arXiv:2602.03236v1 [math.RA] 3 Feb 2026

非交换中心二次曲线的分类

HAIGANG HU、IZURU MORI、WENCHAO WU

Abstract. 非交换二次超曲面的分类是非交换代数几何中的主要课题之一。近年来，我们致力于完成非交换中心圆锥曲线的分类。为实现这一目标，我们与其他作者在一系列论文中发展了一些理论，用以研究并分类某些类非交换二次超曲面[5, 6, 7, 8, 9, 17, 18]。最后，在本文中，我们通过发展非交换代数的齐次化与去齐次化的一般理论，并结合先前的结果，完全分类了非交换中心圆锥曲线。作为主要结果，我们证明以下对象集合之间存在双射：(i) 四维Frobenius代数的同构类集合，(ii) 非交换仿射圆锥曲线铅笔的同构类集合，以及 (iii) 非交换中心圆锥曲线的同构类集合。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 4 2.1. 拟概形 4 2.2. 正则元与正规元 5 2.3. 非交换完全交 6 3. 非交换齐次化与去齐次化 7 3.1. 非交换去齐次化 7 3.2. 非交换齐次化 10 3.3. 野性齐次化 12 3.4. st-等价 13 3.5. 强正则正规序列 14 4. 非交换四次超曲面 16 4.1. 对偶性 16 4.2. 扭曲代数 18 4.3. 非交换贝祖定理 20 4.4. 代数 $C(A)$ 22 4.5. 非交换仿射圆锥曲线族 23 5. 主要结果 24 6. 显式分类 28 6.1. 非交换中心圆锥曲线 28 6.2. 几何对 32 6.3. 次数 1 的正则正规（中心）元 34 参考文献 47

Key words and phrases. 非交换中心圆锥曲线、非交换（去）齐次化、非交换仿射圆锥曲线铅笔。*2020 MSC*: 16E65，16S38，16W50。第一作者获得国家自然科学基金资助（项目编号：12371042 和 12501054）。第二作者获得日本学术振兴会科学研究费补助金（C 类），项目编号为 JP25K06917。第三作者获得国家留学基金管理委员会（CSC）资助。

1. Introduction

本文中，设 k 是特征零代数闭域。除非另有说明，所有代数和向量空间均定义在 k 上。

由 Artin、Schelter、Tate、Van den Bergh 等人开创的非交换代数几何，是一个充满活力的领域，它将经典几何概念拓展到非交换情境，为理解代数结构提供了新的见解和工具 [1, 2, 3, 19]。这一领域的一个核心主题是研究经典几何对象的非交换类比，例如量子多项式代数、非交换二次完全交等 [1, 7, 11, 22]。

近年来，我们致力于完成非交换中心圆锥曲线的分类。事实上，我们对 Calabi-Yau 量子射影平面中的非交换中心圆锥曲线进行分类 [5,6], 发展了关于 Clifford 二次完全交的理论 [7], 对四维 Frobenius代数进行分类 [8], 发展了非交换仿射圆锥曲线铅笔理论 [8], 证明每个非交换圆锥曲线都满足 (G1) 条件 [9], 等等。

非交换（Calabi-Yau）射影平面由与一个 3 维（Calabi-Yau）量子多项式代数 S 相关联的非交换射影概形 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, S$ 定义，而非交换（Calabi-Yau）（中心）圆锥曲线由非交换射影概形 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, S/(f)$ 定义，其中 S 是一个 3 维（Calabi-Yau）量子多项式代数，$f \in S_2$ 是一个次数 2 的齐次正规（中心）元。尽管非交换 Calabi-Yau 射影平面有无穷多个同构类，但颇为令人惊讶的是，我们在先前的论文 [6] 中证明了非交换 Calabi-Yau 中心圆锥仅有 9 个同构类。为了完成非交换中心圆锥曲线的分类，我们必须去掉 Calabi-Yau 条件。然而，事实证明对非 Calabi-Yau 情形进行分类非常困难。幸运的是，在先前关于 Clifford 二次完全交、非交换仿射圆锥曲线束、点簇等工作之后，我们正逐步接近目标。最后，在本文中，通过发展非交换齐次化与去齐次化技术，并利用先前的结果，我们得以完全分类非交换中心圆锥曲线。

我们回顾一些非交换代数几何的背景。下文定义的量子多项式代数，是非交换代数几何中多项式代数的一种非交换类比。

定义 1.1 ([1])。 若诺特连通分次代数 S 满足以下条件，则称其为 n 维量子多项式代数:

(1) $\operatorname{gldim} S = n$,
(2) $\underline{\operatorname{Ext}}^i_S(k, S) = \begin{cases} k(n) & \text{if } i = n, \\ 0 & \text{if } i \neq n, \end{cases}$ and
(3) $H_S(t) = (1-t)^{-n}$.

按照 Artin-Zhang 的意义，与 n维量子多项式代数相关联的非交换射影概形 [3] ，在非交换代数几何中被视为 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的非交换类比。它充当非交换超曲面嵌入其中的环境空间。

本文主要研究以下非交换对象。

定义 1.2 (定义2.17，第3.5节)。
$\mathcal{A}_{n,\ m} = \left\{ A = S/(h_1, \ldots\ldots, h_m) \text{，其中 } S \text{ 是一个 } n \text{ 维量子多项式代数，而 } (h_1, \ldots\ldots, h_m) \text{ 是 } S \text{ 中次数为 2 的齐次正则正规序列，且 } R = S/(f_1, \ldots\ldots, f_m) \text{，其中 } S \text{ 是一个 } n \text{ 维量子多项式代数，而 } (f_1, \ldots\ldots, f_m) \text{ 是 } S \text{ 中一个次数为 2 的强正则正规序列} \right\} / \cong$.
$\mathcal{A}^{\vee}_{n,\ m} = \left\{ \right\} / \cong$.

我们将分次代数 $A \in \mathcal{A}_{3,\ 1}$ 称为非交换圆锥曲线的齐次坐标环，并将 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A$ 称为非交换圆锥曲线。沿用 [8], 的说法，我们将代数 $R \in \mathcal{A}_{2,\ 2}^{\vee}$ 称为非交换仿射圆锥曲线铅笔的坐标环，并将 $\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}\, R$ 称为非交换仿射圆锥曲线铅笔。

对于非交换二次超曲面 $A = S/(f) \in \mathcal{A}_{n,}$**1**，存在唯一的正则正规元 $f! \in A_2^!$使得 $A^!/(f^!) = S^!$, 其中 $(-)^!$表示取二次对偶的运算。我们定义 $C(A) := A^![(f^!)^{-1}]_0$。Smith 和 Van den Bergh 证明了 Cohen-Macaulay 表示 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(A)$ 等价于 $\mathcal{D}^b$(模范畴 $C(A)$)（[22, 命题 5.2], 另见 [18, 引理 4.13]）。我们证明一个众所周知的结果： $C(A)$ 是一个自内射代数，并且当 $A \in \mathcal{A}_3$**,1** 时， $C(A)$ 是一个 **4** 维 Frobenius 代数（定理 **4.36** ）。

本文使用非交换齐次化和去齐次化的技术。这些技术有一个微妙之处：代数 R 的齐次化取决于 R 的定义关系的选择（因此并非由 R 唯一确定），而分次代数 A 的去齐次化取决于在 A 中选择一个次数 **1** 的正则正规（中心）元（因此并非由 A 唯一确定）。事实上，即使在交换情形下，这两种运算也互非逆映射；而在非交换情形下，这些运算则更加复杂。（本文及我们先前的论文 [8] 中给出了许多违背我们直觉的例子。）不过，为了本文的目的，我们通过引入强正则正规序列的概念，部分解决了这个问题。我们希望本文的这一部分能成为有关这些技术的有用参考。

我们证明，非交换仿射圆锥曲线铅笔 $R = S/(f_1, f_2) \in \mathcal{A}_2^{\vee}$**,2** 的齐次化 $\mathscr{H}^z(R)$ 与 S 中 f_1, f_2 这一强正则正规序列的选取无关，其中 S；并且 $\mathscr{H}^z(R) \in \mathcal{A}_3$**,2**（定理 **5.1**）。我们还证明，$A \in \mathcal{A}_{n,n-1}$ 的去齐次化 $\mathscr{D}_w(A)$ 与正规元 w 的选取无关（引理 **3.10**）。

Let

$$\mathcal{A}_{3,1}^c := \{A = S/(f) \in \mathcal{A}_{3,1} \mid f \in Z(S)_2\}/\cong,$$

$$\mathcal{A}_{3,1}^z := \{A \in \mathcal{A}_{3,1}^c \mid \exists \text{ a regular central element } z \in Z(A^!)_1\}/\cong .$$

我们将分次代数 $A \in \mathcal{A}_{3,\ 1}^c$ 称为非交换中心圆锥曲线的齐次坐标环。本文的关键在于证明$\mathcal{A}_{3,\ 1}^z$ 与 $\mathcal{A}_{2,\ 2}^{\vee}$之间存在双射，其中非交换齐次化和去齐次化技术发挥着至关重要的作用。我们证明复合映射

$$\mathcal{A}_{3,1}^z \xrightarrow{(-)^!} \mathcal{A}_{3,2} \xrightarrow{\mathscr{D}_z} \mathcal{A}_{2,2}^{\vee}$$

是一个双射，其逆映射为（定理5.7）

$$\mathcal{A}_{2,2}^{\vee} \xrightarrow{\mathscr{H}^z} \mathcal{A}_{3,2} \xrightarrow{(-)^!} \mathcal{A}_{3,1}^z.$$

结合非交换齐次化与去齐次化技术，以及第 $A \in \mathcal{A}_3^c$ 节中对1 维量子多项式代数中次数 **2** 的正则中心元，以及其对偶代数中次数 **1** 的正则正规元的显式计算结果，我们得到以下结论。

定理 1.3 (定理 5.12)。 对于代数 $A, A' \in \mathcal{A}_{3,\ 1}^c$，以下命题等价：

(1) 分次模范畴 $A \cong$ 分次模范畴 A'。(2) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A'$。(3) 分次模范畴 $A^! \cong$ 分次模范畴 $A'^!$。(4) $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A^! \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A'^!$。(5) $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(A) \cong \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(A')$。(6) $\mathcal{D}^b$(模范畴 $C(A)$) $\cong \mathcal{D}^b$(模范畴 $C(A')$)。

(7) $C(A) \cong C(A')$.

本文的主要结果是以下双射。

定理 1.4 (推论5.14)。 以下集合之间存在双射：

(i) 四维*Frobenius*代数的同构类集合。(ii) 非交换仿射圆锥曲线铅笔的同构类集合。(iii) 非交换中心圆锥曲线的同构类集合。

在 [8], Takeda 的工作中，作者们给出了四维Frobenius代数和非交换仿射圆锥曲线铅笔的完整分类，因此本文可以通过上述双射给出非交换中心圆锥曲线的完整分类。

定理 1.5 (定理5.15)。 每个非交换中心圆锥曲线都同构于表 *1* 中某个分次代数所关联的非交换射影概形，且该分次代数唯一，其中$\mathrm{Proj_{nc}}\,\mathcal{S}_\lambda/(x^2) \cong \mathrm{Proj_{nc}}\,\mathcal{S}_{\lambda'}/(x^2)$ 当且仅当 $\lambda' = \lambda^{\pm 1}$。

TABLE 1. $A \in A^c_{3,1}/\sim$。

交换的
$k[x,y,z]/(x^2)$, $k[x,y,z]/(x^2+y^2)$, $k[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2)$
非交换
$\mathcal{W}/(x^2)$, $\mathcal{S}_\lambda/(x^2)$, $\mathcal{S}/(x^2+y^2)$, $\mathcal{S}/(x^2+y^2+z^2)$, $\mathcal{N}/(x^2)$, $\mathcal{N}/(x^2+y^2-4z^2)$, $\mathcal{N}/(3x^2+3y^2+4z^2)$

$\mathcal{S} := k\langle x, y, z\rangle/(yz+zy,\ zx+xz,\ xy+yx)$,
$\mathcal{S}_\lambda := k\langle x, y, z\rangle/(yz-\lambda zy,\ zx-xz,\ xy-yx)$, $\lambda \neq 0, 1$,
$\mathcal{W} := k\langle x, y, z\rangle/(yz-zy-y^2,\ zx-xz,\ xy-yx)$,
$\mathcal{N} := k\langle x, y, z\rangle/(yz+zy+x^2, zx+xz+y^2, xy+yx)$.

致谢。 我们感谢 Saya Ogawa、Ryoma Suzuki、Ryota Takahashi 和 Koki Takeda 提供有益的讨论，并帮助我们进行计算。

2. PRELIMINARIES

2.1. **拟概形**。

定义 2.1. 在 k 上的一个拟概形 $X =$(模范畴 X, $\mathcal{O}_X$)由一个 k-线性阿贝尔范畴 $\mathrm{mod}\,X$ 和一个对象 $\mathcal{O}_X \in$模范畴 X组成。若存在等价函子 F: 模范畴 $X \to$模范畴 Y，使得 $F(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_Y$，则称两个拟概形 X和 Y同构，记为 $X \cong Y$。

若 X是定义在 k 上的诺特概形，则我们将 X视为定义在k 上的拟概形 $X =$(模范畴 X, $\mathcal{O}_X$)，其中 $\mathrm{mod}\,X$ 是 X 上相干层的范畴，而 $\mathcal{O}_X \in$ 模范畴 X 是 X上的结构层。非交换代数几何中的拟概形有两个典型例子，即非交换仿射概形和非交换射影概形。

对于代数 R，我们用 $\mathrm{Mod}\ R$ 表示右 R-模的范畴，并用 $\mathrm{mod}\,R$ 表示由有限生成模组成的全子范畴。若 R 是右诺特的，则与 R 相关联的非交换仿射概形定义为 $\mathrm{Spec_{nc}}\,R =$(mod R, R)。下述简单引理在本文中至关重要。

引理 2.2 ([6, 引理 5.2])。 对于右诺特代数 R 和 R'，$\mathrm{Spec_{nc}}\,R \cong \mathrm{Spec_{nc}}\,R'$ 作为拟概形同构，当且仅当 $R \cong R'$ 作为代数同构。

本文中，分次代数 A 表示一个 $\mathbb{Z}$-分次代数 $A=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i$。连通分次代数 A 是满足条件 $A_0=k$的 $\mathbb{N}$-分次代数 $A=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}A_i$。当我们写出形如 $k\langle x_1,\dots,x_n\rangle/I$的分次代数$A$时，默认假设 $\deg\ x_i=1$，从而 A是在次数 1 有限生成的连通分次代数。对于分次代数 A，我们用 $\mathrm{GrMod}\,A$ 表示分次右 A-模范畴，其中态射是保持次数的右 A-模同态；用 $\mathrm{grmod}\,A$ 表示 $\mathrm{GrMod}\,A$ 的全子范畴，其对象为有限生成的分次右 A-模。对于右诺特连通分次代数 A，与 A 相关联的非交换射影概形定义为 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\,A:=$(尾模范畴 $A,\mathcal{A}$)，其中 $\mathrm{tors}\ A$ 是 $\mathrm{grmod}\,A$的全子范畴，其对象为 k上的有限维模；$\mathrm{tails}\ A:=\mathrm{grmod}\ A/\mathrm{tors}\ A$ 是商范畴，而 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{grmod}\,A$ 在 $\mathrm{tails}\ A$中的像。

设 A 是一个分次代数。对于 $M\in$分次模范畴 A 和 $j\in\mathbb{Z}$，我们定义移位 $M(j)\in$分次模范畴 A 为 $M(j)_i:=M_{j+i}$，其中 $i\in\mathbb{Z}$。对于 $M,\ N\in$分次模范畴 A，我们将 $\mathrm{Ext}^i_A(M,\ N)$ 记作 $:=\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GrMod}\,A}(M,\ N)$，并且

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,N):=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^i_A(M,N(j)).$$

如果对于所有 $i\in\mathbb{Z}$ 都有 $\dim_k M_i<\infty$，我们就称 $M\in$分次模范畴 A 是局部有限的。在这种情况下，我们将 M 的希尔伯特级数定义为 $H_M(t):=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\dim_k M_i)t^i\in\mathbb{Z}[[t,t^{-1}]]$。$A$ 的 Gelfand–Kirillov维数（简称 GK 维数）定义为

$$\mathrm{GKdim}A:=\inf\{d\in\mathbb{R}^+\mid \dim_k A_i\le ci^{d-1}\text{ for some constant }c>0,i\gg 0\}.$$

下文定义的量子多项式代数，是非交换代数几何中交换多项式代数的非交换类比。

定义 2.3。诺特连通分次代数 S 称为一个 n维量子多项式代数，当且仅当

(1) $\mathrm{gldim}\,S=n$,

(2) $\underline{\mathrm{Ext}}^i_S(k,S)=\begin{cases}k(n) & \text{if } i=n,\\ 0 & \text{if } i\neq n,\end{cases}$ and

(3) $H_S(t)=(1-t)^{-n}$.

如果 S 是一个 n维量子多项式代数，那么 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\,S$ 在非交换代数几何中被视为 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的非交换类比。

例 2.4。分次代数 A是一个 2 维量子多项式代数，当且仅当

$$A\cong k\langle x,y\rangle/(ax^2+bxy+cyx+dy^2),$$

其中 $a,\ bc,\ d\in k$ 满足 $ad\neq bc$，当且仅当 A 同构于以下对象之一

$$k_\lambda[x,y]:=k\langle x,y\rangle/(xy-\lambda yx),\ k_J[x,y]:=k\langle x,y\rangle/(x^2-xy+yx),$$

其中 $0\neq\lambda\in k$。已知作为分次代数，$k_\lambda[x,y]\cong k_{\lambda'}[x,y]$ 当且仅当 $\lambda'=\lambda^{\pm1}$。

以下引理是众所周知的。

引理 2.5. 如果 S 是一个 n维量子多项式代数，那么 $S[z]$是一个 $n+1$维量子多项式代数。

2.2. **正则元与正规元**。

定义 2.6. 设 R 是一个代数，且 $f\in R$。

(1) 若对于每个 $g\in R,\ gf=0$（$fg=0$）蕴含 $g=0$，则称 f 为右（左）正则元。若 f 同时是右正则元和左正则元，则称其为正则元。**(2)** 若 $Rf=fR$，则称 f 为正规元。

注意，若 $f \in R$ 是正规元，则 $Rf = fR = (f) \lhd R$ 是一个双边理想。我们用 $RN(R)$（$RZ(R)$）表示所有非可逆元的正则正规（中心）元组成的集合。若 A 是分次代数，则用 $RN(A)_d$（$RZ(A)_d$）表示所有次数为 d 且非可逆的齐次正则正规（中心）元组成的集合。

本文中，找出给定代数的所有正则正规元至关重要。一般而言，判断给定元素是否为正则元或正规元并不容易。以下给出一些判据。

引理 2.7. 设 R 是一个代数。

(1) 若存在一个满射 $\nu\colon R \to R$，使得 $fw = w\nu(f)$ 对 $f \in R$ 成立，则 $w \in R$ 是正规元。特别地，若 $R = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I$，且存在 $(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(k)$ 使得 $x_i w = w\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)$ 成立，则 w 是正规元。(2) $w \in R$ 是正则正规元，当且仅当存在唯一的 $\nu \in \operatorname{Aut} R$，使得 $fw = w\nu(f)$ 对 $f \in R$ 成立。我们称 ν 为 w 的正规化自同构。

正则正规元 $w \in R$ 是中心元，当且仅当 $\nu = \mathrm{id}$。对于分次代数 A 和齐次正则正规元 $w \in A$，$\nu \in \operatorname{Aut}^{\mathbb{Z}} A$ 是分次代数自同构。

定义 2.8。 设 R 是一个代数，且 $F = (f_1, \dots, f_m)$ 是 R 中的一个序列。

(1) 若满足以下条件，我们称 F 为正则的。(2) 若对每个 $i = 1, \dots, m$，$f_i \in R/(f_1, \dots, f_{i-1})$ 对每个 $i = 1, \dots, m$ 都是正则的。(2) 若对每个 $i = 1, \dots, m$，则 $f_i \in R/(f_1, \dots, f_{i-1})$ 都是正规（分别为中心），则称 F 为正规（分别为中心）。

此外，设 R 是一个分次代数。

(3) 若对每个 $i = 1, \dots, m$ 都有 $\deg f_i = d$，则称 F 的次数为 d，记作 $\deg F = d$。(4) 若对每个 $i = 1, \dots, m$，f_i 都是齐次的，则称 F 为齐次。

我们用 $I_F \lhd R$ 表示由 $\{f_1, \dots, f_m\}$ 生成的 R 的（齐次）理想，用 $(F, g) := (f_1, \dots, f_m, g)$ 表示在 R 中添加一个元素 $g \in R$ 后得到的序列。

对于代数 R，R 中的序列 $F = (f_1, \dots, f_m)$ 可通过典范嵌入 $R \to R[z]$ 视为 $R[z]$ 中的序列。下面的引理显然成立。

引理 2.9。 沿用上述记号。以下各命题等价：

(1) F 在 R 中是正则的（分别是正规的或中心的）。(2) F 在 $R[z]$ 中是正则的（分别是正规的或中心的）。(3) (F, z) 在 $R[z]$ 中是正则的（分别是正规的或中心的）。

引理 2.10 ([8, 引理 3。10])。设 A 是一个局部有限的 $\mathbb{N}$-分次代数，且 $F = (f_1, \dots, f_m)$ 是一个齐次正规序列。那么 F 是正则的当且仅当

$$H_{A/I_F}(t) = (1 - t^{d_1}) \cdots (1 - t^{d_m}) H_A(t)$$

其中 $d_i =$ 次数 f_i 对于 $i = 1, \dots, m$。

注 2.11。对于 $f, g \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus k$，$\gcd(f, g) = 1$ 当且仅当 (f, g) 是正则序列，因此 (f, g) 是正则序列，当且仅当 (g, f) 是正则序列（[8, 注释 3.8 (1)]）。然而，与 [7, 引理 2.28]，不同，对于非交换（分次）代数，（齐次）正则正规序列在置换下并不保持（参见 [8, 例 3.21 (2)]）。

2.3. 非交换完全交。

定义 2.12. 诺特连通分次代数 A 称为维数为 n 且戈伦斯坦参数为 ℓ 的 *AS*-戈伦斯坦代数，如果

(1) $\operatorname{id}_A A = \operatorname{id}_{A^o} A = n$, and

(2) $\underline{\operatorname{Ext}}^i_A(k, A) \cong \underline{\operatorname{Ext}}^i_{A^o}(k, A) \cong \begin{cases} k(\ell) & \text{if } i = n \\ 0 & \text{if } i \neq n. \end{cases}$

定义 2.13. 有限维代数 R 称为*Frobenius* 代数，如果存在一个双线性形式

$$(-,-): R \times R \to k$$

满足以下条件：

(1) 结合律：对所有 $a, b, c \in R$，$(ab, c) = (a, bc)$。 (2) 非退化：对任意 $0 \neq a \in R$，存在 b，$b' \in R$，使得 $(a, b) \neq 0$ 且 $(b', a) \neq 0$。

例 2.14。 已知每个有限维基本自内射代数都是 Frobenius（[23, 命题 IV 3。9]）。由于 $M_2(k)$ 是维数不超过 4 的唯一非基本代数，而 $M_2(k)$ 是 Frobenius 代数，因此维数不超过 4 的每个自内射代数都是 Frobenius 代数。

引理 2.15 ([15, 注 3。11])。 连通分次代数 A 是维数为0 的 *AS*-戈伦斯坦代数，当且仅当 A 是分次弗罗贝尼乌斯代数。

引理 2.16 （[12, 命题 3.4 和 3.5]）。 设 A 是一个连通分次代数，且 $f \in RN(A)_d$.

（1） A 是诺特的，当且仅当 $A/(f)$ 是诺特的。（2）（Ree 引理） A 是维数为 n 且戈伦斯坦参数为ℓ 的 *AS*-戈伦斯坦代数，当且仅当 $A/(f)$ 是维数为 $n-1$ 且戈伦斯坦参数为 $\ell - d$的 *AS*-戈伦斯坦代数。

由上述引 理，下面定义的非交换完全交是 AS-戈伦斯坦的 .

定义 2.17。 若存在一个量子多项式代数 S，以及其中的一个齐次正则正规序列 $H = (h_1, \ldots\ldots, h_m)$，使得 $A = S/I_H$，则称分次代数 A 为非交换完全交。此外，如果 deg $H = 2$，则称 A 为非交换二次完全交。

定义
$\mathcal{A}_{n,\ m} := \{$非交换二次完全交 $A = S/(h_1, \ldots, h_m) \mid$ 全局维数 $S = n\}/\cong$，$\mathcal{B}_{n,\ m} := \{$二次完全交 $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(h_1, \ldots, h_m)\}/\cong$.
我们指出，$\mathcal{A}_{n,\ 0}$ 是 n维量子多项式代数的同构类集合，而 $\mathcal{B}_{n,\ 0} = \{k[x_1, \ldots, x_n]\}$。若 $A \in \mathcal{A}_{3,\ 1}$，我们称 A 非交换圆锥曲线的齐次坐标环 。我们还定义

$$\mathcal{A}^c_{n,1} := \{S/(f) \in \mathcal{A}_{n,1} \mid f \in Z(S)_2\}/\cong .$$

我们称 A t 为 非交换中心圆锥曲线的齐次坐标环 当 $A \in \mathcal{A}^c_{3,\ 1}$.

3. Noncommutative homogenization and dehomogenization

本节中，我们介绍并研究代数 R中序列 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ 上的若干运算。

3.1. 非交换去齐次化。 设 A 是一个在次数 1 上有限生成的分次代数。则 $0 \neq z \in Z(A)_1$ 当且仅当 A 具有表示 $A = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]/I$，其中 $I \lhd k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]$ 为某个齐次理想。

定义 3.1 （去齐次化）. (1) 对于 $f \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]$，我们定 e

$$f_z := f(x_1, \ldots, x_n, 1) \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle.$$

(2) 对于 $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]$ 中的序列 $F = (f_1, \ldots, f_m)$，我们定义

$$F_z = ((f_1)_z, \ldots, (f_m)_z),$$

它是 $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ 中的一个序列。

对于分次代数 $A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle[z]/I_F$， A 的去齐次化的一种朴素定义应为 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I_{F_z}$。然而，目前尚不清楚该定义是否独立于 F 的选择，因此我们将寻找另一种定义。

定义 3.2. 设 A 是一个分次代数，且 $w \in RN(A)_d$ 具有正规化自同构ν。我们定义一个新的代数 $A[w^{-1}]_0 := \{fw^{-i} \mid f \in A_{di}, i \in \mathbb{N}\}$，其加法和乘法为

$$fw^{-i} + gw^{-j} = (fw^j + gw^i)w^{-i-j}, \qquad (fw^{-i})(gw^{-j}) = f\nu^i(g)w^{-i-j}$$

当 $f \in A_{di}$， $g \in A_{dj}$时。

以下引理对于交换代数而言是众所周知的。

引理 3.3. 若 A 是一个分次代数，且 $z \in RZ(A)_d$，则

$$A[z^{-1}]_0 \cong A^{(d)}/(z-1)$$

作为代数，其中 $A^{(d)} := \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{di}$ 是第 d 个 *Veronese* 代数。

证明。 由于 $z \in A^{(d)}/(z-1)$ 是可逆元，自然满射 $A^{(d)} \to A^{(d)}/(z-1)$ 诱导出一个环同态

$$\phi : A[z^{-1}]_0 = A^{(d)}[z^{-1}]_0 \to A^{(d)}[z^{-1}] \to A^{(d)}/(z-1);\ fz^{-i} \mapsto \bar{f}$$

其中 $f \in (A^{(d)})_i = A_{di}$。另一方面，环同态 $A^{(d)} \to A^{(d)}[z^{-1}]_0$; $f \mapsto fz^{-i}$其中 $f \in (A^{(d)})_i = A_{di}$ 诱导出一个环同态 ψ： $A^{(d)}/(z-1) \to A^{(d)}[z^{-1}]_0 = A[z^{-1}]_0$因为 $z - 1 \mapsto zz^{-1} - 1 = 0$。容易验证， ϕ 和 ψ 互为逆映射。□

例 3.4。 如果 z 是正规但非中心的，上述引理不成立。例如，若$A = k_\lambda[x, y]$, 则 $y \in A_1$ 是正则正规元。由于对于每个 λ， $A[y^{-1}]_0 \cong k[x]$ 而 $A/(y-1) \cong \begin{cases} k[x] & \text{当且仅当 } \lambda = 1, \\ k & \text{当且仅当 } \lambda \neq 1, \end{cases}$ $A[y^{-1}]_0 \cong A/(y-1)$ 当且仅当 $y \in A_1$ 是中心的。

引理 3.5。 若 $F = (f_1, \dots, f_m)$ 是 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle[z]$ 中的齐次序列，且 $A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle[z]/I_F$，则

$$A/(z-1) \cong k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I_{F_z}$$

作为代数。特别地，若 $z \in A_1$ 是正则元，则 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I_{F_z} \cong A[z^{-1}]_0$。

证明。 容易看出，同构

$$k\langle x_1, \dots, x_n\rangle[z]/(z-1) \to k\langle x_1, \dots, x_n\rangle;\ f \to f_z$$

诱导出一个同构

$$A/(z-1) = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle[z]/(f_1, \dots, f_m, z-1) \to k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/((f_1)_z, \dots, (f_m)_z).$$

最后一个断言由引理3.3得出。 □

受启发 由引理 3.5，我们定义分次代数的去齐次化如下 .

定义 3.6 (分次代数的去齐次化)。 设 A 是一个分次代数，且 $w \in RN(A)_1$。我们将 A 关于 w 的去齐次化 定义为 $\mathscr{D}_w(A) := A[w^{-1}]_0$。

注 3.7。 若 $h = x_ix_j - x_jx_i \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle[z]$, 则 $h_z = h$ 属于 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, 因此，对于交换分次代数 $B = k[x_1, \dots, x_n, z]/(f_1, \dots, f_m)$,

$$B/(z-1) \cong k[x_1, \dots, x_n]/((f_1)_z, \dots, (f_m)_z)$$

由引理 3.5，这是交换分次代数去齐次化的通常定义。特别地，如果 $z \in B_1$ 是正则的，则

$$\mathscr{D}_z(B) \cong k[x_1, \dots, x_n]/((f_1)_z, \dots, (f_m)_z)$$

由引理3.3。

注释 3. 8。 在稍后的引理 4.18中，我们将证明，对于分次代数 A 和 $w \in RN(A)_1$，

$$\mathscr{D}_w(A) = A[w^{-1}]_0 \cong A^\nu/(w-1)$$

其中 ν 是 A 的正规化自同构，而 A^ν 是第4.2小节中讨论的扭曲代数，因此我们将 $\mathscr{D}_w(A)$ 与 $A^\nu/(w-1)$ 视为相同。

设 A是一个连通分次代数，且 $f \in RN(A)_d$。典范单射 $A \to A[f^{-1}]$诱导出函子的复合

$$F : \mathrm{GrMod}\, A \to \mathrm{GrMod}\, A[f^{-1}] \to \mathrm{Mod}\, A[f^{-1}]_0;\ M \mapsto M[f^{-1}] \mapsto M[f^{-1}]_0,$$

该复合限制为函子 F：分次模范畴 $A \to$模范畴 $A[f^{-1}]_0$。

引理 3.9 ([18, 命题 4。6])。 设 A 是一个右诺特分次代数，在 k 上由次数 1 的元素有限生成，且 $f \in RN(A)_d$。若 维数$_k A/(f) < \infty$，则上文定义的函子 F: 分次模范畴 $A \to$模范畴 $A[f^{-1}]_0$诱导出拟概形 $_{\mathrm{nc}} A \to \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}} A \to \mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}} A[f^{-1}]_0$ 之间的同构。

一般而言，去齐次化 $\mathscr{D}_w(A)$ 取决于 $w \in RN(A)_1$ 的选择。不过，我们有以下结果。

引理 *3.10.* 设 A, A' 是在 k 上由次数 *1* 的元素有限生成的右诺特连通分次代数，且 *GK* 维数 $A =$ *GK* 维数 $A' = 1$。若 *GrMod* $A \cong$ *GrMod* A' 且 $w \in RN(A)1, w' \in RN(A')_1,$，则 $\mathscr{D}_w(A) \cong \mathscr{D}_{w'}(A')$ 作为代数同构。特别地，$\mathscr{D}_w(A)$ 在同构意义下不依赖于 $w \in RN(A)_1$ 的选择。

证明。 由于 GKdim $A =$GK 维数 $A' = 1$且 $w \in RN(A)_1$，$w' \in RN(A')_1,$，我们有 $\dim_k A/(w) < \infty$且 $\dim_k A'/(w') < \infty$，因此

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}\, \mathscr{D}_w(A) \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A \cong \mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}\, A' \cong \mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}\, \mathscr{D}_{w'}(A')$$

作为拟概形，由引理 3.9 和 [27, 定理 1。4]。由引理 2.2，$\mathscr{D}_w(A) \cong \mathscr{D}_{w'}(A')$ 作为代数。□

根据上述结果，当 GK 维数 $A = 1$时，我们可以从记号 $\mathscr{D}_w(A)$ 中省略下标 w。

定义 3.11 (局部化)。 设 A 是一个分次代数，且 $w \in RN(A)_1$。对于 A中的齐次序列 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_m)$，其中 deg $f_i = d_i$ for $1 \le i \le m$，我们定义

$$F[w^{-1}]_0 := (f_1 w^{-d_1}, \ldots\ldots, f_m w^{-d_m}),$$

这是 $\mathscr{D}_w(A) = A[w^{-1}]_0$ 中的一个序列。

引理 3.12. 设 A 是一个分次代数。若 (f, z) 是 A 中的一个齐次正则正规序列，使得 $f \in RN(A)_d$ 且 $z \in RZ(A)_1,$，那么 $fz^{-d} \in RN(\mathscr{D}_z(A))$ 且 $\mathscr{D}_{\bar{z}}(A/(f)) \cong \mathscr{D}_z(A)/(fz^{-d})$。

证明。设 $\nu \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} A$ 是 $f \in A$ 的正规化自同构。由于 $z \in Z(A)1$, $\nu(z) = z$。对于每个 $r \in A_i$, $rz^{-i}fz^{-d} = rfz^{-i-d} = f\nu(r)z^{-i-d} = fz^{-d}\nu(r)z^{-i}$, $\nu \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} A$ 通过 $\bar{\nu}(rz^{-i}) := \nu(r)z^{-i}$ 诱导出 $\bar{\nu} \in \mathrm{Aut}\ A[z^{-1}]_0$，因此根据引理 2.7，$fz^{-d} \in A[z^{-1}]_0$ 是正规的。如果 $rz^{-i}fz^{-d} = rfz^{-i-d} = 0$ 属于 $A[z^{-1}]_0$，那么 $rf = 0$ 属于 A。由于 $f \in A$ 是右正则的，$r = 0$ 属于 A，故 $rz^{-i} = 0$ 属于 $A[z^{-1}]_0$，因此 fz^{-d} 是右正则的。类似地，我们可以证明 fz^{-d} 是左正则的。如果 fz^{-d} 是 $A[z^{-d}]_0$ 中的可逆元，那么对于某个 $g \in A_e$, $fgz^{-d-e} = fz^{-d}gz^{-e} = 1$，所以 $fg = z^{d+e}$ 属于 A。由于 f, z 是一个正则序列，这不可能，因此 fz^{-d} 不是 $A[z^{-d}]_0$ 中的可逆元。

定义映射 $\phi\colon A[z^{-1}]_0 \to (A/(f))[\bar{z}^{-1}]_0$；$rz^{-i} \mapsto \bar{r}\bar{z}^{-i}$。由于 z 是中心的，

$$\begin{aligned}\phi(r_1z^{-i_1}+r_2z^{-i_2}) &= \phi((r_1z^{i_2}+r_2z^{i_1})z^{-i_1-i_2}) = \overline{r_1z^{i_2}+r_2z^{i_1}}\bar{z}^{-i_1-i_2}\\ &= (\bar{r}_1\bar{z}^{i_2}+\bar{r}_2\bar{z}^{i_1})\bar{z}^{-i_1-i_2} = \bar{r}_1\bar{z}^{-i_1}+\bar{r}_2\bar{z}^{-i_2} = \phi(r_1z^{-i_1})+\phi(r_2z^{-i_2}),\\ \phi(r_1z^{-i_1}r_2z^{-i_2}) &= \phi(r_1r_2z^{-i_1-i_2}) = \overline{r_1r_2}\bar{z}^{-i_1-i_2}\\ &= (\bar{r}_1\bar{r}_2)\bar{z}^{-i_1-i_2} = \bar{r}_1\bar{z}^{-i_1}\bar{r}_2\bar{z}^{-i_2} = \phi(r_1z^{-i_1})\phi(r_2z^{-i_2}),\end{aligned}$$

因此 ϕ 是满射代数同态。对于 $r \in A_i$，若 $r \in (f)$，则 $r = tf$ 对某个 $t \in A_{i-d}$成立，因此 $rz^{-i} = tfz^{-i} = tz^{d-i}fz^{-d} \in (fz^{-d})$。反过来，由于 $fz^{-d} \in A[z^{-1}]_0$是正规元，若 $rz^{-i} \in (fz^{-d})$，则 $rz^{-i} = sz^{-j}fz^{-d} = sfz^{-j-d}$对某个 $s \in A_j$成立，因此 $rz^{j+d-i} = sf \in (f)$。由于 f，$z \in A$是正则序列，$r \in (f)$。由于 $\bar{z} \in A/(f)$ 是正则的，

$$\phi(rz^{-i}) = \bar{r}\bar{z}^{-i} = 0 \Leftrightarrow \bar{r} = 0 \Leftrightarrow r \in (f) \Leftrightarrow rz^{-i} \in (fz^{-d}),$$

因此 $\ker\phi = (fz^{-d}) \lhd A[z^{-1}]_0$，故 ϕ 诱导出一个同构 $A[z^{-1}]_0/(fz^{-d}) \cong (A/(f))[\bar{z}^{-1}]_0$。 □

引理 3.13。设 A 为一个分次代数，$F = (f_1、\ldots\ldots、f_m)$ 为由 A 构成的齐次序列，且$z \in Z(A)_1$。如果 $(F、z)$ 是 A 中的齐次正则正规序列，那么 $F[z^{-1}]_0$ 是 $\mathscr{D}_z(A)$ 中的正则正规序列。

证明。由于 $(f_1、z)$ 是 A 中的齐次正则正规序列，且 $z \in Z(A)1$、$f_1z^{-d_1} \in A[z^{-1}]_0$ 是正则正规元，根据引理 3.12。类似地，由于 $(\bar{f}_2、\bar{z})$ 是 $A/(f_1)$ 中的齐次正则正规序列，且 $\bar{z} \in Z(A/(f_1))1$、$\bar{f}_2\bar{z}^{-d_2} \in A/(f_1)[\bar{z}^{-1}]_0 \cong A[z^{-1}]_0/(f_1z^{-d_1})$ 是正则正规元，根据引理 3.12。重复此过程。□

3.2. **非交换齐次化**。与去齐次化相比，齐次化更为微妙。我们首先介绍自由代数的齐次化。

定义 3.14（自由代数的齐次化）。（1）对于满足 $\deg f = d$ 的 $f \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$，我们定义

$$f^z := f(x_1z^{-1},\ldots,x_nz^{-1})z^d \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle[z]_d.$$

（2）对于 $k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ 中的序列 $F = (f_1,\ldots,f_m)$，我们定义

$$F^z := ((f_1)^z,\ldots,(f_m)^z),$$

这是 $k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle[z]$ 中的一个齐次序列。定义

$$\mathscr{H}^{\dagger,z}(F) := k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle[z]/I_{F^z}.$$

若 $f = \sum_{i=0}^d f_i \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ 满足 $\deg f = d$，其中 $f_i \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle_i$，则 $f^z = \sum_{i=0}^d f_iz^{d-i} \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle[z]_d$。

元素 $z \in Z(\mathscr{H}^{\dagger,z}(F))$ 一般情况下可能不是正则的，如下例所示。

例3.15。设 $F = (x-xy, x^2y)$ 是 $k\langle x,y\rangle$ 中的一个序列。那么 $\mathscr{H}^{\dagger,z}(F) = k\langle x,y\rangle[z]/(xz-xy, x^2y)$。由于 $x^2z = x^2y = 0$ 属于 $\mathscr{H}^{\dagger,z}(F)$，$z$ 不是正则的。

引理 3.16。(1) 对于 $f \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$, $(f^z)_z = f$。

(2) 对于 $f \in k\langle x_1、\ldots\ldots、x_n\rangle[z]_d$，$(f_z)^z z^{d-\deg f_z} = f$。

证明。(1) 由于 z 在 $k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle[z]$ 中是中心的，$x_iz = zx_i$ 因此 $z^{-1}x_i = x_iz^{-1}$。对于每个单项式 $f = x_{i_1}\cdots x_{i_d} \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle_d$，

$$f^z = (x_{i_1}z^{-1}\cdots x_{i_d}z^{-1})z^d = (x_{i_1}\cdots x_{i_d}z^{-d})z^d = x_{i_1}\cdots x_{i_d} = f,$$

因此，对于每个齐次多项式 $f_i \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle_i$，$(f_i)^z = f_i \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$。对于 $f = \sum_{i=0}^d f_i \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$，其中 $f_i \in k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle_i$，满足 $f_d \neq 0$，$(f^z)_z = (\sum_{i=0}^d (f_i)^z z^{d-i})_z = \sum_{i=0}^d f_i = f$。

(2) 对于 $f=\sum_{i=0}^{d} f_i z^{d-i} \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]_d$ 其中 $f_i \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle_i$,

$$(f_z)^z z^{d-\deg f_z} = \left(\sum_{i=0}^{d} f_i\right)^z z^{d-\deg f_z} = \sum_{i=0}^{d} (f_i)^z z^{\deg f_z - i} z^{d-\deg f_z} = \sum_{i=0}^{d} f_i z^{d-i} = f. \qquad \square$$

命题 3.17. (1) 若 $F=(f_1, \ldots, f_m)$ 是 $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$中的一个序列，则

$$\mathscr{H}^{\dagger,z}(F)/(z-1) \cong k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_F.$$

(2) 设 $F=(f_1, \ldots, f_m)$ 是 $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]$中的一个齐次序列，且 $A=k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]/I_F$。若 $z \in RZ(A)_1$, , 则 $\mathscr{H}^{\dagger,\ z}(F_z)=A$。

证明。 (1) 由于 $((f_i)^z)_z = f_i$ 对每个 $i=1, \ldots, m$，由引理 3.16 (1)，可得

$$\mathscr{H}^{\dagger,z}(F)/(z-1) \cong k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_{(F^z)_z} = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_F$$

由引理 3.5。

(2) 记 $f_i = z^{r_i} f_i'$，其中 $r_i \geq 0$ 且 $f_i' \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]$，使得 $z \nmid f_i'$对每个 $i=1, \ldots, m$均成立。若 $f_i' \notin I_F$，则 $r_i > 0$，且 $z^{r_i} f_i' = f_i = 0$属于 A，但 $f_i' \neq 0$属于 A，因此 z不是正则的，这与假设矛盾。由此可知，对每个 $i=1, \ldots, m$，都有 $f_i' \in I_F$，所以 $I_F = I_{F'} \lhd k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]$，其中$F'=(f_1', \ldots, f_m')$。由于 $(f_i)_z=(f_i')_z$，我们得到 $F_z = F_z'$。由引理 3.16 (2)，$(F_z')^z = F'$，因此

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{\dagger,z}(F_z) &= k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]/I_{(F_z)^z} = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]/I_{(F_z')^z} \\ &= k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]/I_{F'} = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]/I_F = A.\end{aligned} \qquad \square$$

引理 3.18. 设 $S=k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I$是一个分次代数，且 $f, f' \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ 满足 $\deg f = \deg f' = d$。则 $\overline{f^z}=\overline{(f')^z}$在 $S[z]$中当且仅当 $f=f'$在 S中。

证明. 若 U是 $I \lhd k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$的一组齐次生成元，则 $S[z]=k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]/(U)$。若 $f^z-(f')^z = f^z-(f')^z = 0$在 $S[z]$中，则

$$f^z - (f')^z = \sum_{i=1}^{m} a_i r_i b_i \in (U) \lhd k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z],$$

其中 $r_i \in U$，且 $a_i, b_i \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z]$ 对所有 i成立。由于

$$f - f' = (f^z)_z - ((f')^z)_z = (f^z - (f')^z)_z = \sum_{i=1}^{m} (a_i)_z r_i (b_i)_z \in I \lhd k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$$

根据引理 3.16 (1), $f-f'=\overline{f-f'}=0$在 S。

反过来, 若 $\overline{f-f'}=f-f'=0$属于 S，则

$$f - f' = \sum_{i=0}^{d_1} (f_i - f_i') \in I \lhd k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$$

其中 $d_1=\deg(f-f')$。由于 I是齐次理想，因此对于每个 $i=0, \ldots, d_1$，都有 $f_i - f_i' \in I$，所以

$$f^z - (f')^z = z^{d-d_1}(f-f')^z = z^{d-d_1} \sum_{i=0}^{d_1} z^{d_i - i}(f_i - f_i') = \sum_{i=0}^{d_1} z^{d-i}(f_i - f_i') \in (U) \lhd k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle[z],$$

因此 $\overline{f^z}-\overline{(f')^z}=\overline{f^z-(f')^z}=0$属于 $S[z]$。 $\square$

设$A=S/I_F$是一个（非分次）代数，其中 S是一个分次代数， F是 S中的一个（非齐次）序列。我们希望定义 A的齐次化

定义 3.1 9（代数的齐次化）. 设 $S=k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I$ 是一个分次代数。

（1）对于 $f \in S$，定义

$$f^{S,z} := \overline{g^z} \in S[z]$$

其中 $g \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ 使得 $\deg\ g = \deg\ f$ 且 $\bar{g} = f$ 属于 S。

(2) 对于 S 中的序列 $F = (f_1, \dots, f_m)$，定义

$$F^{S,z} := (f_1^{S,z}, \dots, f_m^{S,z}),$$

它是 $S[z]$ 中的齐次序列。我们定义一个分次代数

$$\mathscr{H}^z(S,F) := S[z]/I_{F^{S,z}}.$$

若无歧义，我们分别用 f^z、F^z 和 $\mathscr{H}^z(F)$ 代替 $f^{S,z}$、$F^{S,z}$ 和 $\mathscr{H}^z(S,F)$。遗憾的是，分次代数 $\mathscr{H}^z(S,F)$ 取决于 S 和 F 的选择，且满足 $A = S/I_F$；这是应用齐次化技术的主要问题。为本文的目的，我们将在第3.4小节部分解决这一问题。

命题 3.20。对于分次代数 $S = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I_H$ 中的序列 $F = (f_1, \dots, f_m)$，其中 H 是 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ 中的齐次序列，$\mathscr{H}^z(S,F)/(z-1) \cong S/I_F$。

证明。如果 $G = (g_1, \dots, g_m)$ 是 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ 中的一个序列，满足 $\deg\ g_i = \deg\ f_i$，且对于每个 i，$\bar{g}_i = f_i$ 属于 S，那么

$$\mathscr{H}^z(S,F)/(z-1) \cong \mathscr{H}^{\dagger,z}(H,G)/(z-1) \cong k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I_{(H,G)} \cong (k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I_H)/I_F = S/I_F$$

根据命题 3.17 (1)。 □

推论 3.21。设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，F 是 $R[t]$ 中的一个序列，且 $A = R[t]/I_F$.

(1) $\mathscr{H}^z(R[t], F)/(z-1) \cong A$。(2) 如果 F 是齐次的，且 $t \in A_1$ 是正则的，那么 $\mathscr{H}^t(R, F_t) \cong A$。

证明。(1) 是命题 3.20的一个特例。

(2) 证明与命题 3.17 (2) 的证明几乎相同。 □

3.3. **野齐次化**。齐次化代数还有另一种简单直接的方法。

定义 3.22（野齐次化）。（1）对于满足 $\deg\ f = d$ 的 $f \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$，定义

$$f^\vee := f_d \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle.$$

（2）对于 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ 中的一个序列 $F = (f_1, \dots, f_m)$，定义

$$F^\vee := (f_1^\vee, \dots, f_m^\vee),$$

它是 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ 中的一个齐次序列。定义

$$\mathscr{T}^\dagger(F) := k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I_{F^\vee}.$$

引理 3.23. 设 $S = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I$ 是一个分次代数。对于满足 $f^\vee, f'^\vee \notin I$ 的 $f, f' \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$，若 $\bar{f} = \bar{f}'$ 属于 S，则 $\overline{f^\vee} = \overline{(f')^\vee}$ 属于 S。

证明。令 $\deg\ f = d$、$\deg\ f' = d'$。根据假设，$f^\vee = f_d$，$(f')^\vee = f_{d'} \notin I$。若 $\bar{f} = \bar{f}'$in S，则 $d = d'$，且存在 $h \in I_d$ 使得 $f^\vee = f_d = f_{d'} + h = (f')^\vee + h$。 □

定义 3.24 (代数的野性齐次化)。设 $S = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I$ 是一个分次代数。

(1) 对于 $0 \neq f \in S$，定义

$$f^{S,\vee} := \overline{g_d} \in S,$$

其中 $g \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ 使得 $\bar{g} = f$ 属于 S 且 $d = \deg\ f$。

(2) 对于 S中的序列 $F=(f_1,\dots,f_m)$，定义

$$F^{S,\vee}:=(f_1^{S,\vee},\dots,f_m^{S,\vee}),$$

它是 S中的一个齐次序列。我们定义一个分次代数

$$\mathscr{T}(S,F)=S/I_{F^{S,\vee}}.$$

同样，分次代数 $\mathscr{T}(S,\ F)$ 取决于 S和 F的选择，且满足 $A=S/I_F$。若不会引起混淆，我们分别用 $f^\vee$、 $F^\vee$和 $\mathscr{T}(F)$ 代替 $f^{S,\ \vee}$、 $F^{S,\ \vee}$和 $\mathscr{T}(S,\ F)$。

下面的引理很有用。

引理 3.25。 (1) 对于 $k\langle x_1$ 中的序列 $F,\ \dots,x_n\rangle$, $\mathscr{H}^{\dagger,\ z}(F)/(z)\cong\mathscr{T}^\dagger(F)$。

(2) 对于分次代数 $S=k\langle x_1$ 中的序列 $F,\ \dots,x_n\rangle/I$, $\mathscr{H}^z(S,F)/(z)\cong\mathscr{T}(S,F)$。

证明。 对于 (1)，设 $F=(f_1,\dots,f_m)$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{\dagger,z}(F)/(z)=&k\langle x_1,\dots,x_n\rangle[z]/(f_1^z,\dots,f_m^z,z)\\=&k\langle x_1,\dots,x_n\rangle[z]/(f_1^\vee,\dots,f_m^\vee,z)\\\cong&k\langle x_1,\dots,x_n\rangle/(f_1^\vee,\dots,f_m^\vee)=\mathscr{T}^\dagger(F).\end{aligned}$$

(2) 的证明类似。 □

对于序列 F，在实践中，检验 $F^\vee$ 是否为正则的，比检验 F^z 是否为正则的更容易。因此，下面的引理很有用。

引理 3.26。 设 F 是分次代数 $S=k\langle x_1,\dots,x_n\rangle/I$ 中的一个序列。若 $F^\vee$ 在 S 中正规，且 F^z 在 $S[z]$ 中正规，则以下条件等价:

(1) $F^\vee$ 在 S 中是正则的。(2) ($F^\vee,z$) 在 $S[z]$ 中是正则的。(3) (F^z,z) 在 $S[z]$ 中是正则的。

此外，若上述条件之一成立，则 F^z 在 $S[z]$ 中是正则的。

证明。 (1) $\Leftrightarrow$(2) 由引理 2.9可得。(1) $\Leftrightarrow$(3)。由引理 3.25(2)， $S/I_{F^\vee}\cong S[z]/I_{(F^z,z)}$，因此 $F^\vee$在 S中正则，当且仅当（$F^z,\ z$）在 $S[z]$中正则（由引理 2.10）。

此外的部分显然。 □

一般而言，引理 3.26 中最后一个断言的逆命题不成立。

例 3.27。 设 $F=(x^2-y,x^2+y)$ 是 $k[x,y]$ 中的一个序列。那么 $F^z=(x^2-yz,x^2+yz)$ 在 $k[x,y,z]$ 中是正则的，但 $F^\vee=(x^2,x^2)$ 在 $k[x,y]$ 中不是正则的。

3.4. *st*-**等价**。 令人颇为不便的是，即使在交换情形下，（野性）齐次化 $\mathscr{H}^z(S,F)$ ($\mathscr{T}(S,F)$) 也取决于 F 的选择。

例 3.28。 设 $F=(x^2-y,\ x^2+y)$ 和 $F'=(x^2,\ y)$ 是 $k[x,y]$ 中的序列。那么 $k[x,y]/I_F=k[x,y]/I_{F'}$，但 $\mathscr{H}^z(F)=k[x,y,z]/(x^2-yz,\ x^2+yz)\ncong k[x,y,z]/(x^2,\ y)=\mathscr{H}^z(F')$，且 $\mathscr{T}(F)=k[x,y,z]/(x^2)\ncong k[x,y,z]/(x^2,\ y)=\mathscr{T}(F')$。

例 3.29。 即使在 $\deg F=\deg F'=2$ 的情况下，也存在一个（反）例。例如，设 $F=(xy-y,\ xy+y)$ 和 $F'=(y^2-y,\ y^2+y)$ 是 $k[x,y]$ 中的序列。那么 $k[x,y]/I_F=k[x,y]/(y)=k[x,y]/I_{F'}$，但 $\mathscr{H}^z(F)=k[x,y,z]/(xy,\ yz)\ncong k[x,y,z]/(y^2,\ yz)=\mathscr{H}^z(F')$，且$\mathscr{T}(F)=k[x,y,z]/(xy)\ncong k[x,y,z]/(y^2)=\mathscr{T}(F')$。

现在我们 引入一些条件，使得 $\mathscr{H}^z(S,\ F)$ 不依赖于 F 的选择 .

定义 3.30 ([8, 定义 3.1])。 设 S是一个分次代数，而 $F=(f_1,\ldots,f_m)$ $F'=(f'_1,\ldots,f'_m)$ 是 S中的序列。

(1) 若对某个 $(\alpha_{ij})\in \mathrm{GL}_m(k)$ 有 $f'_j=\sum_{i=1}^m \alpha_{ij}f_i$，则记 $F\sim_s F'$。(2) 若对某个 $\phi\in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}S$ 有 $f'_i=\phi(f_i)$，则记 $F\sim_t F'$。(3) 若在 S 中存在序列 F'' 使得 $F\sim_t F''\sim_s F'$，则记 $F\sim_{st} F'$

注 3.31. 设 S 是一个分次代数，且 F，F' 是 S 中的序列。若 $F\sim_{st}F'$，则 $S/I_F\cong S/I_{F'}$，但反之一般不成立。然而，设 F，F' 是 $k[x_1,\ldots,x_n]$ 中次数为 d 的（线性无关）齐次序列（或在 $k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ 中）。则 $F\sim_{st}F'$ 当且仅当作为分次代数有 $k[x_1,\ldots,x_n]/I_F\cong k[x_1,\ldots,x_n]/I_{F'}$（或 $k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle/I_F\cong k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle/I_{F'}$）（见 [8, 注 3.3]）。

引理 3.32 ([8, 引理 3.4]). 对于每个固定的 $m\in\mathbb{N}$，$\sim_s$、$\sim_t$ 和 $\sim_{st}$ 都是集合 S中序列 $(f_1,\cdots,f_m)$ 上的等价关系。

引理 3.33. 设 $F=(f_1,\ldots,f_m)$和 $F'=(f'_1,\ldots,f'_m)$是分次代数 $S=k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle/I$中次数为 d 的序列。

(1) 若 $F\sim_s F'$，则 $\mathscr{H}^z(F)=\mathscr{H}^z(F')$。(2) 若 $F\sim_t F'$，则 $\mathscr{H}^z(F)\cong\mathscr{H}^z(F')$作为分次代数。(3) 若 $F\sim_{st}F'$，则 $\mathscr{H}^z(F)\cong\mathscr{H}^z(F')$作为分次代数。

证明。 (1) 令 $f'_j=\sum_{i=1}^m\alpha_{ij}f_i$for $(\alpha_{ij})\in\mathrm{GL}_m(k)$。由于 deg $f_i=$deg $f'_j=d$，我们有 $(f'_j)^z=\sum_{i=1}^m\alpha_{ij}(f_i)^z$。

(2) 令 $\phi\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}S$ 使得 $f'_i=\phi(f_i)$。则存在 $(\alpha_{ij})\in\mathrm{GL}_n(k)=\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}(k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$，使得 $\phi(x_i)=\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}x_j$。令 $\tilde{\phi}\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}S[z]$ 由 $\tilde{\phi}(x_i)=\phi(x_i)$和 $\tilde{\phi}(z)=z$定义。对于 $f\in S$，

$$\begin{aligned}\phi(f)^z&=f\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{1j}(x_jz^{-1}),\ldots,\sum_{j=1}^n\alpha_{nj}(x_jz^{-1})\right)z^{\deg\phi(f)}\\&=f\left(\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{1j}x_j\right)z^{-1},\ldots,\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{nj}x_j\right)z^{-1}\right)z^{\deg f}=\tilde{\phi}(f^z).\end{aligned}$$

˜这意味着 $\phi:\ \mathscr{H}^z(F)\to\mathscr{H}^z(F')$ 是一个同构。

(3) 这由 (1) 和 (2) 得出。 □

注记 3.34。 类似的结果也适用于野齐次化。设 F,F' 是分次代数 S 中次数为 d 的序列。若 $F\sim_{st}F'$，则 $F^\vee\sim_{st}F'^\vee$ 属于 S，因此 $\mathscr{T}(F)\cong\mathscr{T}(F')$。

引理的逆命题3.33 (3) 即使对交换代数也不成立（参见 [8, 例 5。12]）。

3.5. 强正则正规序列。

定义 3.35。 设 $F=(f_1,\ldots,f_m)$ 是分次代数 S 中的一个序列。

(1) 若 F 和 $F^\vee$ 都是正则的，则称 F 为强正则。(2) 若 F 和 $F^\vee$ 都是正规（分别为中心）的，则称 F 为强正规（分别为强中心）。(3) 若 F 是强正则且强正规（分别为强中心），则称 F 为强正则正规（分别为强正则中心）。

注3.36. (1) 对于 f，$g\in k[x_1,\ldots,x_n]$，若$(f^\vee,\ g^\vee)$是正则序列，则最大公约数$(f^\vee,\ g^\vee)=1$，因此最大公约数$(f,\ g)=1$，故$(f,\ g)$是（强）正则序列，由注2.11。()

2 若 S 不是共 交换且 $f\in S$，那么 $f^\vee$ 可能是正规的，而 f 则不是正规 l.

我们记作

$\mathcal{A}^{\vee}_{n,\ m} := \{S/I_F \mid F = (f_1,\ \ldots\ldots,\ f_m)$ 是 $S \in \mathcal{A}_{n,\ 0}\}/\cong$, $\mathcal{B}^{\vee}_{n,\ m} := \{S/I_F \mid F = (f_1,\ \ldots\ldots,\ f_m$ 中的次数 2 强正则正规序列；是 $S \in \mathcal{B}_{n,\ 0}\}/\cong$. 中的次数 2 强正则序列

按照 [8], ，我们称 R 为 非交换仿射圆锥曲线铅笔（的齐次坐标环），如果 $R \in \mathcal{A}^{\vee}_{2,\ 2}$，且 B 为仿射圆锥曲线铅笔（的齐次坐标环），如果$B \in \mathcal{B}^{\vee}_{2,\ 2}$。

接下来，了解正规化自同构 $\nu \in \mathrm{Aut}\, S$ 是否为正则正规元 $f \in S$ 的分次自同构非常重要，也就是说，是否有 $\nu \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}\, S$。如果 f 是齐次的或中心的，那么 $\nu \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}\, S$。

引理 3.37. 设 S 是一个分次代数，且 $f \in S$ 是正则正规元，使得 $f^{\vee} \in S$ 也是正则正规元。那么，f 的正规化自同构是分次的，当且仅当它与 $f^{\vee}$的正规化自同构相同。

证明. 设 $\nu \in \mathrm{Aut}\, S$ 是 f的正规化自同构， $\nu^{\vee} \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}\, S$ 是 $f^{\vee}$的正规化自同构。若 $\nu \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}(S)$, 则对每个 $g \in S_i$，都有 $\nu(g) \in S_i$ ，因此

$$f^{\vee}\nu^{\vee}(g) = gf_d = (gf)_{d+i} = (f\nu(g))_{d+i} = f^{\vee}\nu(g),$$

其中 $d = \deg f$。由于 $f^{\vee}$是正则的， $\nu^{\vee}(g) = \nu(g)$。 □

引理 3.38. 设 S 是一个连通分次整环，且 $F = (f, g)$ 是一个次数为 d 的强正则正规序列，并且 f 的正规化自同构是分次的。若 $h \in I_F$ 满足次数 $h = d$，则对于某些 $\alpha, \beta \in k$，有 $h = \alpha f + \beta g$。

证明。 由于 F 是正规序列， $I_F = Sf + Sg$，因此对于某个 a，有 $h = af + bg$， $b \in S$。取次数最小的 $a \in S$，使得对于某个 $b \in S$，有 $h = af + bg$。假设 $\deg a \geq 1$。由于 S 是一个整环且 $bg = af - h$， $\deg b = \deg a =: e$。写成 $f = f_d + f'$， $g = g_d + g'$， $a = a_e + a'$， $b = b_e + b'$，使得 $\deg f'$， $\deg g' < d$ 且 $\deg a'$， $\deg b' < e$。由于

$$h = (a_e + a')(f_d + f') + (b_e + b')(g_d + g') = (a_e f_d + b_e g_d) + a_e f' + b_e g' + a' f + b' g,$$

$a_e f_d + b_e g_d = 0$。由于 $F^{\vee} = (f_d, g_d)$ 是正则序列且 $(f_d) = Sf_d$，对于某个 $c \in S$，有 $b_e = cf_d$。由于 $a_e f_d + cf_d g_d = (a_e + c\nu^{-1}(g_d))f_d = 0$ 且 f_d 是正则的， $a_e = -c\nu^{-1}(g_d)$，其中 $\nu \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}\, S$ 是 f_d 的正规化自同构。根据引理 3.37， ν 也是 f 的正规化自同构，

$$\begin{aligned}
(c\nu^{-1}(g') + a')f + (-cf' + b')g &= c\nu^{-1}(g')f - cf'g + a'f + b'g \\
&= cfg' - cf'g + a'f + b'g \\
&= c(f_d + f')g' - cf'(g_d + g') + a'f + b'g \\
&= cf_d g' - c(f - f_d)g_d + a'f + b'g \\
&= -c\nu^{-1}(g_d)(f - f_d) + cf_d g' + a'f + b'g \\
&= a_e f' + b_e g' + a'f + b'g = h.
\end{aligned}$$

由于 $\deg c = e - d$、$\deg(c\nu(g') + a') < e = \deg a$，因此这与 $\deg a$ 最小的假设相矛盾。由此可得 $\deg a$，$\deg b \leq 0$，所以 a， $b \in k$。□

命题 3.39. 设 (f, g) 和 (f', g') 是连通分次整环 S 中次数为 d 的强正则正规序列，且 f 和 f' 的正规化自同构均为分次的。那么 $S/(f, g) = S/(f', g')$ 当且仅当 $(f, g) \sim_s (f', g')$。

证明. 若 $S/(f,g) = S/(f',g')$，则由引理 3.38 可知，对于某些 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha',\beta',\gamma',\delta' \in k$，有 $f' = \alpha f + \beta g, g' = \gamma f + \delta g$ 和 $f = \alpha' f' + \beta' g', g = \gamma' f + \delta' g'$。由于 f,g 线性无关，$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$. □

推论 3.40。设 $F = (f,g)$ 和 $F' = (f',g')$ 是 $d\,in R = k[x_1,\dots,x_n]$ 中次数为 d 的强正则序列。如果 $R/(f,g) = R/(f',g')$，那么 $\mathscr{H}^z(F) = \mathscr{H}^z(F')$。

证明。由命题 3.39，$F \sim_s F'$，因此 $\mathscr{H}^z(F) = \mathscr{H}^z(F')$ 由引理 3.33（1）。 □

引理 3.41。若 $B \in \mathcal{B}_{n+1,\ m}$ 且 $z \in B_1$ 是正则的，则 $\mathscr{D}_z(B) \in \mathcal{B}^{\vee}_{n,\ m}$。

证明。若 $H = (h_1, \dots\dots, h_m)$ 是 $k[x_1,\dots,x_n,z]$ 中次数为 2 的齐次正则序列，使得

$$B = k[x_1,\dots,x_n,z]/I_H \in \mathcal{B}_{n+1,m},$$

于是映射

$$\mathscr{D}_z(B) \to k[x_1,\dots,x_n]/I_{H_z};\ fz^{-\deg f} \mapsto f_z$$

根据引理 3.3 和引理 3.5，这是一个同构。由于 $z \in B_1$ 是正则的，根据引理 3.13，H_z 是 $k[x_1,\dots,x_n]$ 中的次数 2 正则序列。由于对于每个 $i = 1$、……、m，$\deg(h_i)_z = \deg\ h_i = 2$，根据引理 3.16 (2)，$(H_z)^z = H$ 是 $k[x_1,\dots,x_n,z]$ 中的次数 2 齐次正则序列。由于 $((H_z)^z, z) = (H,z)$ 是一个正则序列，根据引理 3.26，$(H_z)^{\vee}$ 是 $k[x_1,\dots,x_n]$ 中的次数 2 正则序列，因此

$$\mathscr{D}_z(B) \cong k[x_1,\dots,x_n]/I_{H_z} \in \mathcal{B}^{\vee}_{n,m}.$$ □

4. Noncommutative quadric hypersurfaces

4.1. 对偶性。设 V是一个有限维向量空间。二次代数 $A = T(V)/(W)$是张量代数 $T(V)$的一个商代数，其中 $W \subset V \otimes V$是一个子空间。A的二次对偶 是二次代数 $A^! := T(V^*)/(W^{\perp})$，其中 V^*是对偶向量空间，$W^{\perp} \subset V^* \otimes V^*$是 W的正交补。

称局部有限连通分次代数 A 为*Koszul*代数，如果平凡模 k_A 具有如下自由分解

$$\cdots \longrightarrow P^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow k_A \longrightarrow 0$$

其中，对于每个 $n \geq 0$，P^n 都是由次数为 n 的元素生成的分次自由右 A-模.

引理 4.1 ([20, 定理 1。2])。设 A 是一个二次代数。

(1) A 是 *Koszul* 当且仅当 $A^!$ 是 *Koszul*。(2) 若 A 是 *Koszul*，则 $H_{A^!}(t) = 1/H_A(-t)$。(3) 若 A 是 *Koszul* 且 $f \in A_2$ 是正则正规元，则 $A/(f)$ 也是 *Koszul*。

引理 4.2 ([21, 命题 5。10])。设 A 是一个诺特连通分次代数。那么，$A \in \mathcal{A}_{n,0}$ 当且仅当 $A^!$ 是 *Frobenius Koszul* 代数，并且 $H_{A^!}(t) = (1+t)^n$。

引理 *4.3* ([20, 推论 *1*.4], [4, 第 5] 节)。设 $S \in \mathcal{A}_{n,0}$。对于每个满足 $A = S/(f) \in \mathcal{A}_{n,1}$ 的 $f \in RN(S)_2$，存在唯一的（相差一个标量）元素 $f! \in RN(A^!)_2$，使得 $S^! = A^!/(f!)$。此外，$f \in RZ(S)_2$ 当且仅当 $f^! \in RZ(A^!)_2$。

引理 4.4. 若 A 是 *Koszul*代数，且 $F = (f_1, \dots, f_m)$ 是次数为 2 的齐次正则正规序列，则 A/I_F 是 *Koszul*代数，并且存在一个齐次正则正规序列 $F^! := (f^!_m, \dots, f^!_1)$，其在 $(A/I_F)^!$ 中的次数为 2，使得 $A^! = (A/I_F)^!/I_{F^!}$。

证明。结论对 $m = 1$ 由引理 4.1 (2) 和引理 4.3成立，一般情形由归纳法可得。 □

设 A 是一个局部有限的 $\mathbb{N}$-分次代数。若 $H_A(t) = b(t)/(1-t)^d$ 对于某个 $b(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 满足$b(1) \neq 0$，则 GK 维数 $A = d$ 由 [24, 推论 2.2]。

引理 4.5。 设 $A = S/(h_1, \ldots, h_m) \in \mathcal{A}_{n,m}$。

(1) A 是一个维数为 $n-m$、戈伦斯坦参数为 $n-2m$且满足 GK 维数 $A = n-m$ 的 *Koszul AS-Gorenstein* 代数。特别地，每个 $A \in \mathcal{A}_{n,n}$ 都是 *Frobenius Koszul* 代数。(2) $A^!$ 是一个维数为 m、戈伦斯坦参数为 $2m-n$且满足 GK 维数 $A^! = m$ 的 *Koszul AS-Gorenstein* 代数。

证明。 由引理 4.1， $A, A^!$ 是 Koszul 代数。由引理 2.10,

$$H_A(t) = (1-t^2)^m/(1-t)^n = (1+t)^m/(1-t)^{n-m},$$

因此 GK 维数 $A = n-m$。由引理 4.1 (3), $H_{A^!}(t) = 1/H_A(-t) = (1+t)^{n-m}/(1-t)^m$，因此 GK 维数 $A^! = m$。

(1) 由于 S 是一个维数为 n 且戈伦斯坦参数为 n的 AS-戈伦斯坦代数， A 由引理 2.16可知，它是一个维数为 $n-m$ 且戈伦斯坦参数为 $n-2m$ 的 AS-戈伦斯坦代数。最后一个结论由引理 2.15得出。

(2) 由于 $S^!$ 是一个维数为 0、戈伦斯坦参数为 $-n$的 AS-戈伦斯坦代数，并且$S^! = A^!/(h_m^!, \ldots, h_1^!)$ 中的 $(h_m^!, \ldots, h_1^!)$ 是$A^!$ 中的一个次数为 2 的齐次正则正规序列，由引理 4.4可知，再由引理 2.16 (1) 可得结论。□

引理 4.6。 设 $A \in \mathcal{A}_{n,m}$。若 $A^!$ 是交换的，则 $A^! \in \mathcal{B}_{n,n-m}$。

证明。 根据引理 4.5的证明和引理 4.1,

$$H_{A^!}(t) = (1+t)^{n-m}/(1-t)^m = (1-t^2)^{n-m}/(1-t)^n.$$

若 $A^!$ 是交换的，则由引理 2.10，对 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 中某个次数 2 的齐次正则序列 $(h_1, \ldots, h_{n-m})$，有 $A^! = k[x_1, \ldots, x_n]/(h_1, \ldots, h_{n-m})$，从而 $A^! \in \mathcal{B}_{n,n-m}$。□

注记 4.7. 设 $A \in \mathcal{A}_{n,m}$。由上述引理可知， $A^!$ 是交换的当且仅当 $A \cong S/I_H$ ，其中 S 是 Clifford 量子多项式代数，且由 [7]， H 是 S 中次数 2 的齐次正则中心序列。

引理 4.8. 设 $A = S/(h_1, \ldots, h_m) \in \mathcal{A}_{n,m}$。则 $A^! \in \mathcal{A}_{n,n-m}$ 当且仅当我们能将序列 $(h_1, \ldots, h_m)$ 延拓为 S 中一个次数 2 的齐次正则正规序列 $(h_1, \ldots, h_m, h_{m+1}, \ldots, h_n)$。特别地，映射 $\mathcal{A}_{n,n} \to \mathcal{A}_{n,0}$; $A \mapsto A^!$ 是良定义的。

证明。若 $A^! = S'/(g_1, \ldots, g_{n-m}) \in \mathcal{A}_{n,n-m}$，其中 $S' \in \mathcal{A}_{n,0}$，且 $(g_1, \ldots, g_{n-m})$ 是 S' 中次数 2 的齐次正则正规序列。那么 $(g_{n-m}^!, \ldots, g_1^!)$ 是 A 中次数 2 的齐次正则正规序列，因此由引理 4.4，$(h_1, \ldots, h_m, g_{n-m}^!, \ldots, g_1^!)$ 是 S 中次数 2 的齐次正则正规序列（使得 $(S')^! = A/(g_{n-m}^!, \ldots, g_1^!) \cong S/(h_1, \ldots, h_m, g_{n-m}^!, \ldots, g_1^!)$）。

反之，若 $(h_1, \ldots, h_m, h_{m+1}, \ldots, h_n)$ 是 S 中次数 2 的齐次正则正规序列，则

$$E := A/(h_{m+1}, \ldots, h_n) = S/(h_1, \ldots, h_m, h_{m+1}, \ldots, h_n) \in \mathcal{A}_{n,n}$$

根据引理 4.5(1)，这是一个 Frobenius Koszul 代数。由于

$$A^!/(h_m^!, \ldots, h_1^!) = E^!/(h_n^!, \ldots, h_{m+1}^!, h_m^!, \ldots, h_1^!)$$

是诺特（Artinian）的， $E^!$ 根据引理 2.16 (1) 是诺特的，因此 $E^! \in \mathcal{A}_{n,\,0}$ 根据引理 4.2，并且 $A^! = E^!/(h_n^!, \ldots, h_{m+1}^!) \in \mathcal{A}_{n,\,n-m}$ 根据引理 4.4。□

引理 4.9。 设 $A \in \mathcal{A}_{n+1,\,n}$。若存在 $w \in RN(A)_1$, , 则 $A^! \in \mathcal{A}_{n+1,\,1}$。

证明。 若 $A = S/(h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{A}_{n+1,\,n}$ 且 $w \in RN(A)_1$, 则 $(h_1, \ldots, h_n, w^2)$ 是次数 2 的齐次正则正规序列，在 S 中，因此 $A^! \in \mathcal{A}_{n+1,\,1}$ 由引理 4.8。□

命题 4.10。 对于 $m=0,\ 1,\ 2$，映射 $\mathcal{A}_{2,\ m}\to\mathcal{A}_{2,\ 2-m}$；$A\mapsto A^!$ 是一种对偶性。特别地，每个 $A\in\mathcal{A}_{2,\ 2}$ 均同构于下列之一

$$k_\lambda[x,y]/(x^2,y^2),\ k_{-1}[x,y]/(xy+x^2,y^2),$$

其中 $0\neq\lambda\in k$。

证明。 若 $A\in\mathcal{A}_{2,\ 0}$，我们可以假设 $A=k_\lambda[x,y]$ 其中 $0\neq\lambda\in k$ 或 $A=k\langle x,\ y\rangle/\ (xy-yx-x^2)$（见例 2.4）。无论哪种情形，$(x^2,\ y^2)$ 是次数 2 的齐次正则正规序列，在 A 中，故 $A^!\in\mathcal{A}_{2,\ 2}$ 由引理 4.8。由此可得 $\mathcal{A}_{2,\ 0}\to\mathcal{A}_{2,\ 2}$；$A\to A^!$ 是良定义的，故其为对偶性，由引理 4.8。

每个 $A\in\mathcal{A}_{2,\ 1}$ 都同构于

$$k[x,y]/(x^2+y^2),\ k_\lambda[x,y]/(x^2),\ k_{-1}[x,y]/(x^2+y^2)$$

由 [8, 命题 3.17] 及其对偶为

$$k_{-1}[x,y]/(x^2-y^2),\ k_{-\lambda^{-1}}[x,y]/(y^2),\ k[x,y]/(x^2-y^2)\in\mathcal{A}_{2,1},$$

因此 $\mathcal{A}_{2,\ 1}\to\mathcal{A}_{2,\ 1}$；$A\mapsto A^!$ 是一个对偶性。 □

备注 4.11。 目前尚不清楚 $\mathcal{A}_{n,0}\to\mathcal{A}_{n,n}$；$S\mapsto S^!$ 是否定义良好，从而使 $\mathcal{A}_{n,0}\to\mathcal{A}_{n,n}$ 构成对偶性。存在许多 $S\in\mathcal{A}_{3,0}$ 使得 $Z(S)_2=\{0\}$（例如，表 4 中的 T 型$_3$ 代数），因此可能存在 $S\in\mathcal{A}_{3,0}$ 使得不存在次数 2 的正规元。若如此，则根据引理 4.8，有 $S^!\notin\mathcal{A}_{3,3}$，所以 $\mathcal{A}_{3,0}\to\mathcal{A}_{3,3}$；$S\mapsto S^!$ 定义不良（不是对偶性）。

例 4.12。 稍微乐观一些，可以期待 $\mathcal{A}_{3,1}\to\mathcal{A}_{3,2}$；$A\mapsto A^!$ 构成对偶性。若

$$S=k\langle x,y,z\rangle/(yz-zy-x^2,zx-xz,xy-yx)\in\mathcal{A}_{3,0},$$

则 $x^2\in S_2$ 是正规元（事实上，除标量倍数外，它是唯一的次数 2 齐次正规元），因此 $A:=S/(x^2)\in\mathcal{A}_{3,1}$。尽管 (y^2,z^2) 在 S 中不是正规序列，但 (x^2,y^2,z^2) 在 S 中是正则正规序列，因此 $S^!\cong k_{-1}[x,y,z]/(yz+x^2,y^2,z^2)\in\mathcal{A}_{3,3}$ 且 $A^!=k_{-1}[x,y,z]/(y^2,z^2)\ \in\mathcal{A}_{3,2}$。

4.2. **扭曲代数**。

定义 4.13（张氏扭曲 [27]）。 设 A 是一个 $\mathbb{Z}$分次代数。 A 上的分次线性自同构序列 $\theta=\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 称为 A 的扭曲系统，如果对于每个 $a\in A_j,b\in A$ 以及每个 $i,j\in\mathbb{Z}$，都有 $\theta_i(a\theta_j(b))=\theta_i(a)\theta_{i+j}(b)$。对于 A的一个扭曲系统 θ，我们将新的分次代数$A^\theta=A$ 定义为一个分次向量空间，其乘法为 $a*b=a\theta_j(b)$，其中 $a\in A_j,b\in A$。

对于分次代数 A 和 $\sigma\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}(A)$，$\{\sigma^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 A的一个扭曲系统，因此我们可以定义$A^\sigma:=A^{\{\sigma^i\}}$。

定理 4.14 ([27, 定理 1。1])。 设 A 是一个分次代数。对于 A的每个扭曲系统 θ，分次模范畴 $A^\theta\cong$分次模范畴 A。

引理 *4.15.* 设 A 是分次代数，$w\in RN(A)_1$，且 $\nu\in Aut^{\mathbb{Z}}A$ 是 w 的正规化自同构。对于每个 $\sigma\in Aut^{\mathbb{Z}}(A)$，若 $\sigma(w)=w$（因此 σ 诱导出 $\sigma\in Aut^{\mathbb{Z}}(A/(w))$），则 $w\in RN(A^\sigma)_1$。特别地，$w\in RZ(A^\nu)_1$。

证明。设 $f\in A_d$。那么 $f*w=f\sigma^d(w)=fw$，且 $w*f=w\sigma(f)$ 意味着 $w\in A_1^\sigma$ 是正则的。另一方面，$f*w=f\sigma^d(w)=fw=w\nu(f)=w*\sigma^{-1}\nu(f)$，因此 $w\in A_1^\sigma$ 是一个正则正规元，其正规化自同构为 $\sigma^{-1}\nu$。由此可知，$w\in A_1^\sigma$ 是中心的，当且仅当 $\sigma=\nu$。□

引理 4.16. 设 A 是一个分次代数，$f\in A$ 是一个齐次正规元。若 $\sigma\in$ 自同构$^{\mathbb{Z}}A$ 满足 $\sigma(f)=\lambda f$，其中 $0\neq\lambda\in k$为某个元素，则 $\bar\sigma\in$ 自同构$^{\mathbb{Z}}(A/(f))$ 满足 $(A/(f))^{\bar\sigma}\cong A^\sigma/(f)$。

证明。设 $\phi\colon A^\sigma \to (A/(f))^{\bar\sigma}, a\mapsto \bar a$，则对每个 $a\in A_i, \overline{b\in A_j}$，有 $\phi(a*b)=a\sigma^i b=a\,\sigma^i(b)=a*b=\phi(a)*\phi(b)$，因此 ϕ 诱导出一个同构 $A^\sigma/(f)\to (A/(f))^{\bar\sigma}$。□

引理 4.17. 对于二次代数 A，存在群同构 $\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A\to \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A^!$；$\sigma\mapsto\sigma^!$使得 $(A^!)^{\sigma^!}\cong(A^\sigma)^!$。

证明。对于 $\sigma\in\mathrm{GL}(V)$，$((\sigma^*\otimes\sigma^*)(\xi))(f)=\xi((\sigma\otimes\sigma)(f))$，其中 $f\in V\otimes V$和 $\xi\in V^*\otimes V^*$，因此$\sigma\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A$ 当且仅当 $(\sigma\otimes\sigma)(W)=W$当且仅当 $(\sigma^*\otimes\sigma^*)(W^\perp)=W^\perp$当且仅当$\sigma^*\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A^!$，故 $\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A\to\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A^!$；$\sigma\mapsto\sigma^!:=(\sigma^*)^{-1}$ 是群同构。

由于 $\xi\in((\sigma\otimes\mathrm{id})(W))^\perp$当且仅当 $((\sigma^*\otimes\mathrm{id})\xi)(f)=\xi((\sigma\otimes\mathrm{id})(f))=0$对每个 $f\in W$都成立，当且仅当 $(\sigma^*\otimes\mathrm{id})\xi\in W^\perp$，$((\sigma\otimes\mathrm{id})(W))^\perp=((\sigma^*)^{-1}\otimes\mathrm{id})(W^\perp)$，因此

$$\begin{aligned}(A^!)^{(\sigma^*)^{-1}}\cong& T(V^*)/(((\sigma^*)^{-1}\otimes\mathrm{id})(W^\perp))\\ =&T(V^*)/(((\sigma\otimes\mathrm{id})(W))^\perp)\\ =&(T(V)/((\sigma\otimes\mathrm{id})(W)))^!\cong(A^\sigma)^!.\end{aligned}$$

□

若 A 是分次代数，$w\in RN(A)_1$ 且 $\sigma\in$ 自同构群$^{\mathbb{Z}}A$ 满足 $\sigma(w)=\lambda w$ 对某个 $0\neq\lambda\in k$成立，则 $\mathscr{D}_w(A^\sigma)$ 定义良好，因为 $w\in RN(A^\sigma)_1$ 根据引理 4.15。

引理 4.18。 设 A 是分次代数，且 $w\in RN(A)_1$ 具有正规化自同构$\nu\in$ 自同构群$^{\mathbb{Z}}A$。对于每个 $\sigma\in$ 自同构群$^{\mathbb{Z}}A$，若 $\sigma(w)=w$ 且 $\sigma\nu=\nu\sigma$，则 $\mathscr{D}_w(A)\cong\mathscr{D}_w(A^\sigma)$ 作为代数相同。特别地，$\mathscr{D}_w(A)\cong A^\nu/(w-1)$。

证明。定义一个映射

$$\varphi:\mathscr{D}_w(A)=A[w^{-1}]_0\to\mathscr{D}_w(A^\sigma)=A^\sigma[w^{-1}]_0;\ fw^{-i}\mapsto fw^{-i}$$

对于 $f\in A_i=A_i^\sigma$。由于 w 在 A^σ 中的正规化自同构是 $\sigma^{-1}\nu$，由引理4.15中的证明可知，

$$\begin{aligned}\varphi(fw^{-i})\cdot\varphi(gw^{-j})=(fw^{-i})*gw^{-j}=f*(\sigma^{-1}\nu)^i(g)w^{-i-j}=f\sigma^i(\sigma^{-1}\nu)^i(g)w^{-i-j}\\ =f\nu^i(g)w^{-i-j}=\varphi(f\nu^i(g)w^{-i-j})=\varphi(fw^{-i}\cdot gw^{-j})\end{aligned}$$

对于 $f\in A_i=A_i^\sigma$，$g\in A_j=A_j^\sigma$，因此我们可以验证 φ 是代数的同构。由引理4.15，$w\in RZ(A^\nu)_1$,因此 $\mathscr{D}_w(A)\cong\mathscr{D}_w(A^\nu)\cong A^\nu/(w-1)$，由引理 3.3。□

由于上述引理，我们将 $\mathscr{D}_w(A)$ 与 $A^\nu/(w-1)$ 视为相同，这一点我们已在注释 3.8中提及。

下面的定理是对非交换中心圆锥曲线进行分类的一项关键结果。

定理 4.19。 对于每个 $A\in\mathcal{A}_{n,\ 1}$ 满足 $w\in RN(A^!)_1$, 的，都存在 $A'\in\mathcal{A}^c_{n,\ 1}$ 满足 $z\in RZ((A')^!)_1$，使得分次模范畴 $A'\cong$ 分次模范畴 A。

证明。令 $\nu\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A^!$ 为 $w\in RN(A^!)_1$的正规化自同构。由引理 4.5，$A^!$ 是维数为 1 的 Koszul AS-Gorenstein 代数；由引理 2.16，$E:=A^!/(w^2)$ 是维数为 0 的 Koszul AS-Gorenstein 代数。由引理 4.3，$E^!/(f)=A$是诺特的，其中 $f:=(w^2)^!\in RN(E^!)_2$；由引理 2.16 (1)，$E^!$ 是诺特的。由引理 2.15，E 是一个 Frobenius Koszul 代数，并且

$$H_{E^!}(t)=1/H_E(-t)=1/(H_{A^!}(-t)(1-t^2))=H_A(t)/(1-t^2)=1/(1-t)^n,$$

$E^!\in\mathcal{A}_n$，根据引理 4.2 可得 0。由于 $\nu(w^2)=w^2$，$\nu\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A^!\cap\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}E$，因此根据引理 4.17，$\nu^!\in\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}A\cap\mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}E^!$，从而对于某个 $0\neq\lambda\in k$，$\nu^!(f)=\lambda f$。另一方面，$(A^{\nu^!})^!\cong(A^!)^\nu$，并且

$$A^{\nu^!}=(E^!/(f))^{\nu^!}\cong(E^!)^{\nu^!}/(f)\cong(E^\nu)^!/(f)=((A^!/(w^2))^\nu)^!/(f)\cong((A^!)^\nu/(w^2))^!/(f)$$

根据引理 4.16 和引理 4.17。由于 $w \in RZ((A^!)^\nu)_1$ 根据引理 4.15， $f \in RZ((E^!)^{\nu^!})_2$ 根据引理 4.3。

由于 $(E^!)^{\nu^!} \in \mathcal{A}_{n,\ 0}$ 根据 [27, 定理 1。3]， $A^{\nu^!} \in \mathcal{A}^c_{n,\ 1}$。根据定理 4.14，分次模范畴 $A^{\nu^!} \cong$ 分次模范畴 A。□

注 4.20。上述证明的一个关键点是证明 $A^{\nu^!} \in \mathcal{A}_{n,\ 1}$。一般而言，$A \in \mathcal{A}_{n,\ 1}$ 和 $\sigma \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} A$ 并不蕴含 $A^\sigma \in \mathcal{A}_{n,\ 1}$，除非 $\sigma \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} S$，如下例所示。

例 4.21 （表 11 中的代数 F_4）。如果 $S = k\langle x,\ y,\ z\rangle/(xy + yx,\ yz - zy,\ zx - xz) \in \mathcal{A}_{3,\ 0}$ 且 $A = S/(x^2) \in \mathcal{A}_{3,\ 1}$，那么不难验证

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} A \setminus \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} S.$$

若 $A^\sigma \in \mathcal{A}_{3,1}$，则对某个 $S' \in \mathcal{A}_{3,0}$，有 $A^\sigma = S'/(f')$，且 $f' \in RN(S')_{2,}$，因此根据引理 4.3，存在 $f'^! \in RN((A^\sigma)^!)_2$。由于 $A^\sigma \cong k\langle x, y, z\rangle/(xy + yx, yz - zy + xz, zx - xz, x^2)$，且 $(A^\sigma)^! \cong k\langle x, y, z\rangle/(xy - yx, yz + zy, zx + xz - yz, y^2, z^2)$，我们可以通过直接计算验证 $RN((A^\sigma)^!)_2 = \emptyset$，因此 $A^\sigma \notin \mathcal{A}_{3,1}$。

注记 4.22。如果我们能够证明 $\mathcal{A}^c_{3,1}$ 与 $\mathcal{A}_{3,1}$ 在分次 Morita 等价意义下相同，那就太好了（见 [22]）。设 $A = S/(f) \in \mathcal{A}_{3,1}$。若存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} S$ 使得 $\sigma(f) = f$，且 σ^2 是 f 的正规化自同构，那么 $S^\sigma \in \mathcal{A}_{3,0}$ 且 $f \in Z(S^\sigma)_{2,}$，因此 $A^\sigma \cong S^\sigma/(f) \in \mathcal{A}^c_{3,1}$，使得 $\mathrm{GrMod}\ A^\sigma \cong \mathrm{GrMod}\ A$（见下例），但我们不知道是否总能找到这样的 σ。

例 4.23。设 $S = k\langle x, y, z\rangle/(xy + yx, yz - zy, zx - xz) = k_{-1}[x, y][z] \in \mathcal{A}_{3,0}$，$f = xy \in RN(S)_2$，和 $A = S/(f)$。由于 f 的正规化自同构是

$$\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathrm{id},$$

$A \in \mathcal{A}_{3,1} \setminus \mathcal{A}^c_{3,1}$。由于

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}} S$$

使得 $\sigma^2 = \nu$ 和 $\sigma(f) = f$，我们看到 $S^\sigma = k\langle x, y, z\rangle/(xy - yx, yz - izy, zx - ixz) \in \mathcal{A}_{3,0}$ 且 $f = xy \in Z(S^\sigma)_{2,}$，因此 $A^\sigma \cong S^\sigma/(f) \in \mathcal{A}^c_{3,1}$，使得分次模范畴 $A^\sigma \cong$ 分次模范畴 A。

4.3. **非交换贝祖定理**。

引理 4.24. 若 $b(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 且 $a(t) = \dfrac{b(t)}{1-t} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$，则对每个 $i \geq$ 次数 $b(t)$，都有 $a_i = b(1)$。

证明。若 $\deg b(t) = d$，使得 $b(t) = \sum_{i=0}^d b_i t^i$，则

$$\begin{aligned} a(t) =& \frac{b(t)}{1-t} = \left(\sum_{i=0}^{d} b_i t^i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} t^i\right) \\ =& b_0 + (b_0 + b_1)t + (b_0 + b_1 + b_2)t^2 + \cdots + (b_0 + b_1 + \cdots + b_d)(t^d + t^{d+1} + \cdots), \end{aligned}$$

因此对每个 $i \geq d$ 都有 $a_i = b_0 + b_1 + \cdots + b_d = b(1)$。 □

引理 4.25. 设 A 是一个局部有限的 $\mathbb{N}$-分次代数，使得 $H_A(t) = {}^{b}(t)\,1-t$ 对某个 $b(t) \in \mathbb{Z}[t]$。如果 $f \in RN(A)_d$，则 GK 维数 $A = 1$ 且 $\dim_k A[f^{-1}]_0 = b(1)$。

证明。由于 $H_A(t) = {}^{b}(t)\,1-t$ 对某个 $b(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 成立，故 GK 维数 $A \leq 1$。由于 $k[f] \subset A$ 且 $f \in A_d$ 是正则的，GK 维数 $A \geq$ GK 维数 $k[f] = 1$。由于 $f \in A_d$ 是正则正规元，

$$A_0 \subset A_d f^{-1} \subset A_{2d} f^{-2} \subset A_{3d} f^{-3} \subset \cdots \subset A[f^{-1}]_0,$$

并且 $A[f^{-1}]_0 = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_{id} f^{-i}$，因此

$$\dim_k A[f^{-1}]_0 = \lim_{i\to\infty} \dim_k A_{id} f^{-i} = \lim_{i\to\infty} \dim_k A_{id} = b(1)$$

根据引理 4.24。 □

定理 4.26（广义贝祖定理）。设 $A = S/(h_1, \ldots, h_{n-1})$ 是一个非交换完全交，其中 $S \in \mathcal{A}_{n,0}$。若 $f \in RN(A)_d$，则 维数$_k$ $A[f^{-1}]_0 = \prod_{i=1}^{n-1}$次数 h_i。

证明。若 $\deg h_i = d_i$，则

$$H_A(t) = (1-t^{d_1})\cdots(1-t^{d_{n-1}})H_S(t) = \frac{(1-t^{d_1})\cdots(1-t^{d_{n-1}})}{(1-t)^n} = \frac{\sum_{i=0}^{d_1-1} t^i \cdots \sum_{i=0}^{d_{n-1}-1} t^i}{1-t} =: \frac{b(t)}{1-t},$$

因此 $\dim_k A[f^{-1}]_0 = b(1) = d_1 \cdots d_{n-1}$ 根据引理 4.25。 □

定理 4.27 (仿射贝祖定理)。设 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ 是 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$中的一个序列。若 $F^\vee$ 在 R 中是正则的（例如，若 F在 R中是强正则的），则 $\dim_k R/I_F = \prod_{i=1}^n \deg f_i$。

证明。假设 $F^\vee$是 R中的正则序列。根据引理 3.26，(F^z, z) 在 $R[z]$中是正则的，因此

$$\dim_k R/I_F = \dim_k \mathscr{D}_z(\mathscr{H}^z(F)) = \dim_k \mathscr{H}^z(F)[z^{-1}]_0 = \prod_{i=1}^n \deg(f_i)^z = \prod_{i=1}^n \deg f_i$$

根据推论 3.21(2)、引理 3.5 和定理 4.26。 □

结合注记 2.11，可得以下结果。

推论 4.28。若 $f, g \in k[x, y]$ 满足 最大公约数$(f^\vee, g^\vee) = 1$，则 $\dim_k k[x, y]/(f, g) = \deg f \deg g$。

引理 4.29 ([8, 引理 5.5])。若 $B \in \mathcal{B}_{n,n-1}$，则存在 $z \in RZ(B)_1$，使得 $\mathscr{D}(B)$ 有定义。

引理 4.30。若

$$B = k[x_1, \ldots, x_n]/(h_1, \ldots, h_{n-1})$$

是一个完全交，则 $\mathscr{D}(B)$ 是一个 $\prod_{i=1}^{n-}$ 维数 h_i 维 *Frobenius* 代数 *a.*

证明。由定理 4.26，$\dim_k \mathscr{D}(B) = \prod_{i=1}^{n-1} \deg h_i$。由于 B 是完全交，B 是分次 Gorenstein 环。对于每个 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\ \mathscr{D}(B)$，存在 B 的一个齐次素理想 $\mathfrak{n}$，使得 $\mathscr{D}(B)_{\mathfrak{m}} \cong B_{(\mathfrak{n})}$，因此 $\mathscr{D}(B)_{\mathfrak{m}}$ 是一个 Kdim $\mathscr{D}(B)_{\mathfrak{m}}$ =Kdim $\mathscr{D}(B) = 0$ 维的局部 Gorenstein 环，故 $\mathscr{D}(B)_{\mathfrak{m}}$ 是自内射的。由于 $\mathscr{D}(B)$ 是 Artinian，$\mathscr{D}(B) \cong \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}\ \mathscr{D}(B)} \mathscr{D}(B)_{\mathfrak{m}}$ 是 Frobenius。□

注 4.31. 设 $B = k[x_1, \ldots, x_n]/(h_1, \ldots, h_{n-1})$ 为完全交。由于存在自然同构 $\phi\colon X := \mathrm{Proj}\ B \to \mathrm{Spec}\ \mathscr{D}(B) =: Y$, $\mathcal{O}_{X,p} \cong B_{(\mathfrak{m}_p)} \cong \mathscr{D}(B)^{\mathfrak{m}_{\phi(p)}}$ 对每个$p \in X$，且 $\mathscr{D}(B) \cong \prod_{q\in Y} \mathscr{D}(B)^{\mathfrak{m}_q}$,

$$\sum_{p\in X} \dim_k \mathcal{O}_{X,p} = \sum_{p\in X} \dim_k B_{(\mathfrak{m}_p)} = \sum_{q\in Y} \dim_k \mathscr{D}(B)_{\mathfrak{m}_q} = \dim_k \mathscr{D}(B) = \prod_{i=1}^{n-1} \deg h_i$$

由定理 4.26。特别地，若 $B=k[x,y,z]/(f,g)$，$C=\mathrm{Proj}\ k[x,y,z]/(f)$ $D=\mathrm{Proj}\ k[x,y,z]/(g)$，则对 $p\in\mathbb{P}^2$，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,p}/(f,g)\cong\begin{cases}\mathcal{O}_{X,p} & p\in X\\ 0 & p\notin X\end{cases}$，因此

$$C\cdot D:=\sum_{p\in\mathbb{P}^2}\dim_k\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,p}/(f,g)=\sum_{p\in X}\dim_k\mathcal{O}_{X,p}=\deg f\deg g,$$

从而得到通常的贝祖定理。

4.4. **代数** $C(A)$。下文定义的代数 $C(A)$对于研究非交换二次超曲面 $A\in\mathcal{A}_{n,1}$很重要。

定义 4.32。若 $A=S/(f)\in\mathcal{A}_{n,1}$，则定义 $C(A):=A^!{}[(f^!)^{-1}]_0$。

从定义中看不出来，但下面的引理表明，$C(A)$ 与 $S\in\mathcal{A}_{n,0}$及满足 $A=S/(f)$ 的 $f\in RN(S)_2$ 的选取无关。

引理 4.33 ([6, 引理 5.3 (2)])。对于 A，$A'\in\mathcal{A}_{n,1}$，若 分次模范畴 $A\cong$分次模范畴 A'，则 $C(A)\cong C(A')$作为代数。

引理 4.34。如果 A 是 AS-戈伦斯坦代数，那么 $\mathrm{id}(\mathcal{A})\le\mathrm{id}(A)-1$。

证明。如果 $\mathrm{id}(A)=d$，那么根据经典塞尔对偶性 [26, 定理 2.3]，对于每个 $\mathcal{M}\in$尾模范畴 A 以及每个 $i\ge d$，都有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{A})\cong\mathrm{Ext}^{d-1-i}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{M}(-\ell))^*=0$，其中 ℓ 是 A的戈伦斯坦参数，因此 $\mathrm{id}(\mathcal{A})\le d-1$。□

引理 4.35。如果 A 是一个满足 $\mathrm{id}(A)=$GK 维数 $A=1$的 AS-戈伦斯坦代数，并且 $f\in RN(A)_d$，那么$A[f^{-1}]_0$ 是自内射代数。

证明。由引理 3.9，分次模范畴 $A\to$模范畴 $A[f^{-1}]_0$；$M\mapsto M[f^{-1}]_0$诱导同构 $\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A\to\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}A[f^{-1}]_0$，即一个等价函子 尾模范畴 $A\to$模范畴 $A[f^{-1}]_0$将 $\mathcal{A}$映射到 $A[f^{-1}]_0$，因此 $\mathrm{id}\ A[f^{-1}]_0=\mathrm{id}\ \mathcal{A}=\mathrm{id}\ A-1=0$ 由引理 4.34。□

Theo注 4.36. 如果 $A\in\mathcal{A}_{n,1}$，那么 $C(A)$ 是一个 2^{n-1} 维自内射代数 .

证明。根据引理 4.5 (2)，$A^!$ 是一个 GK 维数为 $A^!=$ 的 AS-戈伦斯坦代数，因此由引理 4.35 可知 $C(A)$ 是自内射的。由于 $H_A(t)=(1-t^2)/(1-t)^n=(1+t)/(1-t)^{n-1}$，$H_{A^!}(t)=(1+t)^n/(1-t)$，所以由引理 4.25 可得 $\dim_k C(A)=\dim_k A^!{}[f^{-1}]_0=2^{n-1}$。□

注 4.37。文献 [4, 的命题 4.5、4.6、5.3]（另见 [5, 引理 2.6]）证明了在 $f\in Z(S)_2$ 的情况下，$C(A)$ 是自内射的。

引理 4.38. 设 $A\in\mathcal{A}_{n,1}$。若 $RN(A^!)_1\neq\emptyset$，则 $C(A)\cong\mathscr{D}(A^!)$ 作为代数。

证明. 由于 GK 维数 $A^!=1$（由引理 4.5 (2)），$\mathscr{D}(A^!)$ 由引理 3.10 是良定义的。由于 $\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}C(A)\cong\mathrm{Proj}_{\mathrm{nc}}A^!\cong\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}}\mathscr{D}(A^!)$ 作为拟概形，$C(A)\cong\mathscr{D}(A^!)$ 作为代数，由引理2.2。□

引理 4.39. 对于 $B,B'\in\mathcal{B}_{3,2}$，$B\cong B'$作为分次代数，当且仅当 $\mathscr{D}(B)\cong\mathscr{D}(B')$作为代数。

证明. 由引理 3.10，$B\cong B'$蕴含 $\mathscr{D}(B)\cong\mathscr{D}(B')$。由引理 4.30。$\mathscr{D}(B)$ 是一个 4 维交换弗罗贝尼乌斯代数。由于 $\#(\mathcal{B}_{3,2})=6$（参见 [7, 注 3.29]），且恰好有 6 个 4 维交换弗罗贝尼乌斯代数的同构类（参见 [5, 推论 4.10]），结论成立。□

定理 4.40。设 $A,A'\in\mathcal{A}_{3,1}$ 使得 $A^!,A'^!$ 是交换的。那么 $A\cong A'$ 作为分次代数，当且仅当 $C(A)\cong C(A')$ 作为代数。

证明。由于 $A^!, A'^! \in \mathcal{B}_3$,2 根据引理 4.6， $\mathscr{D}(A^!)$ $\mathscr{D}(A'^!)$ 根据引理 4.29 是良定义的，因此 $A \cong A'$ 作为分次代数，当且仅当 $A^! \cong A'^!$作为分次代数；根据引理 4.39，当且仅当 $\mathscr{D}(A^!) \cong \mathscr{D}(A'^!)$ 作为代数；根据引理 4.38，当且仅当 $C(A) \cong C(A')$ 作为代数。□

引理 4.41. 设 S 是一个分次代数， $f = \sum f_i \in S$ 是一个次数为 d 的正规元，其中 $f_i \in S_i$。若存在 $\nu \in$ 自同构$^{\mathbb{Z}}(S)$ 使得 $gf = f\nu(g)$ 对 $g \in S$ 成立，则存在 $gf_i = f_i\nu(g)$ ，使得 f_i 对每个 $i \in \mathbb{Z}$ 都是正规元。在这种情况下， $f^z \in S[z]_d$ 也是正规元。此外，若 $f \in Z(S)$，则 $f^z \in Z(S[z])$。

证明。由于 $\nu \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}(S)$，对每个 $g_j \in S_j$, $\nu(g_j) \in S_j$，因此 $g_j f_i = (g_j f)_{i+j} = (f\nu(g_j))_{i+j} = f_i\nu(g_j)$。由此可得，对 $g \in S$， $gf_i = f_i\nu(g)$，故根据引理 2.7 (1)， f_i 是一个正规元。由于 $f^z = \sum_{i=0}^{d} f_{d-i}z^i$,

$$gf^z = g\sum_{i=0}^{d} f_{d-i}z^i = \sum_{i=0}^{d} f_{d-i}\nu(g)z^i = \sum_{i=0}^{d} f_{d-i}z^i\nu(g) = f^z\nu(g)$$

对于 $g \in S$。对于 $h = \sum a_i z^i \in S[z]$ ，其中 $a_i \in S$,

$$hf^z = \left(\sum a_i z^i\right) f^z = \sum a_i f^z z^i = \sum f^z \nu(a_i) z^i = f^z \left(\sum \nu(a_i) z^i\right) = f^z \bar{\nu}(h)$$

其中 $\bar{\nu} \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}}\, S[z]$ 定义为 $\bar{\nu}(g) = \nu(g)$，对于 $g \in S$ 以及 $\bar{\nu}(z) = z$，所以 $f^z \in S[z]$ 根据引理 2.7 (1)，是一个正规元。如果 $f \in Z(S)$，那么我们可以取 $\nu = \mathrm{id}$，使得 $\bar{\nu} = \mathrm{id}$，因此 $f^z \in Z(S[z])$。□

定理 4.42。设 $S = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/I$ 是一个分次代数，且 $F = (f_1, \ldots, f_m)$ 是一个强正则正规序列，它要么是中心的，要么是齐次的。

(1) F^z 在 $S[z]$ 中是正规的。(2) (F^z, z) 在 $S[z]$ 中是一个齐次正则正规序列。(3) 若 $S \in \mathcal{A}_{m,0}$，则 $E = S/I_F$ 是一个维数为 $\dim_k E = \prod_{i=1}^{m}$、次数为 $\deg f_i$ 的自内射代数。

证明。(1) 若 F 在 S中是中心的，那么 F^z 在 $S[z]$ 中是中心的，由引理 4.41，因此

$$\overline{(f_i)^z} \in Z(S[z]/((f_1)^z, \ldots, (f_{i-1})^z).$$

若 F是齐次的，那么 $f_i \in S/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ 的正规化自同构是分次的，因此

$$\overline{(f_i)^z} \in S/(f_1, \ldots, f_{i-1})[z] = S[z]/((f_1)^z, \ldots, (f_{i-1})^z)$$

根据引理 4.41，是正规的。在这两种情况下， F^z 在 $S[z]$中都是正规的。

(2) 这由 (1) 和引理 3.26得出。

(3) 若 $S \in \mathcal{A}_m$， 0，则根据 (2) 和引理 2.5， $\mathscr{H}^z(F)$ 是一个非交换完全交。因此，根据引理 2.10 和引理 2.16（见引理 4.5 (1) 的证明）， $\mathscr{H}^z(F)$ 是一个 AS-戈伦斯坦代数，其 id($\mathscr{H}^z(F)$) 为 $=$GK 维数 $\mathscr{H}^z(F) = 1$，所以根据命题 3.20、引理 3.5 和引理 4.35， $E \cong \mathscr{D}_z(\mathscr{H}^z(F))) \cong \mathscr{H}^z(F)[z^{-1}]_0$ 是自内射的。根据定理 4.26，$\dim_k E = \dim_k \mathscr{H}^z(F)[z^{-1}]_0 = \prod_{i=1}^{m} \deg f_i$。□

例 4.43。设 $f = x^2 - y, g = xy \in k[x, y]$。由于 $k[x, y]/(f) \cong k[x]$ 是一个整环，(f, g) 是一个次数 2 的正则序列，但由于 $f^\vee = x^2, g^\vee = xy$，$(f, g)$ 不是强正则序列，因此 $E = k[x, y]/(f, g) \notin \mathcal{A}^\vee_{2,2}$。尽管 $E \cong k[x]/(x^3)$ 是 Frobenius，$\dim_k E = 3$。

4.5. **非交换仿射圆锥曲线铅笔**。为方便读者，我们回顾 [8] 中的一些结果。

引理 4.44 ([8, 推论 3。23])。 $E \in \mathcal{A}^\vee_{2,2}$ 是交换的，当且仅当 $E \in \mathcal{B}^\vee_{2,2}$。

引理 *4.45* （[8, 推论 *5*.11]） 。设 $E = S/(f, g)$ $E' = S'/(f', g') \in \mathcal{A}^\vee_{2,2} \setminus \mathcal{B}^\vee_{2,2}$，其中 $S = k\langle x, y\rangle/(h)$ $S' = k\langle x, y\rangle/(h') \in \mathcal{A}_{2,0}$。那么 $E \cong E'$ 当且仅当 $(f, g, h) \sim_{st} (f', g', h')$ 属于 $k\langle x, y\rangle$。

TABLE 2. 代数 $\mathcal{A}^{\vee}_{2,2}$.

交换的
$k[x,y]/(x^2-1,y^2-1)$, $k[x,y]/(x^2-y-1,y^2-1)$, $k[x,y]/(x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}y-1,y^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x-1)$, $k[x,y]/(x^2,\ y^2-1)$,$k[x,y]/(x^2,\ y^2-x)$,$k[x,y]/(x^2,\ y^2)$
非交换
$k_{-1}[x,y]/(x^2+1,y^2+1)$, $k_{-1}[x,y]/(x^2,y^2+1)$, $k_{-1}[x,y]/(x^2+yx,y^2)$, $k_{\lambda}[x,y]/(x^2,y^2)$ (其中 $\lambda\neq 0,1$)

定理 4.46 ([8, 推论 5.13])。 中的每个代数 $\mathcal{A}^{\vee}_{2,\ 2}$ 都与表 2 中列出的某个且仅有一个代数同构，其中 $k_{\lambda}[x,y]/(x^2,\ y^2)\ \cong k_{\lambda'}[x,y]/(x^2.y^2)$ 当且仅当 $\lambda'=\lambda^{\pm 1}$。

推论 *4.47*。对于每个满足 $E=S/(f,g)\in\mathcal{A}^{\vee}_{2},2$ 且 $S=k\langle x,y\rangle/(h)\in\mathcal{A}_{2},0$ 的 $E=S/$，存在 $S'=k\langle x,y\rangle/(h')\in\mathcal{A}_{2},0$，以及一个次数 2 的齐次或中心强正则正规序列 (f',g')，位于 S' 中（使得 $S'/(f',g')\in\mathcal{A}^{\vee}_{2},2$），从而 $(f,g,h)\sim_{st}(f',g',h')$ 于 $k\langle x,y\rangle$。

证明。 根据上表，若 E 不是交换的，且若(f,g)不是齐次序列，则$(f,g)=(x^2+1,y^2+1),(x^2,y^2+1)$根据 [8, 引理 3.15 (4)]是中心序列。 □

5. MAIN RESULTS

在本节中，我们给出非交换中心圆锥曲线在同构意义下的完整分类。设

$$\mathcal{A}^{w}_{3,1}:=\{A\in\mathcal{A}^{c}_{3,1}\mid RN(A^{!})_1\neq\emptyset\}/\cong,$$
$$\mathcal{A}^{z}_{3,1}:=\{A\in\mathcal{A}^{c}_{3,1}\mid RZ(A^{!})_1\neq\emptyset\}/\cong.$$

在此记号下，对于 $A\in\mathcal{A}^{c}_{3,1}$, $A\in\mathcal{A}^{w}_{3,1}$ 当且仅当 $\mathscr{D}(A)$ 由引理 3.10 良定义。

我们将首先证明在$\mathcal{A}^{\vee}_{2,2}$ 与$\mathcal{A}^{z}_{3,1}$之间存在一个双射。

定理 5.1. 设 $F=(f,g)$ $F'=(f',g')$ 是次数为2 的强正则正规序列，分别在$S,S'\in\mathcal{A}_{2,0}$ 中，使得 $E=S/I_F$, $E'=S'/I_{F'}\in\mathcal{A}^{\vee}_{2,2}$。

(1) $\mathscr{H}^{z}(S,F)\in\mathcal{A}_{3,\ 2}$.(2) 若 $E\cong E'$ 作为代数，则 $\mathscr{H}^{z}(S,F)\cong\mathscr{H}^{z}(S',F')$ 作为分次代数。(3) 映射

$$\mathscr{H}^{z}:\mathcal{A}^{\vee}_{2,2}\to\mathcal{A}_{3,2};\ E=S/I_F\mapsto\mathscr{H}^{z}(E):=\mathscr{H}^{z}(S,F),\tag{5.1}$$

是良定义的，其限制为 $\mathscr{H}^{z}:\ \mathcal{B}^{\vee}_{2,\ 2}\to\mathcal{B}_{3,\ 2}$，并且 $\mathscr{D}_z(\mathscr{H}^{z}(E))\cong E$ 对于 $E\in\mathcal{A}^{\vee}_{2,\ 2}$。

证明。 (1) 根据引理 3.33 和推论4.47，我们可以假设 F 是齐次序列或中心序列。根据引理 2.5 和定理 4.42，$\mathscr{H}^{z}(S,\ F)=S[z]/I_{F^z}\in\mathcal{A}_{3,\ 2}$。

(2) 若 E是交换的，则根据引理 E, $E'\in\mathcal{B}^{\vee}_{2,\ 2}$4.44，因此 $\mathscr{H}^{z}(F)$ $\mathscr{H}^{z}(F')\in\mathcal{B}_{3,\ 2}$。由于

$$\mathscr{D}_z(\mathscr{H}^{z}(F))\cong E\cong E'\cong\mathscr{D}_z(\mathscr{H}^{z}(F'))$$

作为代数，由命题 3.20， $\mathscr{H}^{z}(F)\cong\mathscr{H}^{z}(F')$ 作为分次代数，由引理 4.39。

若 E不是交换的，则 $E,E'\in\mathcal{A}^{\vee}_{2,2}\setminus\mathcal{B}^{\vee}_{2},2$，因此 $E\cong E'$ 当且仅当 $(f,g,h)\sim_{st}(f',g',h')$ 在 $k\langle x,y\rangle$ 其中 $S=k\langle x,y\rangle/(h)$ $S'=k\langle x,y\rangle/(h')\in\mathcal{A}_{2},0$，根据引理 4.45。由引理 3.33，$\mathscr{H}^{z}(S,F)\cong\mathscr{H}^{z}(S',F')$。

(3) 映射 $\mathscr{H}^{z}:\mathcal{A}^{\vee}_{2,2}\to\mathcal{A}_{3,2}$ 根据 (2) 定义良好，且 $\mathscr{D}_z(\mathscr{H}^{z}(E))\cong E$ 由命题3.20得出。 □

注记 5.2. 设 $F=(f_1,\dots,f_n)$ 是 $k[x_1,\dots,x_n]$ 中次数为 ≥ 2 的一个序列，且

$$E=k[x_1,\dots,x_n]/I_F.$$

若 $F^\vee$ 在 $k[x_1,\dots,x_n]$ 中是正则的，且 $\dim_k E=2^n$，则根据定理 4.27，$\prod_{i=1}^n \deg f_i=\dim_k E=2^n$，因此对每个 $i=1$，...，n，都有 $\deg f_i=2$。特别地，若 $k[x,y]/(f,g)$ 是一个 4 维代数，满足 $\deg f$、$\deg g\geq 2$，且 $\gcd(f^\vee,g^\vee)=1$，则根据注 2.11，$(f^\vee,g^\vee)$ 是一个正则序列，因此 $\deg f=\deg g=2$，从而根据注 3.36，$k[x,y]/(f,g)\in\mathcal{B}_2^\vee$,2。

定理 5.3。令 $A=S/(f)\in\mathcal{A}_{3,\ 1}$。若 $A^!$ 是交换的，则 $C(A)\in\mathcal{B}_{2,\ 2}^\vee$，且 $\mathscr{H}^z(C(A))^!\cong A$.

证明。由引理 4.6，得 $A^!\in\mathcal{B}$3,2。由于根据引理 3.41 和引理 4.38，$C(A)\cong\mathscr{D}(A^!)\in\mathcal{B}_2^\vee$,2，且由定理 5.1，$\mathscr{H}^z(C(A))\in\mathcal{B}$3,2。由命题 3.20，$\mathscr{D}(\mathscr{H}^z(C(A)))\cong C(A)\cong\mathscr{D}(A^!)$；根据引理 4.39，$\mathscr{H}^z(C(A))\cong A^!$，因此 $\mathscr{H}^z(C(A))^!\cong A$。□

引理 5.4。设 A 是一个分次代数，且 $z\in RZ(A)_1$。若 $\mathscr{D}_z(A)$ 是交换的，则 A 是交换的。特别地，对于 $A\in\mathcal{A}_{3,1}^z$，若 $C(A)$ 是交换的，则 $A^!$ 是交换的。

证明。对于任意齐次元素 $f,g\in A$，若 $\mathscr{D}_z(A)$ 是交换的，则

$$fgz^{-\deg f-\deg g}=(fz^{-\deg f})(gz^{-\deg g})=(gz^{-\deg g})(fz^{-\deg f})=gfz^{-\deg f-\deg g},$$

因此 $fg=gf$。

特别地，对于 $A\in\mathcal{A}_{3,\ 1}^z$，若 $C(A)\cong\mathscr{D}_z(A^!$由引理 4.38可知是交换的，则 $A^!$ 是交换的。□

Let

$$\mathcal{F}_2:=\{\text{4-dimensional Frobenius algebras}\}/\cong.$$

对于两个分次代数 A，A'，我们用 $A\sim A'$ if GrMod $A\cong$ GrMod A' 表示。由引理 4.33、定理 4.36 和例 2.14可知，映射 $C:\mathcal{A}_{3,\ 1}\to\mathcal{F}_2$；$A\mapsto C(A)$ 以及 $C:\mathcal{A}_{3,\ 1}/\sim\to\mathcal{F}_2$；$A\mapsto C(A)$ 定义良好，并使下图

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F}_2 \\ & \overset{C}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle \bar{C}} \\ \mathcal{A}_{3,1} & \xrightarrow[\pi]{} & \mathcal{A}_{3,1}/\sim \end{array}$$

交换，其中 π 是自然投影。以下是 [8]的主要结果之一。

定理 5.5 ([8, 定理 5.10])。$\mathcal{A}_{2,\ 2}^\vee=\mathcal{F}_2$。

定理 5.6. (1) 对于 $E\in\mathcal{A}_{2,\ 2}^\vee$，$\mathscr{H}^z(E)^!\in\mathcal{A}_{3,\ 1}^z$ 以及 $C(\mathscr{H}^z(E)^!)\cong E$。

(2) 映射

$$\nabla:\mathcal{A}_{2,2}^\vee\to\mathcal{A}_{3,1}^z;\ E\mapsto\nabla(E):=\mathscr{H}^z(E)^!. \tag{5.2}$$

是良定义的，这使得下图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_{2,2}^\vee & \xleftarrow{=} & \mathcal{F}_2 & & \\ {\scriptstyle\nabla}\downarrow & \overset{C}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle\bar{C}} & & \\ \mathcal{A}_{3,1}^z & \xrightarrow[\pi]{} & \mathcal{A}_{3,1}^z/\sim & & \end{array}$$

交换。

证明。 (1) 根据定理 4.42和定理 5.1， $\mathscr{H}^z(E) = S[z]/(f^z, g^z) \in \mathcal{A}_{3,2}$ 以及 (f^z, g^z, z^2) 是 $S[z]$ 中次数 2 的正则正规序列。根据引理 4.8， $\mathscr{H}^z(E)^! \in \mathcal{A}^z_{3,1}$，因此

$$C(\mathscr{H}^z(E)^!) \cong \mathscr{D}_z(\mathscr{H}^z(E)) \cong E$$

根据命题 3.20、引理4.38。

(2) 这由 (1)、定理 5.1 和定理5.5得出。 □

定理 5.7。 (1) 映射 $\Delta: \mathcal{A}^z_{3,1} \to \mathcal{A}^\vee_{2,2}$； $A \mapsto \mathscr{D}_z(A^!)$ 定义良好。(2) $\nabla: \mathcal{A}^\vee_{2,2} \to \mathcal{A}^z_{3,1}$ 是一个双射，其逆映射为 Δ。

证明。(1) 对于 $A \in \mathcal{A}^z_{3,1}$, $\mathscr{D}_z(A^!) \cong C(A)$，由引理 4.38 可知，因此根据定理 5.6 (2)， Δ 定义良好。(2) 对于 $E \in \mathcal{A}^\vee_{2,2}$, $\Delta(\nabla(E)) \cong \mathscr{D}_z(\mathscr{H}^z(E)) \cong E$ ，由定理 5.1 (3) 可知，因此只需证明对于 $A \in \mathcal{A}^z_{3,1}$，有$\nabla(\Delta(A)) \cong \mathscr{H}^z(\mathscr{D}_z(A^!))^! \cong A$ 。如果 $\mathscr{D}_z(A^!) \cong C(A)$ 是交换的，那么根据引理 5.4， $A^!$ 也是交换的，因此由定理 5.3 可得 $A^! \cong \mathscr{H}^z(\mathscr{D}_z(A^!))$。另一方面，根据分类（定理 6.15），只有 5 类代数（按同构计为 4 个代数和 1 个代数组成的族）$A \in \mathcal{A}^z_{3,1}$，使得 $C(A) \cong \mathscr{D}_z(A^!)$ 不交换。对于每个这样的 A，我们可以通过直接计算验证 $A^! \cong \mathscr{H}^z(\mathscr{D}_z(A^!))$（见下一个例子）。□

例 5.8 （表 6 中的代数 A_2）。 若 $A = k\langle x, y, z\rangle/(yz+zy, zx+xz, xy-yx, x^2+y^2+z^2)$，则 $A \in \mathcal{A}^c_{3,1}$。由于 $A^! \cong k\langle x, y, z\rangle/(yz-zy, zx-xz, xy+yx, x^2-z^2, y^2-z^2)$， $z \in RZ(A^!)_1$，所以$A \in \mathcal{A}^z_{3,1}$，并且

$$C(A) \cong \mathscr{D}_z(A^!) \cong A^!/(z-1) \cong k\langle x, y\rangle/(xy+yx, x^2-1, y^2-1) \cong M_2(k)$$

不是交换的。我们很容易验证 $\Delta(A) = \mathscr{D}_z(A^!) \cong k\langle x, y\rangle/(xy+yx, x^2-1, y^2-1) \in \mathcal{A}^\vee_{2,2}$ 并且 $\mathscr{H}^z(\mathscr{D}_z(A^!)) \cong A^!$。

定理 5.9. 复合映射 $\mathcal{A}^z_{3,1} \to \mathcal{A}^z_{3,1}/\sim \to \mathcal{A}^w_{3,1}/\sim \to \mathcal{A}^c_{3,1}/\sim$ 是一个双射。

证明。 第一个映射的双射性：由于映射 $\nabla: \mathcal{A}^\vee_{2,2} \to \mathcal{A}^z_{3,1}$ 根据定理 5.7 是双射的，且复合 $\mathcal{A}^\vee_{2,2} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{A}^z_{3,1} \xrightarrow{\theta} \mathcal{A}^z_{3,1}/\sim$ 根据定理 5.6 是单射的， $\mathcal{A}^z_{3,1} = \mathcal{A}^z_{3,1}/\sim$。

第二个映射的双射性：这由定理 4.19。

最后一个映射的双射性：根据分类（定理 6.15），仅有10个代数类 $A \in \mathcal{A}^c_{3,1} \setminus \mathcal{A}^w_{3,1}$ （在同构意义下为8个代数和2个代数族）。对每个 $A \in \mathcal{A}^c_{3,1} \setminus \mathcal{A}^w_{3,1}$，我们可以通过直接计算验证存在 $A' \in \mathcal{A}^w_{3,1}$ 使得 $A \sim A'$ （见下一个例子）。□

例 5.10 (代数 A_4 见表 6)。 根据分类（定理6.15），

$$A_1 = k[x, y, z]/(x^2+y^2+z^2) \in \mathcal{A}^w_{3,1},$$
$$A_4 = k\langle x, y, z\rangle/(xy-yx-y^2, yz-zy-2xy, zx-xz-yz, x^2+yz) \in \mathcal{A}^c_{3,1} \setminus \mathcal{A}^w_{3,1}.$$

要看出 $A_4 \sim A_1$ 并不那么明显，因此我们可能需要反复尝试来说明这一点。令 $A' = k[x, y, z]/(x^2 + y(x+z))$. If $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(k)$, then

$\sigma(x^2+y(x+z)) = (x-y)^2 + y((x-y) + (2x+z)) = x^2 - 2xy + y^2 + 3xy - y^2 + yz = x^2 + y(x+z)$, 因此 $\sigma \in \mathsf{Aut}^{\mathbb{Z}}(A')$。由于

$$\begin{aligned}(A')^\sigma &\cong k\langle x, y, z\rangle/(\sigma(x)y - \sigma(y)x, \sigma(y)z - \sigma(z)y, \sigma(z)x - \sigma(x)z, \sigma(x)x + \sigma(y)(x+z)) \\ &= k\langle x, y, z\rangle/(xy - yx - y^2, yz - 2xy - zy, 2x^2 + zx - xz + yz, x^2 + yz) = A_4,\end{aligned}$$

$A_4 \sim A' \cong A_1 \in \mathcal{A}^w_{3,1}$.

根据定理 5.7和定理 5.9，我们得到以下结果。

定理 5.11。 映射 $C:\ \mathcal{A}_{3,\ 1}\to\mathcal{F}_2$ 诱导出一个双射 $\mathcal{A}^c_{3,\ 1}/\sim\to\mathcal{F}_2$。

证明。 映射 $C:\ \mathcal{A}_{3,1}\to\mathcal{F}_2$ 由引理 $\mathcal{A}^c_{3,\ 1}/\sim\to\mathcal{F}_2$ 诱导出映射，这由引理 4.33 和定理 4.36得出。对于每个 $A\in\mathcal{A}^c_{3,\ 1}$，存在 $A'\in\mathcal{A}^z_{3,\ 1}$ 使得 $A\sim A'$，由定理 5.9。由于

$$C(A)\cong C(A')\cong\mathscr{D}(A'^!)=\nabla(A')$$

由引理 4.33 和引理 4.38，结论由定理 5.5、定理 5.7 和定理5.9。 □

定理 5.12。 对于以下关于 $A,A'\in\mathcal{A}_{3,\ 1}$ 的条件，

(1) 分次模范畴 $A\cong$分次模范畴 A'。

(2) $\mathrm{Proj_{nc}}\,A\cong\mathrm{Proj_{nc}}\,A'$。(3) 分次模范畴 $A^!\cong$分次模范畴 $A'^!$。(4) $\mathrm{Proj_{nc}}\,A^!\cong\mathrm{Proj_{nc}}\,A'^!$。(5) $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(A)\cong\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(A')$。(6) $\mathcal{D}^b$(模范畴 $C(A)$)$\cong\mathcal{D}^b$(模范畴 $C(A')$)。(7) $C(A)\cong C(A')$。

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7)。特别地，若 $A,A'\in\mathcal{A}^c_{3,1}$，则所有条件都等价。

证明。 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 由 [13, 引理 3.3] 因为 A,A' 是维数为 2、戈伦斯坦参数为 1 的 AS-Gorenstein 代数，由引理 4.5(2)。

(1) $\Leftrightarrow$ (3) 由 [16, 引理 4.1] 得出。(3) $\Rightarrow$ (4) 由 [27, 定理 1.4] 得出。(4) $\Rightarrow$ (5) 由 [18, 引理 2.5 (2)] 得出。(5) $\Leftrightarrow$ (6) 由 [18, 引理 4.13 (4)] 得出。(6) $\Leftrightarrow$ (7) 由定理 4.36 和 [8, 定理 4.11] 得出。(7) $\Rightarrow$ (4) 由 [18, 引理 4.13 (2)] 得出。

若 $A,A'\in\mathcal{A}^c_{3,1}$，则由定理 5.11 可推出 (7) $\Rightarrow$ (1)。

□

备注 5.13。 存在 $A,\ A'\in\mathcal{A}_{4,\ 1}$ 使得 $C(A)\cong C(A')\cong M_2(k)^{\times 2}$ 但根据 [25, 定理 4.6]，$\mathrm{Proj_{nc}}\,A\ncong\mathrm{Proj_{nc}}\,A'$。

以下是本文的主要结果。

推论 5.14。 以下集合之间存在双射：

(i) 四维*Frobenius*代数的同构类集合 $\mathcal{F}_2$。(ii) 非交换仿射圆锥曲线铅笔的同构类集合 $\mathcal{A}^\vee_{2,\ 2}$。(iii) 非交换中心圆锥曲线的同构类集合。

证明。 根据定理 5.5、定理 5.11和定理 5.12，结论成立。 □

在 [8], Takeda 和作者们给出了四维 Frobenius 代数和非交换仿射圆锥曲线铅笔的完整分类，因此，在本文中，我们可以通过上述双射给出非交换中心圆锥曲线的完整分类。

定理 5.15. 每条非交换中心圆锥曲线都同构于恰好一个分次代数所对应的非交换射影概形，该分次代数取自表*3*，其中$\mathrm{Proj_{nc}}\,\mathcal{S}_\lambda/(x^2)\cong\mathrm{Proj_{nc}}\,\mathcal{S}_{\lambda'}/(x^2)$ 当且仅当 $\lambda'=\lambda^{\pm1}$。

证明。 根据定理 5.7 和定理 5.9，通过将表 $\mathcal{A}^c_{3、\ 1}/\sim$ 应用双射 $\nabla:\ \mathcal{A}^\vee_{2、\ 2}\to\mathcal{A}^z_{3、\ 1}\to\mathcal{A}^c_{3、\ 1}/\sim$，即可得到 2 中的代数完整列表，即上表。根据定理 5.12(1) $\Leftrightarrow$ (2)，结论得证。 □

TABLE 3. $A \in A^c_{3,1}/\sim$。

交换的
$k[x,y,z]/(x^2)$, $k[x,y,z]/(x^2+y^2)$, $k[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2)$
非交换
$\mathcal{W}/(x^2)$, $\mathcal{S}_\lambda/(x^2)$, $\mathcal{S}/(x^2+y^2)$, $\mathcal{S}/(x^2+y^2+z^2)$, $\mathcal{N}/(x^2)$, $\mathcal{N}/(x^2+y^2-4z^2)$, $\mathcal{N}/(3x^2+3y^2+4z^2)$

$\mathcal{S}: = k\langle x, y, z\rangle/(yz+zy, zx+xz, xy+yx)$,
$\mathcal{S}_\lambda: = k\langle x,y,z\rangle/(yz-\lambda zy, zx-xz, xy-yx)$, $\lambda \neq 0, 1$,
$\mathcal{W}: = k\langle x,y,z\rangle/(yz-zy-y^2, zx-xz, xy-yx)$,
$\mathcal{N}: = k\langle x、y、z\rangle/(yz+zy+x^2、zx+xz+y^2、xy+yx)$。

6. EXPLICIT CLASSIFICATIONS

6.1. 非交换中心圆锥曲线。 我们希望找出所有代数 $A \in \mathcal{A}_{3、1}^c$。关键步骤是找出三维量子多项式代数 $S \in \mathcal{A}_{3、0}$中所有次数为 2 的中心元，这在很大程度上依赖于繁琐的计算。本小节将展示我们如何计算 $Z(S)_2$。

对于二次代数 $A = T(V)/(R)$，令

$$\mathcal{V}(R) := \{(p,q) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid f(p,q) = 0 \text{ for all } f \in R\}.$$

定义 6.1 （[13, 定义 4.3]）。我们称二次代数 $A = T(V)/(R)$ 满足 (G1) 条件，当且仅当存在一对 (E,σ)，其中 $E \subset \mathbb{P}(V^*)$ 是一个射影概形，且 σ 是一个 k-自同构 E，使得

$$\mathcal{V}(R) = \{(p,\sigma(p)) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid p \in E\}.$$

对 (E,σ) 这一对称为 S 的几何对，而 E 称为 S 的点概形。（关于 E 的概形结构，请参见 [2]。）

定理 6.2 ([2, 定理 1])。每个3维量子多项式代数 S 都满足 *(G1)* 条件。

根据点概形 E [10, 14]，三维量子多项式代数 S 可分为以下类型。每种类型还可以根据 σ 的作用进一步细分。

P 型： E 是 $\mathbb{P}^2$。S 型： E 是一个三角形。S' 型： E 是一直线与一条圆锥曲线的并，它们交于两点。T 型： E 是三条交于一点的直线的并。T' 型： E 是一条直线与一条圆锥曲线的并，它们交于一点。NC 型： E 是节点三次曲线。CC 型： E 是尖点三次曲线。TL 型： E 是三重直线。WL 型： E 是一条二重直线与一条直线的并。EC 型： E 是椭圆曲线。

引理 6.3 ([6, 引理 3.6])。设 S 是一个具有几何对 (E,σ) 的3维量子多项式代数，且 E 是约化的。若 $Z(S)_2 \neq \{0\}$，则存在某个不可约分支 $E_0 \subset E$，使得 $\sigma^2|_{E_0}$ =恒等映射。

根据上述定理，要计算 $Z(S)_2$,，我们可以先检查 $\sigma^2|_{E_0}$ 中的某个不可约分支$E_0 \subset E$，这样能节省大量计算。我们详细讨论了 T 型和 EC 型的情况。其余情况类似。

例 6.4 ([10])。 T 型: $E = \mathcal{V}(xy(x-y))$ 是三条交于一个点的直线的并。T 型分为 T 型$_1$, T_2 和 T 型$_3$。

（i）T 型$_1$。在此情况下， σ 稳定每个分支。具体而言， $\sigma|_{\mathcal{V}(x)}(0\colon b\colon c) = (0\colon b\colon \alpha b+c)$、$\sigma|_{\mathcal{V}(y)}(a\colon 0\colon c) = (a\colon 0\colon \beta a+c)$ 以及 $\sigma|_{\mathcal{V}(x-y)}(a\colon a\colon c) = (a\colon a\colon -\gamma a+c)$。如果 $Z(S)_2 \neq 0$，那么$\alpha\beta\gamma = 0$ 。（ii）T 型$_2$。在此情况下， σ 交换其两个分支。具体而言， $\sigma|_{\mathcal{V}(x)}(0\colon b\colon c) = (b\colon 0\colon \alpha b+c)$、 $\sigma|_{\mathcal{V}(y)}(a\colon 0\colon c) = (0\colon a\colon \beta a+c)$ 以及 $\sigma|_{\mathcal{V}(x-y)}(a\colon a\colon c) = (a\colon a\colon -\gamma a+c)$。如果 $Z(S)_2 \neq 0$，那么 $\alpha+\beta = 0$ 和 $\gamma = 0$。 （iii）T 型$_3$。在此情况下， σ 循环置换三个分支，因此 $Z(S)_2 = 0$。

例 6.5 ([14, 定理 3.13])。EC 型： $E = \mathcal{V}(x^3+y^3+z^3-3\lambda xyz)$ 是一条椭圆曲线，其中 $\lambda \in k$ 满足 $\lambda^3 \neq 1$。令 $(E,\ o_E,\ +)$ 为 E 上的群结构，并将零元设为 $o_E = (1\colon -1\colon 0)$。

(i) EC-A: $\sigma = \sigma_p$ 是 E 上由点 $p = (a\colon b\colon c)$ 给出的平移，其中 p 满足 $abc \neq 0$，且 $(a^3+b^3+c^3)^3 \neq (3abc)^3$。若 $Z(S)_2 \neq 0$，则对于 $q \in E$， $\sigma_p^2(q) = q+2p = q$。这意味着 $a = b$。(ii) EC-B。在此情形下， $\sigma = \sigma_p\tau$，其中 σ_p 是由满足 $c^3-3\lambda c+2 = 0$ 的点 $p = (1\colon 1\colon c)$ 给出的平移，并且 $\tau(a\colon b\colon c) = (b\colon a\colon c)$。这意味着 $(\sigma_p\tau)^2 = \mathrm{id}$。(iii) EC-E 型： $\sigma = \sigma_p\tau^2$， 或 $\sigma_p\tau^4$，其中 σ_p 是由点 $p = (\eta^8\colon \eta^4\colon 1)$ 给出的平移，且 η 是本原九次单位根；此外， $\tau(a\colon b\colon c) = (b\colon a\colon \varepsilon c)$，其中 ε 是本原三次单位根。这意味着 $|\sigma_p\tau^2| = |\sigma_p\tau^4| = 3$，因此 $Z(S)_2 = 0$(iv) EC-H 型: $\sigma = \sigma_p\tau, \sigma_p\tau^3$，其中 σ_p 是由点 $p = (1\colon 1\colon \lambda)$ 给出的平移，并且 $\tau(a\colon b\colon c) = (\varepsilon^2 a+\varepsilon b+c\colon \varepsilon a+\varepsilon^2 b+c\colon a+b+c)$，其中 ε 是本原三次单位根。这意味着 $|\sigma_p\tau| = |\sigma_p\tau^3| = 4$，因此 $Z(S)_2 = 0$

计算过程主要分为以下两个步骤，我们将通过一个例子加以说明。回顾一下，对于某些次数为 2 的齐次元素 f_1, f_2, f_3，有 $S = k\langle x,y,z\rangle/(f_1,f_2,f_3)$。

步骤1： 计算 $Z(S)_2$ 的关键在于利用菱形引理 [19, 定理 1.15], 获得 S_3 的一个 k-基，因此我们需要知道理想 $(f_1,f_2,f_3) \subset k\langle x,y,z\rangle$的非交换 Gr¨obner 基。我们使用计算机代数系统 GAP 来计算非交换 Gr¨obner 基。

步骤2： 对于 $f \in S_2, g \in S_1$，我们将 gf 和 fg 表示为 S_3 的一个固定 k-基的线性组合，并通过比较它们在该 k-基下的系数，检查 f 是否为中心元。

我们给出一个 T 型$_1$的具体例子。

Ex例 6.6 (T 型$_1$ 代数，见表 4)。 设 $S = k\langle x,\ y,\ z\rangle/(f_1,\ f_2,\ f_3)$，其中

$$f_1 = xy-yx,\ f_2 = xz-zx-\beta x^2+(\beta+\gamma)yx,\ f_3 = yz-zy-\alpha y^2+(\alpha+\gamma)xy$$

其中 $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$。若我们在变量上固定一个序： $x < y < z$，则$\{f_1,f_2,f_3\}$ 的首词为 $yx,\ zx,\ zy$。

通过 GAP（该程序可参见 [19, 练习集 1。7]），我们知道 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 是 $I = (f_1,\ f_2,\ f_3)$在 $k\langle x,\ y,\ z\rangle$中的非交换 Gröbner 基。根据 [19, 定理 1，15], $k\langle x,\ y,\ z\rangle/(f_1,\ f_2,\ f_3)$中约化词的像（即不含任何首词作为子词的词）构成一个 k-基，因此'

$$S_3 = \mathrm{span}_k\{x^3, x^2y, x^2z, xy^2, xyz, xz^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3\}. \tag{6.1}$$

假设 $f \in Z(S)_2$和 $f = ax^2+bxy+cxz+dy^2+eyz+gz^2$，其中 $a,b,c,d,e,g \in k$。我们将xf（分别为 yf, zf）和 fx（分别为 fy, fz）表示为 S_3在方程 6.1 中列出的 k基的线性组合，并利用方程 $xf = fx$（分别为 $yf = fy, zf = fz$）确定 f 的系数。

(x) 我们有 $xf = ax^3 + bx^2y + cx^2z + dxy^2 + exyz + gxz^2$ 和

$$\begin{aligned} fx =& ax^3 + bxyx + cxzx + dy^2x + eyzx + gz^2x \\ =& ax^3 + bx^2y + dxy^2 + cx((\beta+\gamma)yx + xz - \beta x^2) + ey((\beta+\gamma)yx + xz - \beta x^2) \\ &+ g((\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)xy^2 + 2\beta^2x^3 + (\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-3\beta)x^2y - 2\beta x^2z + 2(\beta+\gamma)xyz + xz^2) \\ =& (a - \beta c + 2\beta^2 g)x^3 + (b + (\beta+\gamma)c - \beta e + (\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-3\beta)g)x^2y + (c - 2\beta g)x^2z \\ &+ (d + (\beta+\gamma)e + (\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)g)xy^2 + (e + 2(\beta+\gamma)g)xyz + gxz^2. \end{aligned}$$

（y）我们有 $yf = ax^2y + bxy^2 + cxyz + dy^3 + ey^2z + gyz^2$ 和

$$\begin{aligned} fy =& ax^2y + bxy^2 + cxzy + dy^3 + eyzy + gz^2y \\ =& ax^2y + bxy^2 + cx((\alpha+\gamma)xy + yz - \alpha y^2) + dy^3 + ey((\alpha+\gamma)xy + yz - \alpha y^2) \\ &+ g((\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)x^2y + 2\alpha^2y^3 + (\alpha+\gamma)(\beta+\gamma-3\alpha)xy^2 - 2\alpha y^2z + 2(\alpha+\gamma)xyz + yz^2) \\ =& (a + (\alpha+\gamma)c + (\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)g)x^2y + (b - \alpha c + (\alpha+\gamma)e + (\alpha+\gamma)(\beta+\gamma-3\alpha)g)xy^2 + gyz^2 \\ &+ (c + 2(\alpha+\gamma)g)xyz + (d - \alpha e + 2\alpha^2 g)y^3 + (e - 2\alpha g)y^2z. \end{aligned}$$

容易看出，由于定义关系具有对称性，（x）和（y）中的结果关于 x 和 y （α 和 β）对称。

现在，我们分析 f的系数。首先，$\alpha+\beta+\gamma \neq 0$意味着 $\alpha+\gamma$或 β至少有一个非零，并且 $\beta+\gamma$或 α也至少有一个非零。通过比较 xf和 fx （yf和 fy）中对应项的系数，由（$\alpha+\gamma$）$g = 0 = \beta g$可得 $g = 0$。由于（$\alpha+\gamma$）$c+$（$\alpha+\gamma$）（$\alpha+\gamma-\beta$）$g = 0 = -\beta c + 2\beta^2 g$，可得 $c = 0$ s。类似地，可得 $e = 0$，因此 $f = ax^2 + bxy + dy^2$。

(z) 我们有 $fz = ax^2z + bxyz + dy^2z$ 和

$$\begin{aligned} zf =& azx^2 + bzxy + dzy^2 \\ =& a(2(\beta+\gamma)x^2y + x^2z - 2\beta x^3) + b((\beta+\gamma-\alpha)xy^2 + (\alpha+\gamma-\beta)x^2y + xyz) \\ &+ d(2(\alpha+\gamma)xy^2 + y^2z - 2\alpha y^3) \\ =& ax^2z + bxyz + dy^2z + \\ &+ (2(\beta+\gamma)a + (\alpha+\gamma-\beta)b)x^2y + (-2\beta a)x^3 + (2(\alpha+\gamma)d + (\beta+\gamma-\alpha)b)xy^2 + (-2\alpha d)y^3, \end{aligned}$$

因此 $(2(\beta+\gamma)a + (\alpha+\gamma-\beta)b) = 0$，$-2\beta a = 0$，$2(\alpha+\gamma)d + (\beta+\gamma-\alpha)b = 0$ 和 $-2\alpha d = 0$。利用例 6.4 (i)，我们可以得出 $Z(S)_2$ 如表 4所示，适用于 T 型$_1$。

定理6.7。 $Z(S)_2$ 的列表列于表*4*，适用于每个 $S \in \mathcal{A}_{3,\ 0}$。该表包含以下信息：

(1) $S = k\langle x, y, z\rangle/(h_1, h_2, h_3)$的类型。(2) h_1、h_2、$h_3 \in k\langle x, y, z\rangle_2$的定义关系。(3) $Z(S)_2$ 取决于条件。

在表中，$\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, d \in k$。如果 $Z(S)_2 = 0$，我们省略 S 的定义关系。

读者可以将表4 与 [10, 14]中$S \in \mathcal{A}_{3,0}$ 的分类列表进行比较。

TABLE 4. $Z(S)_2$ 对于$S \in \mathcal{A}_{3,0_\circ}$

Type	定义关系	条件	$Z(S)_2$
P_1	$\begin{cases} \alpha xy-\beta yx \\ \beta yz-\gamma zy \\ \gamma zx-\alpha xz \end{cases}$ $(\alpha\beta\gamma\neq 0)$	$\alpha=\beta=\gamma$	$k[x,y,z]_2$
		$(\alpha:\beta:\gamma)=(1:1:-1)\in\mathbb{P}^2$	$ax^2+by^2+cz^2+dxy$
		$(\alpha:\beta:\gamma)=(1:-1:1)\in\mathbb{P}^2$	$ax^2+by^2+cz^2+dxz$
		$(\alpha:\beta:\gamma)=(-1:1:1)\in\mathbb{P}^2$	$ax^2+by^2+cz^2+dyz$
		否则	0
其他 P			
S_1	$\begin{cases} xy-\gamma yx \\ yz-\alpha zy \\ zx-\beta xz \end{cases}$ $(\alpha\beta\gamma\neq 0,\ 1)$	$(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)=(1,1,1)$	$ax^2+by^2+cz^2$
		$(\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2)=(1,\ 1,\ n)\ n\neq 1$	z^2
		$(\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2)=(1,\ n,\ 1)\ n\neq 1$	y^2
		$(\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2)=(n,\ 1,\ 1)\ n\neq 1$	x^2
		$(\alpha\beta,\gamma)=(1,m,m)$	yz
		$(\alpha,\beta,\gamma)=(m,1,m)$	zx
		$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(m,\ m,\ 1)$	xy
		否则	0
S_2	$\begin{cases} zx-\alpha yz \\ xz-\beta zy \\ x^2+\alpha\beta y^2\ (\alpha\beta\neq 0) \end{cases}$	$\alpha=\beta$	$a(xy+yx)+bz^2$
		$\alpha=-\beta$	y^2
		$\alpha\neq\pm\beta$	0
S_3			
S_1'	$\begin{cases} xy-\beta yx \\ x^2+yz-\alpha zy \\ zx-\beta xz \end{cases}$ $(\alpha\beta^2\neq 0,\ 1)$	$\beta=\pm1,\alpha=-1$	$ax^2+by^2+cz^2$
		$\beta=\pm1,\alpha\neq-1$	x^2
		$\beta\neq\pm1,\alpha=1$	$x^2+(1-\beta^2)yz$
		$\beta\neq\pm1,\alpha\neq1$	0
S_2'	$xy-zx, yx-xz, x^2+y^2+z^2$		$ax^2+b(yz+zy)$
T_1	$\begin{cases} xy-yxxz-zx-\beta x^2+(\beta+\gamma)yx \\ yz-zy-\alpha y^2+(\alpha+\gamma)xy \end{cases}$ $(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$	$\alpha=\beta=0$	$(x-y)^2$
		$\alpha=0,\beta=\gamma$	y^2-xy
		$\beta=0,\alpha=\gamma$	x^2-xy
		$\gamma=0,\alpha=\beta$	xy
		否则	0
T_2	$\begin{cases} yz-zx-\alpha yx+(\alpha+\gamma)x^2 \\ xz-zy-\beta xy+(\beta+\gamma)y^2 \\ x^2-y^2\ (\alpha+\beta+\gamma\neq 0) \end{cases}$	$\alpha+\beta=0$	$2x^2-(xy+yx)$
		$\alpha+\beta\neq 0$	0
T_3			
T_1'	$\begin{cases} \alpha x^2+\beta(\alpha+\beta)xy-xz+zx-(\alpha+\beta)zy \\ 2\beta xy-\beta^2y^2+yz-zy \\ xy-yx-\beta y^2\ (\alpha+2\beta\neq 0) \end{cases}$	$\beta=0$	y^2
		$\alpha=0$	$x^2-\beta yx-yz$
		否则	0
NC_1	$\begin{cases} xy-\alpha yx, yz-\alpha zy+x^2 \\ zx-\alpha xz+y^2\ (\alpha^3\neq 0,1) \end{cases}$	$\alpha=-1$	$ax^2+by^2+cz^2$
		$\alpha\neq-1$	0
NC_2	$xz-2yx+zy, zx-2xy+yz, y^2+x^2$		$a(xy+yx)+bz^2$
CC			
WL_1	$\begin{cases} zy-yz+(1+\gamma)y^2 \\ \alpha xz-\gamma yx-zx \\ \alpha xy-yx\ (\alpha\neq 0,1) \end{cases}$	$\gamma=0,\alpha=-1$	x^2
		$\gamma=-1,\alpha=-1$	y^2
		否则	0
WL_2	$\begin{cases} xy-yx \\ xz-\gamma yx-zx \\ zy-yz+(1+\gamma)y^2 \end{cases}$	$\gamma=0$	x^2
		$\gamma=-1$	y^2
		$\gamma=-1/2$	xy
		否则	0
WL_3			
TL_1	$\begin{cases} \alpha^{-1}zy-\alpha yz+x^2, xz-\alpha^{-1}zx \\ xy-\alpha yx\ (\alpha\neq 0) \end{cases}$	$\alpha^2=1$	x^2
		$\alpha^2\neq 1$	0
其他 TL			
EC-A	$\begin{cases} \alpha xy+\beta yx+\gamma z^2, \alpha yz+\beta zy+\gamma x^2 \\ \alpha zx+\beta xz+\gamma y^2 \end{cases}$ $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^3\neq(3\alpha\beta\gamma)^3, \alpha\beta\gamma\neq 0$	$\alpha=\beta$	$ax^2+by^2+cz^2$
		$\alpha\neq\beta$	0
EC-B	$\begin{cases} xz+zy+\alpha yx,\ \ zx+yz+\alpha xy \\ y^2+x^2+\alpha z^2\ (\alpha^3\neq 0,\ 1,\ -8) \end{cases}$		$a(xy+yx)+bz^2$
其他 EC			

6.2. **几何对**。几何对是非交换代数几何中的重要组成部分。事实上，几何对对于分类三维量子多项式代数 [2]至关重要。根据 [6], , 非交换圆锥曲线的几何对定义为 A Calabi-Yau 量子射影平面中的，并且它们决定 $C(A$。例如，我们有以下引理，它将用于证明下一小节中的定理 6.15。

引理 6.8 ([6, 定理 4.14])。若 $S = k\langle x, y, z\rangle/(yz+zy+\alpha x^2, zx+xz+\alpha y^2, xy+yx+\alpha z^2) \in \mathcal{A}_{3,\ 0}$其中 $\alpha^3 \neq 0,\ 1, -8$ *(EC-A 型)*，且 $0 \neq f \in Z(S)_2$ 使得 $A = S/(f) \in \mathcal{A}^c_{3,\ 1}$，则下列情况恰有一种成立：

(1) $\#(E_A) = 2$ 和 $C(A) \cong k[u]/(u^3) \times k$。(2) $\#(E_A) = 4$ 和 $C(A) \cong k[u]/(u^2) \times k^2$。(3) $\#(E_A) = 6$ 和 $C(A) \cong k^4$。

因此，在没有 Calabi-Yau 条件的情况下计算非交换圆锥曲线的几何对是很自然的。根据定理 5.12 中的分类结果以及下述命题，我们能够对非交换中心圆锥曲线的几何对进行分类。然而，不同于 Calabi-Yau 情形，我们将在下文看到，几何对通常并不能确定 $C(A)$。

命题 6.9 ([9])。对于 $A \in \mathcal{A}_{3,\ 1}$，$A$ 满足 *(G1)* 条件。

设 $(E_A,\ \sigma_A)$、$(E_{A'},\ \sigma_{A'})$ 分别是 $A,\ A' \in \mathcal{A}_{3,\ 1}$ 的几何对。若存在自同构序列 $\tau = \{\tau_n\}$ of$\mathbb{P}^2$ for $n \in \mathbb{Z}$, 其中每个自同构都将 E_A （作为代数簇）同构地映射到 $E_{A'}$，使得图表成立，则称两对等价，记作 $(E_A,\ \sigma_A) \sim (E_{A'},\ \sigma_{A'})$。

$$\begin{array}{ccc} E_A & \xrightarrow{\tau_n} & E_{A'} \\ {\scriptstyle \sigma_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{A'}} \\ E & \xrightarrow{\tau_{n+1}} & E' \end{array}$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立交换关系。

由于对于 $A, A' \in \mathcal{A}_{3,1}$，GrMod $A \cong$ GrMod A' 蕴含 $(E_A, \sigma_A) \sim (E_{A'}, \sigma_{A'})$（根据 [13, 定理 4.7]，另见 [16, 引理 2.5]），且 $\mathcal{A}_{3,1}/\sim$ 已分类（定理 5.12），我们希望计算 $\mathcal{A}^c_{3,1}/\sim$中每个代表元的几何对，即表 3 中的代数。

对于代数 $A = S/(f) \in \mathcal{A}_{3,1}$，其中 $S = k\langle x, y, z\rangle/(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{A}_{3,0}$，计算其几何对 (E_A, σ_A) 分两步进行。

步骤1： 确定 S 的几何对 (E, σ)（见 [2, 6]）。
步骤2： 令 $K \in M_{3\times 4}(k\langle x, y, z\rangle_1)$，使得

$$(x, y, z)K = (f_1, f_2, f_3, f).$$

则 A 的几何对 (E_A, σ_A) 为

$$E_A = \mathcal{V}(\{3\text{-minors of } K\}) \subset \mathbb{P}^2,\ \sigma_A = \sigma|_{E_A}.$$

例6.10. 若

$$\mathcal{S} = k\langle x, y, z\rangle/(yz + zy, zx + xz, xy + yx) \in \mathcal{A}_{3,0},$$

则 $\mathcal{S}$ 的几何对为 $(E = \mathcal{V}(xyz)\ \sigma)$，其中 σ 定义为

$$\sigma : \begin{cases} (a\colon b\colon 0) \mapsto (a\colon -b\colon 0) \\ (a\colon 0\colon c) \mapsto (a\colon 0\colon -c) \\ (0\colon b\colon c) \mapsto (0\colon b\colon -c). \end{cases}$$

若 $f = x^2 \in RZ(\mathcal{S})_2$, 且 $A = \mathcal{S}/(f)$，则

$$K = \begin{pmatrix} 0 & z & y & x \\ z & 0 & x & 0 \\ y & x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 $E_A = \mathcal{V}(2xyz,\ x^2z,\ -x^2y,\ -x^3) = \mathcal{V}(x)$（作为代数簇），且 $\sigma_A\colon E_A \to E_A;\ (0\colon b\colon c) \mapsto (0\colon b\colon -c)$。

命题 6.11。对于每个 $A \in \mathcal{A}^c_{3,\ 1}/\sim$，其几何对 $(E_A,\ \sigma_A)$ 均列于表 5。此外，$k[x,y,z]/(x^2)$、$\mathcal{S}_\lambda/(x^2)$和 $\mathcal{W}/(x^2)$ 的几何对彼此等价。

证明。下面证明此外部分。若

$$A_1 = k[x,y,z]/(x^2),\ A_\lambda = \mathcal{S}_\lambda/(x^2),\ A_2 = \mathcal{W}/(x^2),$$

且 $(E_1,\ \sigma_1)$、$(E_\lambda,\ \sigma_\lambda)$、$(E_2,\ \sigma_2)$ 是相应的几何对，则 $E_1 = E_\lambda = E_2 = \mathcal{V}(x)$。若将 $\mathcal{V}(x)$ 与 $\mathbb{P}^1$ 视为相同，则其自同构可定义如下：

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &:\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1;\ (a\colon b) \mapsto (a\colon b),\\
\sigma_\lambda &:\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1;\ (a\colon b) \mapsto (a\colon \lambda b),\\
\sigma_2 &:\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1;\ (a\colon b) \mapsto (a\colon a+b).
\end{aligned}$$

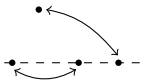
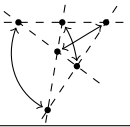
这 3 个几何对分别恰好是 $k[x,y]$、$k_\lambda[x,y]$ 和 $k_J[x,y]$ 的几何对。由于 2 维量子多项式代数的分次模范畴彼此等价，它们的几何对也彼此等价。□

注记 6.12。在上述记号下，由于

$$C(A_1) \cong k_{-1}[u,v]/(u^2,v^2),\ C(A_\lambda) \cong k_{-\lambda}[u,v]/(u^2,v^2),\ C(A_2) \cong k_{-1}[u,v]/(u^2+uv,v^2)$$

（见定理 6.15），几何对并不能确定 C（A）。

TABLE 5. 几何对（E_A, σ_A），由 $A \in \mathcal{A}^c_{3,1}/\sim$。

A	E_A	σ_A
$k[x,y,z]/$（x^2）	直线	恒等映射
$k[x,y,z]/$（x^2+y^2）	两条相交直线	恒等映射
$k[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2)$	光滑圆锥曲线	恒等映射
$\mathcal{S}_\lambda/(x^2)$	一条直线 $\mathcal{V}(x)$	$(0\colon b\colon c) \mapsto (0\colon b\colon \lambda c)$
$\mathcal{W}/(x^2)$	一条直线 $\mathcal{V}(x)$	$(0\colon b\colon c) \mapsto (0\colon b\colon b+c)$
$\mathcal{N}/(x^2)$	一个点	恒等映射
$\mathcal{N}/(3x^2+3y^2+4z^2)$	两个点	交换两个点
$\mathcal{S}/(x^2+y^2)$	一般位置的三个点 一般位置	固定一个点，交换 另外两个点
$\mathcal{N}/(x^2+y^2-4z^2)$	四个点，满足 三个共线点	
$\mathcal{S}/(x^2+y^2+z^2)$	四边形中的六个点 构型	

6.3. 次数 1 中的正则正规（中心）元。对于 $A \in \mathcal{A}_3^c$,1，从定义计算 $C(A) := A^!/(f^!)^{-1}]_0$ 相当麻烦。回想一下，当且仅当 $A \in \mathcal{A}_3^w$,1 时， $RN(A^!)_1 \neq \emptyset$；在这种情况下，根据引理 4.38 和引理 4.18，对于 $w \in RZ(A^!)_1$，有 $C(A) \cong \mathscr{D}_w(A^!) \cong (A^!)^\nu/(w-1)$，其中 ν 是 w 的正规化自同构。此外，当且仅当 $A \in \mathcal{A}_3^z$,1 时， $RZ(A^!)_1 \neq \emptyset$；在这种情况下，根据引理 3.3，对于 $z \in RZ(A^!)_1$，有 $C(A) \cong A^!/(z-1)$，因此计算 $RN(A^!)_1$ 和 $RZ(A^!)_1$ 十分重要。

下面的引理虽有些技术性，但对于在 $A_1^!$ 上$A \in \mathcal{A}_{3,1}$ 中寻找正则正规元非常有用（参见定理 6.15）。

引理 6.13。 设 $A \in \mathcal{A}_{n,1}$，其中 $n \leq 4$ 且 $w \in A_1^!$ 是正规元。那么，当且仅当 $(A^!/(w))^! \in \mathcal{A}_{n-1,0}$ 时， w 是正则的。

证明。由于 A 是 Koszul， $H_{A^!}(t) = (1+t)^{n-1}/(1-t)$。若 w 是正则的，则 $A^!/(w)$ 是一个 Koszul AS-Gorenstein 代数 [20, 定理 1.5]。由于 $A^!/(w)$ 是关于 k的有限维代数， $A^!/(w)$ 是一个 Frobenius Koszul 代数，使得 $H_{A^!/(w)}(t) = (1-t)H_{A^!}(t) = (1+t)^{n-1}$。由于 $n \leq 4$，$(A^!/(w))^!$由 [2], 可知是诺特的，因此根据引理 2.15 和引理 4.2，$(A^!/(w))^! \in \mathcal{A}_{n-1}$,0。

反之，若 $(A^!/(w))^! \in \mathcal{A}_{n-1,\ 0}$，则 $(A^!/(w))^!$ 是 Koszul，因此 $H_{A^!/(w)}(t) = (1+t)^{n-1} = H_{A^!}(t)(1-t)$，因此根据引理 2.10， w 是正则的。□

例 6.14 （代数 J_7 见表 15）。对于 $A \in \mathcal{A}_{3,\ 1}$ 和正规元 $w \in A_1^!$， w 是正则的，当且仅当 $(A^!/(w))^! \in \mathcal{A}_{2,\ 0}$，由上述引理可知。由于 $A \in \mathcal{A}_{2,\ 0}$ 当且仅当

$$A \cong k\langle x, y\rangle/(ax^2 + bxy + cyx + dy^2),\ ad \neq bc$$

(见例 2.4）。例如，若

$$J_7 := k\langle x, y, z\rangle/(2xy - zx + yz, 2yx - xz + zy, x^2 + y^2, xy + yx + z^2) \in \mathcal{A}_{3,1},$$

则 $J_7^! = k\langle x,\ y,\ z\rangle/(yz+zx,\ zy+xz,\ xy-yx+2zx-2xz,\ x^2-y^2,\ z^2-xy-2zx)$（见定理 6.15）。显然，根据引理 2.7， $z \in (J_7^!)_1$是正规元。由于 $J_7^!/(z) \cong k[x,y]/(x^2-y^2,\ xy) \in \mathcal{A}_{2,\ 2}$，$(J_7^!/(z))^! \cong k\langle x, y\rangle/(x^2+y^2) \in \mathcal{A}_{2,\ 0}$，因此根据引理 6.13， $z \in (J_7^!)_1$ 是正则的。

定理 6.15。 对于 $E \in \mathcal{F}_2$，每个 $A \in \mathcal{A}_{3,\ 1}^c$ 满足 $C(A) \cong E$ 均同构于表 *6*–表*16*中的某个代数。这些表包含以下信息：

(*1*) $A \in \mathcal{A}_3^c$ 的名称，*1*。 (*2*) $S \in \mathcal{A}_3$ 的类型，*0*。 (*3*) $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ 在 $k\langle x, y, z\rangle$ 中满足 $A \cong k\langle x, y, z\rangle/I_F$ 的序列。 (*4*) $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ 在 $k\langle x, y, z\rangle$ 中满足 $A^! \cong k\langle x, y, z\rangle/I_G$ 的序列。 (*5*) $RN(A^!)_1$ 中元素的示例。（$RN(A^!)_1 = \emptyset$ 或否。） (*6*) $RZ(A^!)_1$ 中元素的示例。（$RZ(A^!)_1 = \emptyset$ 或否。）

在这些表中， α、β、γ、a、b、$c \in k$。

*Re*注 6.16。 (1) 对于下表中的 X、$Y \in \mathcal{A}_3^c$、1 ($A \in \mathcal{A}_3^c$ 的名称)， $X \neq Y$ 意味着对于任意 i、j都有 $X_i \ncong Y_j$，但 $i \neq j$ 并不意味着 $X_i \ncong X_j$。 (2) 对于 $A \in \mathcal{A}_3^c$、1，若 $A^!$ 是交换的，则根据引理 4.6，有 $A^! \in \mathcal{B}_3$、2。由于根据引理 4.29， $RZ\ (A^!)_{\ 1} \neq \emptyset$，因此 $A \in \mathcal{A}_3^z$、1。 (3) 对于 A、$A' \in \mathcal{A}_3^c$、1，若 $A^!$、$A'^!$ 均为交换的，则根据定理 4.40， $A \cong A'$ 当且仅当 $C\ (A) \cong C\ (A')$。 (4) 在表14–表16中，我们使用符号 $*$ 表示：对于 $X \in \mathcal{A}_3^c$、1，集合 $RN\ (X^!)_1$或 $RZ\ (X^!)_{\ 1}$ 非空，但我们未能在该集合中找到具体元素。

TABLE 6. $A \in \mathcal{A}^{c}_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong M_2(k)$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
A_1	P_1	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2-y^2 x^2-z^2	x	$\emptyset$
A_2	P_1	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2-y^2 x^2-z^2	z	z
$A_3(\alpha)$ $(\alpha \neq 0, \ \pm 1)$	S'_1	$xy-\alpha yx$ $yz-zy+(1-\alpha^2)x^2$ $zx-\alpha xz$ x^2+yz	$\alpha xy+yx$ $yz+\alpha^2 zy-x^2$ $\alpha zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
A_4	T'_1	$xy-yx-y^2$ $yz-zy-2xy$ $zx-xz-yz$ x^2+yz	$xy+yx-2zy$ $yz+zy+zx-x^2$ $zx+xz$ y^2-yx z^2	$\emptyset$	$\emptyset$

TABLE 7. $A \in \mathcal{A}^{e}_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong k_{-1}[u,v]/(u^2-1,\ v^2)$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
B_1	P_1	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2+y^2	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2-y^2 z^2	x	$\emptyset$
B_2	P_1	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2+y^2	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2-y^2 z^2	x	$\emptyset$
B_3	P_1	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx-xz$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ x^2-y^2 z^2	y	y
$B_4(\alpha)$ $(\alpha \neq 0, \pm 1)$	S_1	$xy-yx$ $yz-\alpha zy$ $zx-\alpha xz$ xy	$\alpha yz+zy$ $\alpha zx+xz$ x^2 y^2 z^2	$\emptyset$	$\emptyset$
B_5	S_2	x^2-y^2 $yz+zx$ $zy-xz$ x^2	xy yx $yz-zx$ $zy+xz$ z^2	$x-\sqrt{-1}y$	$\emptyset$
B_6	T_1	$xy-yx$ $yz-zy-y^2+xy$ $zx-xz+x^2-yx$ xy	$yz+zy$ $zx+xz$ x^2-zx y^2+yz z^2	$x-y$	$\emptyset$
B_7	WL_2	$xy-yx$ $yz-zy-y^2$ $zx-xz-yx$ xy	$yz+zy$ $zx+xz$ x^2 y^2+yz z^2	$\emptyset$	$\emptyset$

TABLE 8. $A \in \mathcal{A}^{c}_{3,1}$ 使得 $C(A) \cong k_{-1}[u,v]/(u^2+uv,v^2)$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
C_1	T_1	$xy-yx$ $yz-zy+y^2+xy$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx-yz$ $yz+zy$ $zx+xz$ y^2-yz z^2	$-2x+y$	$\emptyset$
$C_2(\alpha)$ $(\alpha \in k)$	T_2	$xy+yx$ $yz-zy-x^2-y^2+\alpha xy$ $zx+xz-\alpha x^2$ x^2	$xy-yx-\alpha yz$ $yz+zy$ $zx-xz$ y^2+yz z^2	$x+\frac{\alpha}{2}z$	$x+\frac{\alpha}{2}z$
C_3	T'_1	$xy-yx$ $yz-zy-y^2+zx$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz-yz$ y^2+yz z^2	$\emptyset$	$\emptyset$
C_4	WL_1	$xy+yx$ $yz-zy-y^2$ $zx+xz$ x^2	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx-xz$ y^2+yz z^2	x	x
C_5	WL_2	$xy-yx$ $yz-zy-y^2$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ y^2+yz z^2	x	$\emptyset$

$C_2(\alpha) \cong C_4$。

TABLE 9. $A \in \mathcal{A}^c_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong k_{-1}[u,v]/(u^2,\ v^2)$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
D_1	P_1	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
D_2	P_1	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
D_3	P_1	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ x^2	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	x
D_4	WL_1	$xy+yx$ $yz+zy-xy$ $zx-xz$ x^2	$xy-yx+yz$ $yz-zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	$\emptyset$	$\emptyset$
D_5	WL_2	$xy-yx$ $yz-zy+xy$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx-yz$ $yz+zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	$\emptyset$	$\emptyset$
D_6	TL_1	$xy-yx$ $yz-zy-x^2$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
D_7	TL_1	$xy+yx$ $yz-zy+x^2$ $zx+xz$ x^2	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	x

$D_1 = D_6$, $D_3 = D_7$。

TABLE 10. $A \in \mathcal{A}^{c}_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong k_{-\lambda}[u,v]/(u^2,\ v^2)$，其中 $\lambda \neq 0,\ \pm 1$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
$E_1(\lambda)$	S_1	$xy-yx$ $yz-\lambda zy$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $\lambda yz+zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
$E_2(\lambda)$	S_1	$xy-yx$ $yz+\lambda zy$ $zx+xz$ x^2	$xy+yx$ $\lambda yz-zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
$E_3(\lambda)$	S_1	$xy+yx$ $yz-\lambda zy$ $zx+xz$ x^2	$xy-yx$ $\lambda yz+zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	x
$E_4(\lambda)$	S_1	$xy+yx$ $yz+\lambda zy$ $zx-xz$ x^2	$xy-yx$ $\lambda yz-zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
$E_5(\lambda)$	S_1'	$xy+yx$ $yz-\lambda zy+x^2$ $zx+xz$ x^2	$xy-yx$ $\lambda yz+zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	x
$E_6(\lambda)$	S_1'	$xy-yx$ $yz-\lambda zy+x^2$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $\lambda yz+zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$

$E_1(\lambda) = E_6(\lambda)$, $E_3(\lambda) = E_5(\lambda)$, $E_1(\lambda) \cong E_1(\lambda^{-1})$, $E_3(\lambda) \cong E_3(\lambda^{-1})$, $E_2(\lambda) \cong E_4(\lambda^{-1})$.

TABLE 11. $A \in \mathcal{A}^c_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong k[u,v]/(u^2,\ v^2)$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
F_1	S_1	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	x
F_2	S_1	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
F_3	S_1	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
F_4	S_2	$xy-zx$ $yx-xz$ y^2+z^2 x^2	$xy+zx$ $yx+xz$ y^2-z^2 yz zy	x	$\emptyset$
F_5	S'_1	$xy+yx$ $yz+zy+x^2$ $zx+xz$ x^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ y^2 z^2	x	x
F_6	S'_1	$xy-yx$ $yz+zy+x^2$ $zx-xz$ x^2	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ y^2 z^2	x	$\emptyset$
F_7	S'_2	$xy-zx$ $yx-xz$ $x^2+y^2+z^2$ x^2	$xy+zx$ $yx+xz$ y^2-z^2 yz zy	x	$\emptyset$

$F_1 = F_5$, $F_3 = F_6$, $F_4 = F_7$.

TABLE 12. $A \in \mathcal{A}^{c}_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong (k[u]/(u^2))^2$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
G_1	S_1	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2-y^2 z^2	x	x
G_2	S_1	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2-y^2 z^2	x	$\emptyset$
G_3	S_1	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx-xz$ x^2+y^2	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ x^2-y^2 z^2	x	$\emptyset$
G_4	S_2	x^2+y^2 $zx-yz$ $xz-zy$ $xy+yx$	x^2-y^2 $zx+yz$ $xz+zy$ $xy-yx$ z^2	$\emptyset$	$\emptyset$
G_5	S'_1	$xy+yx$ $yz+zy+x^2$ $zx+xz$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2-y^2-yz z^2	y	y
G_6	S'_1	$xy-yx$ $yz+zy+x^2$ $zx-xz$ x^2+y^2	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ x^2-y^2-yz z^2	y	$\emptyset$
$G_7(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$	NC_1	$xy+yx$ $yz+zy+x^2$ $zx+xz+\alpha y^2$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ $x^2-y^2-yz+\alpha zx$ z^2	x	x
G_8	NC_2	$xy-yz-zx$ $yx-xz-zy$ x^2+y^2 $xy+yx$	$xy-yx+zx-xz$ $yz-zx$ $zy-xz$ x^2-y^2 z^2	$\emptyset$	$\emptyset$

$G_1 \cong G_5 \cong G_7(\alpha)$。

TABLE 13. $A \in \mathcal{A}^c_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong k[u]/(u^4)$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
H_1	S'_1	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz+y^2$ x^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ y^2-zx z^2	x	x
H_2	S'_1	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx+xz+y^2$ x^2	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx-xz$ y^2-zx z^2	x	$\emptyset$
H_3	NC_1	$xy+yx$ $yz+zy+x^2$ $zx+xz+y^2$ x^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ y^2-zx z^2	x	x

$H_1 = H_3$。

TABLE 14. $A \in \mathcal{A}^{c}_{3,\ 1}$ 使得 $C(A) \cong k^4$。

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
I_1	S_1	$xy+yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2-y^2 x^2-z^2	x	x
I_2	S_1	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy-yx$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2-y^2 x^2-z^2	x	$\emptyset$
I_3	S_2	x^2+y^2 $yz-zx$ $xz-zy$ $xy+yx+z^2$	$xy-yx$ $yz+zx$ $xz+zy$ x^2-y^2 z^2-xy	z	$\emptyset$
I_4	S_1'	$xy+yx+z^2$ $yz+zy$ $zx+xz$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $xz-zx$ x^2-y^2 z^2-xy	y	y
I_5	S_1'	$xy+yx+z^2$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz+zy$ $xz+zx$ x^2-y^2 z^2-xy	x	$\emptyset$
$I_6(\alpha)$ $(\alpha \neq 0,\ \pm 1)$	S_1'	$xy+yx$ $yz+zy+\alpha x^2$ $zx+xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ $x^2-z^2-\alpha yz$ y^2-z^2	z	z
$I_7(\alpha)$ $(\alpha \neq 0, \pm 1)$	S_1'	$xy-yx$ $yz+zy+\alpha x^2$ $zx-xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ $x^2-z^2-\alpha yz$ y^2-z^2	y	$\emptyset$
$I_8(\alpha)$ $(\alpha \neq \pm 1)$	S_2'	$xy-zx$ $y^2+z^2+x^2$ $yx-xz$ $\alpha x^2+yz+zy$	$xy+zx$ $yz-zy$ $yx+xz$ $x^2-z^2-\alpha yz$ y^2-z^2	x	$\emptyset$

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
I_9	NC_1	$xy+yx+z^2$ $yz+zy$ $zx+xz+y^2$ x^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $xz-zx$ y^2-zx z^2-xy	x	x
$I_{10}(\alpha)$ $(\alpha\neq 0,\pm\frac{16\sqrt{-3}}{9})$	NC_1	$xy+yx+\alpha z^2$ $yz+zy$ $zx+xz+y^2$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $xz-zx$ x^2-y^2+zx $z^2-\alpha xy$	x	x
$I_{11}(\alpha,\ \beta)$ $(\delta(\alpha,\ \beta)\neq 0)$	NC_1	$xy+yx$ $yz+zy+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}x^2$ $zx+xz+\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}y^2$ $x^2+y^2+z^2$	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ $x^2-z^2-\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}yz$ $y^2-z^2-\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}zx$	z	z
I_{12}	NC_2	$xy+zx-yz$ $yx+xz-zy$ y^2+z^2 x^2	$xy-zx$ $yz+zx$ $zy+xz$ $yx+zy$ y^2-z^2	x	$\emptyset$
$I_{13}(\alpha)$ $(\alpha^2\neq 0,\ -1,\ 3)$	NC_2	$2xy-\alpha zx-\alpha yz$ $2yx-\alpha xz-\alpha zy$ x^2+y^2 $xy+yx+z^2$	$\alpha xy-\alpha yx+2zx-2xz$ $yz-zx$ $zy-xz$ x^2-y^2 $\alpha z^2-\alpha xy-2zx$	z	$\emptyset$
$I_{14}(\alpha,a,b)$ $(\alpha^3\neq 0,1,-8,$ $\#(E_A)=6)$	EC-A	$xy+yx+\alpha z^2$ $yz+zy+\alpha x^2$ $zx+xz+\alpha y^2$ $ax^2+by^2+cz^2$		$*$	$*$
$I_{15}(\alpha,a,b)$ $(\alpha^3\neq 0,1,-8,$ $\#(E_A)=6)$	EC-B	$xz+zy+\alpha yx$ $zx+yz+\alpha xy$ $y^2+x^2+\alpha z^2$ $a(xy+yx)+bz^2$		$x+y$ $(b=-a\alpha),$ z （否则）	$\emptyset$

$\delta(\alpha,\beta)=-27-256\alpha^3+288\alpha\beta+256\alpha^2\beta^2-256\beta^3$.$I_1\cong I_4\cong I_6(\alpha)\cong I_9\cong I_{10}(\alpha)$
$\cong I_{11}(\alpha,\beta)\cong I_{14}(\alpha,a,b)$，因此 $RZ((I_{14}(\alpha,a,b))^!)_1\neq\emptyset$。

TABLE 15. $A \in \mathcal{A}^c_{3,1}$ 使得 $C(A) \cong k[u]/(u^2) \times k^2$.

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
J_1	S'_1	$xy+yx$ $yz+zy+x^2$ $zx+xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ x^2-z^2-yz y^2-z^2	z	z
J_2	S'_1	$xy-yx$ $yz+zy+x^2$ $zx-xz$ $x^2+y^2+z^2$	$xy+yx$ $yz-zy$ $zx+xz$ x^2-z^2-yz y^2-z^2	y	$\emptyset$
J_3	S'_2	$xy-zx$ $x^2+y^2+z^2$ $yx-xz$ $x^2+yz+zy$	$xy+zx$ $yz-zy$ $yx+xz$ x^2-z^2-yz y^2-z^2	$x+y-z$	$\emptyset$
J_4	S'_2	$xy-zx$ $x^2+y^2+z^2$ $yx-xz$ $x^2-yz-zy$	$xy+zx$ $yz-zy$ $yx+xz$ x^2-z^2+yz y^2-z^2	$\emptyset$	$\emptyset$
$J_5(\alpha)$ $(\alpha=\pm\frac{16\sqrt{-3}}{9})$	NC_1	$xy+yx+\alpha z^2$ $yz+zy$ $zx+xz+y^2$ x^2+y^2	$xy-yx$ $yz-zy$ $xz-zx$ x^2-y^2+zx $z^2-\alpha xy$	x	x
$J_6(\alpha,\ \beta)$ (条件 $\diamond$)	NC_1	$xy+yx$ $yz+zy+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}x^2$ $zx+xz+\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}y^2$ $x^2+y^2+z^2$	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ $x^2-z^2-\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}yz$ $y^2-z^2-\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}zx$	z	z
J_7	NC_2	$2xy-zx+yz$ $2yx-xz+zy$ x^2+y^2 $xy+yx+z^2$	$xy-yx+2zx-2xz$ $yz+zx$ $zy+xz$ x^2-y^2 $z^2-xy-2zx$	z	$\emptyset$
$J_8(\alpha,a,b)$ $(\alpha^3\neq 0,1,-8,$ $\#(E_A)=4)$	EC-A	$xy+yx+\alpha z^2$ $yz+zy+\alpha x^2$ $zx+xz+\alpha y^2$ $ax^2+by^2+cz^2$		$*$	$*$
$J_9(\alpha,a,b)$ $(\alpha^3\neq 0,1,-8,$ $\#(E_A)=4)$	EC-B	$xz+zy+\alpha yx$ $zx+yz+\alpha xy$ $y^2+x^2+\alpha z^2$ $a(xy+yx)+bz^2$		$z\ (b^2\neq a^2\alpha^2)$ $x+y\ (b=-a\alpha)$ $\emptyset\ (b=a\alpha)$	$\emptyset$

条件 $\diamond$: $\delta(\alpha,\beta)=-27-256\alpha^3+288\alpha\beta+256\alpha^2\beta^2-256\beta^3=0$, 且 $\alpha\neq\frac{3\mu}{4}, \beta\neq\frac{3\mu^2}{4}$, 其中 μ 是三次单位根。$J_1\cong J_5(\alpha)\cong J_6(\alpha,\beta)\cong J_8(\alpha,a,b)$, 因此 $RZ((J_8(\alpha,a,b))^!)_1\neq\emptyset$。

TABLE 16. $A \in \mathcal{A}^{c}_{3,1}$ 使得 $C(A) \cong k[u]/(u^3) \times k$.

A	S	F	G	$RN(A^!)_1$	$RZ(A^!)_1$
K_1	NC_1	$xy+yx$ $yz+zy+\sqrt{\frac{4}{3}}x^2$ $zx+xz+\sqrt{\frac{4}{3}}y^2$ $x^2+y^2+z^2$	$xy-yx$ $yz-zy$ $zx-xz$ $x^2-z^2-\sqrt{\frac{4}{3}}yz$ $y^2-z^2-\sqrt{\frac{4}{3}}zx$	z	z
K_2	NC_2	$-\sqrt{\frac{4}{3}}xy+zx+yz$ $-\sqrt{\frac{4}{3}}yx+xz+zy$ x^2+y^2 $xy+yx+z^2$	$xy-yx+\sqrt{\frac{4}{3}}zx-\sqrt{\frac{4}{3}}xz$ $yz-zx$ $zy-xz$ x^2-y^2 $z^2-xy-\sqrt{\frac{4}{3}}zx$	z	$\emptyset$
$K_3(\alpha,a,b)$ $(\alpha^3\neq 0,1,-8,$ $\#(E_A)=2)$	EC-A	$xy+yx+\alpha z^2$ $yz+zy+\alpha x^2$ $zx+xz+\alpha y^2$ $ax^2+by^2+cz^2$		$*$	$*$
$K_4(\alpha,a,b)$ $(\alpha^3\neq 0,1,-8,$ $\#(E_A)=2)$	EC-B	$xz+zy+\alpha yx$ $zx+yz+\alpha xy$ $x^2+y^2+\alpha z^2$ $a(xy+yx)+bz^2$		z	$\emptyset$

$K_1 \cong K_3(\alpha,a,b)$, 因此 $RZ((K_3(\alpha,a,b))^!)_1 \neq \emptyset$。

References

[1] M. Artin 和 W. Schelter，整体维数为 3 的分次代数， *Adv. Math.*，66 (1987)，171–216。[2] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh，与椭圆曲线自同构相关的一些代数，The Grothendieck Festschrift，第 1 卷，Birkhauser，波士顿，M.A.，(1990)，33–85。[3] M. Artin 和 J. J. Zhang，非交换射影概形， *Adv. Math.*，109 (1994)，228–287。[4] J.-W. He 和 Y. Ye，Koszul Frobenius 代数的 Clifford 变形与非交换二次曲面， *Algebra Colloq.* **31** 1 2024 63 82 ，：( )，–。[5] H. Hu，与对称正则超势相关的非交换圆锥曲线的分类， *J. Algebra Appl.*，22 2023 06，2350136 ( )，第。[6] H. Hu、M. Matsuno 和 I. Mori，Calabi-Yau 量子射影平面中的非交换圆锥曲线， *J. Algebra*，620 2023 194 224 ( )，–。[7] H. Hu 和 I. Mori，Clifford 二次完全交， *Math. Z.*，308 (2024)，第 30 期。[8] H. Hu、I. Mori、K. Takeda 和 W. Wu，非交换仿射圆锥曲线铅笔，arXiv:2509.09393，2025。[9] H. Hu、W. Wu 和 Yu Ye，Koszul 代数的点簇与点精确性，预印本。[10] A. Itaba 和 M. Matsuno，3 *Math. J. Okayama* 维二 *Univ.* **63** 2021 61 86
次 AS-正则代数的定义关系，，( )，–。[11] E. Kirkman、J. Kuzmanovich 和 J. J. Zhang，非交换完全交， *J. Algebra*，429，253–286 (2015)。[12] T. Levasseur，非交换正则分次环的一些性质， *Glasgow Math. J.*，34 (1992)，277–300。[13] I. Mori，非交换射影概形与点概形，Algebras, rings, and their representations，World Sci. Publ. (2006)，215–239。[14] M. Matsuno，EC 型3 *Can. Math.* 维二 *Bull.* 64， 1 2020 123 141
次 AS-正则代数的完整分类，，卷，期 ( ) –。[15] H. Minamoto 和 I. Mori，AS-戈伦斯坦代数的结构， *Adv. Math.*，226 (2011)，4061–4095。[16] I. Mori 和 K. Ueyama，几何 AS-正则代数的分次 Morita 等价， *Glasg. Math. J.*，55(2) (2013)，241–257。[17] I. Mori 和 K. Ueyama，非交换矩阵分解及其在斜外代数中的应用，*J.* ，( )，–。 *Algebra* **586** 2021 1053 1087
[18] I. Mori 和 K. Ueyama，非交换 Kn¨orrer 周期性定理与非交换二次超曲面， *Algebra & Number Theory*，16 (2022)，第 2 期，467–504。[19] D. Rogalski，非交换射影几何导论，arXiv:1403.3065，2014。[20] B. Shelton 和 C. Tingey，关于 Koszul 代数及 Artin-Schelter 正则代数的一种新构造，*J.* ，： *Algebra* 241 2 2001 789 798
( )，–。[21] S. P. Smith，与椭圆曲线相关的一些有限维代数：载于《代数表示论及相关主题》，CMS 会议论文集，19 (1996)，315–348。[22] S.P. Smith 和 M. Van den Bergh，非交换二次曲面， *J. Noncommut. Geom.*，7 (2013)，817–856。[23] A. Skowronski 和 K. Yamagata，Frobenius 代数 I，欧洲数学学会，2012。[24] D. R. Stephenson 和 J. J. Zhang，分次诺特环的增长， *Proc. Amer. Math. Soc.*，125 (1997)，第 6 期，1593–1605。[25] K. Ueyama，斜二次超曲面的导出范畴， *Israel J. Math.*，253 (2023)，第 1 期，205–247。[26] A. Yekutieli 和 J. J. Zhang，非交换射影概形的 Serre 对偶， *Proc. Amer. Math. Soc.*，125 1997 697 707 ( )，–。[27] J. J. Zhang，扭分次代数与分次范畴等价， *Proc. Lond. Math. Soc.*，72 (1996)，281–311。

Hu: School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui230026, CHINA*Email address*: huhaigang@ustc.edu.cn; huhaigang phy@163.comMori: Department of Mathematics, Faculty of Science, Shizuoka University, Shizuoka 422-8529,JAPAN*Email address*: mori.izuru@shizuoka.ac.jpWu: School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, An-hui 230026, CHINAand Department of Information Science and Technology, Shizuoka University, Shizuoka 422-8529, JAPAN*Email address*: wuwch20@mail.ustc.edu.cn