arXiv:2602.03212v1 [gr-qc] 3 Feb 2026

Bianchi IV 宇宙中精确引力波的线性扰动

Konstantin E. Osetrin[1,2,3]

[1]托木斯克国立师范大学，俄罗斯托木斯克市基辅街60号，邮编634061[2]托木斯克国立控制系统与无线电电子大学，俄罗斯托木斯克市列宁街40号，邮编634050[3]托木斯克国立研究型大学，俄罗斯托木斯克市列宁街36号，邮编634050

2026年2月4日

摘要

本文介绍了构造微扰动力学引力场的固有时方法。利用该方法，本文在 Bianchi IV 宇宙中爱因斯坦方程的精确波解背景下，构造了引力波的微扰解析模型。为构造微扰解析波模型，采用了优选波坐标系，以及与在引力波中自由运动的观察者固有时相关联的同步时间函数。在考虑相容条件的情况下，场方程的化简将引力波数学模型归结为关于波变量函数的一组耦合常微分方程。本文求得了引力波度规各分量的解析解，并证明了所得微扰解的稳定性。此外，还展示了各向异性 Bianchi IV 宇宙中引力波精确解的稳定性。

关键词： 精确引力波、微扰引力波、固有时方法、测地线哈密顿-雅可比方程、Bianchi 宇宙。

2020年数学主题分类： 83C35, 83C25。

1 引言

十年前，引力波天文学的兴起2015 [1–4] 开辟了一条新途径，使人们能够超越电磁辐射，获取有关宇宙、天体物理过程和天体的信息。通过这一全新的附加信息渠道获取自然界信息，极大地拓展了天文学、天体物理学和宇宙学中的观测与理论研究可能性。

来自地面和卫星观测台的当前观测数据及其解读，给这些领域的研究人员提出了许多复杂问题：对宇宙动力学早期阶段进行建模；充分描述星系、恒星和黑洞的加速形成；解读电磁微波背景（EMCB）的观测数据，包括其各向异性 [5]；研究宇宙的随机引力波背景（GWB）[6, 7], ，以及探究“暗能量”和“暗物质”等现象。对这些领域的研究已达到现代物理科学的前沿。引力波在这项研究中的作用已大幅提升。

引力波在宇宙动力学早期阶段 [8–10] 可能在原初等离子体、暗物质和物质中非均匀性的加速形成，以及星系、恒星和黑洞的形成过程中发挥了重要作用。引力波可能对微波电磁背景的形成 [11] 及其观测到的各向异性产生了重大影响。探测引力波，并对地面探测器的观测数据以及通过直接和间接方法观测到的随机引力波背景 [12] 进行理论解读，可借助脉冲星计时阵列 [13–15] 为了解许多天体物理过程提供信息。卫星引力波探测器项目，以及用于观测低频引力波的间接方法的开发工作，正在进行中。

然而，与电磁辐射相比，引力波研究的理论基础尚不够成熟。对于宇宙发展早期引力波的模型及其意义，人们仍知之甚少。用于探测低频引力波的方法尚处于起步阶段；这类引力波对于研究宇宙早期以及天体物理过程的动力学至关重要。

引力场方程的复杂性和非线性，使得人们难以为复杂的引力波模型构造精确解和微扰解，也难以对其进行诠释。尽管如此，人们已经构造并研究了若干精确的引力波解 [16, 17], ，包括我们发表的论文 [18–21]。微扰和数值研究方法仍在迅速发展[22–28]。

在 2017 [2–4] 探测到两颗中子星并合产生的引力波和电磁信号，这一发现以很高的精度表明，引力波的传播速度等于光速。这对许多用于描述引力波的理论模型和方法施加了限制。因此，在理论模型中使用沿波变量取值且时空间隔为零的坐标系来描述引力波，得到了实验验证。

同时纳入电磁场和引力场的理论研究具有重要意义 [29–34] ，因为它们为通过不同观测渠道获取有关天体物理过程的信息提供了相互补充、相互制约的依据。关于修正引力理论的研究也尤其值得关注 [35–39]，这些理论声称能够充分描述早期宇宙以及“暗能量”和“暗物质”现象。遴选现实可行的理论时，可以利用引力波模型和观测数据对其进行评估。

宇宙微波电磁背景中各向异性的发现 [5]促使人们开展了许多研究，以解释这一事实 [40–42]。不少研究者有充分理由对观测到的电磁背景各向异性的运动学解释提出批评 [43, 44]。鉴于观测到的微波电磁背景存在各向异性，人们对宇宙演化早期阶段的各向异性时空模型 [45–47] 很感兴趣，其中包括 Bianchi宇宙模型；同时，在考虑宇宙当前状态的情况下，其后续可能发生的各向同性化过程也值得关注。时空偏离各向同性可能会显著影响当前对观测数据的估计及其解释 [48]。引力波也可能对此产生重大影响。

微扰次级引力波作为早期宇宙中强引力波的微扰，可在原初等离子体、暗物质和物质中非均匀性的加速形成、宇宙随机引力波背景的形成，以及宇宙演化过程中的各向同性化过程中发挥重要作用。

本文构建了首批关于比安基 IV 宇宙强引力波背景中的微扰引力波的解析模型之一。其基础强引力波背景是爱因斯坦真空方程的一个精确解。

2 固有时方法

在精确引力场方程解的背景下构建动态引力场（引力波）的精确模型和微扰模型时，常使用包含零变量的优选波坐标系，沿这些变量的时空间隔为零。另一方面，所研究模型中引力场的动态性质意味着度规可能显式依赖时间变量。因此，在我们提出的动态微扰模型构建方法中，假设基础（背景）度规的微扰修正函数同时依赖波变量和时间。对于时间函数，我们建议采用基础（背景）时空中沿测地线运动的自由粒子的固有时。因此，我们将此方法称为“固有时方法”。本文以比安基 IV 宇宙的精确波解和微扰波解为例，成功检验了这一方法。

可根据背景时空中度规为 $g^{\alpha\beta}$ 的试验粒子作用量函数所满足的测地线哈密顿-雅可比方程的精确解或微扰解，将时间函数 τ 构造为所用坐标系变量的函数：

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial\tau}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\tau}{\partial x^{\beta}}=1. \tag{1}$$

构造测地线哈密顿-雅可比方程（1）的完全积分，可以求得基底时空测地线上的时间函数，并使我们能够（如有必要）转换到与自由运动的观察者相关联的同步参考系（SRF）[49]。观察者的固有时 τ 可选作新同步参考系的均匀时间，而空间变量则可选择为使新 SRF 中的观察者处于静止状态。

构造测地线哈密顿-雅可比方程（1）完全积分的一种已知方法，是在优选坐标系中对变量进行完全分离。许多作者都曾针对该方程发展这一方法，最初的工作由 Paul St¨ackel 提出，[50] 而 Vladimir Shapovalov 的研究最终使其得以完善 [51–53]。

3 Bianchi IV 宇宙中的引力波精确模型

在优选波坐标系中，沿着使时空间隔为零的波变量 x^0 ，IV型 Bianchi 空间的波度规可写成以下形式[45, 54]:

$$\begin{aligned}ds^2=&\,2\,dx^0dx^1-\frac{\left(x^0\right)^{2\omega}}{\alpha\gamma-\beta^2}\Big[\left(\alpha\log^2(x^0)+2\beta\log(x^0)+\gamma\right)\left(dx^2\right)^2\\&-2\left(\alpha\log(x^0)+\beta\right)dx^2dx^3+\alpha\left(dx^3\right)^2\Big],\end{aligned} \tag{2}$$

$$\det g_{\alpha\beta}=-\frac{\left(x^0\right)^{4\omega}}{\alpha\gamma-\beta^2},\qquad 0<x^0,\qquad \beta^2<\alpha\gamma, \tag{3}$$

其中，常数 α、 β、 γ 和 ω 是 IV型 Bianchi 空间中波引力模型的参数。

Th该时空存在一个协变常矢量 K^{α}，即它是平面波时空 :

$$\nabla_{\alpha}K_{\beta}=0\quad\rightarrow\quad K_{\alpha}=\left(K_0,0,0,0\right),\qquad K_0=\text{const} \tag{4}$$

该空间的齐次性由 Killing 矢量 $X_{(1)}$、 $X_{(2)}$ 和 $X_{(3)}$ 这一组矢量确定；在所用的波坐标系中，它们可以写成如下形式：

$$X^{\alpha}_{(1)}=\left(0,0,1,0\right),\quad X^{\alpha}_{(2)}=\left(0,0,0,1\right),\quad X^{\alpha}_{(3)}=\left(-x^0,x^1,\omega x^2,\omega x^3-x^2\right). \tag{5}$$

Killing 矢量的对易关系如下所示，由此定义了一个 IV型 Bianchi 空间：

$$\left[X_{(1)}, X_{(2)}\right] = 0, \quad \left[X_{(1)}, X_{(3)}\right] = \omega X_{(1)} - X_{(2)}, \quad \left[X_{(2)}, X_{(3)}\right] = \omega X_{(2)}. \tag{6}$$

所研究的波时空具有黎曼曲率张量的三个相互独立的非零分量：

$$\begin{aligned}
R_{0202} =& \frac{\left(x^0\right)^{2\omega-2}}{4\left(\beta^2-\alpha\gamma\right)^2}\Big[-\alpha\left(\alpha^2-4\alpha\gamma(\omega-1)\omega+4\beta^2(\omega-1)\omega\right)\log^2(x^0) \\
&-2\left(\alpha^2(\beta-4\gamma\omega+2\gamma)+2\alpha\beta(\beta(2\omega-1)-2\gamma(\omega-1)\omega)+4\beta^3(\omega-1)\omega\right)\log(x^0) \\
&-4\alpha\left(\beta^2+\beta(\gamma-2\gamma\omega)-\gamma^2(\omega-1)\omega\right)+4\beta^2(-2\beta\omega+\beta-\gamma(\omega-1)\omega)+3\alpha^2\gamma\Big], \\
R_{0302} =& \frac{\left(x^0\right)^{2\omega-2}}{4\left(\beta^2-\alpha\gamma\right)^2}\Big[\alpha\left(\alpha^2-4\alpha\gamma(\omega-1)\omega+4\beta^2(\omega-1)\omega\right)\log(x^0) \\
&+\alpha^2(\beta-4\gamma\omega+2\gamma)+2\alpha\beta(\beta(2\omega-1)-2\gamma(\omega-1)\omega)+4\beta^3(\omega-1)\omega\Big], \\
R_{0303} =& -\frac{\alpha\left(\alpha^2-4\alpha\gamma(\omega-1)\omega+4\beta^2(\omega-1)\omega\right)\left(x^0\right)^{2\omega-2}}{4\left(\beta^2-\alpha\gamma\right)^2}.
\end{aligned}$$

度规（2）的爱因斯坦真空方程提供了一个联系模型参数的附加条件：

$$\alpha^2 - 4\omega(\omega-1)(\beta^2+\alpha\gamma) = 0. \tag{7}$$

对于给定的可接受参数值，所研究模型的Weyl共形曲率张量不可能消失，并且该模型不能退化为共形平坦时空。

在论文 [54] 中，针对这一精确波模型，求得了试验粒子的运动方程解，并据此找到了从优选波坐标系到同步参考系的变换定律；在该同步参考系中，自由运动于引力波中的观察者处于静止状态，而根据该观察者时钟计量的时间被用作新同步参考系的统一时间 [49]。

4 精确引力波的线性扰动

Bianchi IV 宇宙中的背景强引力波度规是爱因斯坦真空方程的一个精确解，可在优选波坐标系中表示如下 [54, 55]:

$$\begin{aligned}
ds^2 =& 2\,dx^0dx^1 + \left(x^0\right)^{2\omega}\left(\frac{1}{4\omega(\omega-1)} - \left(\mu+\log(x^0)\right)^2\right)\left(dx^2\right)^2 \\
&+2\left(x^0\right)^{2\omega}\left(\mu+\log(x^0)\right)dx^2dx^3 - \left(x^0\right)^{2\omega}\left(dx^3\right)^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$0 < x^0, \qquad 0 < \omega < 1. \tag{9}$$

其中， μ和 ω 是背景引力波的独立参数，而 x^0 是时空间隔为零时所对应的波变量。

我们将在波坐标系中寻找微扰（次级）引力波度规，其中波变量为 x^0，它决定了强引力波的背景场度规。沿波变量方向的时空间隔为零。在波坐标系中，我们有 $g_{00} = g_{11} = 0$。

按照微扰方法并采用固有时方法，我们寻找如下形式的微扰引力波度规：

$$g^{\alpha\beta} = g_B^{\alpha\beta} + \epsilon\,\Omega^{\alpha\beta}\big(x^0,\tau\big), \tag{10}$$

其中 $g_B^{\alpha\beta}$ 是背景场度规（8）， ϵ 是无量纲小参数（$\epsilon \ll 1$）， τ 是根据观察者的时钟测得的同步时；该观察者相对于引力场方程基本精确波解的背景自由运动。

背景精确引力波模型构建于 [54]。对于所考虑的情形，同步时间函数 $\tau = \tau(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 在所用波坐标系中可表示为以下形式：

$$\begin{aligned}\tau^2 = \frac{(2\omega-1)\left(x^2\right)^2\left(x^0\right)^{2\omega}}{4\omega(\omega-1)}\Big[&4(1-2\omega)^2(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\\ &-4(\mu-1)^2\omega-1+8\omega\left(2\omega^2-3\omega+1\right)(\mu(2\omega-1)+1)\log(x^0)\\ &+16\mu^2\omega^4+16(1-2\mu)\mu\omega^3+4\left(5\mu^2-6\mu+1\right)\omega^2\Big]\\ &-2\,(2\omega-1)^2\,x^2x^3\left(x^0\right)^{2\omega}\Big(\mu(2\omega-1)+1+(2\omega-1)\log(x^0)\Big)\\ &+(2\omega-1)^3\left(x^3\right)^2\left(x^0\right)^{2\omega}+2\,x^0x^1\,.\end{aligned} \tag{11}$$

对度规（10）线性化爱因斯坦真空方程会得到十分繁杂的方程，我们不再逐一列出。经过相当繁复但显而易见的计算，研究这些场方程关于变量 x^2 和 x^3的相容性（同步时间函数 τ 取决于这两个变量），可得出扰动（次级）引力波度规各分量关于时间 τ 和波变量 x^0的以下依赖结构：

$$\Omega^{00} = \Omega^{11} = 0, \tag{12}$$

$$\Omega^{01} = A_{01}(x^0), \qquad \Omega^{02} = A_{02}(x^0), \qquad \Omega^{03} = A_{03}(x^0), \tag{13}$$

$$\Omega^{12} = B_{12}(x^0)\,\tau^2 + A_{12}(x^0), \qquad \Omega^{13} = B_{13}(x^0)\,\tau^2 + A_{13}(x^0), \tag{14}$$

$$\Omega^{22} = A_{22}(x^0), \qquad \Omega^{23} = A_{23}(x^0), \qquad \Omega^{33} = A_{33}(x^0). \tag{15}$$

由于 Ω^{01} 包含在 g_{01} 中且仅依赖于 x^0，因此通过变换波变量x^0，我们可以将 g_{01} 化为 1，并将 $A_{01}(x^0)$化为 0。函数 $A_{12}(x^0)$和 $A_{13}(x^0)$仅以加法形式出现在度规 g_{02} 的分量中，且仅是 x^0 的函数，因此可以通过坐标变换将它们设为零。

线性化场方程的相容条件包含一个自治子系统，其中有关于函数 $B_{12}(x^0)$ 和 $B_{13}(x^0)$ 的两个耦合一阶微分方程，该系统可化为以下形式：

$$\begin{aligned}B'_{12}(x^0) =&\frac{4\omega}{x^0}\Big(B_{12}(x^0)\Big(\left(4\omega^3-8\omega^2+6\omega-2\right)\log\left(x^0\right)+\\ &\mu\left(4\omega^3-8\omega^2+6\omega-2\right)+\omega(2\omega-3)\Big)\\ &+2\left(1-2\omega^3+4\omega^2-3\omega\right)B_{13}(x^0)\Big),\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}B'_{13}(x^0) =&\frac{4\omega}{x^0}\Big(B_{12}(x^0)\Big(\left(4\omega^3-8\omega^2+6\omega-2\right)\log\left(x^0\right)\\ &+\mu\left(4\omega^3-8\omega^2+6\omega-2\right)+\omega(2\omega-3)\Big)\\ &+2\left(1-2\omega^3+4\omega^2-3\omega\right)B_{13}(x^0)\Big).\end{aligned} \tag{17}$$

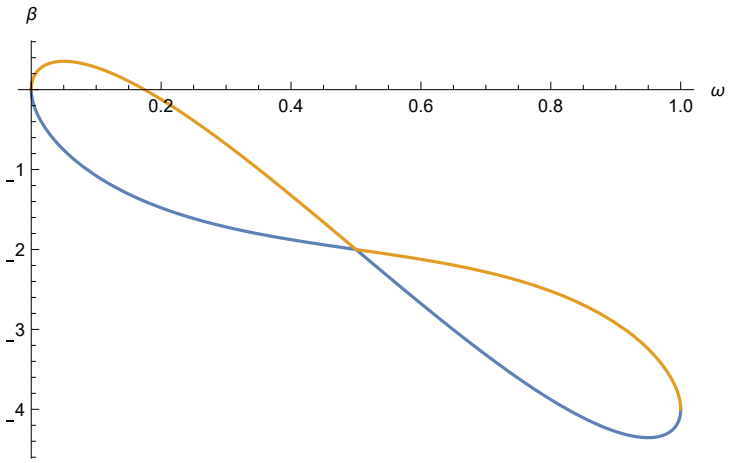

图1：$\beta_1(\omega)$（深蓝色线）和 $\beta_2(\omega)$（浅黄色线）。

从此处开始，上标表示对函数所依赖变量求导。

由方程组（16）–（17），可通过提高方程的阶数得到独立方程。因此，由方程（16），我们可以将函数 $B_{13}(x^0)$ 用函数 B_{12} （及其导数）表示：

$$B_{13} = \frac{4\omega B_{12}\left(2(\omega-1)\left(2\omega(\omega-1)+1\right)\left(\mu+\log(x^0)\right)+\omega(2\omega-3)\right) - x^0 B'_{12}}{8\omega\left(2\omega^3-4\omega^2+3\omega-1\right)}. \tag{18}$$

然后，由方程（17）并利用关系式（18），我们得到函数 $B_{12}(x^0)$的二阶微分方程：

$$B''_{12} = -\frac{(8\omega+1)x^0 B'_{12} + 8\omega\left(4\omega^3-8\omega^2+7\omega-1\right)B_{12}}{(x^0)^2}. \tag{19}$$

方程（19）的解如下：

$$B_{12} = b_1\left(x^0\right)^{\beta_1} + b_2\left(x^0\right)^{\beta_2}. \tag{20}$$

这里 b_1 和 b_2 是积分常数，参数 β_1 和 β_2 是如下形式二次方程的解：

$$\beta^2 + 8\omega\beta + 8\omega\left(4\omega^3-8\omega^2+7\omega-1\right) = 0. \tag{21}$$

参数 β_1 和 β_2 由引力波的参数 ω 确定：

$$\beta_1 = -4\left(\omega + \sqrt{2\omega(1-\omega)(\omega-1/2)^2}\right), \tag{22}$$

$$\beta_2 = -4\left(\omega - \sqrt{2\omega(1-\omega)(\omega-1/2)^2}\right). \tag{23}$$

参数的取值 β_1 和 β_2 所有允许的引力波波参数取值 ω如图1所示。

利用 $B_{12}(x^0)$ 的解，我们得到函数 $B_{13}(x^0)$，该函数来自方程 (18)：

$$B_{13}(x^0) = \frac{b_1\beta_1\left(x^0\right)^{\beta_1} + b_2\beta_2\left(x^0\right)^{\beta_2}}{8\omega(1-\omega)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)} - \omega(3-2\omega)\left(\mu+\log(x^0)\right)B_{12}(x^0). \tag{24}$$

如论文 [54]，所示，沿测地线，波变量 x^0 与同步时间 τ 成正比。于是，修正函数 $\Omega^{12} = \tau^2 B_{12}$ 和 $\Omega^{13} = \tau^2 B_{13}$ 在 $\beta_1 < \beta_2 < -2$ 时将随时间保持有界，对于参数 ω 的如下区域：

$$1/2 < \omega < 1. \tag{25}$$

由于在参数 ω 的容许区域内，我们有关系式 $\beta_1 < \beta_2 < -2$，因此在大时间尺度下，τ 具有以下行为

$$\lim_{\tau\to\infty} \Omega^{12} = \lim_{\tau\to\infty} \tau^2 B_{12} \to 0, \qquad \lim_{\tau\to\infty} \Omega^{13} = \lim_{\tau\to\infty} \tau^2 B_{13} \to 0. \tag{26}$$

由场方程的相容条件，我们还得到一个由两个二阶微分方程组成的耦合系统。对于函数 $A_{02}(x^0)$，有

$$\begin{aligned} A''_{02} =& \frac{2}{x^0}\Big(A'_{02}\left(2\mu\omega^2 - 2\mu\omega - 2\omega + 2\omega(\omega-1)\log(x^0)\right) \\ &+ 2\omega(1-\omega)A'_{03} + (x^0)^2 B'_{12}(x^0) \\ &- 2x^0 B_{12}\Big(4\omega\left(2\omega^3 - 4\omega^2 + 3\omega - 1\right)\log(x^0) \\ &+ 8\mu\omega^4 + (4-16\mu)\omega^3 + 6(2\mu-1)\omega^2 - 4\mu\omega + \omega - 1\Big) \\ &+ 8\omega\left(2\omega^3 - 4\omega^2 + 3\omega - 1\right)x^0 B_{13}\Big). \end{aligned} \tag{27}$$

对于函数 $A_{03}(x^0)$，则有以下方程：

$$\begin{aligned} A''_{03} =& \frac{1}{x^0}\Big(A'_{02}\left(4\mu^2\omega(\omega-1) + 1 + 8\mu\omega(\omega-1)\log(x^0) + 4\omega(\omega-1)\log^2(x^0)\right) \\ &+ A'_{03}\left(4\mu\omega - 4\mu\omega^2 - 4\omega^2\log(x^0) - 4\omega + 4\omega\log(x^0)\right) \\ &+ 2(x^0)^2 B'_{13} + 4x^0 B_{13}\Big(4\omega\left(2\omega^3 - 4\omega^2 + 3\omega - 1\right)\log(x^0) \\ &+ 8\mu\omega^4 + (4-16\mu)\omega^3 + 6(2\mu-1)\omega^2 + (3-4\mu)\omega + 1\Big) \\ &- 4x^0 B_{12}\Big(4\omega\left(2\omega^3 - 4\omega^2 + 3\omega - 1\right)\log^2(x^0) \\ &+ 4\omega(\omega-1)\left(\mu\left(4\omega^2 - 4\omega + 2\right) + 2\omega - 1\right)\log(x^0) \\ &+ 8\mu^2\omega^4 + 2\omega^2\left(6\mu^2 - 6\mu + 1\right) + \omega\left(-4\mu^2 + 4\mu - 2\right) + 8\omega^3\mu(1-2\mu) + 1\Big)\Big). \end{aligned} \tag{28}$$

将 A'_{03} 的导数由方程（27表示，并考虑到先前求得的函数 B'_{12} 和 B'_{13}的导数形式，可得：

$$A'_{03} = \frac{x^0 A''_{02} + 4\omega A'_{02}\left((1-\omega)\left(\mu + \log(x^0)\right) + 1\right)}{4\omega(1-\omega)} + \frac{x^0 B_{12}(x^0)}{\omega}. \tag{29}$$

该方程确定了函数 A_{03} 关于函数 A_{02} 和B_{12}的一阶导数，并假定这两个函数已知。

将导数 A'_{03} 代入公式（29）和公式（28，我们得到一个三阶微分

方程，用于确定函数 $A_{02}(x^0)$:

$$\begin{aligned} A_{02}''' = &-\frac{(8\omega+1)A_{02}''(x^0)}{x^0} - \frac{16\omega^2 A_{02}'(x^0)}{(x^0)^2} \\ &+ \frac{4(1-\omega)B_{12}(x^0)}{x^0}\Big(4\omega\left(4\omega^3-8\omega^2+7\omega-3\right)\log(x^0) \\ &+ 16\mu\omega^4 + (8-32\mu)\omega^3 + 4(7\mu-3)\omega^2 + (4-12\mu)\omega + 1\Big) \\ &+ \frac{16\omega\left(4\omega^2-4\omega+3\right)(\omega-1)^2 B_{13}(x^0)}{x^0}. \end{aligned} \tag{30}$$

我们得到一个变系数三阶线性非齐次微分方程，其非齐次部分由函数 B_{12} 和 B_{13} 根据式（20）和式（24）定义。

将先前求得的函数 $B_{12}(x^0)$ 和 $B_{13}(x^0)$ 的显式形式代入方程（30），积分后可得如下形式的解:

$$\begin{aligned} A_{02}(x^0) = &\frac{a_1\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{1-4\omega} - \frac{4a_2\omega\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{(1-4\omega)^2} + \frac{4a_2\omega\left(x^0\right)^{1-4\omega}\log(x^0)}{1-4\omega} + a_3 \\ &- \frac{2b_1(\omega-1)\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_1+2} \\ &- \frac{2b_2(\omega-1)\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_2+2}, \end{aligned} \tag{31}$$

其中， a_1、 a_2和 a_3 是新的积分常数。容易看出，对于区域 $1/2<\omega<1$（$\beta_1<\beta_2<-2$），函数 A_{02} 是时间的有界函数。

的解 $A_{02}(x^0)$使我们能够从方程（ $A_{03}(x^0)$（29）中得到函数:

$$\begin{aligned} A_{03}(x^0) = a_4 &- \frac{1}{2(\omega-1)\omega}\Bigg[\frac{8a_2\omega^2\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{(1-4\omega)^2} + \frac{8a_2\omega^2\left(x^0\right)^{1-4\omega}\log(x^0)}{4\omega-1} \\ &+ \frac{2\omega\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{(4\omega-1)^3}\Bigg(4a_2\omega(1-4\omega)^2(\omega-1)\log^2(x^0) \\ &+ (4\omega-1)\Big(a_1\left(4\omega^2-5\omega+1\right)+4a_2\omega\left(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-2\omega-1\right)\Big)\log(x^0) \\ &+ a_1(4\omega-1)\Big(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-3\omega\Big)+4a_2\omega\Big(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-2\omega-1\Big)\Bigg) \\ &+ \frac{2a_1\omega\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{4\omega-1} + \frac{2a_2\omega\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{1-4\omega} + \frac{2b_1(\omega-1)\left(x^0\right)^{\beta_1+2}}{\beta_1+2} + \frac{2b_2(\omega-1)\left(x^0\right)^{\beta_2+2}}{\beta_2+2} \\ &+ \frac{4b_1(\omega-1)\omega\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)^2\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2}\times \\ &\times\Big(\beta_1(\mu(\omega-1)-1)+2\mu\omega-2\mu-\omega-1+(\beta_1+2)(\omega-1)\log(x^0)\Big)\left(x^0\right)^{\beta_1+2} \\ &+ \frac{4b_2(\omega-1)\omega\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)^2\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2}\times \\ &\times\Big(\beta_2(\mu(\omega-1)-1)+2\mu\omega-2\mu-\omega-1+(\beta_2+2)(\omega-1)\log(x^0)\Big)\left(x^0\right)^{\beta_2+2} \\ &- \frac{b_1(\beta_1+1)(\omega-1)\left(\eta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_1+2} \\ &- \frac{b_2(\beta_2+1)(\omega-1)\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_2+2}\Bigg]. \end{aligned} \tag{32}$$

容易看出，对于 $1/2 < \omega < 1$ 的区域，在 $\beta_1 < \beta_2 < -2$ 的情况下，函数 A_{03} 也是时间有界的。

由场方程组可知，只剩下一个方程，它将三个尚未确定的函数 $A_{22}(x^0)$、$A_{23}(x^0)$ 和 $A_{33}(x^0)$ 联系起来：

$$
\begin{aligned}
&\left(x^0\right)^{2\omega+2} A_{22}'' \left(4\mu^2(1-\omega)\omega + 1 + 8\mu(1-\omega)\omega\log(x^0) + 4(1-\omega)\omega\log^2(x^0)\right) \\
&\quad + 6\omega\left(x^0\right)^{2\omega+1} A_{22}'\Big(\mu^2(1-\omega)\omega + 4\mu(1-\omega) + 1 \\
&\quad + 4(1-\omega)(2\mu\omega+1)\log(x^0) + 4(1-\omega)\omega\log^2(x^0)\Big) \\
&- 2\omega\left(x^0\right)^{2\omega} A_{22}\Big(4\mu^2\omega\left(2\omega^2-\omega-1\right) + 4\mu\left(8\omega^2-9\omega+1\right) + 2\omega - 5 \\
&+ 4(\omega-1)\left(4\mu\omega^2 + 2(\mu+4)\omega - 1\right)\log(x^0) + 4\omega\left(2\omega^2-\omega-1\right)\log^2(x^0)\Big) \\
&\quad + 8(\omega-1)\omega\left(x^0\right)^{2\omega+2} A_{23}''\Big(\mu + \log(x^0)\Big) \\
&\quad + 24(\omega-1)\omega\left(x^0\right)^{2\omega+1} A_{23}'\Big(2\mu\omega + 1 + 2\omega\log(x^0)\Big) \\
&+ 8(\omega-1)\omega A_{23}\Big(4\mu\omega^2 + 2(\mu+4)\omega - 1 + 2(2\omega+1)\omega\log(x^0)\Big)\left(x^0\right)^{2\omega} \\
&\quad + 4(1-\omega)\omega\left(x^0\right)^{2\omega+2} A_{33}'' + 24(1-\omega)\omega^2\left(x^0\right)^{2\omega+1} A_{33}' \\
&\quad - 8\omega^2\left(2\omega^2-\omega-1\right)\left(x^0\right)^{2\omega} A_{33} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

因此，引力波度规的解包含三个函数 $A_{22}(x^0)$、$A_{23}(x^0)$ 和 $A_{33}(x^0)$ 中的两个任意函数。注意，对于任意参数 ω，我们都有一个平凡的特解 $A_{22} = A_{23} = A_{33} = 0$。

下面给出方程（33）的一个非零时间有限解示例，其形式如下：

$$
A_{22} = A_{23} = 0, \tag{34}
$$

$$
A_{33}(x^0) = c_1(x^0)^{\gamma_1} + c_2(x^0)^{\gamma_2}, \qquad \gamma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 - 6\omega \pm \sqrt{1 - 20\,\omega(1-\omega)}\right), \tag{35}
$$

其中，c_1 和 c_2 是积分常数。解（35）在参数 ω的以下区域内将是时间有界的：

$$
\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} < \omega < 1. \tag{36}
$$

至此，我们已经考察了扰动波模型度规中包含的所有函数所对应的线性化场方程。该模型基于 Bianchi IV 型宇宙的精确引力波解。我们证明了度规的所有函数都存在时间有界解。

下面写出所考虑的最一般波参数取值下，比安基IV型Universe中微扰引力波度规各分量的最终形式：

$$
1/2 < \omega < 1.
$$

$$
g_{00} = 0, \qquad g_{01} = 1, \qquad g_{11} = 0, \tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{02} =& \epsilon\tau^2 \Bigg[\frac{\left(\mu + \log(x^0)\right)\left(b_1\beta_1 \left(x^0\right)^{\beta_1+2\omega} + b_2\beta_2 \left(x^0\right)^{\beta_2+2\omega}\right)}{8\omega(\omega-1)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)} \\
&+ \frac{\left(4\mu\omega^3 + (2-6\mu)\omega^2 - 2\omega + 1 + 2\omega^2(2\omega-3)\log(x^0)\right)}{4\omega(1-\omega)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)} \times \\
&\times \left(b_1\left(x^0\right)^{\beta_1+2\omega} + b_2\left(x^0\right)^{\beta_2+2\omega}\right) \Bigg],
\end{aligned} \tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{03} =& \epsilon\tau^2 \Bigg[\frac{\omega(2\omega-3)\left(b_1 \left(x^0\right)^{\beta_1+2\omega} + b_2 \left(x^0\right)^{\beta_2+2\omega}\right)}{4\omega^3-8\omega^2+6\omega-2} \\
&- \frac{b_1\beta_1 \left(x^0\right)^{\beta_1+2\omega} + b_2\beta_2 \left(x^0\right)^{\beta_2+2\omega}}{8\omega\left(2\omega^3-4\omega^2+3\omega-1\right)} \Bigg],
\end{aligned} \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{12} =& -\frac{\epsilon\left(x^0\right)^{2\omega}}{4(\omega-1)\omega}\Bigg(\Big(1-4\mu^2(\omega-1)\omega - 8\mu(\omega-1)\omega\log(x^0) - 4(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\Big)\times \\
&\times \left(\frac{a_1\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{1-4\omega} - \frac{4a_2\omega\left(x^0\right)^{1-4\omega}}{(1-4\omega)^2} + \frac{4a_2\omega\left(x^0\right)^{1-4\omega}\log(x^0)}{1-4\omega} + a_3\right. \\
&- \frac{2b_1(\omega-1)\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_1+2} \\
&\left.- \frac{2b_2(\omega-1)\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_2+2}\right) \\
&+ 4(\omega-1)\omega\Big(\mu+\log(x^0)\Big)\Bigg[a_4 + \frac{x^0}{2\omega(1-\omega)}\Bigg(\frac{2a_1\omega\left(x^0\right)^{-4\omega}}{4\omega-1} + \frac{8a_2\omega^2\left(x^0\right)^{-4\omega}}{(1-4\omega)^2} \\
&+ \frac{2\omega\left(x^0\right)^{-4\omega}}{(4\omega-1)^3}\Big(a_1(4\omega-1)\left(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-3\omega\right) \\
&+ 4a_2\omega\left(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-2\omega-1\right) \\
&+ (4\omega-1)\left(a_1\left(4\omega^2-5\omega+1\right)+4a_2\omega\left(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-2\omega-1\right)\right)\log(x^0) \\
&+ 4a_2(1-4\omega)^2(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\Big) + \frac{8a_2\omega^2\left(x^0\right)^{-4\omega}\log(x^0)}{4\omega-1} + \frac{2a_2\omega\left(x^0\right)^{-4\omega}}{1-4\omega} \\
&+ \frac{4b_1(\omega-1)\omega\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)^2\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2}\times \\
&\times\Big(\beta_1(\mu(\omega-1)-1)+2\mu\omega-2\mu-\omega-1+(\beta_1+2)(\omega-1)\log(x^0)\Big)\left(x^0\right)^{\beta_1+1} \\
&+ \frac{4b_2(\omega-1)\omega\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)^2\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2}\times \\
&\times\Big(\beta_2(\mu(\omega-1)-1)+2\mu\omega-2\mu-\omega-1+(\beta_2+2)(\omega-1)\log(x^0)\Big)\left(x^0\right)^{\beta_2+1} \\
&+ \frac{2b_1(\omega-1)\left(x^0\right)^{\beta_1+1}}{\beta_1+2} + \frac{2b_2(\omega-1)\left(x^0\right)^{\beta_2+1}}{\beta_2+2} \\
&- \frac{b_1(\beta_1+1)(\omega-1)\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_1+1} \\
&- \frac{b_2(\beta_2+1)(\omega-1)\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2}\left(x^0\right)^{\beta_2+1}\Bigg]\Bigg),
\end{aligned} \tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{13} =& \epsilon \left(x^0\right)^{2\omega} \Bigg(-(\mu + \log(x^0)) \Bigg[\frac{a_1 \left(x^0\right)^{1-4\omega}}{1-4\omega} - \frac{4a_2\omega \left(x^0\right)^{1-4\omega}}{(1-4\omega)^2} \\
&+ \frac{4a_2\omega \left(x^0\right)^{1-4\omega} \log(x^0)}{1-4\omega} + a_3 \\
&- \frac{2b_1(\omega-1)\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2} \left(x^0\right)^{\beta_1+2} \\
&- \frac{2b_2(\omega-1)\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2} \left(x^0\right)^{\beta_2+2} \Bigg] \\
&- \frac{x^0}{2(\omega-1)\omega} \Bigg[a_4 + \frac{2a_1\omega \left(x^0\right)^{-4\omega}}{4\omega-1} + \frac{8a_2\omega^2 \left(x^0\right)^{-4\omega}}{(1-4\omega)^2} + \frac{8a_2\omega^2 \left(x^0\right)^{-4\omega} \log(x^0)}{4\omega-1} \\
&+ \frac{2a_2\omega \left(x^0\right)^{-4\omega}}{1-4\omega} + \frac{2b_1(\omega-1)\left(x^0\right)^{\beta_1+1}}{\beta_1+2} + \frac{2b_2(\omega-1)\left(x^0\right)^{\beta_2+1}}{\beta_2+2} \\
&+ \frac{2\omega \left(x^0\right)^{-4\omega}}{(4\omega-1)^3} \Bigg(a_1(4\omega-1)\left(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-3\omega\right) \\
&+ (4\omega-1)\Big(a_1\left(4\omega^2-5\omega+1\right)+4a_2\omega\left(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-2\omega-1\right)\Big)\log(x^0) \\
&+ 4a_2\omega\left(4\mu\omega^2-5\mu\omega+\mu-2\omega-1\right)+4a_2(1-4\omega)^2(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\Bigg) \\
&+ \frac{4b_1(\omega-1)\omega\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)^2\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2} \times \\
&\times \Big(\beta_1(\mu(\omega-1)-1)+2\mu\omega-2\mu-\omega-1+(\beta_1+2)(\omega-1)\log(x^0)\Big)\left(x^0\right)^{\beta_1+1} \\
&+ \frac{4b_2(\omega-1)\omega\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)^2\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2} \times \\
&\times \Big(\beta_2(\mu(\omega-1)-1)+2\mu\omega-2\mu-\omega-1+(\beta_2+2)(\omega-1)\log(x^0)\Big)\left(x^0\right)^{\beta_2+1} \\
&- \frac{b_1(\beta_1+1)(\omega-1)\left(\beta_1\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_1+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_1+4\omega+1)^2} \left(x^0\right)^{\beta_1+1} \\
&- \frac{b_2(\beta_2+1)(\omega-1)\left(\beta_2\left(4\omega^2-4\omega+3\right)+8\omega^3+4\omega+2\right)}{(\beta_2+2)\left(2\omega^2-2\omega+1\right)(\beta_2+4\omega+1)^2} \left(x^0\right)^{\beta_2+1} \Bigg] \Bigg), \qquad (41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{22} =& -\frac{\epsilon \left(x^0\right)^{4\omega}}{16(\omega-1)^2\omega^2} \Bigg(4\omega(\omega-1)A_{33} \\
&- \Big(1-4\mu^2(\omega-1)\omega-8\mu(\omega-1)\omega\log(x^0)-4(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\Big)\times \\
&\times \Big[A_{22}\Big(4\mu^2(\omega-1)\omega-1+8\mu(\omega-1)\omega\log(x^0)+4(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\Big) \qquad (42) \\
&- 4\omega(\omega-1)\Big(2A_{23}\big(\mu+\log(x^0)\big)-A_{33}\Big)\Big]\Bigg) \\
&+ \frac{1-4\mu^2\omega(\omega-1)-8\mu\omega(\omega-1)\log(x^0)-4\omega(\omega-1)\log^2(x^0)}{4\omega(\omega-1)} \left(x^0\right)^{2\omega},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{23} = & \left(x^0\right)^{2\omega}\left(\mu+\log(x^0)\right)+ \\
& +\frac{\epsilon\left(x^0\right)^{4\omega}}{4(\omega-1)\omega}\Big[\left(\mu+\log(x^0)\right)\Big(4\mu^2\omega(\omega-1)-1+8\mu\omega(\omega-1)\log(x^0) \\
& +4\omega(\omega-1)\log^2(x^0)\Big)A_{22}+4\omega(\omega-1)\left(\mu+\log(x^0)\right)A_{33} \\
& -\Big(8\mu^2(\omega-1)\omega-1+16\mu(\omega-1)\omega\log(x^0)+8(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\Big)A_{23}\Big],
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$$
g_{33} = -\left(x^0\right)^{2\omega}-\epsilon\left(x^0\right)^{4\omega}\Big(A_{22}\left(\mu+\log(x^0)\right)^2-2A_{23}\left(\mu+\log(x^0)\right)+A_{33}\Big). \tag{44}
$$

这里， ω 和 μ是背景强引力波精确解的参数， ϵ 是无量纲小参数（$\epsilon \ll 1$），参数 β_1 和 β_2 由关系式 (22)-(23) 定义，参数 a_1、 a_2、 a_3、 a_4、 b_1 和 b_2 是场方程的积分常数，这些常数由初始条件或边界条件确定。同步时间函数 τ 由关系式 (11) 定义。波变量 $A_{22}(x^0)$、 $A_{23}(x^0)$和 $A_{22}(x^0)$的三个函数共用一个方程 (33)，因此所得解中这三个函数有两个可以任意选取。

微扰引力波度规行列式关于小参数 ϵ的一阶项具有如下形式：

$$
\begin{aligned}
\det g_{\alpha\beta} = & -\frac{\left(x^0\right)^{4\omega}}{4\omega(1-\omega)}+\frac{\epsilon\left(x^0\right)^{6\omega}}{16\omega^2(\omega-1)^2}\Big[4\omega(1-\omega)\Big(2A_{23}\left(\mu+\log(x^0)\right)-A_{33}\Big) \\
& +A_{22}\Big(4\mu^2(\omega-1)\omega-1+8\mu(\omega-1)\omega\log(x^0)+4(\omega-1)\omega\log^2(x^0)\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{45}
$$

在比安基IV型宇宙中得到的微扰引力波度规解允许黎曼曲率张量有七个独立分量，而背景精确引力波的曲率张量只有三个独立分量。

因此，微扰次级引力波会在 Bianchi 宇宙中的精确强引力波模型里产生额外的引力波背景，破坏各向同性，并可能产生复杂的潮汐加速度。所讨论的效应为早期宇宙中局部不均匀性的形成提供了另一种机制，也为局域空间各向同性化提供了一种机制。

5 讨论

该论文推导出首批以强引力波精确解为背景的引力波微扰解析模型之一。论文证明了所得微扰解的稳定性，这也证明了 Bianchi IV 宇宙中引力波基本精确解的稳定性。为 Bianchi IV 宇宙建立此类模型，使我们能够进一步探讨微扰引力波在早期宇宙中的作用，包括强引力波和微扰引力波对暗物质、原初等离子体及物质中初始非均匀性加速形成的影响。这为研究引力波对宇宙微波背景（CMB）形成的影响，以及在考虑其观测到的各向异性的情况下对随机引力波背景（SGB）形成的影响，开辟了新的可能性。此外，该模型还使我们能够估计微扰引力波对宇宙各向同性化的影响。所构建的微扰引力波解析模型还可用于验证和调试描述复杂引力波模型及其对天体物理过程影响的数值方法和计算机程序。

6 结论

介绍了构建微扰动力学引力场的固有时方法。基于爱因斯坦方程关于 Bianchi IV 宇宙的精确波解，构建了引力波的解析微扰模型。为构建这些模型，采用了优选波坐标系，以及基于观察者时钟的同步时间函数；该观察者在背景强引力波中自由运动（下落）。获得并求解了所有可允许参数值下真空线性化爱因斯坦方程的相容条件，并将场方程化简为常微分方程组，进而求得其解。证明了所得微扰解的稳定性。这也明确表明，Bianchi IV 宇宙中的引力波基本精确解在小微扰下是稳定的。所得引力波模型具有黎曼曲率张量的七个独立分量，而背景精确引力波则具有三个分量。

参考文献

[1]B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、M. R. Abernathy、F. Acernese 等。双黑洞并合产生的引力波观测。《物理评论快报》，116:061102，2016年2月。doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102。[2] B.P. Abbott、R. Abbott、T.D. Abbott、F. Acernese 等。GW170817：双中子星旋近产生的引力波观测。Physical Review Letters，119(16)，2017年。doi: 10.1103/PhysRevLett.119.161101。[3] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、F. Acernese、K. Ackley 等。双中子星并合产生的引力波和伽马射线：GW170817 和 GRB 170817A。《天体物理学杂志通讯》，848(2):L13，2017年10月。doi: 10.3847/2041-8213/aa920c。URL https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa920c。[4] B. P. Abbott、R. Abbott、T. D. Abbott、F. Acernese、K. Ackley 等。双中子星并合 GW170817 的性质。《物理评论X》，9:011001，2019年1月。doi: 10.1103/ PhysRevX.9.011001。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.011001。[5] C.L. Bennett、D. Larson、J.L. Weiland、N. Jarosik，以及 G. Hinshaw 等。九年威尔金森微波各向异性探测器（WMAP）观测：最终地图和结果。《天体物理学杂志增刊辑》，208(2)，2013年。doi: 10.1088/0067-0049/208/2/20。[6]Kishore N. Ananda、Chris Clarkson 和 David Wands。源自原初密度扰动的宇宙学引力波背景。《物理评论D》，75:123518，2007年6月。doi: 10.1103/PhysRevD.75.123518。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.123518。[7]Chiara Caprini 和 Daniel G. Figueroa。宇宙学引力波背景。Classical and Quantum Gravity，35，2018年。doi: 10.1088/1361-6382/aac608。URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6382/aac608。[8] Michele Maggiore。引力波实验与早期宇宙学。Physics Reports，331(6):283–367，2000年。ISSN 0370-1573。doi: 10.1016/S0370-1573(99)00102-7。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157399001027。[9] R. Saito 和 J. Yokoyama。作为原初黑洞丰度探针的引力波背景。Physical Review Letters，102(16)，2009年。doi: 10.1103/PhysRevLett. 102.161101。

[10] R. Saito 和 J. Yokoyama。关于原初黑洞丰度的引力波约束。理论物理进展，123(5):867–886，2010年。doi: 10.1143/PTP.123. 867。

[11] Uroˇs Seljak与Matias Zaldarriaga。微波背景偏振中的引力波特征。《物理评论快报》，78:2054–2057，1997年3月。doi: 10.1103/PhysRevLett. 78.2054。
URLhttps://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.2054。

[12]Nick van Remortel、Kamiel Janssens和Kevin Turbang。随机引力波背景：方法与意义。《粒子与核物理进展》，128:104003，2023年1月。doi: 10.1016/j.ppnp.2022.104003。
URLhttps://doi.org/10.1016/j.ppnp.2022.104003。

[13] Daniel J. Reardon、Andrew Zic、Ryan M. Shannon、George B. Hobbs和Matthew Bailes等。利用帕克斯脉冲星计时阵列搜寻各向同性引力波背景。*The Astrophysical Journal Letters*，951(1):L6，2023年6月。doi: 10.3847/2041-8213/ acdd02。URLhttps://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/acdd02。

[14]EPTA合作组和InPTA合作组：Antoniadis, J., Arumugam, P., Arumugam, S., Babak, S. 和 Bagchi, M. 等。《欧洲脉冲星计时阵列第二次数据发布——III. 引力波信号搜索》。Astronomy & Astrophysics，678:A50，2023年。doi: 10.1051/0004-6361/202346844。URL https://doi.org/10.1051/0004-6361/202346844。[15] Heng Xu、Siyuan Chen、Yanjun Guo、Jinchen Jiang 和 Bojun Wang 等。利用中国脉冲星计时阵列第一批数据，搜索纳赫兹随机引力波背景。《天文学与天体物理学研究》，23(7):075024，2023年6月。doi: 10.1088/1674-4527/acdfa5。URL https://dx.doi.org/10.1088/1674-4527/acdfa5。[16] Hans Stephani、Dietrich Kramer、Malcolm MacCallum、Cornelius Hoenselaers 和 Eduard Herlt。《爱因斯坦场方程的精确解》。剑桥数学物理专著。剑桥大学出版社，第2版，2003年。[17] Jerry B. Griffiths 和 Jiˇrı́ Podolsk´y。《爱因斯坦广义相对论中的精确时空》。剑桥数学物理专著。剑桥大学出版社，2009年。[18] Konstantin Osetrin、Evgeny Osetrin 和 Elena Osetrina。Bianchi VII宇宙中的引力波：粒子轨迹、测地偏离和潮汐加速度。《欧洲物理学杂志C》，82(10)，2022年。doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10852-6。[19] Konstantin Osetrin、Evgeny Osetrin 和 Elena Osetrina。Shapovalov III型波时空中测地线偏离、粒子轨迹及引力波中的辐射传播。Symmetry，15(7)，2023年。ISSN 2073-8994。doi: 10.3390/sym15071455。URL https://www.mdpi.com/2073-8994/15/7/1455。[20] K E Osetrin、E K Osetrin 和 E I Osetrina。Bianchi VI型宇宙引力波中的测地线偏离和粒子轨迹。《物理学杂志A：数学与理论》，56(32):325205，2023年7月。doi: 10.1088/1751-8121/ace6e3。URL https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ace6e3。[21] Konstantin E. Osetrin、Vladimir Y. Epp 和 Sergey V. Chervon。强引力波中的光传播与辐射迟滞时间。《物理学年鉴》，462:169619，2024年。ISSN 0003-4916。doi: https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169619。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491624000277。

[22]V.F. Mukhanov、H.A. Feldman 和 R.H. Brandenberger。宇宙学扰动理论。*PhysicsReports*, 215(5):203–333，1992年。doi: https://doi.org/10.1016/0370-1573(92)90044-Z。URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739290044Z。

[23] C.-P. Ma 和 E. Bertschinger。同步规范和共形牛顿规范下的宇宙学微扰理论。《天体物理学杂志》，455(1):7–25，1995。doi: 10.1086/ 176550。

[24] Nigel T. Bishop 和 Luciano Rezzolla。数值相对论中的引力波提取。《相对论生活评论》，19(1)，2016。doi: 10.1007/s41114-016-0001-9。

[25] G. Dom`enech。标量诱导引力波综述。*Universe*，7(11)，2021年。doi: 10.3390/universe7110398。

[26]L. Blanchet。引力波的后牛顿理论。《相对论生活评论》，27，2024。doi: 10.1007/s41114-024-00050-z。网址https://doi.org/10.1007/s41114-024-00050-z。

[27]Shuai Zha、Oliver Eggenberger Andersen 和 Evan P. O'Connor。通过微扰分析揭示核心坍缩超新星中引力波辐射的本质。《物理评论*D*》，109:083023，2024年4月。doi: 10.1103/PhysRevD.109.083023。网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.083023。

[28] Katie Rink、Ritesh Bachhar、Tousif Islam、Nur E. M. Rifat、Kevin Gonz´alez-Quesada、Scott E. Field、Gaurav Khanna、Scott A. Hughes 和 Vijay Varma。基于微扰理论与数值相对论的自旋中等质量比双星引力波替代模型。《物理评论*D*》，110:124069，2024年12月。doi：10.1103/PhysRevD.110. 124069。网址https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.124069。[29] Vladislav G. Bagrov 和 Valeriy V. Obukhov。爱因斯坦–麦克斯韦方程的精确解类别。《物理学年鉴》，495(4-5):181–188，1983年。doi：10.1002/andp. 19834950402。[30] V. V. Obukhov、S. V. Chervon 和 D. V. Kartashov。具有单传递四参数运动群的空间中可容许电磁场的麦克斯韦方程解。*International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*，21(05):2450092，2024。doi：10.1142/S0219887824500920。网址https://doi.org/10.1142/S0219887824500920。[31] Evgeny Osetrin 和 Konstantin Osetrin。允许通过分离变量法求解程函方程的时空模型中的纯辐射。《数学物理学杂志》，58(11)，2017年。doi：10.1063/1.5003854。[32]Valeriy V. Obukhov。具有三参数阿贝尔运动群的爱因斯坦–麦克斯韦方程非零电真空解的分类。《物理学年鉴》，470:169816，2024。ISSN 0003-4916。doi：https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169816。网址https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491624002239。[33] Valery V. Obukhov。Petrov齐次非零空间中的麦克斯韦真空方程精确解。*Symmetry*，17(9)，2025。ISSN 2073-8994。doi：10.3390/sym17091574。网址https://www.mdpi.com/2073-8994/17/9/1574。[34]Konstantin E. Osetrin、Vladimir Y. Epp 和 Ulyana A. Guselnikova。Bianchi IV 宇宙中的引力波与纯辐射。《俄罗斯物理学杂志》，68(3):526–531，2025。doi：10.1007/s11182-025-03460-w。网址https://doi.org/10.1007/s11182-025-03460-w。

[35]Shin'ichi Nojiri 和 Sergei D. Odintsov。修正引力导论及暗能量的引力替代理论。*InternationalJournal of Geometric MethodsinModern Physics*，04(01):115–145，2007年。doi：10.1142/S0219887807001928。网址https://doi.org/10.1142/S0219887807001928。

[36]Shin'ichi Nojiri和Sergei D. Odintsov。修正引力中的统一宇宙历史：从F(R)理论到洛伦兹非不变模型。*PhysicsReports*，505（2）：59–144，2011年。ISSN 0370-1573。doi: 10.1016/j.physrep.2011.04.001。
URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157311001335。

[37] Salvatore Capozziello和Mariafelicia De Laurentis。广义引力理论。*PhysicsReports*，509（4）：167–321，2011年。ISSN 0370-1573。doi: 10.1016/j.physrep.2011.09.003。
URLhttps://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.09.003。

[38] Shin'ichi Nojiri、Sergei D. Odintsov和Vasilis K. Oikonomou。修正引力理论简述：暴胀、反弹与晚期演化。*Physics Reports*，692：1–104，2017年。ISSN 0370-1573。doi: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.06.001。
URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157317301527。

[39] Konstantin Osetrin、Ilya Kirnos、Evgeny Osetrin 和 Altair Filippov。含标量场的引力二次理论中具有空间均匀性对称性的波状精确模型。*Symmetry*，13(7)，2021年。ISSN 2073-8994。doi: 10.3390/sym13071173。网址https://www.mdpi.com/2073-8994/13/7/1173。

[40] Hansen, Frode K.、Boero, Ezequiel F.、Luparello, Heliana E. 和 Garcia Lambas, Diego。若干宇宙微波背景（CMB）异常的一种可能的共同解释：近邻星系对观测到的大尺度宇宙微波背景涨落的强烈影响。天文学与天体物理学，675:L7，2023年。doi: 10.1051/0004-6361/202346779。网址https://doi.org/10.1051/0004-6361/202346779。

[41]Hongbo Cai、Yilun Guan、Toshiya Namikawa 和 Arthur Kosowsky。各向异性双折射对测量宇宙微波背景透镜效应的影响。《物理评论*D*》，107:043513，2023年2月。doi: 10.1103/PhysRevD.107.043513。
URLhttps://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.043513。[42]Rui Shi、Tobias A. Marriage、John W. Appel、Charles L. Bennett、David T. Chuss、Joseph Cleary、Joseph R. Eimer、Sumit Dahal、Rahul Datta、Francisco Espinoza、Yun- yang Li、Nathan J. Miller、Carolina N ́u ̃nez、Ivan L. Padilla、Matthew A. Petroff、Deniz A. N. Valle、Edward J. Wollack 和 Zhilei Xu。利用当前和未来数据检验E模偏振中的宇宙微波背景异常。《天体物理学杂志》，945(1):79，2023年3月。doi: 10.3847/1538-4357/acb339。
URLhttps://doi.org/10.3847/1538-4357/acb339。[43] Siewert、Thilo M.、Schmidt-Rubart、Matthias 和 Schwarz、Dominik J.。宇宙射电偶极：估计量与频率依赖性。*Astronomy and Astrophysics*，653:A9，2021年。doi: 10.1051/0004-6361/202039840。
URLhttps://doi.org/10.1051/0004-6361/202039840。[44] Vasudev Mittal、Oliver T Oayda 和 Geraint F Lewis。类星体Quaia样本中的宇宙偶极：贝叶斯分析。《皇家天文学会月报》，527(3):8497–8510，2023年12月。ISSN 0035-8711。doi: 10.1093/mnras/stad3706。URLhttps://doi.org/10.1093/mnras/stad3706。[45] Konstantin E. Osetrin、Valeriy V. Obukhov 和 Altair E. Filippov。齐次时空与哈密顿–雅可比方程的变量分离。《物理学杂志*A*：数学与一般物理》，39(21):6641–6647，2006。doi: 10.1088/0305-4470/39/21/S64。DOI:10.1088/0305-4470/39/21/S64。

[46]V. V. Obukhov。彼得罗夫齐次空间的分类。Symme- try，16(10)，2024。ISSN 2073-8994。doi: 10.3390/sym16101385。URL https://www.mdpi.com/2073-8994/16/10/1385。[47] V.V. Obukhov。齐次空间中容许电磁场的麦克斯韦方程组。Universe，8(4)，2022。doi: 10.3390/universe8040245。[48]Kevin J. Ludwick 和 Peter L. Williams。由扰动比安基I型背景中的引力波推断哈勃参数。物理学快报B，868: 139717，2025。ISSN 0370-2693。doi: 10.1016/j.physletb.2025.139717。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269325004782。[49] 列夫·达维多维奇·朗道和叶夫根尼·米哈伊洛维奇·栗弗席兹。经典场论，理论物理学教程系列第2卷。Butterworth-Heinemann，牛津（英国），第4版，1975。[50] Paul St¨ackel。关于通过变量分离积分哈密顿微分方程。数学年刊，49(1):145–147，1897。doi: 10.1007/BF01445366。URL https://doi.org/10.1007/BF01445366。[51] Vladimir N. Shapovalov。哈密顿–雅可比方程中的对称性与变量分离。I。苏联物理杂志，21(9):1124–1129，1978。doi: 10.1007/BF00894559。URL https://doi.org/10.1007/BF00894559。DOI:10.1007/BF00894559。[52] Vladimir N. Shapovalov。哈密顿–雅可比方程中的对称性与变量分离。II。苏联物理杂志，21(9):1130–1132，1978。doi: 10.1007/BF00894560。URL https://doi.org/10.1007/BF00894560。DOI:10.1007/BF00894560。[53] Vladimir N. Shapovalov。St¨ackel 空间。西伯利亚数学杂志（苏联数学杂志），20(5): 790–800，1979。doi: 10.1007/BF00971844。URL https://doi.org/10.1007/BF00971844。DOI:10.1007/BF00971844。[54] Konstantin Osetrin、Evgeny Osetrin 和 Elena Osetrina。比安基IV型宇宙引力波中的测地偏离与潮汐加速度。欧洲物理期刊Plus，137(7)，2022。doi: 10.1140/epjp/s13360-022-03061-3。[55] Konstantin E. Osetrin、Vladimir Y. Epp 和 Altair E. Filippov。引力波与纯辐射的精确模型。Symmetry，16(11)，2024。ISSN 2073-8994。doi: 10.3390/sym16111456。URL https://www.mdpi.com/2073-8994/16/11/1456。