数总是对称代数。因此，$\mathcal{H}_K(G,B)$ 是 Frobenius 代数，因为对称代数都是 Frobenius 代数。因此，以下我们可以假设 $p = q$。

注意，B有一个阿贝尔p'-子群，记作H，使得$B = U \rtimes H$。设 $x = \sum_{h\in H} UhU \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G,B)$ 是一个元素。由于$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G,B)$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}$-模，其基为 (U,U)-双陪集，因此将$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G,B)$ $\otimes_{\mathbb{Z}} -$ 与以下正合列张量积

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

仍然是一个正合列。因此，x 也可以视为 H$\mathbb{Q}$(G, B) 中的一个元素。在 [6, 注记 6], 中已证明，$\frac{1_{\mathbb{Q}}}{|}$H$|\cdot$ x 是 H$\mathbb{Q}$(G, B) 中的中心幂等元。结合 H$_{\mathbb{Z}}$(G, B) $\otimes_{\mathbb{Z}}$ –的正合性可知，x 是 H$_{\mathbb{Z}}$(G, B) 中的中心元素。由于 p = q 且 H 是一个 p′-群，因此 |H| 在 K 中可逆。于是，x $\otimes_{\mathbb{Z}} \frac{1_K}{|}H|$ 是 H$_{\mathbb{Z}}$(G, B) $\otimes_{\mathbb{Z}}$K = H$_K$(G, B) 中的中心幂等元。令 e = $\frac{1_K}{|}$H$|\sum_{h\in H}$h。那么，根据[6, 注记 9] ，Cabanes 指出，K(G/B) $\cong$ e K(G/U) 是 KG-模 K(G/U) 的一个直和项。因此，H$_K$(G, B) $\cong$e$_0$H$_K$(G,U)e$_0$作为代数同构，其中 e$_0$ = $\frac{1_K}{|}$H$|\cdot$x。由于 e$_0$是 H$_K$(G,U) 中的中心幂等元，因此 H$_K$(G, B) 同构于 H$_K$(G,U) 的若干块之和。结合 H$_K$(G,U) 是一个 Frobenius 代数可知，H$_K$(G, B) 也是一个 Frobenius 代数。

□

最后，在本小节中，我们证明 2-传递置换群和 Frobenius 置换群都是 S-置换群。

命题 2.17. 任意 2-传递群都是 S-置换群。

证明。设 K 是特征 p 的任意域，G 是作用在大小为 Ωn 的有限集上的 2-传递置换群。那么 G 在笛卡尔积 $\Omega\times\Omega$ 上的对角作用的轨道集合 S 由两个轨道组成，即 1_Ω 和 $\Omega\times\Omega\setminus 1_\Omega$。要证明 G 是 S-置换群，我们需要证明 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)\cong A_K((\Omega,S))$ 总是一个对称代数。显然，$A_K((\Omega,S))=KI_n\oplus KJ$，其中 $J=\sum_{1\le i\ne j\le n} e_{i,j}$ 是一个对角线上为零、非对角线上为一的矩阵。因此，

$$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)\cong\begin{cases}K[X]/(X^2), & \text{if } p\mid n,\\ K\times K, & \text{if } p\nmid n.\end{cases}$$

在这两种情况下，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 都是对称代数。证明完毕。 □

注意，Frobenius 置换群必然是 3 2-传递置换群。 –

命题 2.18. 任意 *Frobenius* 置换群都是 *S*-置换群。

证明。 设K 是特征为p 的任意域，G 是作用在集合Ω 上的 Frobenius 置换群，其中$H = G_\alpha$ 是G中某个 $\alpha\in\Omega$ 的点稳定子。那么H 是G的 Frobenius 补。为了证明G 是一个S-置换群，我们需要证明 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 总是对称代数。根据引理 2.12，我们可以假设p 整除G的某个次轨道长度。特别地，$p\mid|H|$。由于G 是 Frobenius 群，根据 Frobenius群的定义可知，$|H|$与 $|\Omega|$互素。因此，$p\nmid|\Omega|$。

设 P 是 H 的一个 Sylow p-子群。由 Frobenius 补的性质可知，$N_G(P)\le H$。由于 KΩ 与 K_H^G 作为 KG-模同构，且 P 是 K_H的一个顶点，因此平凡模 K_G 是 K_H的 Green 对应，而 K_H^G 中除 K_G以外的任意不可分解直和项的顶点都具有 $P\cap P^g$ 的形式，其中某个 $g\in G\setminus H$。另一方面，由于 G 是一个 Frobenius 群，对所有 $x\in G\setminus H$，都有 $H\cap H^x=1$。因此，K_H^G中除 K_G以外的所有不可分解直和项的顶点都是单位子群。这说明 K_H^G 是 K_G 与一个射影模的直和。因此，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)\cong K\times\mathrm{End}_{KG}(M)$。设 N 为 M 的非同构不可分解直和项之和，这里称 N 为 M 的基本模。根据著名的 Morita 定理，$\mathrm{End}_{KG}(M)$ 与 $\mathrm{End}_{KG}(N)$ Morita 等价。根据 N 的定义，可找到 KG 的一个幂等元 e，使得 N 与 eKG 作为 KG-模同构。因此，$\mathrm{End}_{KG}(N)$ 同构于 eKGe，而众所周知，eKGe 是一个对称代数。由于 $\mathrm{End}_{KG}(M)$ 与 $\mathrm{End}_{KG}(N)$ Morita 等价，我们得出 $\mathrm{End}_{KG}(M)$ 是一个对称代数。因此，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)\cong K\times\mathrm{End}_{KG}(M)$ 也是一个对称代数。 □

3 定理 1.2 的证明

定理 1.2 的证明分为两部分：一部分讨论 *p*-*S*-置换群，另一部分讨论 *S*-置换群。

3.1 *p*-*S*-置换群的判据

回顾一下，传递置换群总是有 1 作为一个次轨道长度。其他次轨道长度（也可能为 1）称为非平凡次轨道长度。在本小节中，我们主要证明以下结果。

命题 3.1。 设 G 是集合 Ω 上的一个传递置换群，且该集合的基数为 n。若满足以下条件之一，则 G 是素数 p 下的 *p*-*S*-置换群

(i)G 的所有子度都与 p 互素；(ii) 对于 G 的任意非平凡子阶 m，$p\nmid|G|nm$；(iii)G 具有一个阿贝尔正则 p'-子群；(iv) $n<2p$；

$(v)\ p \nmid n$，且 G 的秩为 3；

(vi) $\Omega = G(q)/\mathcal{P}$ 且 G 是由 $G(q)$ 在 Ω 上的右乘所诱导的置换群，其中 $G(q)$ 是一个具有特征 $q \neq p$ 下的分裂 BN-对的有限群，而 $\mathcal{P}$ 是 $G(q)$ 的一个抛物子群，使得 $p \nmid |\mathcal{P}| \mid B$。

证明 设 K 是一个特征为 p 的域，并设 H 是 G 中点 $\alpha \in \Omega$ 的稳定子。(i) 这由命题 2.12 以及每个传递置换群都是半传递的这一事实得出。(iii) 通过类似于命题 2.13 证明中的论证即可得出。

假设 (ii) 成立。根据假设，对于任意 $g \in G \setminus H$，$H \cap H^g$ 始终是一个 p'-群。通过类似于命题 2.18 证明中的论证，我们可推得 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 是一个对称代数。

假设 (iv)。若 $n \leq p$，则 G 的所有子轨道长度都与 p 互素，由 (i) 可知，G 总是一个 p-S-置换群。因此我们可以假设 $n \geq p+1$，并且根据 (i)，还可以假设 G 有一个可被 p 整除的子轨道长度。特别地，$p \mid |G|$。若 $n = p+1$，则 G 必为一个 2-传递置换群，因此根据命题 2.17，G 是一个 S-置换群。故我们假设 $n \geq p+2$。设 G 是一个本原群。由 [23, 定理 1.1], 可知，G 是一个 p-S-置换群。因此我们假设 G 是非本原的。于是 G 有一个子群 M，使得 $H < M < G$。集合 $\Delta := \{\alpha \cdot m \mid m \in M\}$于是是 G 的一个块。令 $B = \{\Delta \cdot g \mid g \in G\}$ 为包含 Δ的块系。G 在 B 上的诱导作用的核为 $N := \cap_{g \in G} M^g$，且 $GB \cong G/N$。根据假设，$|B| < p$。因此 G/N 是一个 p'-群。这意味着 $p \mid |N|$。现在，考虑集合 $\Gamma := \{\alpha \cdot x \mid x \in N\}$。于是 $\Gamma \subseteq \Delta$，因此 $|\Gamma| \leq |\Delta| < p$。这意味着 $N_\alpha = N \cap H$ 在 N 中的指数为 $|\Gamma| < p$。因此，N/C 的阶不被 p 整除，其中 $C := \cap_{x \in N} N_\alpha^x$。所以，$p \mid |C|$，从而 $p \nmid |G : C|$。由于 $C \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ 且 $p \nmid |G : C|$，可知 K_C^G是一个半单 KG-模。另一方面，注意到 $C \leq H$，且 $|H : C|$ 是 $|G : C|$的一个因子，由此可知 $K_H \mid K_C^H$。因此，根据诱导的传递性，$K\Omega \cong K_H^G \mid (K_C^H)_H^G = K_C^G$。这表明 $K\Omega$ 是一个半单 KG-模。因此 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 是一个半单代数，因而是一个对称代数。

假设 (v)。则由 $p \nmid n$ 可知，$K\Omega = K_G \oplus M$ 分解为两个模的直和，使得 $\mathrm{Hom}_{KG}(K_G, M) = \mathrm{Hom}_{KG}(M, K_G) = 0$。因此，作为代数有 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong K \times \mathrm{End}_{KG}(M)$。由于 G 为秩 3，可知 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 是 3 维的，从而 $\mathrm{End}_{KG}(M)$ 是 2 维的。故 $\mathrm{End}_{KG}(M)$ 要么是半单的，要么同构于 $K[x]/(x^2)$。无论哪种情形，$\mathrm{End}_{KG}(M)$ 都是对称代数。这意味着 $\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong K \times \mathrm{End}_{KG}(M)$ 是对称代数。

最后，我们假设 (vi)。设 B 为包含于 P 中的 Borel 子群。则由假设 $p \nmid |P : B|$ 可知 $KP \mid KPB$。因此，由诱导的传递性可得 $K^G P \mid K_B^G$。这意味着存在幂等元 $e \in \mathrm{End}_{KG}(K(G/B))$，使得 $\mathrm{End}_{KG}(K(G/P)) \cong e\mathrm{End}_{KG}(K(G/B))e$。注意，对任意对称代数 A 及其中的幂等元 f，$fAf$ 也是对称代数。因此只需证明 $H_K(G,B) \cong \mathrm{End}_{KG}(K(G/B))$ 是对称代数。由于按假设有 $p \neq q$，引理 2.6 结合任意域上的群代数均为对称代数这一事实，即得所述断言。

□

3.2 S-置换群的判定准则

本小节主要证明以下结果。

命题 3.2。 设 G 是集合 Ω 上的一个传递置换群，且其基数为 n。若满足以下条件之一，则 G 是 S-置换群

(1) G 是一个3 2-传递置换群；(2)G 有一个阶为两个不同素数乘积的循环正则子群；(3)G 有一个阿贝尔正则子群，其阶与 G 的所有次轨道长度互素；(4) G 是一个子度为 $1 \leq a < b$ 的置换群，且最大公约数$(a+b+1, ab\ \lambda(G), b - {}^{\lambda}(G)b\ a) = 1$；(5)$G$ 是一个阶不能被 8整除的二面体群；

(6) $\Omega = G(q)/B$，且 G 是 $G(q)$ 在 Ω 上通过右乘诱导的置换群，其中 $G(q)$ 是一个特征为 q 的有限群，具有分裂 BN-对，并满足 $\mathcal{W}_G \ncong S_3$ 的秩为 2。

在证明命题 3.2 之前，我们先证明几个有用的结果。

命题 3.3. 任意3 2-传递置换群都是 S-置换群。

证明 设K 是特征为$p \geq 0$ 的任意域，且G 是集合 Ω 上的一个 3 2-传递群。根据 [24], 中的主要结果，G 是以下群之一：

(1) 2-传递群；(2) Frobenius 置换群；(3) 点稳定子为半传递线性群的仿射本原置换群；(4) 几乎单群：或者 (a) $G = A_7$或 S_7作用于 $\{1, \cdots, 7\}$ 中的点对集合，或者；

(b) $\mathrm{PSL}(2, 2^m) \leq G \leq \mathrm{P\Gamma L}(2, 2^m)$ 作用于 $2^{m-1}(2^m - 1)$ 个点上且秩为 2^{m-1}，其中$m \geq 3$是素数。

分别将引理 2.17 和引理 2.18 应用于情形 (1) 和情形 (2)，可得G在这两种情形下始终是一个S-置换群。

假设情形 (3) 成立，即$G = T(V)H \leq \mathrm{AGL}(V)$，其中$V$是一个维数为$d$、定义在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的向量空间，$T(V)$ 表示V上的平移群，H是 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个子群，且是一个 1 2-传递不可约线性群。显然，所有非平凡次轨道长度都是 $|T(V)| - 1$ 的因子，因此与 $|T(V)|$ 互素。由此，命题 2.13 的条件得以满足。这意味着G 在此情形下是一个S-置换群。

假设情形 (4) 成立。那么G 是以下群之一：

(a) $G = A_7$或S_7作用于 $\{1, \cdots, 7\}$ 中的无序对集合上，或；

(b) $\mathrm{PSL}(2, 2^m) \leq G \leq \mathrm{P\Gamma L}(2, 2^m)$作用在 $2^{m-1}(2^m - 1)$个点上，秩为 2^{m-1}，其中$m \geq 3$是一个素数。

对于情形 (a)，众所周知，这两个群的秩都等于 3。根据命题 2.14，我们只需考虑$G = S_7$作用在 $\{1, \cdots, 7\}$中的点对集合上的情形。在这种情况下，我们有$K\Omega = K_G \oplus M$，其中M 是一个K G-模。此外，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \simeq K \times \mathrm{End}_{KG}(M)$是三维的。这表明 $\mathrm{End}_{KG}(M)$是二维的。因此，$\mathrm{End}_{KG}(M)$是一个对称代数。由此，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \simeq K \times \mathrm{End}_{KG}(M)$也是一个对称代数。由于$K$ 是任意的，因此在情形 (a) 中G 是一个S-置换群。

对于情形（b），由引理 2.14，只需考虑如下情形：$\mathrm{G} = \mathrm{PSL}(2, 2^m)$ 作用于某个极大子群（记为 H）的陪集上，其指数为 $2^{m-1}(2^m - 1)$。此时 $\mathrm{H} \cong \mathbb{D}_{2^m+1}$，且 G 的所有非平凡次轨道长度均为 $2^m + 1$；也就是说，对于任意 $\mathrm{x} \in \mathrm{G} - \mathrm{H}$，均有 $|\mathrm{H} \cap \mathrm{H}^x| = 2$。若 p 不整除 $2^m + 1$，则由命题 2.12 可知 $\mathrm{End}_{KG}(\mathrm{K}\Omega)$ 是对称代数。因此，我们可以假设 $\mathrm{p} \mid 2^m + 1$。在这种情况下，$\mathrm{p} \neq 0$ 且为奇数。由于对于任意 $\mathrm{x} \in \mathrm{G} - \mathrm{H}$，均有 $|\mathrm{H} \cap \mathrm{H}^x| = 2$，可知对于所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{G} - \mathrm{H}$，均有 $\mathrm{P} \cap \mathrm{P}^x = 1$。现在，运用与命题 2.18 的证明中类似的论证，我们推得 $\mathrm{End}_{KG}(\mathrm{K}\Omega)$ 是对称代数。 □

下面的引理表明，任意定义在阶为pq 的循环群上的K-舒尔环都是对称代数。

命题 3.4. 设 G 是阶为 pq 的循环群，其中 p 与 q 为不同素数。则对任意域 K，G 上的任意 K-舒尔环 $\mathcal{A}$ 总是对称代数。

在证明命题 3.4 之前，我们需要若干引理。

引理 3.5. 设 K 是特征 p 的域，且 $\mathcal{A}$ 是群 G 上的一个 K-舒尔环。若$\mathcal{A}$ 是楔积 $\mathcal{A}_H \wr \mathcal{A}^{G/H}$，其中 H 是一个阶可被 p 整除的$\mathcal{A}$-子群，并且两个 K-舒尔环 $\mathcal{A}_H$ 和$\mathcal{A}^{G/H}$都是对称代数，那么$\mathcal{A}$ 也是一个对称代数。

证明 根据假设，存在非退化结合对称双线性型 $f: A_H \times A_H \to K$ 和 $g: A^{G/H} \times A^{G/H} \to K$。注意，根据定义，基本集 $X \subseteq G \setminus H$ 是 H 的陪集的并。因此，对于任意基本集 $X \subseteq G \setminus H$，都有 $HX = X$，故我们也可以将这些基本集 $X \subseteq G \setminus H$ 视为 $A^{G/H}$ 中的基本集。现在，我们按以下规则定义一个映射 $t: S(A) \times S(A) \to K$:

$$t(\underline{X},\underline{Y}) = \begin{cases} f(\underline{X},\underline{Y}) & \text{if } X,Y \subseteq H, \\ g(\underline{X},\underline{Y}) & \text{if } X,Y \nsubseteq H \\ |X| g(\underline{H},\underline{Y}) & \text{if } X \subseteq H, Y \nsubseteq H \\ |Y| g(\underline{X},\underline{H}) & \text{if } X \nsubseteq H, Y \subseteq H. \end{cases}$$

并双线性地延拓至 $A \times A$。

我们证明 t 是一个非退化结合对称双线性型。显然，t 是一个非退化对称双线性型。只需证明 t 是结合的。为此，只需证明对于任意基本集 X, Y 和 Z，有 $t(X \cdot Z, Y) = t(X, Z \cdot Y)$。

设 $X, Y \subseteq H$。则对于 $Z \subseteq H$，由 f 的结合性可立即得出 $t(X \cdot Z, Y) = t(X, Z \cdot Y)$；对于 $Z \nsubseteq H$，$t(X \cdot Z, Y) = |X||Y| g(H, Z) = t(X, Z \cdot Y)$。

设要么 $X \subseteq H, Y \nsubseteq H$，要么 $X \nsubseteq H, Y \subseteq H$。我们只考虑 $X \subseteq H$ 且 $Y \nsubseteq H$ 的情形，另一种情形类似。若 $Z \subseteq H$，则

$$t(\underline{X} \cdot \underline{Z}, \underline{Y}) = |X||Z| g(\underline{H}, \underline{Y}) = t(\underline{X}, \underline{Z} \cdot \underline{Y}).$$

因此，我们可以假设 $Z \nsubseteq H$。若 $Z \neq Y^{-1}$，则

$$t(\underline{X} \cdot \underline{Z}, \underline{Y}) = |X| g(\underline{Z}, \underline{Y}) = |X| g(\underline{H}, \underline{Z} \cdot \underline{Y}) = t(\underline{X}, \underline{Z} \cdot \underline{Y}).$$

因此，我们可以进一步假设 $Z = Y^{-1}$。所以，

$$\begin{aligned} t(\underline{X}, \underline{Z} \cdot \underline{Y}) &= t(\underline{X}, \underline{Z} \cdot \underline{Y} - |Z|\underline{H}) + t(\underline{X}, |Z|\underline{H}) \\ &= |X| g(\underline{H}, \underline{Z} \cdot \underline{Y} - |Z|\underline{H}) + f(\underline{X}, |Z|\underline{H}). \end{aligned}$$

由于根据假设，Z 是若干 H-陪集的并，$|H|$ 整除 $|Z|$。假设 $p \mid |H|$ 进而推出 $|Z| \cdot 1_K = 0$。因此，

$$\begin{aligned} t(\underline{X}, \underline{Z} \cdot \underline{Y}) &= |X| g(\underline{H}, \underline{Z} \cdot \underline{Y} - |Z|\underline{H}) + f(\underline{X}, |Z|\underline{H}) \\ &= |X| g(\underline{H}, \underline{Z} \cdot \underline{Y}) \\ &= t(\underline{X} \cdot \underline{Z}, \underline{Y}). \end{aligned}$$

最后，假设 $X \nsubseteq H$ 且 $Y \nsubseteq H$。若 $Z \notin \{X^{-1}, Y^{-1}\}$，我们考虑两种情形：

若 $Z \subseteq H$，则 $t(X \cdot Z, Y) = |Z| g(X, Y) = t(X, Z \cdot Y)$。

If $Z \nsubseteq H$，由结合性可直接得到等式 $t(X \cdot Z, Y) = t(X, Z \cdot Y)$，其中 g .

因此，我们可以假设 $Z \in \{X^{-1}, Y^{-1}\}$。不失一般性，设 $Z = X^{-1}$；$Z = Y^{-1}$ 的情形可类似处理。利用 $|Z| \cdot 1_K = 0$，我们得到

$$\begin{aligned} t(\underline{X} \cdot \underline{Z}, \underline{Y}) &= t(|Z|\underline{H}, \underline{Y}) + g(\underline{X} \cdot \underline{Z} - |Z|\underline{H}, \underline{Y}) \\ &= |Z|\,|H|\, g(\underline{H}, \underline{Y}) + g(\underline{X} \cdot \underline{Z} - |Z|\underline{H}, \underline{Y}) \\ &= g(\underline{X} \cdot \underline{Z}, \underline{Y}). \end{aligned}$$

同理，无论 $Z = Y^{-1}$ 是否成立，都有 $t(X, Z \cdot Y) = g(X, Z \cdot Y)$。由 g 的结合性可知，

$$t(\underline{X} \cdot \underline{Z}, \underline{Y}) = t(\underline{X}, \underline{Z} \cdot \underline{Y}).$$

□

下面的结果表明，任意无平方因子阶无圈群上的分圆 K-舒尔环都是对称代数。

命题 3.6. 设 K 是一个域。那么，任意定义在无平方因子阶循环群上的分圆 K-*Schur* 环都是对称代数。

证明 对于群 G 及自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$，$\sigma$ 通过将 $\sum_{g\in G} a_g g$ 映射为 $\sum_{g\in G} a_g g^{\sigma}$，在群代数 KG 上诱导出一个自然的代数自同构。由此，定义在群 G 上的分圆 K-舒尔环，是 KG 的子代数 $(KG)^H$，其中自同构群 $H \leq \mathrm{Aut}(G)$。

设 K 是特征 p 的域，G 是无平方因子阶循环群，且 H $\leq$Aut(G) 是一个自同构群。显然，当 p $\nmid$|G| 时，结论成立。因此我们可以假设 p >0 且 p | |G|。注意，H 是阿贝尔群。设 P 和 Q 分别是 H 和 G 的 Sylow p-子群。于是 H $=$P $\times$R 是 P 与一个 p′-子群 R 的直积，而 G $=$Q $\times$T 是 Q 与一个 p′- 子群 T 的直积。于是 $(KG)^H = ((KG)^P)^R$，其中 $((KG)^P)^R$ 定义良好，因为 P 与 R 可交换，因此 $(KG)^P$ 具有 R-作用。注意，$(KG)^H \cong (\mathbb{F}_p G)^H \otimes_{\mathbb{F}_p} K$。因此，如果我们能证明 B :=$((\mathbb{F}_p G)^P)^R$ 是对称代数，那么便可推出 $(KG)^H$ 也是对称代数。设 $K_0/\mathbb{F}_p$ 是 $\mathbb{F}_p$ 的一个扩张，使得 $\mathrm{End}_{K_0}G(K_0\Omega) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}G(\mathbb{F}_p\Omega)\otimes_{\mathbb{F}_p} K_0$，且 K_0T 是分裂代数（分裂代数是指所有单模的自同态代数都同构于基域的代数）。

我们首先证明 A :=$(K_0G)^P$ 是对称代数。注意，Q 是 G 的一个阶为 p 的特征子群，因此没有阶为 p 的自同构。由此，P 在 Q 上的限制是平凡的。因此 $A^P \cong K_0Q \otimes_{K_0} (K_0T)^P$。由于 T 是阿贝尔 p′-子群，根据我们对 K_0 的假设，K_0T 同构于 m 个 K_0 的直积。这意味着 $(K_0T)^P$ 同构于某个 k 个 K_0 的直积，其中 k $\leq$m。因此 $A^P \cong K_0Q \otimes_{K_0} (K_0T)^P$ 同构于 k 个 $(K_0[x]/(x^p))$ 的直积，因而是对称中山代数。

接下来，我们证明 C :=$(K_0G)^H = A^R$ 是对称代数。考虑斜群代数，记作 R $\ltimes$ A；它是一个自由 A-模，由形如 ra 的元素构成，其中 r $\in$R、a $\in$A，且 R $\ltimes$ A 中的乘法按规则 $(r_1a_1)\cdot(r_2a_2) := r_1r_2a_1^{r_2}a_2$ 定义。现在，我们通过定义 a $\cdot$(rb) := a^rb，在 A 上赋予 R $\ltimes$ A-模结构。于是可得到一个同构 $\mathrm{End}_{R\ltimes A}(A) \cong A^R$，f $\mapsto 1^f$。由于 R 是 p′-群，根据 [3, 推论 4.3(a)，第 87 页及定理 2.14，第 118] 页，A 是投射 R $\ltimes$ A-模，而 R $\ltimes$ A 是中山代数。注意 C 是交换的。于是张量函子 $-\otimes_C CA_{R\ltimes A}$: C-模范畴 $\to$(R $\ltimes$ A)-模范畴是范畴之间的全忠实嵌入。因此 C $=A^R$是有限表示型交换分裂代数。这意味着存在非负整数 $l_1, l2, \cdots, l_s$，使得 $A^R \cong \prod_{j=1}^{s} K_0[x]/(x^{l_j})$。因此 A^R 是对称代数。

对于任意B-模M，我们有

$$\mathrm{Ext}^1_B(M,B)\otimes_{\mathbb{F}_p} K_0 \cong \mathrm{Ext}^1_C(M\otimes_{\mathbb{F}_p} K_0, C) = 0.$$

这表明B 是一个自内射代数。由于B 是交换的，且任何交换自内射代数都是对称代数，该结论成立。

□

现在，我们可以证明命题 3.4。

命题 3.4 的证明。 设K 为一个域，并设$\mathcal{A}_G$ 为循环群G 上的K-舒尔环，该群的阶为pq，其中p与q为不同素数。显然，若K 的特征不整除pq ，则$\mathcal{A}_G$ 是半单的，因而也是对称的。不失一般性，我们可以假设K 的特征为p。由命题 2.11，我们有以下情形之一：

(i)$\mathcal{A}$ 是平凡的；(ii)$\mathcal{A}$ 是一个分圆
K-舒尔环；

(*iii*) 存在$\mathcal{A}$-子群H与U，使得$G = H \times U$，且$\mathcal{A} = \mathcal{A}_H \times \mathcal{A}_U$是两个$K$-舒尔环$\mathcal{A}_H$与$\mathcal{A}_U$的张量积；

(*iv*) 存在真$\mathcal{A}$-子群$U \leq H \leq G$，使得$\mathcal{A} = \mathcal{A}_H \wr_{H/U} \mathcal{A}^{G/U}$是两个$K$-舒尔环$\mathcal{A}_H$和$\mathcal{A}^{G/U}$的楔积。

特别地，有限素数阶循环群上的K-舒尔环必为圆分环。对于情形 (i)，$\mathcal{A}_G$ 要么是群代数KG，要么是二维代数，因此在任何情况下都是对称代数。对于情形 (ii)，由命题 3.6 可知$\mathcal{A}_G$是群代数。假设情形 (iii)。则$\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_H \times \mathcal{A}_U$是两个$K$-舒尔环$\mathcal{A}_H$和$\mathcal{A}_U$的张量积，其中$H$和$U$分别是阶为$p$ 和q的循环群。再次由命题 3.6 可知，$\mathcal{A}_H$ 和$\mathcal{A}_U$ 是对称代数，因此它们的张量积也是对称代数。这说明$\mathcal{A}_G$ 是对称代数。

现在，假设情形 (iv) 成立。由 $|G| = pq$ 可知，$A = A_H \wr A^{G/H}$ 是两个 K-舒尔环 A_H 和 $A^{G/H}$ 的楔积。假设 $|H| = p$。由于 A_H 和 $A^{G/H}$ 是对称代数，由引理 3.5 可知 A_G 是对称代数。因此，我们可以假设 $|H| = q$。现在，定义映射 $f : A_G \times A_G \to K$，使得 f (x, y) 等于 xy 的乘积中 1 的系数。容易验证，f 确实是一个非退化结合对称双线性型。因此，A_G 是对称代数。证明完毕。

□

下面的引理给出了判定一个秩 3 置换群是否为 S-置换群的标准。

引理 3.7。设 G 是一个次轨道长度为 $1 \leq a < b$ 的秩 3 置换群。那么，当且仅当 最大公约数$(a + b + 1,\ ab\ \lambda(G),\ b - \lambda(G)b\ a) = 1$ 时，~~G 是 S-~~置换群。

证明 设 H 是 G 中的一个点稳定子。为方便起见，我们将 $\lambda(G)$ 记为 λ。

设最大公约数$(a + b + 1,\ ab\ \lambda,\ b\ a) = 1$。我们需要证明，对于特征为 $p \geq 0$ 的任意域 K，$H_K(G, H) \cong \mathrm{End}_{KG}(K(G/H))$ 是一个对称代数。根据命题 3.1，我们不妨设 $p \mid ab$ 且 $p \mid (1 + a + b)$。特别地，$p \nmid$ 最大公约数(a, b)。设 H、$D_1 = HgH$ 和 $D_2 = HtH$ 是三个不同的 (H, H)-双陪集，使得 $|D_1 H| = a$ 且 $|D_2 H| = b$。

为了证明 $H_K(G, H)$ 是对称代数，只需证明 $H_K(G, H) \ncong K[x, y]/(x^2, xy, y^2)$。反设 $\pi : H_K(G, H) \to K[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ 是一个同构。那么 $\pi(H) = 1 + (x^2, xy, y^2)$，$\pi(D_1) = l_1 + k_1 x + s_1 y + (x^2, xy, y^2)$，且 $\pi(D_2) = l_2 + k_2 x + s_2 y + (x^2, xy, y^2)$，其中 l_i、k_i、$s_i \in K$，这三个元素构成 $K[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ 的一组基。特别地，$(k_1, s_1) \neq (0, 0) \neq (k_2, s_2)$。因此

$$\begin{aligned}
&\pi(D_1^2) = l_1^2 + 2l_1k_1x + 2l_1s_1y + (x^2, xy, y^2),\\
&\pi(D_2^2) = l_2^2 + 2l_2k_2x + 2l_2s_2y + (x^2, xy, y^2),\\
&\pi(D_1 \cdot D_2) = l_1l_2 + (l_1k_2 + l_2k_1)x + (l_1s_2 + l_2s_1)y + (x^2, xy, y^2).
\end{aligned}$$

另一方面，注 3.8 中D_1 与 D_2 的乘法规则表明

$$\begin{aligned}
&\pi(D_1^2) = a \cdot 1_K + (a - 1 - \tfrac{\lambda b}{a})\pi(D_1) + \lambda\pi(D_2),\\
&\pi(D_2^2) = b \cdot 1_K + (b - \tfrac{\lambda b}{a})\pi(D_1) + (b - a - 1 + \lambda)\pi(D_2),\\
&\pi(D_1 \cdot D_2) = \pi(D_2 \cdot D_1) = \tfrac{\lambda b}{a} \cdot \pi(D_1) + (a - \lambda)\pi(D_2)
\end{aligned}$$

将这些等式与上面的等式比较，我们发现 $\{l_1, l_2\} = \{-1_K, 0\}$ 且 $\lambda \cdot 1_K = (b - \lambda b a) \cdot 1_K = 0$。结合 $p \mid (a + b + 1)$ 和 $p \mid ab$ 可知 $p \mid$ 与 $\gcd(a + b + 1, ab\ \lambda, b - \lambda b a) = 1$，矛盾。

反之，假设 $\gcd(a + b + 1, ab\ \lambda, b - \lambda b\ a) > 1$。令 p 为 $\gcd(a + b + 1, ab\ \lambda, b - \lambda b\ a) \geqslant 1$ 的一个因子，并令 K 为特征 p 的域。于是，依据上述论证可得 $H_K(G, H) \cong K[x, y]/(x^2, xy, y^2)$。因此，在这种情况下，$H_K(G, H)$ 不是对称代数。证明完毕。

□

注 3.8. 设 G 为秩 3 传递置换群，且 $1 \leq a < b$ 为 G 的子度。对于 G 中的点稳定子 H，令 H、$D_1 = HgH$ 和 $D_2 = HtH$ 为三个不同的 (H, H)-双陪集，使得 $|D|^{1}|H| = a$ 且 $|D|^{2}|H| = b$。根据 [20, 命题 3.3，p.42], 存在 $\lambda(G) = \lambda \in \mathbb{N}$，使得在 $H_{\mathbb{Z}}(G, H)$ 中满足以下条件:

$$\begin{aligned} D_1^2 &= aH + (a - 1 - \tfrac{\lambda b}{a})D_1 + \lambda D_2, \\ D_2^2 &= bH + (b - \tfrac{\lambda b}{a})D_1 + (b - a - 1 + \lambda)D_2, \\ D_1 \cdot D_2 &= D_2 \cdot D_1 = \tfrac{\lambda b}{a} \cdot D_1 + (a - \lambda)D_2. \end{aligned}$$

其中这些等式中出现的系数均为非负整数。

现在，我们可以证明命题 3.2。

命题 3.2 的证明。 设 K 是一个特征为 p 的域。

对于情形 (1)，由命题 3.3 可推得G 是一个S-置换群。对于情形 (2)，由引理 2.10 和命题 3.6可知G 是一个S-置换群。对于情形 (3)，由命题 3.1(i)(ii) 可知G是一个S-置换群。

对于情形 (4)，由引理 3.7 可知 G 是一个 S-置换群。假设情形 (5) 成立。那么 G 要么是正则置换群，要么是具有二阶点稳定子的置换群。显然，正则置换群是 S-置换群。因此，我们可以假设 G 是具有二阶点稳定子的置换群。根据 (1)，我们只需证明当 $p = 2$ 时，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega)$ 是一个对称代数。注意，G 有一个正规循环正则子群，记作 H，其阶不能被 4 整除。设 $U \leq \mathrm{Aut}(H)$ 是由将所有 $h \in H$ 映为 h^{-1} 的自同构生成的子群。由引理 2.10 可知，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong (KH)^U$。设 $H = T \times L$ 是 Sylow 2-子群 T 与一个 $2'$-子群 L 的直积。于是 $|T| \leq 2$。用与命题 3.6 证明中类似的论证可知，$(KH)^U \cong KT \otimes_K (KL)^U$。显然，KT 和 $(KL)^U$ 均为对称代数。因此，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong (KH)^U$ 是一个对称代数。

假设 (v)。令

$$r_1(x,y) = xy - yx, r_2(x,y) = (xy)^2 - (yx)^2 \text{ and } r_3(x,y) = (xy)^3 - (yx)^3.$$

根据命题 3.1(v)，我们只需证明当$p = q$时，$\mathcal{H}_K(G,B)$ 是对称代数。令$\mathcal{G}$ 为与$\mathcal{W}_G$相关联的 Coxeter 图。于是根据 [18], 中的主定理可得

$$\mathcal{H}_K(G,B) \cong K\langle x,y\rangle/(r_i(x,y), x^2 + x, y^2 + y),$$

其中，$i = 1, i = 2$和$i = 3$分别对应于$\mathcal{G} = D_2, B_2$（或C_2）和G_2（这里使用 Coxeter 图中的标准记号）。对于$i \in \{1,2,3\}$，令

$$A_i := K\langle x,y\rangle/(r_i(x,y), x^2 + x, y^2 + y), x_i := x + (r_i(x,y), x^2 + x, y^2 + y) \text{ and } y_i := y + (r_i(x,y), x^2 + x, y^2 + y).$$

我们将x_i和y_i的字定义为形如$x_i y_i x_i \cdots$或$y_i x_i y_i \cdots$的元素。于是，x_i和y_i中长度至多为 $2i$ 的字构成A_i的一组基，记为B_i。

对于 $1 \leq i \leq 3$ 以及任意两个由 x_i 和 y_i 构成的字 M_1 和 M_2，定义 $t(M_1, M_2)$ 为 $M_1 M_2$ 表示为 B_i 中元素线性组合时 $(x_i y_i)^i$ 的系数，并将其双线性地扩张到 $A_i \times A_i$。直接验证可得，t 确为一个非退化结合对称双线性型。因此，对于 $1 \leq i \leq 3$，$K\langle x, y\rangle/(r_i(x, y), x^2 + x, y^2 + y)$ 是一个对称代数。

□

4 例子

本节给出两个例子，以阐释我们的主要结果。

虽然与秩 3 置换群相关联的 Hecke 代数是 3 维的，但仍存在并非S-置换群的秩 3 置换群。

例 4.1。 令$G \leq S_4$ 为由置换 (1234) 和 (24) 生成的子群。那么G 是一个阶为 8 的二面体子群，在 $\Omega = \{1,2,3,4\}$ 上传递，且秩为 3，次轨道长度为 1， 1 和 2。此外，我们有 $\lambda(G) = 0$，因此 gcd(4，2，0，2) $= 2 > 1$。令K 为特征为 2 的域。通过计算可知，$\mathrm{End}_{KG}(K\Omega) \cong K[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ 不是对称代数。这解释了命题 3.1(iii) 和命题 3.2(4)-(5) 中的条件，也表明具有阶为素数平方的循环正则子群的置换群不一定是S-置换群。

下面的例子表明，当G 是一个具有分裂BN-对的有限群，且其特征q 满足$\mathcal{W}_G \cong S_3$，并且K 的特征等于q时，$\mathcal{H}_K(G,B)$不是对称代数。

例 4.2. 令$G = \mathrm{GL}(3,q)$，B 为一个 Borel 子群，并令K 为特征为q的域。那么，根据 [18]中所述的生成元与关系，我们有

$$\mathcal{H}_K(G,B) \cong K\langle x,y\rangle/(xyx - yxy, x^2 + x, y^2 + y).$$

令 $A := K\langle x, y\rangle/(xyx - yxy, x^2 + x, y^2 + y)$，并令 $u, v \in A$ 分别为 x 和 y 的陪集。则$-u - v$ 和 uvu 是 A 中的幂等元，且 uvu 是中心的。因此 $P_1 := -uA = uA$，$P_2 := -vA = vA$ 和 $P_3 := uvuA$ 是投射 A-模。由于 P_3 是一维的，它是简单的。这与 $\mathrm{Hom}_A(P_1, P_3) \cong uvuAu \neq 0$及 $\mathrm{Hom}_A(P_2, P_3) \cong uvuAv \neq 0$一起表明，对于 $k = 1,2$，有 $P_3 \mid P_k$。现在，我们将 $P_k = M_k \oplus P_3$ 写成子模 M_k和 P_1 （$k = 1, 2$）的直和。比较 $uA + vA$ 和 $M_1 + M_2 + P_3$, 的维数，可得 $uA + vA = M_1 \oplus M_2 \oplus P_3$。因此，存在一个简单投射 A-模 Q，使得 $A = M_1 \oplus M_2 \oplus P_3 \oplus Q$。注意

$$\mathrm{Hom}_A(P_1, P_2) \cong vAu, \quad \mathrm{Hom}_A(P_2, P_1) \cong uAv, \quad \mathrm{End}_A(P_1) \cong uAu, \text{ and } \mathrm{End}_A(P_2) \cong vAv.$$

根据这些同构，我们发现 $\mathrm{End}_A(M_k)(k = 1, 2)$、$\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(M_2, M_1)$ 的维数均为 1，而 $\mathrm{End}_A(uA + vA)$ 的维数为 5。由于 $A^{op} \cong \mathrm{End}_A(A)$ 的维数为 6，因此 $\mathrm{Hom}_A(Q, uA + vA) = 0 = \mathrm{Hom}_A(uA + vA, Q)$。于是，$A^{op} \cong \mathrm{End}_A(A)$ 同构于代数 $K \times K \times \Lambda$，其中 $\Lambda = \mathrm{End}_A(M_1 \oplus M_2)$ 由以下带关系的箭图给出

$$\bullet_1 \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\leftrightarrows}} \bullet_2, \qquad \alpha\beta = \beta\alpha = 0.$$

因此，$A \cong A^{op}$ 作为代数。注意，对称代数上任意不可分解投射模的顶和根都是同构的单模。由此可知，A不是对称代数。

5 后续问题

本节提出一些有待进一步研究的问题。

根据命题 2.14，与某个S-置换群秩相同的子群也是一个S-置换群。若一个S-置换群不含任何秩相同的子群，我们就称它为极小。

问题 5.1。我们能否对所有极小S-置换群进行分类?

本原置换群在置换群理论中扮演着重要角色。为了研究这类置换群，我们提出以下问题

问题 5.2. 我们能否对所有本原S-置换群进行分类?

受引理 2.10 的启发，若H 是一个有限群，且其上的所有K-舒尔环都是对称代数，那么任何包含H 作为正则子群的置换都是一个S-置换群。因此，我们提出以下问题

问题 5.3。 我们能否确定所有满足其上所有 K-舒尔环都是对称代数的有限群 H H？

数据可用性声明。 由于本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

致谢。
第一作者得到江西省自然科学基金（项目编号：20252BAC200143）和国家自然科学基金委员会（项目编号：12501025）的部分资助。第二作者得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12350710787、12571016）的部分资助。

参考文献

[1] J.L. ALPERIN，《局部表示论》，剑桥大学出版社，2010。[2] J.L. ALPERIN，《有限群的权》，载于《阿卡塔有限群表示会议论文集》（美国加利福尼亚州阿卡塔，1986），第47卷第1部分，《纯数学专题讨论会论文集》，第369-379页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987。[3] M. AUSLANDER、I. REITEN 和 S. O. SMALO，《阿廷代数表示论》，剑桥高等数学研究丛书第36卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[4]J. BAMBERG、M. GIUDICI、M. W. LIEBECK、C. E. PRAEGER 和 J. SAXL，几乎单$^3_2$-传递群的分类，《美国数学会会刊》365 (2013)，第8期，4257-4311。[5] W. BOSMA、J. CANNON 和 C. PLAYOUST，Magma 代数系统。I. 用户语言，《符号计算杂志》24 (1997)，235-265。[6] M. CABANES，模赫克代数之间的布劳尔态射，《代数杂志》115 (1988)，1-31。[7] R. W. CARTER，《李型单群》，约翰·威立父子有限公司，1972。[8] G. CHEN 和 I. PONOMARENKO，《相干构形》，华中师范大学出版社，武汉（2019）。[9] C. CHEVALLEY，《论某些单群》，《东北数学杂志》7 (1955)，14-66。533[10] K. COULEMBIER、E. PAVEL 和 JOSEPH NEWTON，张量范畴中的有限对称代数与代数群的 Verlinde 范畴。arXiv 预印本 arXiv:2502.10598 (2025)。[11] E. DOBSON 和 D. WITTE，素数平方次传递置换群，《代数组合学杂志》16 (2002)，43-69。[12] M. GIUDICI、M. W. LIEBECK、C. E. PRAEGER、J. SAXL 和 P. H. TIEP，线性群轨道的算术结果，《美国数学会会刊》368 (2016)，第4期，2415-2467。[13] J.A. GREEN，论 H. Sawada 定理，《伦敦数学会杂志》18 (1978)，247-252。[14] R.M. GURALNICK，单群中的素数幂指数子群，《代数杂志》81 (1983)，304-311。[15] E. HECKE，¨论模函数及其狄利克雷级数的欧拉乘积展开 I、II，《数学年刊》114 (1937)，1-28、316-351；《数学著作集》，644-707。[16] D. HIGMAN，相干代数，《线性代数及其应用》93 (1987)，209-239。[17] I.M. ISAACS，《有限群论》，数学研究生教材丛书第92卷，美国数学会，普罗维登斯，2008。[18] N. IWAHORI，论域上 Chevalley 群的赫克环的结构，《东京大学理学部杂志》第1辑10 (1964)，215-236。[19] A. KLESHCHEV，论极大对称子代数，《数学档案》(2025)，1-10。[20] A. KRIEG，《Hecke 代数》，美国数学会回忆录，第87卷，第435号，1990。[21] K.H. LEUNG、S.H. MAN，论循环群上的舒尔环 II，《代数杂志》183 (2) (1996)，273-285。[22] K.H. LEUNG、S.H. MAN，论循环群上的舒尔环，《以色列数学杂志》106 (1) (1998)，251-267。

[23] X.G. LI、J.W. HE，具有中山自同态环的置换模，《变换群》，2025，30(4)：1835-1848。[24] M.W. LIEBECK、C. E. PRAEGER 和 J. SAXL，32-传递置换群与12-传递线性群的分类，《美国数学会论文集》，147 (2019)，第12期，5023-5037。[25] S. MONTGOMERY，《有限自同构群的不变环》，Springer-Verlag，柏林-海德堡-纽约，1980。[26] H. NAGAO 和 Y. TSUSHIMA，《有限群表示》，Academic Press，圣迭戈、纽约等地，1987。[27] I. PONOMARENKO，《舒尔环与代数组合学》，2015。[28] I. SCHUR，关于单传递置换群理论，普鲁士科学院物理-数学班会议纪要，(1933)，598-623。[29] L. SCOTT，《模置换表示》，《美国数学会会刊》，175 (1973)，101-121。[30] G. SHIMURA，关于与自守形式相关的积分，《日本数学会杂志》，11 (1959)，291-311。[31] A. SKOWROŃSKI 和 K. YAMAGATA，《Frobenius 代数，I：表示论基础》，欧洲数学会，2012。[32] N. TINBERG，具有未饱和分裂（B,N）-对的有限群的模表示。《加拿大数学杂志》，32 (1980)，第3期，714-733。[33] J. TITS，Bruhat 定理与抛物子群，《巴黎科学院报告》，254 (1962)，2910-2912。[34] H. WIELANDT，《有限置换群》，R. Bercov 从德文译出，Academic Press，纽约-伦敦，1964。MR0183775。[35] H. WEILANDT，《通过不变关系与不变函数研究置换群》，俄亥俄州立大学讲座，1969。