arXiv:2602.03194v1 [math.CO] 3 Feb 2026

斜对称可对称化矩阵的变异不变量

MIN HUANG 和 QILING MA

Abstract. 斜对称化矩阵的矩阵变异是簇代数理论的基础。有效的变异不变量对于判定两个矩阵是否属于同一变异类至关重要。Casals [Cas24]为斜对称矩阵引入了一种二元变异不变量。本文将 Casals 的构造推广到斜对称化情形。当斜对称化子 $d_1,\dots,d_n$ 两两互素时，我们得到了该不变量的两种不同推广。

1. Introduction and Main result

Fomin 和 Zelevinsky [FZ02] 引入了斜对称可对称化整数矩阵的矩阵变异，这是簇代数理论的基础。如果一个斜对称可对称化整数矩阵可以由另一个经过有限序列的变异，并可能再经过行和列的同时置换得到，则称这两个矩阵突变等价。

判定给定的两个 $n\times n$ 可斜对称化矩阵是否突变等价是一个重要的公开问题；参见例如 [Fom22],[FWZ16, 第 2.8 个问题2]。解决这一问题的一种标准方法是构造变异不变量——即在变异下保持不变的量。Beineke、Br¨ustle 和 Hille [BBH11] 引入了马尔可夫不变量，用于研究 3×3 斜对称矩阵；该不变量本质上刻画了那些变异无环的矩阵。Casals [Cas24] 利用对称化矩阵的行列式定义了一个二值变异不变量，称为 δ-不变量。Fomin 和 Neville [FN24] 引入了全适当箭图 的概念（Neville [Nev24]对此作了进一步研究），由此得到了一些强有力的变异不变量。关于变异不变量的其他例子，¨请读者参见 [Ass+08；Erv24b；Erv24a；FN23；Mul16；Sev13；Sev15；SU25]。然而，对于一般的可斜对称化矩阵，已知的变异不变量仍然非常少。

令 $M_n(\mathbb{Z})$ 表示 $n\times n$ 整数矩阵的集合。若矩阵 $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ 存在一个对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$，其对角元均为正整数 d_i，且 DB 为斜对称矩阵，则称其为可斜对称化矩阵。这样的矩阵 D 称为 B 的斜对称化子。

沿用 [FWZ16 第 2 节的做法，7], 固定一个指标 $k\in[n]:=\{1,\dots,n\}$，并定义三个矩阵 $J_{k,n},E_{k,n},F_{k,n}\in M_n(\mathbb{Z})$ 如下：

- $J_{k,n}$ 是对角矩阵，其对角元均为 1，唯有第 (k,k) 个元素等于 -1；
- $E_{k,n}=(e_{ij})$ 是由下式给出的矩阵：
$$e_{ik}=\max(0,-b_{ik})\quad\text{for all } i\in[n],\qquad e_{ij}=0 \text{ if } j\neq k.$$
- $F_{k,n}=(f_{ij})$ 是由下式给出的矩阵：
$$f_{ik}=\max(0,b_{ki})\quad\text{for all } i\in[n],\qquad f_{ij}=0 \text{ if } i\neq k.$$

令 $M_k:=J_{k,n}+E_{k,n}, N_k:=J_{k,n}+F_{k,n}$；注意， M_k,N_k 同时依赖于 k 和 B。于是， k 处的 B 变异定义为

$$\mu_k(B):=M_k\,B\,N_k.$$

注意，在 $N_k=M_k^{\top}$ 的情况下， B 是斜对称的。

众所周知， $\mu_k(B)$仍然是可斜对称化的，事实上它与B一样，具有相同的斜对称化子 D 。因此，变异可以迭代进行。此外，变异是对合的：对于所有 $k\in[n]$， $\mu_k(\mu_k(B))=B$ 。

我们采用 [FWZ16，定义 2.8.1] 中的以下定义：

定义 1.1。 两个斜对称化矩阵 B、 $B'\in M_n$（$\mathbb{Z}$）称为突变等价的，如果其中一个可以通过有限次变异得到另一个，之后还可以进行行和列的同时置换。

设 $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个斜对称化整数矩阵。按照 [FWZ16, 定义 2.7.8], , 我们将其对称化定义为由下式给出的对称矩阵 $\mathfrak{S}(B)=(s_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$:

$$s_{ij}=\begin{cases}2, & \text{if } i=j,\\ \operatorname{sgn}(b_{ij})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}, & \text{if } i<j,\\ \operatorname{sgn}(b_{ji})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}, & \text{if } i>j.\end{cases}$$

其中，$\operatorname{sgn}(x)$ 表示 x 的符号，约定 $\operatorname{sgn}(0)=0$。

引理 1.2。 设 $B\in M_n(\mathbb{Z})$ 为可斜对称化矩阵。则 $\det(\mathfrak{S}(B))\in\mathbb{Z}$。

我们将在第 2.1 节证明引理 1.2。我们将 Casals 的 δ-不变量推广到所有可斜对称化整数矩阵，具体如下。

De定义 1.3。 可斜对称化矩阵 $B\in M_n(\mathbb{Z})$ 的 δ-不变量 定义为

$$\delta(B):=\det(\mathfrak{S}(B))\pmod 4,$$

即，将$\det(\mathfrak{S}(B))$ 模4约化。

我们猜想，对于任意固定的正整数 n 以及任意固定的斜对称化子 $d_1,\dots,d_n$，它也总是二值的。参见注 2.7。

引理 1.4. 设 $B\in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个 $n\times n$ 可斜对称化矩阵。那么，对于任意置换矩阵 $P\in M_n(\mathbb{Z})$，有

$$\delta(PBP^{\top})\equiv\delta(B)\pmod 4.$$

我们将在第 2.3 节证明引理 1.4。
本文的主要结果如下:

定理 1.1. 设 $B\in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个斜对称整数矩阵。如果 $B'\in M_n(\mathbb{Z})$ 与 B突变等价，那么

$$\delta(B')\equiv\delta(B)\pmod 4.$$

我们将在第 2.4 节证明定理 1.1。

注 1.5. 设斜对称化子 $d_1,\dots,d_n$ 满足 $\gcd(d_i,d_j)=1$ 对所有 $i\neq j$均成立。于是可以定义替代对称化 $\mathfrak{S}'(B)=(s'_{ij})$ 如下:

$$s'_{ij}=\begin{cases}2d_i, & \text{if } i=j,\\ \operatorname{sgn}(b_{ij})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}, & \text{if } i<j,\\ \operatorname{sgn}(b_{ji})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}, & \text{if } i>j.\end{cases}$$

在这种情况下，有 $\det(\mathfrak{S}'(B))\in(\prod_{i=1}^n d_i)\mathbb{Z}$，并且量 $\delta'(B):=\det(\mathfrak{S}'(B))\pmod{4\prod_{i=1}^n d_i}$ 定义了另一个突变不变量。由于证明与定理 *1.1* 的证明类似，我们将其省略。

例 1.6. 设 x_1、x_2、$x_3\in\mathbb{Z}$，并考虑可斜对称化矩阵

$$B(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}0 & 2x_1 & 3x_2\\ -x_1 & 0 & 3x_3\\ -x_2 & -2x_3 & 0\end{pmatrix},$$

它具有斜对称化子 $(d_1,d_2,d_3)=(1,2,3)$。

标准对称化 $\mathfrak{S}(B)$ 与替代对称化 $\mathfrak{S}'(B)$（如注 *1.5* 所述）由下式给出

$$\mathfrak{S}(B)=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\,x_1 & \sqrt{3}\,x_2\\ \sqrt{2}\,x_1 & 2 & \sqrt{6}\,x_3\\ \sqrt{3}\,x_2 & \sqrt{6}\,x_3 & 2\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{S}'(B)=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\,x_1 & \sqrt{3}\,x_2\\ \sqrt{2}\,x_1 & 4 & \sqrt{6}\,x_3\\ \sqrt{3}\,x_2 & \sqrt{6}\,x_3 & 6\end{pmatrix},$$

并且可以算出

$$\delta(B(x_1,x_2,x_3))\equiv 2x_2^2\pmod 4,\qquad \delta'(B(x_1,x_2,x_3))\equiv 12\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3\big)\pmod{24}.$$

特别地，我们有

$$\delta(B(1,0,1))=\delta(B(1,0,0))\equiv 0\pmod 4,\quad \delta(B(1,1,0))\neq\delta(B(1,0,0))$$

but

$$\delta'(B(1,0,1)) \neq \delta'(B(1,0,0)), \quad \delta(B(1,1,0)) = \delta(B(1,0,1)) \equiv 0 \pmod{24}.$$

因此，这两个不变量 δ 和 δ' 能够区分出仅凭其中任何一个不变量都无法区分的矩阵。

2. Proof of the Main Result

在本节中，我们将证明引理 1.2、1.4 和定理 1.1。

2.1. 引理 1.2 的证明及行列式具有整数性的一个充分条件。 为方便起见，我们采用约定：对所有 $i \in [n]$, $b_{ii} = 2$ 。在此约定下，对称化矩阵$\mathfrak{S}(B) =(s_{ij})$的元素为

$$s_{ij} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(b_{ij})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}, & \text{if } i \leq j, \\ \operatorname{sgn}(b_{ji})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}, & \text{if } i > j. \end{cases}$$

下面的引理记录了可斜对称化矩阵的一个众所周知的性质。

引理 2.1. 设 $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个可斜对称化矩阵，并设 $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ 是满足 $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$的斜对称化子，因此 DB 是斜对称矩阵。则对任意置换 $\tau \in S_n$，有

$$\left|b_{1\,\tau(1)}\, b_{2\,\tau(2)} \cdots b_{n\,\tau(n)}\right| = \left|b_{\tau(1)\,1}\, b_{\tau(2)\,2} \cdots b_{\tau(n)\,n}\right|,$$

其中我们采用约定：对所有 i, $b_{ii} = 2$ 。

证明。由于 DB 是斜对称的，对于所有 i, j，都有 $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$，因此

$$|d_i b_{ij}| = |d_j b_{ji}|.$$

当 $i = j$ 时，这个恒等式也成立：根据我们的约定 $b_{ii} = 2$，两边都等于 $2d_i$。现在考虑乘积

$$\prod_{i=1}^{n} |d_i b_{i\,\tau(i)}| = \prod_{i=1}^{n} |d_{\tau(i)} b_{\tau(i)\,i}| = \prod_{j=1}^{n} |d_j b_{j\,\tau^{-1}(j)}|,$$

这里我们作了指标替换 $j = \tau(i)$。由于 τ 是一个置换，集合 $\{\tau(1), \ldots, \tau(n)\}$ 与 $\{1, \ldots, n\}$ 相同，因此

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} d_i\Big) \cdot \left|b_{1\,\tau(1)} \cdots b_{n\,\tau(n)}\right| = \Big(\prod_{i=1}^{n} d_i\Big) \cdot \left|b_{\tau(1)\,1} \cdots b_{\tau(n)\,n}\right|.$$

因为每个 d_i 都是正整数，可以约去公因子 $\prod_{i=1}^{n} d_i > 0$，得到

$$\left|b_{1\,\tau(1)} \cdots b_{n\,\tau(n)}\right| = \left|b_{\tau(1)\,1} \cdots b_{\tau(n)\,n}\right|,$$

如所声称。 □

引理 *1.2* 的证明。对于每个 $\tau \in S_n$，我们有

$$\begin{aligned} |s_{1\,\tau(1)} s_{2\,\tau(2)} \cdots s_{n\,\tau(n)}| &= \left|\sqrt{|b_{1\,\tau(1)} b_{\tau(1)\,1}|}\,\sqrt{|b_{2\,\tau(2)} b_{\tau(2)\,2}|} \cdots \sqrt{|b_{n\,\tau(n)} b_{\tau(n)\,n}|}\right| \\ &= \sqrt{\left|b_{1\,\tau(1)} \cdots b_{n\,\tau(n)}\right| \cdot \left|b_{\tau(1)\,1} \cdots b_{\tau(n)\,n}\right|}. \end{aligned}$$

根据引理 2.1，绝对值内的两个乘积的模相等；因此

$$|s_{1\,\tau(1)} \cdots s_{n\,\tau(n)}| = \left|b_{1\,\tau(1)} \cdots b_{n\,\tau(n)}\right| \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

因此，$\det(\mathfrak{S}(B))$ 的展开中的每一项都是整数，从而

$$\det(\mathfrak{S}(B)) = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\ell(\tau)}\, s_{1\,\tau(1)} s_{2\,\tau(2)} \cdots s_{n\,\tau(n)} \in \mathbb{Z}.$$

证明完毕。 □

根据引理 2.1 中的论证，我们得到以下关于实对称矩阵具有整数行列式的一般充分条件——这一事实将在后文中派上用场。

引理 2.2. 设 $S=(s_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ 是一个对称矩阵。假设对于满足 $i\le j$ 的每一对(i,j)，其元素s_{ij} 可以表示为

$$s_{ij}=\sum_{t\in T_{ij}}\epsilon(t)\sqrt{|b_{ij}^t b_{ji}^t|},$$

其中 T_{ij}是一个有限指标集，且 $\epsilon(t)$ b_{ij}^t，$b_{ji}^t\in\mathbb{Z}$对所有 $t\in T_{ij}$成立。此外，假设存在正整数d_1，……，$d_n\in\mathbb{Z}_{>0}$（下文称为斜对称化子），使得 $d_ib_{ij}^t=-d_jb_{ji}^t$对所有 i、$j\in[n]$ 以及所有 $t\in T_{ij}$成立。则 $\det(S)\in\mathbb{Z}$。进而，对所有 i、$j\in[n]$ 以及所有 $t\in T_{ij}$，

$$\sqrt{|b_{ij}^t b_{ji}^t|}\,\det(S_{i,j})\in\mathbb{Z},$$

其中 $S_{i,j}$表示 S 的 $(n-1)\times(n-1)$ 子矩阵，它由删除第 i 行和第 j 列得到。

由于引理 2.2 的证明与引理 1.2 的证明相同，故略去。

注 2.3. 在引理 *2.2* 的假设下，设 $S'=(s'_{ij})$ 为任意对称矩阵，其构造方式为：对每一对 (i,j)（其中 $i\le j$），选取一个非空子集 $T'_{ij}\subseteq T_{ij}$，并令

$$s'_{ij}=\sum_{t\in T'_{ij}}\epsilon(t)\sqrt{|b_{ij}^t b_{ji}^t|}.$$

于是 S' 也满足引理 *2.2* 的假设，从而$\det(S')\in\mathbb{Z}$。

2.2. **关于矩阵行列式的一个引理**。对任意 i，$j\in[n]$，令 ε_{ij} 表示这样一个初等矩阵：其元素除$(i,\ j)$元等于 1 外，其余均为零。

引理 2.4. 设 $S=(s_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ 是满足引理 *2.2* 假设的实对称矩阵，并具有固定的斜对称化子 $d_1,\dots,d_n\in\mathbb{Z}_{>0}$。设 i、$j\in[n]$ 为互异指标，并设对某些满足 $d_ib_{ij}=-d_jb_{ji}$的整数ϵ、b_{ij}、b_{ji}有$a=\epsilon\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}$。则

$$\det\big(S-2a(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji})\big)\equiv\det(S)\pmod 4.$$

证明。我们利用沿行 i与 j的拉普拉斯展开，对秩二扰动 $S-2a(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji})$的行列式进行展开。由此得到

$$\det\big(S-2a(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji})\big)=\det(S)-(-1)^{i+j}2a\big(\det(S_{i,j})+\det(S_{j,i})\big)-4a^2\det\big(S_{\{i,j\},\{i,j\}}\big),\tag{2}$$

其中，$S_{i,\ j}$表示删除第 i 行和第 j 列后得到的子矩阵，而 $S_{\{i,j\},\ \{i,j\}}$ 是删除第 i 行和列以及第 j 行和列后得到的 $(n-2)\times(n-2)$ 主子矩阵。

由于 S 是对称的，我们有 $S_{j,\ i}=(S_{i,\ j})^\top$，因此

$$\det(S_{i,j})=\det(S_{j,i}).$$

由引理 2.2，乘积 $a\,\det(S_{i,\ j})$ 是一个整数。因此，

$$(-1)^{i+j}2a\big(\det(S_{i,j})+\det(S_{j,i})\big)=(-1)^{i+j}4a\det(S_{i,j})\equiv 0\pmod 4.\tag{3}$$

此外，主子矩阵 $S_{\{i,j\},\ \{i,j\}}$ 满足引理 2.2 的假设（对称化权重为 $\{d_k\}_{k\ne i,\ j}$），因此由引理 2.2 可得 $\det\big(S_{\{i,j\},\ \{i,j\}}\big)\in\mathbb{Z}$。由于 $a^2=\epsilon^2|b_{ij}b_{ji}|\in\mathbb{Z}$，可知

$$4a^2\det\big(S_{\{i,j\},\{i,j\}}\big)\equiv 0\pmod 4.\tag{4}$$

结合 (2)、(3) 和 (4)，我们得出

$$\det\big(S-2a(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji})\big)\equiv\det(S)\pmod 4,$$

正如所声称的。 □

2.3. **引理 1.4 的证明**。以下引理是 [Cas24, 引理 2.5] 的类似结果；通过直接计算即可验证。

引理 2.5. 设 $P \in M_n(\mathbb{Z})$ 是对应于简单换位 s_k （其中$k \in [n-1]$）的置换矩阵。那么对于任意可斜对称化矩阵 $B \in M_n(\mathbb{Z})$，有

$$P\,\mathfrak{S}(B)\,P^\top - \mathfrak{S}(PBP^\top) = 2\,\operatorname{sgn}(b_{k,k+1})\sqrt{|b_{k,k+1}b_{k+1,k}|}\,(\varepsilon_{k,k+1}+\varepsilon_{k+1,k}).$$

引理 *1.4* 的证明。 由于每个置换都可以写成相邻（简单）换位的乘积，只需验证以下合同关系

$$\delta(B) \equiv \delta(PBP^\top) \pmod 4$$

在 P 是对应于简单换位 $s_k = (k\ k+1)$ （其中$k \in [n-1]$）的置换矩阵时成立。

固定 B 的一个斜对称化子 $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_{>0}$。矩阵 $S := \mathfrak{S}(PBP^\top)$ 满足引理 2.2 的假设，其中采用置换后的斜对称化子 $(d_1, \dots, d_{k-1}, d_{k+1}, d_k, d_{k+2}, \dots, d_n)$。

Set

$$a := -\operatorname{sgn}(b_{k,k+1})\sqrt{|b_{k,k+1}b_{k+1,k}|}.$$

关系式 $d_{k+1}b_{k+1,k} = -d_k b_{k,k+1}$ 确保了数对 (S, a) 满足引理 2.4 的假设。因此，

$$\det\Big(S + 2\,\operatorname{sgn}(b_{k,k+1})\sqrt{|b_{k,k+1}b_{k+1,k}|}\,(\varepsilon_{k,k+1}+\varepsilon_{k+1,k})\Big) \equiv \det(S) \pmod 4. \tag{5}$$

现在注意到

$$\begin{aligned}
\delta(B) &= \det(\mathfrak{S}(B)) = \det(P\,\mathfrak{S}(B)\,P^\top) \\
&\overset{\text{Lemma 2.5}}{=} \det\Big(\mathfrak{S}(PBP^\top) + 2\,\operatorname{sgn}(b_{k,k+1})\sqrt{|b_{k,k+1}b_{k+1,k}|}\,(\varepsilon_{k,k+1}+\varepsilon_{k+1,k})\Big) \\
&\overset{(5)}{\equiv} \det\big(\mathfrak{S}(PBP^\top)\big) \pmod 4 \\
&= \delta(PBP^\top),
\end{aligned}$$

如要求。 □

2.4. **定理 1.1 的证明**。

证明。 根据引理 1.4，只需考虑 $B' = \mu_k(B) = (b'_{ij})$ 的情形。在此情形下，我们旨在证明

$$\det(\mathfrak{S}(\mu_k(B))) \equiv \det(\mathfrak{S}(B)) \pmod 4. \tag{6}$$

通过对行和列进行同时置换（根据引理 1.4，这保持行列式模 4 不变），不失一般性，我们可以假设

$$b_{ik} \geq 0 \quad \text{for all } i \leq k, \qquad b_{ik} < 0 \quad \text{for all } i > k.$$

记 $\mathfrak{S}(B) = (s_{ij})$ 以及 $\mathfrak{S}(\mu_k(B)) = (s'_{ij})$。在此假设下，对于所有 i，我们都有 $s_{ik} = \sqrt{|b_{ik}b_{ki}|}$。The entries of the mutated matrix $B' = \mu_k(B)$ are given by

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

但根据我们的符号约定（对于 $i \leq k$ 为所有 $b_{ik} \geq 0$，对于 $i > k$ 为所有 < 0），这可简化为

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + b_{ik}b_{kj}, & \text{if } i < k < j, \\ b_{ij} - b_{ik}b_{kj}, & \text{if } j < k < i, \\ b_{ij}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别地，当 $i < k < j$ 时，直接计算可得

$$\begin{aligned}
(s'_{ij})^2 &= -b'_{ij}b'_{ji} \\
&= -(b_{ij} + b_{ik}b_{kj})(b_{ji} - b_{jk}b_{ki}) \\
&= -b_{ij}b_{ji} + b_{ij}b_{jk}b_{ki} - b_{ik}b_{kj}b_{ji} + b_{ik}b_{ki}b_{jk}b_{kj}
\end{aligned}$$

$$= s_{ij}^2 + 2b_{ij}b_{jk}b_{ki} + s_{ik}^2 s_{jk}^2$$
$$= \left(s_{ij} + s_{ik}s_{jk}\right)^2.$$

因此， $\mathfrak{S}(B') = (s'_{ij})$ 的各项满足

$$s'_{ij} = \begin{cases} -s_{ij}, & \text{if } i = k < j \text{ or } i < k = j, \\ s_{ij} + s_{ik}s_{jk} \text{ or } -s_{ij} - s_{ik}s_{jk}, & \text{if } i < k < j, \\ s_{ij}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

现在定义这些矩阵

$$J = I_n - 2\varepsilon_{k,k}, \qquad E = (e_{ij})_{1\le i,j\le n},$$

其中， I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵， E 由下式给出

$$e_{ij} = \begin{cases} -s_{ik}, & \text{if } j = k \text{ and } i > k, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Set

$$S'' := (J + E)\,\mathfrak{S}(B)\,(J + E)^\top = (s''_{ij}).$$

直接计算可得， S'' 是对称的，且其元素满足

$$s''_{ij} = \begin{cases} -s_{ij}, & \text{if } i < k = j, \\ s_{ij} - s_{ik}s_{jk}, & \text{if } i < k < j, \\ s_{ij}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{8}$$

设 $T = S'' - \mathfrak{S}(B') = (t_{ij})$。则 T 是对称的，由（7）和（8）可得，对所有 $i \le j$:

$$t_{ij} = s''_{ij} - s'_{ij} = \begin{cases} 2s_{ij}, & \text{if } i = k < j, \\ -2s_{ik}s_{kj} \text{ or } 2s_{ij}, & \text{if } i < k < j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

固定 B的一个斜对称化子 d_1，……， $d_n \in \mathbb{Z}_{>0}$。由于变异保持具有相同权重的可斜对称化性质，该元组同样也是 B'的斜对称化子。

W现在我们验证每个非零元素 t_{ij}，$(i \le j)$均满足引理 2 的假设。 4.

- 若 $t_{ij} = 2s_{ij}$，则 $s_{ij} = \operatorname{sgn}(b_{ij})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}$，且根据假设， $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$ 成立。
- 若 $t_{ij} = -2s_{ik}s_{kj}$，则

$$s_{ik}s_{kj} = \sqrt{(-b_{ik}b_{ki})(-b_{kj}b_{jk})} = \sqrt{|(b_{ik}b_{kj})(-b_{jk}b_{ki})|},$$

并利用 $d_i b_{ik} = -d_k b_{ki}$ 和 $d_k b_{kj} = -d_j b_{jk}$，我们可推出

$$d_i(b_{ik}b_{kj}) = (-d_k b_{ki})b_{kj} = d_j(b_{jk}b_{ki}) = -d_j(-b_{jk}b_{ki}),$$

因此，乘积 $b_{ik}b_{kj}$ 和 $-b_{jk}b_{ki}$ 由同一个对称化子关联。因此，项 $s_{ik}s_{kj}$ 来自一对满足反对称化子条件的整数。

因此，差 $T = S'' - \mathfrak{S}(B')$ 是若干秩二更新之和，其形式属于引理 2.4 所处理的情形。对 T 的每个非零非对角元各应用一次引理 2.4，我们便得到

$$\det(S'') \equiv \det(\mathfrak{S}(B')) \pmod 4.$$

最后，由于 $\det(J + E) = \det(J) = -1$，我们有

$$\det(S'') = \det(J + E)^2 \det(\mathfrak{S}(B)) = \det(\mathfrak{S}(B)).$$

综合以上结果，我们得到

$$\det(\mathfrak{S}(B)) = \det(S'') \equiv \det(\mathfrak{S}(B')) \pmod 4,$$

由此证明了（6）。证明完毕。 □

引理 2.2 和引理 2.4 的类似结论在这个更一般的情形下仍然成立。

注释 2.6. 设 $S=(s_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个实矩阵，其中每个元素 s_{ij} 都可以写成 s

$$s_{ij}=\sum_{t\in T_{ij}} \epsilon(t)\sqrt{|b_{ij}^t b_{ji}^t|}\,,$$

其中， T_{ij} 是一个有限指标集，且 $\epsilon(t)$ b_{ij}^t， $b_{ji}^t \in \mathbb{Z}$ 对所有 $t\in T_{ij}$ 均成立。进一步假设存在正整数 d_1，…， $d_n \in \mathbb{Z}_{>0}$，满足

$$d_i b_{ij}^t = d_j b_{ji}^t$$

对所有 i、 $j\in[n]$ 以及所有 $t\in T_{ij}$ 均成立。则 $\det(S) \in \mathbb{Z}$。

此外，对于 任意固定的 i、 $j\in[n]$，任意满足 $d_i b'_{ij}=d_j b'_{ji}$ 的整数 b'_{ij}、 $b'_{ji}\in\mathbb{Z}$，以及任意 $\epsilon\in\mathbb{Z}$，我们有 e

$$\det\bigl(S-2\epsilon\sqrt{|b'_{ij}b'_{ji}|}\,\varepsilon_{ij}\bigr)\equiv\det(S)\pmod 2.$$

注 2.7. 对于任意固定的 n，*Casals [Cas24]* 证明，在斜对称情形下， δ-不变量仅取两个可能值；更准确地说，

$$\delta(B)\in\begin{cases}\{0,2\}, & \text{if } n \text{ is odd},\\ \{0,1\}, & \text{if } n\equiv 0 \pmod 4,\\ \{0,3\}, & \text{if } n\equiv 2 \pmod 4.\end{cases}$$

事实上，正如注释 *2.6* 中所指出的，对于 n 为奇数的可斜对称化矩阵，同样的二分性更一般地成立。

我们还猜想，对于任意固定的 n 以及斜对称化子 d_1、…、 d_n 的任意选择，不变量 δ 是二元的。若干显式计算支持这一点。

References

[Ass+08] Ibrahim Assem 等。斜对称 3×3 矩阵的变异类。《Comm. Algebra》36.4（2008），第 1209–1220 页。[BBH11] Andre Beineke、Thomas Br¨ustle 和 Lutz Hille。具有三个顶点的簇循环箭图与马尔可夫方程。《Algebr. Represent. Theory》14.1（2011）。附录由 Otto Kerner 撰写，第 97–112 页。[Cas24] Roger Casals。矩阵变异的二元不变量。《J. Comb. Algebra》（2024）。 DOI: 10.4171/JCA/99。[Erv24a] Tucker Ervin。由叉产生的新遗传性质与突变不变性质。《The Electronic Jour- nal of Combinatorics》31.1（2024），第 16 页。[Erv24b] Tucker Ervin。无限制红色规模与符号相干性。arXiv:2401.14958（2024）。[Fom22] Sergey Fomin。箭图突变。《Open Problems in Algebraic Combinatorics》，OPAC 2022 网站上的幻灯片（2022）。[FN23] Sergey Fomin 和 Scott Neville。长变异循环。arXiv:2304.11505（2023）。[FN24] Sergey Fomin 和 Scott Neville。循环有序箭图。arXiv:2406.03604（2024）。[FWZ16] Sergey Fomin、Lauren Williams 和 Andrei Zelevinsky。簇代数导论。第 1–3 章。arXiv:1608.05735（2016）。[FZ02] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数。I. 基础。《J. Amer. Math. Soc.》15.2（2002），第 497–529 页。[Mul16] Greg Muller。极大绿色序列的存在性在箭图变异下并非不变量。《Electron. J. Combin.》23.2（2016），论文 2.47，共 23 页。[Nev24] Scott Neville。变异无环箭图是全然适当的。arXiv:2409.17832（2024）。[Sev13] Ahmet I. Seven。可斜对称化 3×3 矩阵的变异类。《Proc. Amer. Math. Soc.》141.5（2013），第 1493–1504 页。[Sev15] Ahmet I. Seven。簇代数与对称矩阵。《Proc. Amer. Math. Soc.》143.2（2015），第 469–478 页。.. . .[SU25] Ahmet I. Seven 和 Ibrahim Unal。矩阵变异的合同不变量。《J. Pure Appl. Algebra》229.3（2025），论文编号 107920，共 14 页。

Min Huang, School of Mathematics (Zhuhai), Sun Yat-sen University, Zhuhai, China.
Email address: huangm97@mail.sysu.edu.cnQiling Ma, School of Mathematics (Zhuhai), Sun Yat-sen University, Zhuhai, China.*Email address*: maqling@mail2.sysu.edu.cn