arXiv:2602.03206v1 [math.FA] 3 Feb 2026

$\mathbb{L}$向量格上的 Riesz-Kantorovich 公式

Tomas Chamberlain 和 Marten Wortel

摘要

设 $\mathbb{L}$ 是 Dedekind 完备的含幺 f 代数。我们证明了从具有里斯分解性质的有向偏序 $\mathbb{L}$ 模到满足一个额外温和条件的 Dedekind 完备 $\mathbb{L}$ 向量格的保序有界 $\mathbb{L}$ 模同态的 Riesz-Kantorovich 公式。

1 引言

设 $\mathbb{L}$ 是实或复 Dedekind 完备含幺 f 代数。在 [LF24]，中，发展出了一般的 $\mathbb{L}$ 泛函分析理论，研究 $\mathbb{L}$ 范数空间，即配备了 $\mathbb{L}$ 值范数的 $\mathbb{L}$ 模。这一理论主要受到两项近期进展的启发。首先，Kaplansky-Hilbert 模的理论（由 Kaplansky 于 1953年 建立）成功应用于 [EHK24]，为遍历理论中著名的 Furstenberg-Zimmer 结构定理提供了泛函分析证明。Kaplansky-Hilbert 模是 $\mathbb{L}$ 希尔伯特空间，其中 $\mathbb{L}$ 是一个交换 AW*-代数，也就是复 Dedekind 完备含幺向量格。其次，近期发展出了一套全面的向量格中的概率论（例如参见 [LW10；KKW24] 及其中的参考文献），其基础是向量格 E 上的条件期望算子 T。在这一理论中，某些空间 $L^p(T)$ 至关重要；这些空间是 $\mathbb{L} = R(T)$ 的 $\mathbb{L}$ 范数空间，其中 $\mathbb{L} = R$ 是实的全完备（因而也是 Dedekind 完备）向量格。

在这两个启发性例子中，相应的 $\mathbb{L}$-赋范空间都具有额外的结构。事实上，在 [EHK24] 中，所研究的 Kaplansky-Hilbert 模是 $L^2(X|Y)$，它是一个复 $L^\infty(Y)$-模（这里 X 和 Y 是某些概率空间），而 $L^2(X|Y)$ 具有自然模，使其成为复向量格。 $R(T)$-模 $L^p(T)$ 也自然地是一个实向量格。

因此，似乎也有必要发展 $\mathbb{L}$-向量格理论，即研究兼具格结构且格结构与模结构相容的 $\mathbb{L}$-模。本文是发展这一理论的初步尝试。在经典情形下（即 $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{L} = \mathbb{C}$），复向量格理论是在实向量格理论的基础上发展起来的，因此本文只考虑 $\mathbb{L}$ 为实 Dedekind 完备含幺向量格的情形。

经典向量格理论中最重要的结果之一是 Riesz-Kantorovich 公式，而本文的主要目标是以最一般的形式发展其 $\mathbb{L}$值版本。请注意，在 [KKW24的引理 3。2] 中，这些公式是在非常特殊的情形下证明的，即针对 $L^2(T)^*$ （从 $R(T)$ 到 $L^2(T)$ 的保序有界 $R(T)$-模同态），并采用了专为该情形设计的技巧。

本文结构如下。在第 2 节中，我们介绍 $\mathbb{L}$ 以及偏序 $\mathbb{L}$-模和 $\mathbb{L}$-向量格的基础知识。第 3 节将进行深入研究

阿基米德性质，而这些性质比经典情形更为复杂。经典的 Riesz-Kantorovich 公式依赖于锥之间加性映射的延拓引理；在第 4 节中，我们将发展其 $\mathbb{L}$值类比。即便在经典情形下，我们对该引理的表述也对经典结果略有改进，因为它只要求陪域是几乎阿基米德的，而非阿基米德的。最后，在第5节中，我们证明 Riesz-Kantorovich 公式（定理5.1）。

2 预备知识

本文中，$\mathbb{L}$ 是任意的戴德金完备含幺 f代数。我们用“在经典情形下”来指代 $\mathbb{L}=\mathbb{R}$这一特定情形。由于 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{R}$上的含幺代数，我们将每个实数 r 与其在 $\mathbb{L}$中的像 $r\cdot 1$ 等同，因此将 $\mathbb{R}$ 视为 $\mathbb{L}$的子格和子代数。特别地，我们用 $\mathbf{1}$ 表示 $\mathbb{L}$ 的乘法单位元。符号 $\mathbb{P}$ 表示 $\mathbb{L}$中幂等元的集合 $\{\pi\in\mathbb{L}:\ \pi^2=\pi\}$。在从 $\mathbb{L}$继承的序下，$\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{L}$ 的子格，也是一个完备布尔代数，其最小元为 $\mathbf{0}$，最大元为 $\mathbf{1}$，交运算为（π、ρ）$\mapsto\pi\rho$，补运算为 $\pi\mapsto\pi^c:=\mathbf{1}-\pi$。$\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{L}$ 的带所构成的布尔代数同构；对于 $\mathbb{L}$的每个带，对应的 $\mathbb{P}$ 元素是带投影作用于 $\mathbf{1}$ 所得的像；对于每个幂等元 π，对应的带为 $\pi\mathbb{L}$。

如 [LF24，§2.1], 所说明，存在唯一的斯通空间 K，使得 $\mathbb{L}$（同构于）$C_\infty(K)$的一个序稠密向量格理想与子代数，并且进一步有 $C(K)\subseteq\mathbb{L}$。利用这一表示，$\mathbb{P}$ 的元素是 $C(K)$中的 $\{0,1\}$值函数，并且它们恰好是 K的既开又闭子集的示性函数。作为 $\mathbb{L}$中元素的实数对应于 $C(K)$中的常值函数。注意，$\mathbb{L}=\mathbb{R}$ 当且仅当 $\mathbb{P}$ 是二元布尔代数。我们用记号 $\mathbb{L}_1$ 表示由$\mathbf{1}$生成的 $\mathbb{L}$ 的向量格理想。在利用 $C_\infty(K)$对 $\mathbb{L}$ 所作的表示下，$\mathbb{L}_1$ 对应于 $C(K)$。

定义2.1 设 X 是一个 $\mathbb{L}$模且 $x\in X$。x 的**支集**记为 π_x，并定义为 $\pi_x:=\inf\{\pi\in\mathbb{P}:\ \pi x=x\}$。

注意，$\pi_x\in\mathbb{P}$。对于 $\lambda\in\mathbb{L}$，将 $\mathbb{L}$ 视为其自身上的模，π_λ 是集合 $\{k\in K$ 的闭包的示性函数：$\lambda(k)\neq 0\}$。此外，$\pi_\lambda\lambda=\lambda$。

上述对 $\mathbb{L}$ 的表示清楚地表明，对于 $\mathbb{L}$中的任意 λ 和 μ，以下条件等价：$\lambda\mu=0$；$|\lambda|\wedge|\mu|=0$；$\pi_\lambda\wedge\pi_\mu=0$；以及 $\pi_\lambda\pi_\mu=0$。

$\mathbb{L}$-模的元素 x 称为**支撑达到**的，若 $\pi_x x=x$；而 $\mathbb{L}$-模本身称为支撑达到的，若其每个元素都是支撑达到的。下面的例子表明，并非每个 $\mathbb{L}$-模都是支撑达到的。[1]

例 2.2。设 $\mathbb{L}=\ell^\infty$、$X=\ell^\infty/c_0$和 $x\in X$。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 π_n 为集合 $\mathbb{N}\setminus\{1,\dots,n\}$的示性函数。则对所有 $n\in\mathbb{N}$，$\pi_n x=x$，但 $\pi_n\downarrow 0$，因此 $\pi_x=0$。

定义 2.3。设 X 是一个 $\mathbb{L}$-模。如果 X 具有一个偏序，使得对于所有 x、y、$z\in X$ 以及所有 $\lambda\in\mathbb{L}$，则称 X 为一个**偏序 $\mathbb{L}$-模**（或**PO $\mathbb{L}$-模**）：

1. $x\le y$ 蕴含 $x+z\le y+z$，且
2. $0\le\lambda$ 和 $x\le y$ 蕴含 $\lambda x\le\lambda y$。

X 的**正锥**是集合 $X^+:=\{x\in X:\ 0\le x\}$。如果 X 是一个PO $\mathbb{L}$-模，那么如果 X 中的每一对元素都有上界，我们就称 X 是**有向**的。如果 X 上的偏序是格序，我们就称 X 是一个 **$\mathbb{L}$-向量格**。

[1]可以证明，一个 $\mathbb{L}$-模是支撑达到的，当且仅当每个循环子模都是投射的；而这又当且仅当该模是非奇异的。

与经典情形一样，使给定的 $\mathbb{L}$-模成为PO$\mathbb{L}$-模的偏序，与 X的锥一一对应，即 X 的子集，这些子集对加法和正数倍运算封闭，且不包含非平凡子模。

PO $\mathbb{L}$-模 X 是有向的，当且仅当由 X^+ 生成的子模等于 X。我们将有向 PO $\mathbb{L}$-模称为**有向** $\mathbb{L}$-**模**。

设 X 和 Y 是 PO $\mathbb{L}$-模。从 X 到 Y 的 $\mathbb{L}$-模同态称为从 X 到 Y的**算子**，算子的集合记为 $\mathcal{L}(X,\ Y)$。若算子将 X^+ 映射到 Y^+，则称其为**正** 算子。令正锥为正算子的集合，由此赋予 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ PO $\mathbb{L}$-模结构。若一个算子是两个正算子之差，则称其为**正则** 算子，正则算子的集合记为 $\mathcal{L}_{\mathrm{r}}(X,\ Y)$。若对于每个序区间 $[x,y]\subseteq X$，$T([x,y])$都包含于 Y中的某个序区间，则称算子 T为**序有界** 算子。序有界算子的集合记为 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,\ Y)$。与经典情形一样，每个正则算子都是序有界的。表达式 $X^{\sim}$ 表示从 X 到 $\mathbb{L}$的序有界算子集合。

对于 $x,\ y$ 在一个 $\mathbb{L}$-向量格中，令 $\pi_{x<y}$ 表示 $(y-x)^+$ 的支集。特别地，对于$\lambda,\ \mu\in\mathbb{L}$，$\pi_{\lambda<\mu}$ 是集合 $\{k\in K$ 的闭包的示性函数：$\lambda(k)<\mu(k)\}$。由此可得 $\pi_{\lambda<\mu}\lambda\le\pi_{\lambda<\mu}\mu$，从而得到以下引理。

引理 2.4. 设 $\lambda\in\mathbb{L}$。则存在一个序列 $\pi_n\uparrow 1$，属于 $\mathbb{P}$，使得对所有 $n\in\mathbb{N},\ -n\le\pi_n\lambda\le n$。此外，若 $\lambda\in\mathbb{L}^+$，则 $\pi_n\lambda\uparrow\lambda$。

Proof. 对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $\pi_n=\pi_{|\lambda|<n}$。由 $\mathbb{L}$ 的表示可知 $\pi_n\uparrow 1$，且对所有 $n\in\mathbb{N}$，$-n\le\pi_n\lambda\le n$。■

引理 2.5. 对于具有 $x\in X^+$ 和 $\pi\in\mathbb{P}$ 的 PO $\mathbb{L}$-模 X，有 $[0,\pi x]=\pi[0,x]$。

Proof. 对于任意 $y\in[0,x],\ \pi y\in[0,\pi x]$，因此 $\pi[0,x]\subseteq[0,\pi x]$。反之，设 $z\in[0,\pi x]$。则 $z\in[0,x]$，且 $\pi^c z\in[0,\pi^c\pi x]=\{0\}$，因此 $(1-\pi)z=\pi^c z=0$。于是 $z=\pi z\in\pi[0,x]$，这说明 $[0,\pi x]\subseteq\pi[0,x]$。■

如果 X 是一个偏序 $\mathbb{L}$-模，$x\in X$，且 $D\subseteq X$，那么表达式 $x\le D$ 意味着 x 是 D的下界。

引理 2.6。 </style}设 X 是一个偏序 $\mathbb{L}$-模。如果 $\lambda\in\mathbb{L}^+$ 且 $D\downarrow x$ 属于 X，那么 $\lambda D\downarrow\lambda x$。

Proof. 首先设 $x=0$。显然 $0\le\lambda D$。令 $y\le\lambda D$。于是，对于所有 $d\in D,\ y\le y+d\le\lambda d+d=(\lambda+1)d$。由于 $\lambda+1\ge 1$，由 $\mathbb{L}$ 的表示可知，$\lambda+1$ 是可逆的，且其逆元为正。这对所有 $d\in D$给出了 $(\lambda+1)^{-1}y\le d$。因此 $(\lambda+1)^{-1}y\le 0$，两边乘以 $\lambda+1$ 得到 $y\le 0$。

对于任意 $x\in X$，注意到 $D\downarrow x$ 当且仅当 $D-x\downarrow 0$。应用上述结果可得 $\lambda D-\lambda x\downarrow 0$，从而有 $\lambda D\downarrow\lambda x$。■

3 阿基米德性质

我们从主要定义开始。

定义 3.1。设 X是一个 PO $\mathbb{L}$-模，并且 $S\in\{\mathbb{L},\mathbb{R},\mathbb{P}\}$。考虑以下条件。

(i) 对所有 $D\subseteq S$ 和所有 $x\in X^+$，若 $D\downarrow 0$ 属于 $\mathbb{L}$，则 $Dx\downarrow 0$ 属于 X。(ii) 对所有 $D\subseteq S$ 和所有 $x\in X^+$，若 $D\downarrow 0$ 属于 $\mathbb{L}$、$y\in X$ 和 $-Dx\le y\le Dx$，则 $y=0$。

我们称 X 为 **S-阿基米德**，如果它满足条件（i）。我们称 X 为**几乎S-阿基米德**，如果它满足条件（ii）。

我们称 X 是**阿基米德**的，如果它是 $\mathbb{L}$-阿基米德的；并且我们称 X 是**序列S-阿基米德**的（相应地，**序列几乎 S-阿基米德**的），如果它满足条件（i）（相应地，条件（ii）），其中将 D 替换为 S 中任意一个递减至零的序列。

在经典情形中，仅有的幂等元是0和1，因此 $\mathbb{P}$-阿基米德条件平凡地成立。

注意，“$\mathbb{R}$-阿基米德”性质与“几乎 $\mathbb{R}$-阿基米德”性质等价于它们的序列版本。与经典情形一样，每个阿基米德性质都蕴含相应的“几乎”版本；并且对于 $\mathbb{L}$-向量格，每个阿基米德性质都等价于相应的“几乎”版本。

在 [HP82，§2], 中证明了，在一个 f-代数中，用正元素作乘法是一个正交态射，因而也是序连续的。因此， $\mathbb{L}$，将其视为自身上的偏序模，是阿基米德的。

有向 $\mathbb{L}$-模 X 是 $\mathbb{R}$-阿基米德的，当且仅当对于所有 x， $y \in X$，若 $x \leq \frac{1}{n} y$ 对所有$n \in \mathbb{N}$均成立，则 $x \leq 0$。这是阿基米德空间的经典定义。在经典情形下，有向 $\mathbb{L}$-模是阿基米德的，当且仅当它是 $\mathbb{R}$-阿基米德的。在一般情形下，阿基米德 PO $\mathbb{L}$-模总是 $\mathbb{R}$-阿基米德的，但这两种性质并不等价。事实上，例2.2 给出了一个 $\mathbb{R}$-阿基米德的 $\mathbb{L}$-模，但它不是阿基米德的。不过请注意，在该例中， X 不具阿基米德性的现象是由一个幂等元网体现出来的。事实证明，这正是所有反例的唯一来源，下面我们将加以说明。

定理 3.2. 设 X 是一个 PO $\mathbb{L}$-模。那么， X 是阿基米德的，当且仅当它同时是$\mathbb{R}$-阿基米德的和 $\mathbb{P}$-阿基米德的。

Proof. 显然，如果 X 是阿基米德的，那么它既是 $\mathbb{R}$-阿基米德的，也是 $\mathbb{P}$-阿基米德的。现在假设X 是 $\mathbb{R}$-阿基米德的，并且是 $\mathbb{P}$-阿基米德的。令 $x \in X^+$，并令 $D \downarrow 0$ 属于 $\mathbb{L}$。我们希望证明 $\inf(Dx) = 0$，因此令 $y \leq Dx$。

固定 $r \in \mathbb{R}$，使得 $0 < r$。对于每个 $\lambda \in D$，我们有 $\lambda + r = \lambda \wedge r + \lambda \vee r$，从而得到 $\lambda = \lambda \wedge r + (\lambda \vee r - r) = \lambda \wedge r + (\lambda - r)^+$。还要注意，函数 $\lambda \mapsto \pi_{\lambda > r}$（定义域为 D）是保序的。

我们声称 $\inf_{\lambda \in D} \pi_{\lambda > r} = 0$。为证明这一点，令 $\sigma := \inf_{\lambda \in D} \pi_{\lambda > r}$，并令 $\mu \in D$。于是 $0 \leq \sigma \leq \pi_{\mu > r} = \pi_{(\mu - r)^+}$，由于 $(\mu - r)^-$ 与 $\pi_{(\mu - r)^+}$ 不相交， σ 与 $(\mu - r)^-$不相交。因此 $(\mu - r)\sigma = (\mu - r)^+ \sigma \geq 0$，从而 $r\sigma \leq \mu\sigma$。对所有 $\mu \in D$ 取下确界，得到$r\sigma \leq \inf(D\sigma) = 0$，两边除以 r 得到 $\sigma \leq 0$。因此 $\sigma = 0$，如所声称。

现在证明 $y \leq rx$。对于每个 λ， $\mu \in D$，令 $\nu \in D$ 为 $\{\lambda, \mu\}$的下界。（由于 D 是向下有向的，这样的 ν存在。）于是 $y \leq (\nu \wedge r)x + (\nu - r)^+ x \leq rx + (\nu - r)^+ x$，因此

$$\begin{aligned} y - rx &\leq (\nu - r)^+ x \\ &= \pi_{\nu > r} (\nu - r)^+ x \\ &\leq \pi_{\lambda > r} (\mu - r)^+ x. \end{aligned}$$

由于 X是 $\mathbb{P}$-阿基米德的，且$\inf_{\lambda \in D} \pi_{\lambda > r} = 0$，我们有$\inf_{\lambda \in D} (\pi_{\lambda > r} (\mu - r)^+ x) = 0$，这意味着 $y - rx \leq 0$。

因此，对于所有 $r \in \mathbb{R}_{>0}$， $y \leq rx$。由于 X 是 $\mathbb{R}$-阿基米德的， $y \leq 0$。 ■

下一个定理的证明只是对定理3.2的证明作简单修改。

定理 3.3。设 X 是一个 PO $\mathbb{L}$-模。那么， X 是序列阿基米德的，当且仅当它既是序列 $\mathbb{R}$-阿基米德的，也是序列 $\mathbb{P}$-阿基米德的。 ■

回顾一下，如果每个具有上界的非空子集都有上确界，并且每个具有下界的非空子集都有下确界，则称偏序集是 **戴德金完备**的。（等价地，每个具有上界的非空子集都有上确界。）下面的定理可以完全按照经典情形中的方法证明。

定理 3.4。 每个戴德金完备的 $\mathbb{L}$-向量格都是 $\mathbb{R}$-阿基米德的。■然而，戴德金完备的 $\mathbb{L}$-向量格未必是序列几乎 $\mathbb{P}$-阿基米德的。

例 3.5。设 $\mathbb{L} = \ell^\infty$。那么 $K = \beta\mathbb{N}$，即自然数集的斯通–切赫紧化。令 $k \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$，并令 $I \subseteq \mathbb{L}$ 为在 k处取值为零的元素构成的（环和格）理想。可以证明，商环 $\mathbb{L}/I$ 与 $\mathbb{R}$ 环同构，且商映射是保序的，因此 $\mathbb{L}/I$ 实际上是一个戴德金完备的全序$\mathbb{L}$-模。若按照例 2.2定义序列 π_n，并令 $[1]$ 表示 $\mathbb{L}/I$ 中常值序列 1 的等价类，那么我们可知，对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\pi_n[1] = [1]$。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 及 $\pi_n \downarrow 0$，都有 $-\pi_n[1] \leq [1] \leq \pi_n[1]$；但当然 $[1] \neq [0]$，这表明 X 不是序列几乎 $\mathbb{P}$-阿基米德的。

$\mathbb{P}$-阿基米德性质与支撑达到密切相关。事实上，若 X 是有向 $\mathbb{L}$-模，则可证明 X 是支撑达到的当且仅当它几乎是$\mathbb{P}$-阿基米德的。

定理 3.6. 设 X 为有向 $\mathbb{L}$-模。则 X 是支撑达到的当且仅当它几乎是 $\mathbb{P}$-阿基米德的。

Proof. 假设 X 几乎是 $\mathbb{P}$-阿基米德的。设 $x \in X$，并且由于 X 是有向的，设 $y \in X$ 为 $\{x, -x\}$的上界。对每个满足 $\pi x = x$的 $\pi \in \mathbb{P}$，我们有 $\pi - \pi_x \geq 0$，从而–$(\pi - \pi_x)y \leq (\pi - \pi_x)x = x - \pi_x x \leq (\pi - \pi_x)y$。由于集合 $\{\pi - \pi_x : \ \pi \in \mathbb{P},\ \pi x = x\} \subseteq \mathbb{P}$在 $\mathbb{L}$ 中递减至零，且 X 几乎是 $\mathbb{P}$-阿基米德的，我们有 $x - \pi_x x = 0$，从而 $x = \pi_x x$。

现设 X 是支撑达到的。设 $x \in X^+$ 与 $y \in X$，其中 $D \downarrow 0$属于 $\mathbb{P}$，且对所有 $\pi \in D$有 $-\pi x \leq y \leq \pi x$。由此可得，对所有 $\pi \in D$有 $\pi_y \leq \pi$。事实上，由于 $-\pi x \leq y \leq \pi x$，乘以π^c 得到 $0 = -\pi^c \pi x \leq \pi^c y \leq \pi^c \pi x = 0$，从而推出 $\pi^c y = 0$，进而得到 $\pi y = y$。由于 $D \downarrow 0$，可得 $\pi_y = 0$，因此由支撑达到可知 $y = \pi_y y = 0$，这表明 X 几乎是$\mathbb{P}$-阿基米德的。■

4 延拓引理

为证明 Riesz-Kantorovich 定理，我们需要一个延拓引理。在经典情形下，我们有如下结果（例如，作为引理 1.26 给出于 [AT07]）。

引理 4.1. 设 X 与 Y为有向 $\mathbb{R}$-向量空间，且 Y为阿基米德的。设 $T\colon X^+ \longrightarrow Y^+$ 为加法函数。则 T 可唯一延拓为从 X 到Y的正算子。

我们针对有向 $\mathbb{L}$-模给出的延拓引理版本与经典版本相似，但也存在一些差异。首先，我们注意到，[AT07] 中引理 1.26 的证明实际上并不要求 Y 是阿基米德的；只要 Y 是几乎阿基米德的，证明仍然成立。在我们的情形中，我们假设 Y 是序列几乎阿基米德的（也就是说，序列几乎$\mathbb{L}$-阿基米德）。其次，我们要求映射 T 是 $\mathbb{P}$-齐次的。（在经典情形中，这一条件显然满足。）如果 T 不是 $\mathbb{P}$-齐次的，那么它未必存在一个线性延拓。例如，若 $\mathbb{L} = \mathbb{R}^2$ 且 $X = Y = \mathbb{L}$，则函数 $T\colon \mathbb{L}^+ \longrightarrow \mathbb{L}^+$ 定义为 $T(x, y) = (y, x)$，它是可加的，并且存在唯一的加法延拓 $\hat{T}\colon \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$，由同一表达式给出。但 $\hat{T}$ 不是算子，因为它不是 $\mathbb{P}$-齐次的。

回忆一下， $\mathbb{L}_1$ 是由 $\mathbf{1}$ 生成的 $\mathbb{L}$ 的向量格理想。在使用 $C_\infty(K)$ 对 $\mathbb{L}$ 进行表示时， $\mathbb{L}_1$ 对应于 $\mathbb{L}$ 中处处取实值的元素集合。

定理 4.2。设 X 和 Y 是有向的 $\mathbb{L}$-模，且 Y 序列几乎阿基米德，并设 $T\colon X^+ \longrightarrow Y^+$ 是可加的 $\mathbb{P}$-齐次函数。那么 T 可唯一延拓为正算子 $\widehat{T}\colon X \longrightarrow Y$。

Proof. 首先注意到，由于 Y 是序列几乎阿基米德的，因此它是几乎 $\mathbb{R}$-阿基米德的，也是序列几乎 $\mathbb{P}$-阿基米德的。

与经典情形一样， T 是保序的且 $\mathbb{Q}^+$-齐次。特别地，根据可加性、$\mathbb{Q}^+$-齐次性和 $\mathbb{P}$-齐次性， T 对于幂等元的任意 $\mathbb{Q}^+$-线性组合都是齐次的。我们将幂等元的 $\mathbb{Q}^+$-线性组合称为“$\mathbb{Q}^+$-阶梯函数”。

假设我们已证明 T 是 $\mathbb{L}^+$-齐次的。接着，我们按如下方式将 T 延拓到 X。对于每个$x \in X$，由 X的有向性可知，存在 y， $z \in X^+$ 使得 $x = y - z$。令 $\widehat{T}(x) := T(y) - T(z)$。这就得到了所需的延拓。证明 $\widehat{T}$ 定义良好且唯一的过程与经典情形相同。因此，剩下要证明的是 T 是 $\mathbb{L}^+$-齐次的。

为证明 T 是 $\mathbb{L}_1^+$ -齐次的，设 $\beta \in \mathbb{L}_1^+$ 且 $x \in X^+$。根据 Freudenthal 谱定理 [AB06，定理 2，8], 存在一个序列 (α_n)，其元素为 $\mathbb{Q}^+$-步函数，满足 $\alpha_n \uparrow \beta$在 $\mathbb{L}$中相对于 $\mathbf{1}$ 一致收敛。由于 $\beta \in \mathbb{L}_1$，还存在一个序列 (γ_n)，其元素为 $\mathbb{Q}^+$-步函数，满足 $\gamma_n \downarrow \beta$ 相对于 $\mathbf{1}$ 一致收敛。

设 $0 < r \in \mathbb{R}$，并设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\beta - r < \alpha_n$ 且 $\gamma_n < \beta + r$。那么，

$$\begin{array}{rcccccl} (\beta - r)T(x) & \leq & \alpha_n T(x) & = & T(\alpha_n x) & & \\ & & & \leq & T(\beta x) & & \\ & & & \leq & T(\gamma_n x) & = & \gamma_n T(x) \leq (\beta + r)T(x). \end{array}$$

因此， $T(\beta x) - \beta T(x) \in [-rT(x)\ rT(x)]$。由于 Y 几乎是 $\mathbb{R}$-阿基米德的，我们得到$T(\beta x) = \beta T(x)$，从而完成了 T 是 $\mathbb{L}_1^+$-齐次的证明。

现在证明 T 是 $\mathbb{L}^+$-齐次的。设 $\lambda \in \mathbb{L}^+$。根据引理 2.4，存在一个序列$\pi_n \uparrow 1$ 属于 $\mathbb{P}$，使得 $-n \leq \pi_n \lambda \leq n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。利用 $\mathbb{P}$-齐次性以及 T，再结合 $\pi_n \lambda \in \mathbb{L}_1^+$ 这一事实，可得

$$\pi_n T(\lambda x) = T(\pi_n \lambda x) = \pi_n \lambda T(x)$$

对所有 n 均成立。因此，我们得到以下两个不等式：

$$\begin{array}{rcccl} \pi_n \lambda T(x) & = & \pi_n T(\lambda x) & \leq & T(\lambda x) \\ -\lambda T(x) & \leq & -\pi_n \lambda T(x) & = & -\pi_n T(\lambda x). \end{array}$$

将两个不等式相加，得到

$$(\pi_n - 1)\lambda T(x) \leq T(\lambda x) - \lambda T(x) \leq (1 - \pi_n)T(\lambda x).$$

由于 Y 是有向的，存在一个 $y \in Y$，使得 $\{\lambda T(x)\ T(\lambda x)\} \leq y$，于是得到

$$-(1 - \pi_n)y \leq T(\lambda x) - \lambda T(x) \leq (1 - \pi_n)y$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。由于 Y 是序列几乎 $\mathbb{P}$-阿基米德的，且 $(1 - \pi_n) \downarrow 0$，因此有 $T(\lambda x) = \lambda T(x)$。■

注 4.3。在定理 4.2的证明中，为了证明 T 是 $\mathbb{L}_1^+$ -齐次的，只用到了几乎$\mathbb{R}$-阿基米德性质 Y。序列几乎 $\mathbb{P}$-阿基米德性质只用于证明 T 对不属于 $\mathbb{L}^+$ 的元素 $\mathbb{L}_1^+$ 也是齐次的。因此，若 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1$，那么即使将定理 4.2 中关于 Y 是序列几乎阿基米德的假设，弱化为仅假设 Y 是几乎 $\mathbb{R}$-阿基米德的，定理的结论仍然成立。

5 里斯-康托罗维奇定理

回顾一下，若一个偏序实向量空间 X 满足里斯分解性质（RDP），则称其具有 RDP；具体而言，对所有 x 和 y 属于 X^+，都有 $[0, x+y] = [0, x] + [0, y]$。众所周知（例如，AT07 的 §1.8] 中给出了证明]），这等价于如下条件：对所有 x、y、p、$q \in X$，若 $\{x, y\} \leq \{p, q\}$，则存在一个 $z \in X$ 使得 $\{x, y\} \leq z \leq \{p, q\}$。显然，这又等价于以下陈述：对所有 x、$y \in X$，$\{x, y\}$ 在 X 中的上界集（可能为空）是向下有向的。RDP 的定义可自然地推广到偏序 $\mathbb{L}$-模，且上述等价关系仍然成立。一个 $\mathbb{L}$-向量格是指一个偏序 $\mathbb{L}$-模 X，使得对所有 x、$y \in X$，$\{x, y\}$ 在 X 中的上界集都有最小元，因此显然每个 $\mathbb{L}$-向量格都具有 RDP（且是有向的）。因此，特别地，以下定理适用于 X 是一个 $\mathbb{L}$-向量格的情形。

对于一个 $\mathbb{L}$-向量格 Y，如 [LF24，§3.3], 中所述，如果 Y 具有一个 $\mathbb{L}$-值范数（该范数也在其中定义），那么它是支撑达到的，因此是 $\mathbb{P}$-阿基米德的。

定理5.1。 [里斯-康托罗维奇定理] 设 X 是具有 Riesz 分解性质的有向 $\mathbb{L}$-模，且 Y 是戴德金完备的 $\mathbb{L}$-向量格。如果 Y 是序列 $\mathbb{P}$-阿基米德的或 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1$，则下列结论成立。

1. $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$是一个 $\mathbb{L}$-向量格；2. $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y) = \mathcal{L}_{\mathrm{r}}(X, Y)$；3. $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$是戴德金完备的；4. $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$中的格运算由下列公式给出：对于 S 和 T 属于$\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$，且对所有 $x \in X^+$，有

$$
\begin{aligned}
(S \vee T)(x) &= \sup\{S(y) + T(x-y) : y \in [0, x]\} \\
(S \wedge T)(x) &= \inf\{S(y) + T(x-y) : y \in [0, x]\} \\
S^+(x) &= \sup\{S(y) : y \in [0, x]\} \\
S^-(x) &= \inf\{S(y) : y \in [0, x]\} \\
|S|(x) &= \sup\{S(y) : y \in [-x, x]\};
\end{aligned}
$$

5. 对于 X, Y 中的每个递增网 (T_α)，当且仅当对于所有 $x \in X^+$，$T_\alpha(x) \uparrow T(x)$ 属于 Y 时，$T_\alpha \uparrow T$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$。

Proof. 我们先证明 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$ 是一个 $\mathbb{L}$-向量格，然后证明每个有上界的有向集都有上确界。

与经典情形一样，只需证明对于每个 $S \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$，$S^+ = S \vee 0$ 存在于 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$ 中。为此，定义 $R\colon X^+ \longrightarrow Y^+$，令对每个 $x \in X^+$，$R(x) := \sup\{S(y) : 0 \leq y \leq x\}$。我们将使用定理 4.2 将 R 延拓到整个 X。可加性 R 的证明与经典情形完全相同，参见 AT07，定理 1.59]。（尤其是，这里用到了 Riesz 分解性质。）对于 $\mathbb{P}$-齐次性，令 $x \in X^+$ 且 $\pi \in \mathbb{P}$。由引理 2.5，$S([0, \pi x]) = S(\pi[0, x])$，由线性可得，$S(\pi[0, x]) = \pi S([0, x])$。取上确界，由引理 2.6 可得 $\sup \pi S([0, x]) = \pi \sup S([0, x])$，因此 $R(\pi x) = \pi R(x)$。

由于 Y 是戴德金完备的，因此它是 $\mathbb{R}$-阿基米德的，从而是序列几乎 $\mathbb{R}$-阿基米德的。现在回想一下，本定理的陈述要求 Y 要么是序列$\mathbb{P}$-阿基米德的，要么满足 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1$。如果 Y 是序列 $\mathbb{P}$-阿基米德的，那么根据定理 3.3，Y 是序列阿基米德的，从而是序列几乎阿基米德的。在这种情况下，根据定理 4.2，我们可知 R 可唯一延拓为一个从 X 到 Y的正算子。如果 Y 不是序列$\mathbb{P}$-阿基米德的，但满足 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1$，那么根据注 4.3，我们同样可知 R 可唯一延拓为一个从 X 到 Y的正算子。因此，在这两种情况下，R 都可唯一延拓为一个正算子$R \in \mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X, Y)$。

为了证明 R 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$中 $\{0,S\}$ 的一个上界，注意对所有 $x\in X^{+}$，$\{0,S(x)\}\subseteq S([0,x])$，因此 $\{0,S(x)\}\leq R(x)$。现在设 $T\in\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$是 $\{0,S\}$的一个上界。那么，如果$0\leq y\leq x$属于 X，则有 $S(y)\leq T(y)\leq T(x)$，这意味着 $R(x)=\sup S([0,x])\leq T(x)$。因此，$R$是 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$中 $\{0,S\}$ 的上确界。

这表明 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 是一个格，因此 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)=\mathcal{L}_{\mathrm{r}}(X,Y)$。对于 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 中两个元素的绝对值和上确界，相关公式的有效性可完全按照经典情形证明。

现在我们证明 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 是戴德金完备的。由于 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 是一个格，只需证明 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 的每个非空有向子集，只要有上界，就有上确界。这样做的同时，我们也证明了本定理的最后一个结论。

设 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)^{+}$ 有向且有上界，例如以上界 $R\in\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 为界。那么，对所有$x\in X^{+}$，集合 $\{T(x):T\in\mathcal{A}\}$ 都以上界 $R(x)$ 为界。由于 Y 是戴德金完备的，集合$\{T(x):T\in\mathcal{A}\}$ 有上确界，我们将其记为 $S(x)$。我们将使用定理 4.2 来扩展 S。

为证明 S是可加的，令 $x,y\in X^{+}$。则 $S(x+y)=$上确界$_{T\in\mathcal{A}}T(x+y)=$上确界$_{T\in\mathcal{A}}(T(x)+T(y))\leq$上确界$_{T\in\mathcal{A}}T(x)+$上确界$_{T\in\mathcal{A}}T(y)=S(x)+S(y)$。反向不等式方面，令 $T,U\in\mathcal{A}$。由于 $\mathcal{A}$是有向的，存在一个 $V\in\mathcal{A}$使得 $T,U\leq V$。因此 $T(x)+U(y)\leq V(x)+V(y)=V(x+y)\leq S(x+y)$。对所有 $T\in\mathcal{A}$ 取上确界，再对所有 $U\in\mathcal{A}$ 取上确界，得到$S(x)+S(y)\leq S(x+y)$，从而完成 S 可加性的证明。对于 $\mathbb{P}$-齐次性，令 $x\in X^{+}$且 $\pi\in\mathbb{P}$。由引理 2.6，$S(\pi x)=$上确界$_{T\in\mathcal{A}}T(\pi x)=$上确界$_{T\in\mathcal{A}}\pi T(x)=\pi S(x)$。由定理 4.2（再次使用以下假设：$Y$是序列阿基米德的，或 $\mathbb{L}=\mathbb{L}_{1}$），$S$ 唯一地延拓为从 X 到 Y的正算子，我们仍将其记为 S。显然，S 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 中 $\mathcal{A}$的上确界，因此 $\mathcal{L}_{\mathrm{b}}(X,Y)$ 是戴德金完备的。■

由于 $\mathbb{L}$ 是戴德金完备的阿基米德 $\mathbb{L}$向量格，我们有以下推论。

推论 5.2。设 X 是一个具有 Riesz 分解性质的有向 $\mathbb{L}$模。那么 $X^{\sim}$ 是一个戴德金完备的$\mathbb{L}$向量格，其格运算由 Riesz-Kantorovich 公式给出。■

参考文献

[HP82] C. B. Huijsmans 和 B. de Pagter。《 f-代数中的理想理论》。载于：美国数学会汇刊 269.1（1982），第 225–245 页。ISSN：00029947。URL：http://www.jstor.org/stable/1998601（访问于 2024 年 8 月 30 日）。[AB06] C.D. Aliprantis 和 O. Burkinshaw。《正算子》。纯粹与应用数学。施普林格·荷兰，2006 年。ISBN：9781402050084。URL：https: //books.google.co.za/books?id=Auq9w5shdAIC。[AT07] C.D. Aliprantis 和 R. Tourky。《锥与对偶》。数学研究生课程。美国数学会，2007 年。ISBN：9780821841464。URL：https://books.google.co.za/books?id=uFaZAwAAQBAJ。[LW10] C.C.A. Labuschagne 和 B.A. Watson。《Riesz 空间中的离散随机积分》。载于：Positivity 14.4（2010），第 859–875 页。ISSN：1385-1292。DOI：10.1007/s11117- 010- 0089-1。URL：https://doi- org.uplib.idm.oclc. org/10.1007/s11117-010-0089-1。

[EHK24] N. Edeko、M. Haase 和 H. Kreidler。《Kaplansky-Hilbert 模上的酉群表示分解定理与 Furstenberg-Zimmer 结构定理》。载于：《数学分析》50.2（2024），第 377–454 页。 ISSN：0133-3852,1588-273X。 DOI：10.1007/s10476-024-00020-1。URL：https://doi.org/10.1007/s10476-024-00020-1。[KKW24] Anke Kalauch、Wen-Chi Kuo 和 Bruce A. Watson。《一类 $L^2(T)$ 型 Riesz 空间的强完备性》。载于：《美国数学会会刊》B辑 11（2024），第 243–253 页。 ISSN：2330-1511。 DOI：10.1090/bproc/230。 URL：https: //doi.org/10.1090/bproc/230。[LF24] Eder Kikianty 等。《L-泛函分析》。2024 年。arXiv：2403.10222 [math.FA]。URL：https://arxiv.org/abs/2403.10222。