arXiv:2602.03241v1 [math.DG] 3 Feb 2026

具有常数田中–韦伯斯特标量曲率的非齐次完备周期接触形式

JEFFREY S. CASE 与 YUYA TAKEUCHI

摘要。我们研究非紧严格伪凸 CR 流形上具有常数田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式的存在性问题。我们证明，在温和假设下，只要紧致严格伪凸CR流形的基本群具有无限的有限群完备化，其万有覆盖便容许无穷多个彼此非齐次的此类接触形式。作为应用，我们处理标准CR球面中实球面或复球面的补集，以及紧凯勒流形上的圆丛和莱因哈特域的边界。

1. 引言

具有常数标量曲率的完备度量的存在性，是黎曼几何与共形几何中最基本的问题之一。在紧致情形下，该问题称为Yamabe问题，已得到肯定解决；参见 [LP87]及其中的参考文献。一个典型的非紧情形出现在考虑紧流形中某个闭子集的补集时。此时，该问题称为奇异 Yamabe 问题。若外围流形为圆球面，则该问题已被多位作者研究 [Sch89, MS91,BPS16, BP18]。与我们的结果相关，第一作者在与Andrade、Piccione和Wei的合作工作 [ACPW25], 中证明，只要 $n \geq 2k+3$, $S^n \setminus S^k$ 便容许无穷多个具有正常数标量曲率的非齐次周期共形圆度量。

基于共形几何与 CR 几何之间的类比，我们研究具有常田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式的存在性问题。我们首先回顾这一问题在维数为 $2n+1$ 的紧致连通严格伪凸 CR 流形（M, $T^{1,0}M$）上的研究现状。***CR Yamabe***泛函 $\mathfrak{F}$ 定义为

$$\mathfrak{F}(\theta) \coloneqq \mathrm{Vol}_\theta(M)^{-n/(n+1)} \int_M R_\theta \, \mathrm{vol}_\theta, \tag{1.1}$$

其中 θ 是 M上的接触形式， R_θ 是与 θ相伴的田中–韦伯斯特标量曲率，$\mathrm{vol}_\theta := \theta \wedge (d\theta)^n$，且$\mathrm{Vol}_\theta(M) := \int_M \mathrm{vol}_\theta$。该泛函的下确界称为***CR Yamabe*** 常数 $Y(M, T^{1,0}M)$。该泛函的临界点对应于具有常田中–韦伯斯特标量曲率的接触形式。Jerison 与 Lee [JL87, JL88, JL89] 证明了该泛函容许

2020年 数学主题分类。 32V20, 35B10, 35J20, 35J20, 35H20, 53C21.关键词与短语。CR几何，奇异 CR Yamabe问题，常田中–韦伯斯特标量曲率，复 Kleinian 群。J.S.C. 获美国国家科学基金会 DMS-2505606 号资助。Y.T. 获日本学术振兴会科研费 JP25K17247 号资助。

一个极小元，若 $n \geq 2$ 且$(M, T^{1,0}M)$不是球形的，或者若$(M, T^{1,0}M)$与 CR 球面 CR 微分同胚。Gamara 与 Yacoub [GY01,Gam01] 通过无穷远处临界点方法证明了其余情形下临界点的存在性。他们的方法所构造的接触形式未必是 CR Yamabe 极小化子。事实上，Cheng、Malchiodi 与 Yang [CMY23] 证明了 Rossi 球——一个不可嵌入 CR 三维流形的例子——不存在 CR Yamabe 极小化子。我们还指出，若 $n = 1$ 且$(M, T^{1,0}M)$可嵌入，则$(M, T^{1,0}M)$存在 CR Yamabe 极小化子 [CMY17, Tak20]。

本文考虑非紧情形。设 $(M, T^{1,0}M)$ 是一个（可能非紧的）连通严格伪凸 CR 流形。用 $\mathrm{CSC}(M, T^{1,0}M)$ 表示 M 上具有常数田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式集合。若存在一个 CR 微分同胚 φ 和一个常数 $c > 0$，使得 $\varphi^*\theta_1 = c\theta_2$，则称 M 上的两个接触形式 θ_1 和 θ_2 是齐次的；否则称它们为非齐次的。$(M, T^{1,0}M)$ 上具有常数田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式的几何模空间是商空间

$$\mathcal{M}(M, T^{1,0}M) \coloneqq \mathrm{CSC}(M, T^{1,0}M)/\sim,$$

其中，若 θ_1 和 θ_2 齐次，则 $\theta_1 \sim \theta_2$。Jerison 和 Lee 证明，若 M 紧致且 $Y(M, T^{1,0}M) \leq 0$ [JL87，定理 7.1]，则 $\#\,\mathrm{M}(M, T^{1,0}M) = 1$；或者 $(M, T^{1,0}M) = (S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})$ [JL88，定理 A]。另已知，若 M 紧致且存在 Einstein 接触形式 [，则 $\#\,\mathrm{M}(M, T^{1,0}M) = 1$，参见 Wan15，定理 4]。

一种典型的非紧致情形是考虑紧致严格伪凸 CR 流形中某个闭子集的补集。设 $(M, T^{1,0}M)$ 是一个维数为 $2n + 1$ 的紧致连通严格伪凸 CR 流形，θ 是 M 上的一个接触形式，Λ 是 M 的一个闭子集。我们希望在 $M \setminus \Lambda$ 上构造具有常田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式；为简便起见，将 CR 结构 $T^{1,0}(M \setminus \Lambda)$ 记为奇异 ***CR Yamabe*** 方程

$$\begin{cases} (2 + 2/n)\Delta_b u + R_\theta u = \lambda u^{1+2/n} \text{ on } M \setminus \Lambda, \\ \lim_{x \to \Lambda} u(x) = \infty, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为某个常数，且 $0 < u \in C^\infty(M \setminus \Lambda)$。条件 $\lim_{x\to\Lambda} u(x) = \infty$ 是接触形式 $\hat{}\theta = u^{2/n}\theta$ 在 $M \setminus \Lambda$ 上完备的必要条件。Chanillo 和 Yang [CY25b, Theorem 2.1] 证明，若方程 (1.2) 存在满足 $\lambda \geq 0$ 的解，则 $\dim_H \Lambda \leq n$；其中 $\dim_H$ 是相对于卡诺 – 卡拉西奥多里距离的豪斯多夫维数；定义见第 2.1 节。关于存在性结果，Nayatani [Nay99, p. 221] 构造了一个在 $S^{2n+1} \setminus S^{2k+1}_{\mathbb{C}}$ 上的完备接触形式 θ'，满足 $R_{\theta'} = (n + 1)(n - 2k - 2)$，其中 $S^{2k+1}_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{C}$ 维球面

$$S^{2k+1}_{\mathbb{C}} \coloneqq \left\{ (z^1, \dots, z^{k+1}, 0, \dots, 0) \in S^{2n+1} \,\middle|\, z^i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Guidi、Maalaoui 和 Martino [GMM24, 定理 1.1]通过另一种方法构造了相同的接触形式。他们还利用分岔方法 [GMM24, 定理 1.3]，在 $S^{2n+1} \setminus S^1_{\mathbb{C}}$ 上构造了一个由无穷多个具有恒定田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式组成的族。此外，他们证明了，如果 $\tau \in \mathrm{Diff}(S^{2n+1})$ 满足某些条件 [GMM24, 定理，那么 $S^{2n+1} \setminus \tau(S^1_{\mathbb{C}})$ 存在一种具有恒定田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式

1.2]。Afeltra [Afe20, 定理 1.1] 通过 Lyapunov–Schmidt 方法，在 $S^{2n+1} \setminus \{p, -p\}$ 上构造了无穷多个 $\mathbb{Z}$-周期接触形式。

本文证明，在某些非紧致严格伪凸 CR 流形上，存在无穷多个两两非齐次的完备接触形式，且其田中–韦伯斯特标量曲率为常数。特别地，我们证明，在 CR 球面去除 $\mathbb{R}$-球面和 $\mathbb{C}$-球面后的空间上，几何模空间是无限的。从这一视角来看，我们的结果可视为共形几何的非紧致情形中存在无穷多个非齐次完备常标量曲率度量这一结果的 CR 类比。

为在一般情形下阐述我们的结果，我们从一个紧致连通严格伪凸 CR 流形 $(M, T^{1,0}M)$ 开始，其维数为 $2n+1$，并满足以下假设：

假设 (♦)。 假设 *CR Yamabe* 常数 $(M, T^{1,0}M)$ 为正。若 维数 $M = 3$，则我们还假设 $(M, T^{1,0}M)$ 普遍可嵌入；定义见第 *2.1* 节。若 维数 $M = 5$ 且 $(M, T^{1,0}M)$ 为球形，则我们 $\widetilde{\ }$ 还假设发展映射 $\Phi\colon\ M \to S^5$ 是单射。

在低维情形下施加这些额外假设，是为了保证 M 的有限覆盖上存在 CR Yamabe 极小化子。若 M 的基本群$\pi_1(M)$具有无穷多个有限指数正规子群，则在 $(M,\ T^{1,0}M)$ 上存在 $\widetilde{\ \ \ \ \ }$ 无穷多个两两非齐次的周期接触形式。

定理 1.1。 设（$M, T^{1,0}M$）是一个维数为 $2n+1$ 的紧致连通严格伪凸 *CR* 流形，满足假设（♦），且 π_1（M）具有无限 $\widetilde{\ \ \ \ \ }$ 有限群完备化。那么$\#\mathcal{M}$（$M, T^{1,0}M$）$= \infty$。

我们工作的创新之处在于，所得结果并非源自文献中已有的构造，而是依赖于一种不同的几何机制。特别是，我们的方法适用于那些无法通过分岔或基于常微分方程的方法处理的例子；而这些方法在以往研究中发挥了核心作用。

我们的证明与 [ACPW25, 定理 3.3] 的证明类似。由于 $\pi_1(M)$ 的有限群完备化是无限的，我们可以在 M 上构造一列有限连通覆盖。假设 (♦) 意味着每个这样的覆盖都有一个正的 CR Yamabe 极小化子。它在万有覆盖上的提升定义了一个具有正的常数 $\widetilde{\ \ \ \ \ }$ 田中–韦伯斯特标量曲率的周期接触形式。反设 $\#\,\mathcal{M}(M,\ T^{1,0}M)\ <\sim\ \ \sim\infty$。那么 CR 微分同胚群 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M,\ T^{1,0}M)$ 的作用不适当地。根据 Schoen [Sch95], 的一个结果可知，$(M,\ T^{1,0}M)$ 与海森堡群 CR 微分同胚。由海森堡群 CR 自同构的刻画，我们得出 $Y(M,\ T^{1,0}M) = 0$，矛盾。

作为一个应用，考虑 S^{2n+1} 中 $\mathbb{R}$-球面或 a $\mathbb{C}$-球面的补集，其中该 $\mathbb{R}$-球面

$$S^k_{\mathbb{R}} \coloneqq \left\{ (x^1, \dots, x^{k+1}, 0, \dots, 0) \in S^{2n+1} \;\middle|\; x^i \in \mathbb{R} \right\}$$

是全实线性子空间 $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ 与 S^{2n+1} 的交集。存在一个无挠离散子群 Γ 属于 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(S^{2n+1} \setminus S^k_{\mathbb{R}})$，使得 $S^{2n+1} \setminus S^k_{\mathbb{R}}$ 关于 Γ 的商空间满足定理 1.1 的假设。

定理 1.2。 补集 $S^{2n+1} \setminus S^k_{\mathbb{R}}$ 满足 $\#\mathcal{M}(S^{2n+1} \setminus S^k_{\mathbb{R}}) = \infty$ 当$0 \le k \le n-1$时。

类似地，我们考虑 $\mathbb{C}$-球面 $S^{2k+1}_{\mathbb{C}}$，它是复线性子空间 $\mathbb{C}^{k+1}\times\{0\}$ 与 S^{2n+1} 的交集。对该$\mathbb{R}$-球面所作的类似论证得出以下结果。

定理 1.3。补集 $S^{2n+1}\setminus S^{2k+1}_{\mathbb{C}}$ 满足 $\#M(S^{2n+1}\setminus S^{2k+1}_{\mathbb{C}})=\infty$，如果 $0\le k<(n-2)/2$。

我们对这些定理补充几点说明。设 V 是$\mathbb{C}^{n+1}$中的一个实线性子空间，并令 $\Lambda\coloneqq V\cap S^{2n+1}\subset S^{2n+1}$。如果 V 是全实的或复的，且 $\dim_H\Lambda<n$，那么我们证明了 $\#\mathcal{M}(S^{2n+1}\setminus\Lambda)=\infty$。证明的关键在于，存在一个 $PU(n+1,1)$ 的无挠凸余紧离散子群 Γ，其极限集与 Λ 重合。于是，$S^{2n+1}\setminus\Lambda$ 关于 Γ 的商空间满足假设 **(♦)**。另一方面，当 V 既非全实也非复时，$PU(n+1,1)$ 中不存在极限集与 Λ 重合的离散子群，因此我们的论证不适用。据我们所知，关于在 $S^{2n+1}\setminus\Lambda$ 上存在具有常数田中–韦伯斯特标量曲率的完备接触形式，目前尚无相关结果。

我们还将把定理 1.1 应用于紧凯勒流形上的圆丛（定理 8.1），以及莱因哈特域的边界（第 8.2 节）；后者既非球形，也非佐佐木。

本文安排如下。第 2 节回顾 CR 几何的基础知识。第 3 节介绍 CR Yamabe问题，并概述促成本研究的已知存在性结果。第 4 节汇集分析 CR 球面中 $\mathbb{R}$- 球面和 $\mathbb{C}$- 球面补集所需的若干复双曲几何事实。第 5 节研究无穷塔有限连通覆盖的存在性问题；这是本文的技术核心。第 6 节利用这一框架证明定理 1.1。第 7 节将该定理应用于 CR 球面中 $\mathbb{R}$- 球面和 $\mathbb{C}$- 球面的补集。最后，第 8 节讨论其在紧凯勒流形上的圆丛以及莱因哈特域边界上的进一步应用。

2. CR几何

2.1. CR 流形。设 M 是一个光滑的（$2n+1$）维流形。*CR*结构 是一个秩为 n 的复子丛 $T^{1,0}M$ 它是复化切丛$TM\otimes\mathbb{C}$ 的子丛，并满足

$$T^{1,0}M\cap T^{0,1}M=0,\qquad [\Gamma(T^{1,0}M),\Gamma(T^{1,0}M)]\subset\Gamma(T^{1,0}M),$$

其中 $T^{0,1}M$是 $T^{1,0}M$在 $TM\otimes\mathbb{C}$中的复共轭。令 $HM=\operatorname{Re}T^{1,0}M$并令 $J\colon HM\to HM$为 HM 上的唯一复结构，使得

$$T^{1,0}M=\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-1}\colon HM\otimes\mathbb{C}\to HM\otimes\mathbb{C}).$$

CR 流形的一个典型例子是一个（$n+1$）维复流形 X中的实超曲面 M；该超曲面 M 带有诱导的CR结构

$$T^{1,0}M\coloneqq T^{1,0}X|_M\cap(TM\otimes\mathbb{C}).$$

特别是，单位球面

$$S^{2n+1}\coloneqq\left\{\,z\in\mathbb{C}^{n+1}\;\middle|\;|z|^2=1\,\right\}$$

具有典范CR结构 $T^{1,0}S^{2n+1}$。

设 $(M, T^{1,0}M)$ 和 $(M', T^{1,0}M')$ 为 CR 流形。若光滑映射 $f\colon M \to M'$ 满足 $f_*(T^{1,0}M) \subset T^{1,0}M'$，则称其为*CR* 映射。若 f 是微分同胚，则称f为*CR* 微分同胚。若 CR 流形 $(M, T^{1,0}M)$ 局部同构于 $(S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})$，则称其为球形。

若存在一个光滑实值1-形式 θ，其零空间恰为 HM，且*Levi*形式

$$L_\theta(V, W) \coloneqq d\theta(V, JW) \qquad (V, W \in HM)$$

正定，则称这样的1-形式为接触形式。三元组 $(M, T^{1,0}M, \theta)$ 称为伪*Hermitian*流形。记 T 为相对于 θ的*Reeb*向量场；也就是说，它是满足以下条件的唯一向量场

$$\theta(T) = 1, \qquad T \lrcorner d\theta = 0.$$

设 (Z_α) 是 $T^{1,0}M$ 的局部标架，并令 $Z_{\bar\alpha} = \overline{Z_\alpha}$。则 $(T, Z_{\bar\alpha}, Z_\alpha)$ 构成 $TM\otimes\mathbb{C}$ 的局部标架，称为容许标架。其对偶标架 $(\theta, \theta^\alpha, \theta^{\bar\alpha})$ 称为容许余标架。2-形式 $d\theta$ 写作

$$d\theta = \sqrt{-1} h_{\alpha\bar\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^{\bar\beta},$$

其中 $(h_{\alpha\bar\beta})$ 是正定Hermitian矩阵。我们使用 $h_{\alpha\bar\beta}$ 及其逆矩阵$h^{\alpha\bar\beta}$ 升降张量的指标。

伪厄米流形的平坦模型是海森堡群 $\mathbb{H}^{2n+1}$，也就是底层流形为 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$、乘法运算如下的李群

$$(t, z)\cdot(t', z') \coloneqq (t + t' + 2\,\mathrm{Im}(z\cdot\bar z'), z + z').$$

对于 $\alpha = 1, \dots, n$，我们定义左不变复向量场 Z_α 如下：

$$Z_\alpha \coloneqq \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \sqrt{-1}\bar z^\alpha \frac{\partial}{\partial t}.$$

典范 CR 结构 $T^{1,0}\mathbb{H}^{2n+1}$ 由 $Z_1, \dots, Z_n$张成。定义 $\mathbb{H}^{2n+1}$ 上的左不变 1-形式 θ 如下：

$$\theta \coloneqq dt + \sqrt{-1}\sum_{\alpha=1}^{n}(z^\alpha d\bar z^\alpha - \bar z^\alpha dz^\alpha).$$

于是，θ 消去 $T^{1,0}\mathbb{H}^{2n+1}$，且 Levi 形式 L_θ 满足 $L_\theta(Z_\alpha, Z_{\bar\beta}) = 2\delta_{\alpha\beta}$；特别地，$(\mathbb{H}^{2n+1}, T^{1,0}\mathbb{H}^{2n+1})$ 是一个严格伪凸 CR 流形，且 θ 是 $\mathbb{H}^{2n+1}$上的接触形式。

如果存在光滑嵌入 $F\colon M \to \mathbb{C}^N$，使得 $F_*(T^{1,0}M) \subset T^{1,0}\mathbb{C}^N$，则称 CR 流形 $(M, T^{1,0}M)$ 是可嵌入 的。已知，维数至少为五的紧致严格伪凸CR流形 $(M, T^{1,0}M)$ 必定可嵌入 [BdM75]。另一方面，存在许多三维不可嵌入的紧致严格伪凸 CR 流形；例如参见[BE90]。如果 $(M, T^{1,0}M)$ 的每个有限覆盖都是可嵌入的，则称其为普遍可嵌入 的。这个条件严格强于可嵌入性条件 [CY25a]。

假设 M 是连通的，并在 M上固定一个接触形式 θ。我们也可以如下在 M 上赋予 M 卡诺–卡拉西奥多里距离 d_{CC}。对于任意$p, q \in M$，我们可以找到一条光滑路径 $c\colon [0,1] \to M$，使得 $c(0) = p$，$c(1) = q$，并且 $\theta(c'(t)) = 0$。于是，$d_{\mathrm{CC}}(p, q)$ 是这类曲线长度的下确界。记 $\dim_H A$ 为 $A \subset M$ 关于 d_{CC}的豪斯多夫维数。

卡诺–卡拉西奥多里距离 d_{CC} 诱导出 M的标准拓扑，但 M的豪斯多夫维数 $\dim_H M$等于 $2n+2$，这与其拓扑维数并不相同。更多详情请参见 [Gro96] 。

2.2. 田中–韦伯斯特联络。接触形式 θ 在 TM上诱导出一个典范联络 ∇，称为关于 θ的田中–韦伯斯特联络。它定义为

$$\nabla T = 0, \quad \nabla Z_\alpha = \omega_\alpha{}^\beta Z_\beta, \quad \nabla Z_{\overline{\alpha}} = \omega_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} Z_{\overline{\beta}},$$

其中 $\omega_\alpha{}^{\overline{\beta}} = \omega_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}$满足以下结构方程:

$$d\theta^\beta = \theta^\alpha \wedge \omega_\alpha{}^\beta + A^{\beta}{}_{\overline{\alpha}} \theta \wedge \theta^{\overline{\alpha}},$$
$$dh_{\alpha\overline{\beta}} = \omega_\alpha{}^\gamma h_{\gamma\overline{\beta}} + h_{\alpha\overline{\gamma}} \omega_{\overline{\beta}}{}^{\overline{\gamma}}.$$

张量 $A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}$ 是对称的，称为田中–韦伯斯特挠率。次拉普拉斯算子 Δ_b 定义为

$$\Delta_b u \coloneqq -\nabla^\alpha \nabla_\alpha u - \nabla^{\overline{\beta}} \nabla_{\overline{\beta}} u.$$

田中–韦伯斯特联络的曲率形式 $\Omega_\alpha{}^\beta \coloneqq d\omega_\alpha{}^\beta - \omega_\alpha{}^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\beta$ 满足

$$\Omega_\alpha{}^\beta = R_\alpha{}^\beta{}_{\rho\overline{\sigma}} \theta^\rho \wedge \theta^{\overline{\sigma}} \qquad \text{modulo } \theta, \theta^\rho \wedge \theta^\gamma, \theta^{\overline{\gamma}} \wedge \theta^{\overline{\sigma}}.$$

我们将张量 $R_\alpha{}^\beta{}_{\rho\sigma}$ 称为田中–韦伯斯特曲率。该张量具有如下对称性

$$R_{\alpha\overline{\beta}\rho\overline{\sigma}} = R_{\rho\overline{\beta}\alpha\overline{\sigma}} = R_{\alpha\overline{\sigma}\rho\overline{\beta}}.$$

对指标进行缩并得到田中–韦伯斯特里奇曲率 $\mathrm{Ric}_{\rho\sigma} = R_\alpha{}^\alpha{}_{\rho\sigma}$和田中–韦伯斯特标量曲率 $R_\theta = \mathrm{Ric}_\rho{}^\rho$。当 $n \geq 2$时，切尔恩张量 $S_{\alpha\beta\rho\sigma}$ 是 $R_{\alpha\beta\rho\sigma}$的完全无迹部分；该张量是CR凡何中外尔张量的对应物。已知切尔恩张量恒等于零，当且仅当 $(M, T^{1,0}M)$ 是球形的 [CM74]。

在 M上固定一个接触形式 θ。那么，任意接触形式 $\hat{\theta}$ 都可写成 $u^{2/n}\theta$，其中

$$u \in C^\infty_+(M) \coloneqq \{\, u \in C^\infty(M) \mid u > 0 \,\}.$$

在此共形变换下，相对于 $\hat{\theta}$ 的田中–韦伯斯特标量曲率 $R_{\hat{\theta}}$ 满足

$$R_{\hat{\theta}} = u^{-1-2/n}[(2 + 2/n)\Delta_b u + R_\theta u];$$

例如，参见 [JL87，第 174]页。

2.3. 萨萨基流形。 萨萨基流形是伪厄米流形中的一个重要类别。关于全面介绍，参见 [BG08] 。

*Sasakian*流形是一个田中–韦伯斯特挠率为零的伪Hermitian流形（S， $T^{1,0}S$， θ）。该条件等价于要求 θ 的Reeb向量场 T 保持CR结构 $T^{1,0}S$。

Sasakian流形的一个典型例子是与负Hermitian全纯线丛相关联的圆丛。设 Y 是一个 n维复流形，且（L， h）是 Y 上的一个Hermitian全纯线丛，使得

$$\omega = -\sqrt{-1}\Theta_h = dd^c \log h$$

是 Y 上的凯勒形式，其中 $d^c \coloneqq (\sqrt{-1}/2)(\overline{\partial} - \partial)$。考虑圆丛

$$S = \{\, v \in L \mid h(v, v) = 1 \,\}$$

在 Y 上，它是 L 总空间中的实超曲面，并具有典范 CR 结构 $T^{1,0}S$。1-形式 $\theta = d^c \log h|_S$是 S 上的接触形式，其田中–韦伯斯特标量曲率 R_θ 与 p^*R_ω重合，其中 $p\colon S \to Y$是投影，而 R_ω 是 ω的标量曲率。此外，CR 流形（S，$T^{1,0}S$）是球形的，当且仅当（Y，ω）是 Bochner 平坦的。更多详情请参见 [Tak22，第 2 节。3]

2.4. **CR 自同构群的 Schoen 定理**。从对称性的观点来看，CR 球面与海森堡群在CR几何中具有特殊地位。为说明这一点，我们先给出若干定义。

定义 2.1. 设 $(M, T^{1,0}M)$ 为维数 $2n+1$ 的严格伪凸 CR 流形。CR 自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^{1,0}M)$ 由配备紧开拓扑的所有 CR 微分同胚 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ 组成。我们称 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^{1,0}M)$ 在 M 上适当地作用，是指对任意紧集 $K \subset M$，$\{\, \varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^{1,0}M) \mid \varphi(K) \cap K \neq \emptyset \,\}$在 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^{1,0}M)$ 中相对紧。

CR 自同构群的 Schoen 定理指出，$\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^{1,0}M)$ 的作用是适当的，除非 $(S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})$ 或 $(\mathbb{H}^{2n+1}, T^{1,0}\mathbb{H}^{2n+1})$。

定理 *2.2*（[*Sch95*，定理 *3.3'* 和 *3.4'*]）。设 $(M, T^{1,0}M)$ 是一个维数为 $2n+1$ 的严格伪凸 *CR* 流形。如果 $(M, T^{1,0}M)$ 的 *CR* 自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^{1,0}M)$ 在 M 上的作用不是适当的，那么 $(M, T^{1,0}M)$ 与 $(S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})$ 或 $(\mathbb{H}^{2n+1}, T^{1,0}\mathbb{H}^{2n+1})$ *CR* 微分同胚。

2.5. S^{2n+1} **与** $\mathbb{H}^{2n+1}$**的 CR 自同构群**。该$(n+1)$维复双曲空间是配备了

$$\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}} := \{\, z = (z^1, \ldots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z|^2 < 1 \,\}$$

完备 Kähler–Einstein 形式的球

$$\omega_{\mathbb{B}} := -\frac{1}{2} dd^c \log(1 - |z|^2).$$

用 $d(z, w)$ 表示 $z \in \mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 与 $w \in \mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 之间的测地距离。复测地线是复直线与 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 的非空交集。$\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 的边界S^{2n+1} 具有第 2.1 节中描述的典范 CR 结构 $T^{1,0}S^{2n+1}$。复测地线的边界是 S^{2n+1} 中的一个圆，它与 S^{2n+1}上的典范接触结构横截相交；这种圆称为链；更一般的定义见 [CM74]。

设 $U(n+1, 1)$ 为关于由 $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ 确定的厄米形式的酉群；也就是说，

$$U(n+1,1) := \left\{ A \in GL(n+2, \mathbb{C}) \;\middle|\; A^* \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n+1} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n+1} \end{pmatrix} \right\}.$$

该群通过分式线性变换同时作用在 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 和 S^{2n+1} 上

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix} \cdot z := \frac{c + Dz}{a + bz}. \tag{2.1}$$

此作用保持凯勒形式 $\omega_{\mathbb{B}}$ 以及 CR结构 $T^{1,0}S^{2n+1}$。映射 (2.1) 等于恒等映射，当且仅当该矩阵与

单位矩阵成比例。因此， $U(n+1,\ 1)$ 的作用可下降为射影酉群 $PU(n+1,\ 1)$ 的作用。此外，已知

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}},\omega_{\mathbb{B}})=\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(S^{2n+1},T^{1,0}S^{2n+1})=PU(n+1,1);$$

例如参见 [BS76]。

在 Cayley变换下，海森堡群可与去掉无穷远点的 S^{2n+1} 认同。特别地，海森堡群的 CR 自同构群与固定无穷远点的球面的 CR 自同构群同构。更准确地说，

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(\mathbb{H}^{2n+1},T^{1,0}\mathbb{H}^{2n+1})=\mathbb{H}^{2n+1}\rtimes CU(n),$$

其中 $CU(n)$ 是共形酉群。

引理 2.3。 设 $(M,T^{1,\ 0}M)$ 是维数为 $2n+1$ 的紧致连通严格伪凸 *CR* 流形。若其万有覆盖与海森堡群 *CR* 微分同胚，则 $Y(M,T^{1,\ 0}M)=0$。

证明。 基本群 $\pi_1(M)$ 可视为海森堡群的 CR 自同构群的一个离散子群。由于 $\pi_1(M)$ 在海森堡群上适当不连续地作用，因此它是 $\mathbb{H}^{2n+1}\rtimes U(n)$ 的一个子群 [BS76, 命题 5.6]。特别地， $\pi_1(M)$ 保持 $\mathbb{H}^{2n+1}$ 上的标准接触形式，因此 $(M,\ T^{1,\ 0}M)$ 存在一个 Tanaka–Webster曲率为零的接触形式。这意味着 $Y(M,\ T^{1,\ 0}M)=0$。 □

3. CR Yamabe问题

设 $(M,\ T^{1,\ 0}M)$ 是一个维数为 $2n+1$ 的紧致连通严格伪凸 CR 流形。考虑由 (1.1) 给出的 CR Yamabe 泛函 $\mathfrak{F}$。注意，对于任意常数 $c>0$， $\mathfrak{F}(c\theta)=\mathfrak{F}(\theta)$。与 Yamabe 问题一样，泛函 $\mathfrak{F}(\theta)$ 可以写成非线性 Rayleigh 商

$$\mathfrak{R}_\theta(u)\coloneqq\mathfrak{F}(u^{2/n}\theta)=\frac{\int_M\left[(2+2/n)|du|_\theta^2+R_\theta u^2\right]\mathrm{vol}_\theta}{(\int_M u^{2+2/n}\,\mathrm{vol}_\theta)^{n/(n+1)}},$$

其中 $|du|_\theta^2=L_\theta^*(du|_{HM},\ du|_{HM})$ [JL87]。对 $C^\infty_+(M)$ 上的 $\mathfrak{R}_\theta$ 取下确界，定义*CR Yamabe* 常数

$$Y(M,T^{1,0}M)\coloneqq\inf_{u\in C^\infty_+(M)}\mathfrak{R}_\theta(u),$$

它是 $(M,\ T^{1,\ 0}M)$ 的 CR不变量。与共形情形类似，有

$$Y(M,T^{1,0}M)\le Y(S^{2n+1},T^{1,0}S^{2n+1})=2n(n+1)\pi=:Y_n;$$

参见 [JL87, 定理 3.4(b)] 和 [JL88, 推论 C]。此外，若 $Y(M,T^{1,0}M)<Y_n$ [JL87, 定理 3.4(c)] 或 $(M,T^{1,0}M)=(S^{2n+1},T^{1,0}S^{2n+1})$ [JL88, 定理 A]，则泛函 $\mathfrak{R}_\theta$存在极小元。自然会问，对于与 $(S^{2n+1},T^{1,0}S^{2n+1})$ 不 CR 微分同胚的紧致严格伪凸CR流形， $Y(M,T^{1,0}M)<Y_n$ 是否成立。Jerison 和 Lee [JL89, 定理 A] 证明了，当 $n\ge 2$ 且 $(M,T^{1,0}M)$ 非球形时，$Y(M,T^{1,0}M)<Y_n$ 成立。若 $(M,T^{1,0}M)$ 是球形且 $Y(M,T^{1,0}M)>0$, Cheng、Chiu 和 Yang [CCY14] 证明，在发展映射 $\Phi\colon M\to S^{2n+1}$ 为单射这一假设下，$Y(M,T^{1,0}M)<Y_n$ 仍成立；对于 $n\ge 3$ 情形，该条件自动满足。若$n=1$，结合 [CMY17, 定理 1.1] 和 [Tak20, 定理 1.1] 可得，若 $(M,T^{1,0}M)$ 可嵌入，则$Y(M,T^{1,0}M)<Y_1$成立。注意，Rossi 球是一个不可嵌入CR流形的

例子，它没有泛函的极小元$\mathfrak{R}_\theta$ [CMY23, 定理 1.3]。

4. 复双曲几何

本节回顾复双曲几何的一些基本事实；更多详情请参见[Gol99、CI99、Kap 22] 及其中的参考文献。

4.1. 复双曲克莱因群。设 Γ 是$PU(n+1,\ 1)$的一个离散子群，称为复双曲克莱因群。注意，Γ 是离散的，当且仅当 Γ 在 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 上适当不连续地作用。我们用 X_Γ表示 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 关于 Γ的商空间。 Γ 在 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 上的作用是自由的，当且仅当 Γ 无挠；此时， X_Γ 是一个光滑复流形。

Λ_Γ是 $PU(n+1, 1)$的离散子群 Γ 的极限集，指 Γ的轨道中任意一点在 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 中的聚点集合，它是 S^{2n+1}的一个闭子集。若#$\Lambda_\Gamma \le 2$，则称 Γ 为初等的；否则称 Γ 为非初等的。若 Γ 是非初等的，则 Λ_Γ 是 S^{2n+1}中最小的非空 Γ不变闭子集；例如参见 [Kap22，命题 2] 。 Λ_Γ的补集$\Omega_\Gamma \coloneqq S^{2n+1} \setminus \Lambda_\Gamma$ 称为不连续域。这是 S^{2n+1} 上 Γ 适当不连续地作用的最大开子集。若Ω_Γ 非空，则用 M_Γ （分别用X_Γ）表示 Ω_Γ （分别为 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}} \cup \Omega_\Gamma$）关于 Γ的商空间。 Γ 在Ω_Γ 上的作用是自由的，当且仅当 Γ 无挠；此时， X_Γ 是一个边界为 M_Γ的光滑复流形，而 M_Γ 是一个球面CR流形。

设 Γ 为 $PU(n+1,1)$ 的满足 $\#\Lambda_\Gamma \ge 2$ 的离散子群。 Λ_Γ 的闭凸包 C_Γ 是 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 中所有边界包含 Λ_Γ 的闭凸子集的交集。该子集在 Γ 下不变；若 C_Γ 关于 Γ 的商空间是紧的，则称 Γ 为凸余紧 。该条件等价于 X_Γ 是紧的 [Bow95]。特别地，若 Γ 是无挠且凸余紧的，则 $(M_\Gamma, T^{1,0}M_\Gamma)$ 是紧嵌入严格伪凸CR流形。

取 $z, w \in \mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 。对于 $s > 0$，我们定义

$$\Phi_s(z,w) \coloneqq \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(z,\gamma w)} \in (0, +\infty].$$

临界指数的 Γ为

$$\delta_\Gamma \coloneqq \inf\{\, s \in (0,+\infty) \mid \Phi_s(z,w) < +\infty \,\};$$

注意，条件 $\Phi_s(z,w) < +\infty$ 与 $z, w \in \mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 的选取无关。已知 $0 \le \delta_\Gamma \le 2n+2$ 且 $\delta_\Gamma = 0$ 当且仅当 Γ 是初等的。此外，若 Γ 是凸余紧的，则有 $\delta_\Gamma = \dim_H \Lambda_\Gamma$ [CI99，定理 6.1]。

Nayatani [Nay99], Yue [Yue99], 和 Wang [Wan03] 分别利用 Γ的 Patterson–Sullivan 测度，在 Ω_Γ 上构造了一个 Γ-不变的接触形式 θ_Γ 。若 Γ 无挠，则该接触形式下降为 M_Γ上的接触形式。为简便起见，我们仍将其记作 θ_Γ 。

定理 4.1 ([Nay99, 定理 2.4(ii)])。 若 $\#\Lambda_\Gamma \ge 2$ 且 $\delta_\Gamma < n$，则 θ_Γ 的田中–韦伯斯特标量曲率为正，除非极限集 Λ_Γ 适当地包含于某条链中。若 Λ_Γ 适当地包含于一条链 C中，则 θ_Γ 的田中–韦伯斯特标量曲率非负，并且恰好在 $C \setminus \Lambda_\Gamma$上为零。

特别地，若 Γ 是无挠凸余紧的，且 $\delta_\Gamma < n$，则 CR Yamabe 常数 $Y(M_\Gamma, T^{1,\ 0}M_\Gamma)$ 必须为正。

5. 有限连通覆盖的无限塔

5.1. 有限群完备化与剩余有限性。为证明我们的主定理，我们考虑有限连通覆盖的无限塔。存在这样的塔，等价于基本群有无限多个有限指数子群。有限群完备化编码了有限指数正规子群的信息。

定义 5.1. 设 Γ 是一个离散群。Γ 的有限群完备化 $\widehat{\Gamma}$ 是逆极限

$$\widehat{\Gamma} := \varprojlim_{\substack{N \lhd \Gamma \\ [\Gamma : N] < \infty}} \Gamma/N.$$

群 Γ 是一个紧致、豪斯多夫且全不连通的拓扑群。它有一个稠密像的自然态射 $\iota_\Gamma \colon \Gamma \to \widehat{\Gamma}$。我们称 Γ 具有无限有限群完备化，如果 $\widehat{\Gamma}$ 是无限的；等价地，Γ 有无穷多个有限指数正规子群。

有限群完备化是无限的这一性质在满同态下保持不变。

引理 5.2. 设 Γ 和 Γ' 是离散群，且 $\phi \colon \Gamma' \to \Gamma$ 是一个满群同态。如果 Γ 的有限群完备化是无限的，那么 Γ' 也是如此。

证明。群同态 ϕ 诱导出连续群同态 $\hat{\phi} \colon \widehat{\Gamma}' \to \widehat{\Gamma}$。由于 $\widehat{\Gamma}'$ 是紧致的，而 $\widehat{\Gamma}$ 是豪斯多夫的，因此像 $\hat{\phi}(\widehat{\Gamma}')$ 在 $\widehat{\Gamma}$ 中是闭集。此外，$\hat{\phi}(\widehat{\Gamma}')$ 包含

$$\hat{\phi}(\iota_{\Gamma'}(\Gamma')) = \iota_\Gamma(\phi(\Gamma')) = \iota_\Gamma(\Gamma),$$

它在 $\widehat{\Gamma}$ 中稠密。因此，$\hat{\phi}(\widehat{\Gamma}')$ 与 $\widehat{\Gamma}$ 重合，故 $\hat{\phi}$ 是满射。由 $\#\Gamma = \infty$ 可得 $\#\Gamma' = \infty$。□

接下来我们讨论剩余有限性，也就是说，所有有限指数正规子群的交是平凡的。

定义 5.3。设 Γ 是一个离散群。若对任意 $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$，都存在一个有限指数正规子群 $N \lhd \Gamma$，使得 $\gamma \notin N$，则称其为剩余有限的。

这一条件等价于 $\iota_\Gamma \colon \Gamma \to \widehat{\Gamma}$ 的单射性。注意，若 Γ 是无限且剩余有限的，则 Γ 的有限群完备化是无限的。已知有限生成线性子群是剩余有限的。

引理 5.4 (塞尔伯格–马尔采夫引理 [Rat19, 第 7 节。6])。如果 $\Gamma \subset GL(m, \mathbb{C})$ 是有限生成线性子群，那么 Γ 是剩余有限的。

群 $PU(n+1, 1)$ 可以识别为 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})$，它不是 $GL(n+2, \mathbb{C})$ 的子群。不过，与引理 5.4 相同的结论仍然成立。

命题 5.5. 若 $\Gamma \subset PU(n+1, 1)$ 是有限生成离散子群，则 Γ 是剩余有限的。

证明. 设 $\mathfrak{g}$为 $U(n+1,1)$ 的李代数，且 Ad： $U(n+1,1) \to GL(\mathfrak{g})$ 为伴随表示。Ad 的核与 $U(n+1,1)$ 的中心 Z重合，且 $U(n+1,1)/Z$同构于 $PU(n+1,1)$。因此我们得到一个单射群同态 $PU(n+1,1) \to GL(\mathfrak{g})$。塞尔伯格–马尔采夫引理表明， $PU(n+1,1)$ 的任意有限生成离散子群都是剩余有限的。□

5.2. **有限连通覆盖的无限塔**。设 M 为一个紧致连通流形。所谓 M上次数为$(m_j)_{j=1}^{\infty}$的有限连通覆盖的无限塔，是指满足 $M_0 = M$ 以及 $m_j \coloneqq \deg \pi_j \geq 2$的有限连通覆盖序列$(\pi_j\colon M_j \to M_{j-1})_{j=1}^{\infty}$。对 $0 \leq l \leq j$，令

$$\Pi_j^l \coloneqq \pi_{l+1} \circ \cdots \circ \pi_j \colon M_j \to M_l$$

约定 $\Pi_j^j = \mathrm{Id}_{M_j}$。注意 Π_j^l 也是次数为$m_{l+1} \cdots m_j$的覆盖映射。我们称无限塔$(\pi_j\colon M_j \to M_{j-1})_{j=1}^{\infty}$是正规的，如果对每个 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，覆盖 $\Pi_j^0\colon M_j \to M_0 = M$ 都是正规的，或等价地，$(\Pi_j^0)_*\pi_1(M_j)$是 $\pi_1(M)$的正规子群。设 M 为 M 的万有覆盖，并设$\sim$ $\sim\widetilde{\pi}_j\colon M \to M_j$ 为 M_j 的万有覆盖映射。注意，由于$\deg \Pi_j^0 \to \infty$ 当 $j \to \infty$， M 必为非紧。

假设 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 具有无限的有限商完备化。在此假设下，Bettiol 和 Piccione [BP18，第 3 节3] 构造了如下的有限连通覆盖无限塔。存在一个嵌套序列

$$\cdots \subset \Gamma_j \subset \cdots \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0 = \pi_1(M)$$

$\sim$个有限指数且指数至少为二的正规子群。于是 $M_j \coloneqq M/\Gamma_j$ 具有典范有限覆盖$\pi_j\colon M_j \to M_{j-1}$，其次数为 $[\Gamma_{j-1}\colon \Gamma_j]$，从而在 M上定义了一个次数为 $(m_j = [\Gamma_{j-1}\colon \Gamma_j])_{j=1}^{\infty}$的正则有限连通覆盖无限塔。

6. 定理 1.1 的证明

本节在一般情形下给出一个条件，在该条件下，万有覆盖上具有常 Tanaka–Webster 标量曲率的完备接触形式的几何模空间是无限的。

命题 *6.1.* 设 $(M, T^1, {}^0M)$ 是一个维数为 $2n+1$的紧致连通严格伪凸 *CR* 流形。假设存在一个位于 M 上的次数为 $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ 的有限连通覆盖无限塔 $(\pi_j\colon M_j \to M_{j-1})_{j=1}^{\infty}$，以及一列定义在 $(M_j, T^1, {}^0M_j)$ 上的单位体积 *CR Yamabe* 极小化子 $(\theta_j)_{j=0}^{\infty}$，使得对每个$\sim$ $\sim j \in \mathbb{Z}_{>0}$，都存在 $\Phi_j \in \mathit{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^1, {}^0M)$ 和 $c_j \in \mathbb{R}_{>0}$满足 $\Phi_j^*\widetilde{\pi}^*\theta_0 = c_j\widetilde{\pi}_j^*\theta_j$。那么 $Y(M, T^1, {}^0M) \leq 0$。

证明。反设 $Y(M, T^{1,0}M) > 0$。设 $F \subset \widetilde{M}$为 $\pi_1(M)$ 的基本域，并令 Aut$(\widetilde{\pi}_j)$ 为 $\widetilde{\pi}_j$ 的覆盖变换群。注意，Aut$(\widetilde{\pi}_j) = \pi_1(M_j)$ 是 Aut$(\widetilde{\pi}) = \pi_1(M)$ 的一个子群，其指数为$m_1 \cdots m_j$。取 $\tau_j \in$ Aut$(\widetilde{\pi})$ 使得

$$\mathrm{Vol}_{\tau_j^*\widetilde{\pi}_j^*\theta_j}(F) = \min\left\{ \mathrm{Vol}_{\sigma^*\widetilde{\pi}_j^*\theta_j}(F) \;\middle|\; \sigma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\pi}) \right\}.$$

由此得到 Vol$_{\tau_j^*\widetilde{\pi}_j^*\theta_j}(F) \leq (m_1 \cdots m_j)^{-1}$。选取 $\sigma_j \in$ Aut$(\widetilde{\pi})$，使得

$$\Psi_j \coloneqq \sigma_j \circ \Phi_j \circ \tau_j \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(\widetilde{M}, T^{1,0}\widetilde{M})$$

满足 $\Psi_j(F) \cap F \neq \emptyset$。考虑接触形式

$$\tilde{\theta}_j \coloneqq \Psi_j^* \widetilde{\pi}^* \theta_0 = \tau_j^* \Phi_j^* \sigma_j^* \widetilde{\pi}^* \theta_0 = \tau_j^* \Phi_j^* \widetilde{\pi}^* \theta_0 = c_j \tau_j^* \widetilde{\pi}_j^* \theta_j$$

$\widetilde{\ }$在 M 上并令

$$\mathcal{A}(\tilde{\theta}_j) \coloneqq \operatorname{Vol}_{\tilde{\theta}_j}(F)^{-n/(n+1)} \int_F R_{\tilde{\theta}_j} \operatorname{vol}_{\tilde{\theta}_j}.$$

一方面，

$$\mathcal{A}(\tilde{\theta}_j) = Y(M, T^{1,0}M) \operatorname{Vol}_{\widetilde{\pi}^* \theta_0}(\Psi_j(F))^{1/(n+1)} > 0 \tag{6.1}$$

因为 $R_{\theta_0} = Y(M, T^{1,0}M)$。另一方面，$\mathcal{A}$的尺度不变性以及假设 $R_{\theta_j} = Y(M_j, T^{1,0}M_j)$ 蕴含

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{\theta}_j) &= \operatorname{Vol}_{\tau_j^* \widetilde{\pi}_j^* \theta_j}(F)^{-n/(n+1)} \int_F R_{\tau_j^* \widetilde{\pi}_j^* \theta_j} \operatorname{vol}_{\tau_j^* \widetilde{\pi}_j^* \theta_j} \\ &= Y(M_j, T^{1,0}M_j) \operatorname{Vol}_{\tau_j^* \widetilde{\pi}_j^* \theta_j}(F)^{1/(n+1)} \\ &\leq Y(M_j, T^{1,0}M_j)(m_1 \cdots m_j)^{-1/(n+1)}. \end{aligned}$$

由 $0 < Y(M_j, T^{1,0}M_j) \leq Y(S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})$ 可知，$\mathrm{A}(\tilde{\theta}_j) \to 0$当$j \to \infty$时，从而 (6.1) 给出 $\operatorname{Vol}_{\widetilde{\pi}^* \theta_0}(\Psi_j(F)) \to 0$ 当 $j \to \infty$ 时。因此序列$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }(\Psi_j)_{j=1}^\infty$在 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(M, T^{1,0}M)$ 中不可能是预紧的。由此及定理 2.2 可得$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }(M, T^{1,0}M)$ 与 $(\mathbb{H}^{2n+1}, T^{1,0}\mathbb{H}^{2n+1})$ CR 微分同胚。引理 2.3 蕴含 $Y(M, T^{1,0}M) = 0$，这是一个矛盾。□

为了证明我们的主要结果，我们证明：如果 $(M, T^{1,0}M)$ 的 CR Yamabe 常数为正，且其基本群的有限群完备化是无限的，那么我们可以构造一个有限覆盖 M_j of M，使得对任意$j \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\#\,\mathcal{M}(M_j, T^{1,0}M_j) \geq j$。

命题 6.2. 设 $(M, T^{1,0}M)$ 是一个维数为 $2n+1$ 的紧致连通严格伪凸 CR 流形，满足假设 (♦)，且 $\pi_1(M)$ 的有限群完备化是无限的。那么，存在一个定义在 M 上的有限连通覆盖组成的正则无限塔 $(\pi_j\colon M_j \to M_{j-1})_{j=1}^\infty$，以及一列 $(\theta_j)_{j=0}^\infty$，其中的元素是在 $(M_j, T^{1,0}M_j)$ 上体积为单位的 CR Yamabe 极小化子，使得对任意 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，M_j 上的接触形式 $((\Pi_j^l)^* \theta_l)_{l=0}^j$ 两两非齐次，且具有正的常数田中–韦伯斯特标量曲率。

证明。我们通过归纳法构造 M_j 和 θ_j。假设 $\Pi_j^0\colon M_j \to M$ 是一个有限连通正规覆盖，且 θ_j 是 $(M_j, T^{1,0}M_j)$上的单位体积 CR Yamabe 极小化子。注意，由于 Π_j^0 是有限覆盖，$R_{\theta_j} = Y(M_j, T^{1,0}M_j) > 0$。取有限指数正规子群 $\Gamma \lhd \pi_1(M)$，使得 $\Gamma \subset \pi_1(M_j)$，并且

$$[\pi_1(M_j) : \Gamma] > \left(\frac{Y(S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})}{Y(M_j, T^{1,0}M_j)} \right)^{n+1};$$

此类 Γ 的存在性源于假设：$\pi_1(M)$具有无限的 profinite$\widetilde{\ }$completion。于是，$\pi_{j+1}\colon M_{j+1} \coloneqq M/\Gamma \to M_j$是一个有限连通覆盖，且$\Pi_{j+1}^0 \coloneqq \Pi_j \circ \pi_{j+1}\colon M_{j+1} \to M$是正规覆盖。取 $(M_{j+1}, T^{1,0}M_{j+1})$ 上的一个单位体积 CR Yamabe 极小化子 θ_{j+1}，其存在性由假设（♦）保证。

这个接触形式满足

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\pi_{j+1}^*\theta_j) &= Y(M_j, T^{1,0}M_j)\,\mathrm{Vol}_{\pi_{j+1}^*\theta_j}(M_{j+1})^{1/(n+1)}\\ &= Y(M_j, T^{1,0}M_j)[\pi_1(M_j):\Gamma]^{1/(n+1)}\\ &> Y(S^{2n+1}, T^{1,0}S^{2n+1})\\ &\geq Y(M_{j+1}, T^{1,0}M_{j+1}) = \mathfrak{F}(\theta_{j+1}).\end{aligned}$$

该构造产生了一个位于 M 上、由有限连通覆盖构成的正则无限塔 $(\pi_j\colon M_j \to M_{j-1})_{j=1}^{\infty}$，以及一列定义在 $(M_j, T^{1,0}M_j)$ 上的单位体积 CR Yamabe 极小化子 $(\theta_j)_{j=0}^{\infty}$，使得 $\mathfrak{F}(\theta_{j+1}) < \mathfrak{F}(\pi_{j+1}^*\theta_j)$。尚需证明，对于每个 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，$((\Pi_j^l)^*\theta_l)_{l=0}^{j}$ 两两非齐次。若 $0 \leq l \leq j-1$，则

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}((\Pi_j^l)^*\theta_l) = \mathfrak{F}((\Pi_j^{l+1})^*\pi_{l+1}^*\theta_l) &= \mathfrak{F}(\pi_{l+1}^*\theta_l)(\deg \Pi_j^{l+1})^{1/(n+1)}\\ &> \mathfrak{F}(\theta_{l+1})(\deg \Pi_j^{l+1})^{1/(n+1)}\\ &= \mathfrak{F}((\Pi_j^{l+1})^*\theta_{l+1}).\end{aligned}$$

由此得到

$$\mathfrak{F}(\theta_j) < \mathfrak{F}((\Pi_j^{j-1})^*\theta_{j-1}) < \cdots < \mathfrak{F}((\Pi_j^0)^*\theta_0).$$

由 $\mathfrak{F}$ 的尺度不变性可知，接触形式 $((\Pi_j^l)^*\theta_l)_{l=0}^{j}$ 在 M_j 上两两非齐次。□

~ ~每个接触形式 θ_j 在万有覆盖 M 上的提升 θ_j，都是具有常数田中 – 韦伯斯特标量曲率的完备接触形式，但它们在 M 上可能是齐次的。不过，$(\theta_j)_{j=0}^{\infty}$ 存在一个子序列，其中的元素在 M 上两两非齐次。

定理 *1.1* 的证明。根据命题 6.2，我们可以取一个有限连通覆盖的正则无限塔 $(\pi_j\colon M_j \to M_{j-1})_{j=1}^{\infty}$，其覆盖 M，并取一列 $(\theta_j)_{j=0}^{\infty}$，其中的元素是 $(M_j, T^{1,0}M_j)$ 上的单位体积 CR Yamabe 极小化子。于是，$\tilde{\theta}_j := \widetilde{\pi}_j^*\theta_j$ 是~ M 上的接触形式，满足 $R_{\tilde{\theta}_j} = Y(M_j, T^{1,0}M_j)$。反设

$$\left\{\, [\tilde{\theta}_j] \;\middle|\; j = 0, 1, \dots \right\} \subset \mathcal{M}(\widetilde{M}, T^{1,0}\widetilde{M})$$

是有限的。取一个子序列后，我们可以选取 $\Phi_j \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{CR}}(\widetilde{M}, T^{1,0}\widetilde{M})$ 和 $c_j \in \mathbb{R}_{>0}$，使得

$$\Phi_j^*\widetilde{\pi}^*\theta_0 = \Phi_j^*\tilde{\theta}_0 = c_j\tilde{\theta}_j = c_j\widetilde{\pi}_j^*\theta_j.$$

这与命题 6.1 矛盾。□

7. 球面的补集

7.1. 球面的补集。 令 $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}^{k+1} = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{k+1} \;\middle|\; |x|^2 < 1 \right\}$ 为 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中的单位球，其中 $0 \leq k \leq n-1$。令 Γ_0 为 $PO(k+1,1) = SO_+(k+1,1)$ 的无挠离散子群，使得商空间 $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}^{k+1}/\Gamma_0$ 是一个紧流形。这个假设意味着 Γ_0 是一个有限生成无限群。我们通过以下映射的复合，将 $SO_+(k+1,1)$ 嵌入到 $PU(n+1,1)$ 中：

$$SO_+(k+1,1) \to U(n+1,1); \qquad A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

以及典范投影 $U(n+1,1) \to PU(n+1,1)$。将 Γ_0 在此嵌入下的像记为 Γ。群 Γ 是一个无挠离散子群，属于

$PU(n+1,\ 1)$，其极限集 Λ_Γ 是 $\mathbb{R}$-球面 $S^k_{\mathbb{R}}$。Λ_Γ 的闭凸包C_Γ 与 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 中的全测地且全实子流形 $\mathbb{B}^{k+1}_{\mathbb{R}}\times\{0\}$重合。因此，$C_\Gamma/\Gamma$ 与 $\mathbb{B}^{k+1}_{\mathbb{R}}/\Gamma_0$微分同胚，而后者是紧的。因此 Γ 是凸余紧的，并且

$$\delta_\Gamma = \dim_H \Lambda_\Gamma = k < n.$$

定理 *1.2* 的证明。 由于 $S^{2n+1}\setminus S^k_{\mathbb{R}}$ 是单连通的，$\pi_1(M_\Gamma)\cong\Gamma$ 且 $\widetilde{M}_\Gamma$与 $S^{2n+1}\setminus S^k_{\mathbb{R}}$CR 微分同胚。特别地，$M_\Gamma$ 的发展映射是单射。我们需要验证假设（♦）成立。由 $\delta_\Gamma < n$可知，$Y(M_\Gamma, T^{1,0}M_\Gamma) > 0$。正如我们所指出的，$M_\Gamma$的发展映射是单射。此外，$M_\Gamma$ 是普遍可嵌入的，因为 M_Γ的任意有限连通覆盖都具有 $M_{\Gamma'}$ 的形式，其中 $\Gamma'\subset\Gamma$ 是一个有限指数子群。此外，根据命题 5.5，$\pi_1(M_\Gamma)$ 是无限且剩余有限的，因此其有限群完备化是无限的。定理 1.1 表明 $\#\mathcal{M}(S^{2n+1}\setminus S^k_{\mathbb{R}}) = \infty$。□

7.2. 补空间 $\mathbb{C}$球面。假设 $n\geq 3$。设 Γ_0 是 $U(k+1,\ 1)$ 的无挠离散子群，且满足 $0\leq k<(n-2)/2$，使得商空间$\mathbb{B}^{k+1}_{\mathbb{C}}/\Gamma_0$ 是一个紧流形。此假设意味着 Γ_0 是一个有限生成无限群。我们通过以下映射的复合将 $U(k+1,\ 1)$ 嵌入到 $PU(n+1,\ 1)$ 中：

$$U(k+1,1)\to U(n+1,1);\qquad A\mapsto\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}$$

以及典范投影 $U(n+1,\ 1)\to PU(n+1,\ 1)$。记 Γ 为 Γ_0 在此嵌入下的像。群 Γ 是 $PU(n+1,\ 1)$ 的无挠离散子群，其极限集 Λ_Γ 是 $\mathbb{C}$- 球面 $S^{2k+1}_{\mathbb{C}}$。Λ_Γ 的闭凸包 C_Γ 与 $\mathbb{B}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ 中的全测地复子流形 $\mathbb{B}^{k+1}_{\mathbb{C}}\times\{0\}$ 重合。因此，C_Γ/Γ 与 $\mathbb{B}^{k+1}_{\mathbb{C}}/\Gamma_0$ 微分同胚，而后者是紧的。故 Γ 是凸余紧的，并且

$$\delta_\Gamma = \dim_H \Lambda_\Gamma = 2k+2 < n.$$

定理 *1.3* 的证明。 由于 $S^{2n+1}\setminus S^{2k+1}_{\mathbb{C}}$ 是单连通的，$\pi_1(M_\Gamma)\cong\Gamma$ 且$\widetilde{M}_\Gamma$与 $S^{2n+1}\setminus S^{2k+1}_{\mathbb{C}}$ CR 微分同胚。由 $\delta_\Gamma<n$可知，$Y(M_\Gamma, T^{1,0}M_\Gamma)$ 为正，这保证了假设 (♦) 成立。此外，根据命题 5.5，$\pi_1(M_\Gamma)$ 是无限且剩余有限的，因此其剩余有限完备化是无限的。定理 1.1 蕴含 $\#\mathcal{M}(S^{2n+1}\setminus S^{2k+1}_{\mathbb{C}}) = \infty$。□

8. 其他应用

8.1. 应用 1：凯勒流形上的圆丛。设 Y 是一个紧致、连通的复流形，其复维数为 n，且 (L,h) 是 Y 上的一个Hermitian全纯线丛，使得

$$\omega = -\sqrt{-1}\Theta_h = dd^c\log h$$

是 Y上的凯勒形式。考虑第 2.3 节中的佐佐木流形 $(S, T^{1,0}S, \theta)$。

定理 8.1. 若 ω 的标量曲率 R_ω 为正，且 Y 的有限群完备化是无限的，则 $\#\mathcal{M}(\widetilde{S}, T^{1,0}\widetilde{S}) = \infty$。

证明. 首先验证 $(S, T^{1,0}S)$ 满足假设 (♦)。由$R_\theta = p^* R_\omega > 0$可知， $Y(S, T^{1,0}S) > 0$。若 $n = 1$，则 $R_\omega > 0$ 推出 $Y = \mathbb{C}P^1$，这与假设 $\pi_1(Y)$ 的有限群完备化是无限的相矛盾。若$n = 2$，且 $(S, T^{1,0}S)$ 是球形的，则紧致 Bochner 平坦凯勒流形分类（[Kam94，推论 B] 或 [Bry01，推论 4.17]）表明， Y 的万有覆盖与 $\mathbb{C}P^2$ 微分同胚，这与假设 $\pi_1(Y)$ 的有限群完备化是无限的相矛盾。

纤维丛 p 的同伦群长正合列： $S \to Y$和 $\pi_0(S^1) = 0$ 表明 p_*: $\pi_1(S) \to \pi_1(Y)$ 是满射。由引理 5.2 可知， $\pi_1(S)$ 的有限群完备化是无限的。因此，定理 1.1~~给出 # $\mathcal{M}(S, T^{1,0}S) = \infty$。□

注 8.2. Serre [Ser58] 证明了每个有限群都是某个光滑复射影簇的基本群。这自然引出了一个问题：无限凯勒群是否保留了有限群的某些性质，例如剩余有限性。Toledo [Tol93]通过构造首批基本群非剩余有限的光滑射影簇实例，给出了否定回答。然而，Serre 问题的一个较弱版本仍是重要的公开问题：是否每个无限凯勒群都存在一个有限指数的真正规子群（等价地，存在一个非平凡有限商群）尚不得而知；例见 [ABC+96] 。事实上，目前已知的每个无限凯勒群的有限群完备化都是无限的。

8.2. 应用 2：莱因哈特域的边界。假设$n \geq 2$。令 M 为有界莱因哈特域的边界

$$\Omega := \left\{ w = (w^1, \dots, w^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \rho(w) < 0 \right\},$$

其中

$$\rho(w) := \sum_{j=1}^{n+1} (\log |w^j|)^2 - 1.$$

此 M 具有接触形式 $\theta := d^c \rho|_M$。考虑全纯映射

$$\Psi \colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}; \qquad (z^1, \dots, z^{n+1}) \mapsto (\exp z^1, \dots, \exp z^{n+1}).$$

拉回 $\Psi^* \rho$ 与.....重合

$$\widetilde{\rho}(z) := \sum_{j=1}^{n+1} (\operatorname{Re} z^j)^2 - 1,$$

而 Ω 在 Ψ 下的原像是管状域

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ z = (z^1, \dots, z^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n+1} (\operatorname{Re} z^j)^2 < 1 \right\}.$$

~~~~全纯映射 Ψ 诱导出 CR 映射 ψ: $M := \partial\Omega \to M$。注意，$\sim\psi$: $M \to M$ 是万有覆盖映射。作者在 [CT23 第 8] 节证明了 R_θ 是一个正的常数，且切尔恩张量处处不为零。特别地， $Y(M, T^{1,0}M) > 0$，而 $(M, T^{1,0}M)$ 不是球形的，这意味着 $(M, T^{1,0}M)$ 满足假设 (♦)。 M的基本群 $\pi_1(M)$ 同构于 $\mathbb{Z}^{n+1}$，后者的有限群完备化是无限的。因此，定理 1.1~~~~蕴含 # M$(M, T^{1,0}M) = \infty$。
~~~~

参考文献

[ABC+96] J. Amorós、M. Burger、K. Corlette、D. Kotschick 和 D. Toledo，《紧凯勒流形的基本群》，《数学调查与专著》第 44 卷，美国数学会，普罗维登斯，宾夕法尼亚州，1996 年。↑15[ACPW25] J. H. Andrade、J. S. Case、P. Piccione 和 J. Wei，《具有常数标量曲率的非齐次共形完备周期度量》，2025 年。arXiv:2510.04351。↑1，3[Afe20] C. Afeltra，《海森堡群上临界方程的奇异周期解》，《太平洋数学杂志》305 (2020年)，第 2 期，385–406。↑3[BdM75]L. Boutet de Monvel，《形式诱导柯西–黎曼方程的积分》，Goulaouic-Lions-Schwartz 讨论班 1974–1975；《线性与非线性偏微分方程》，1975 年，第 9 号报告，14 页。↑5[BE90] D. M. Burns 和 C. L. Epstein，《三维 CR 流形的可嵌入性》，《美国数学会杂志》3 (1990年)，第 4 期，809–841。↑5[BG08] C. P. Boyer 和 K. Galicki，《萨萨基几何》，《牛津数学专著》，牛津大学出版社，牛津，2008 年。↑6[Bow95] B. H. Bowditch，《变负曲率下的几何有限性》，《杜克数学杂志》77 (1995年)，第 1 期，229–274。↑9[BP18] R. G. Bettiol 和 P. Piccione，《非紧流形上 Yamabe 问题的无穷多个解》，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》68 (2018年)，第 2 期，589–609。↑1，11[BPS16] R. G. Bettiol、P. Piccione 和 B. Santoro，《球面上奇异 Yamabe 问题周期解的分岔》，《微分几何杂志》103 (2016年)，第 2 期，191–205。↑1[Bry01] R. L. Bryant，《Bochner-Kähler 度量》，《美国数学会杂志》14 (2001年)，第 3 期，623–715。↑15[BS76] D. Burns Jr. 和 S. Shnider，《复流形中的球形超曲面》，《数学发明》33 (1976年)，第 3 期，223–246。↑8[CCY14] J.-H. Cheng、H.-L. Chiu 和 P. Yang，《球形 CR 流形的一致化》，《数学进展》255 (2014年)，182–216。↑8[CI99] K. Corlette 和 A. Iozzi，《奇异双曲空间中等距变换离散群的极限集》，《美国数学会汇刊》351 (1999年)，第 4 期，1507–1530。↑9[CM74] S. S. Chern 和 J. K. Moser，《复流形中的实超曲面》，《数学学报》133 (1974年)，219–271。↑6，7[CMY17] J.-H. Cheng、A. Malchiodi 和 P. Yang，《三维柯西–黎曼几何中的正质量定理》，《数学进展》308 (2017年)，276–347。↑2，8[CMY23] J.-H. Cheng、A. Malchiodi 和 P. Yang，《三维 CR 流形上的 Sobolev 商》，《伊比利亚数学评论》39 (2023年)，第 6 期，2017–2066。↑2，9[CT23] J. S. Case 和 Y. Takeuchi，《高维中的 I′-曲率与 Hirachi 猜想》，《日本数学会杂志》75 (2023年)，第 1 期，291–328。↑15[CY25a] J. Case 和 P. Yang，《CR 不变量球面定理》，《美国数学会会刊》153 (2025年)，第 12 期，5183–5194。↑5[CY25b] S. Chanillo 和 P. C. Yang，《奇异 CR Yamabe 问题与豪斯多夫维数》，2025 年。arXiv:2504.06888。↑2[Gam01] N. Gamara，《CR Yamabe 猜想—— $n = 1$情形》，《欧洲数学会杂志》（JEMS）3 (2001年)，第 2 期，105–137。↑2[GMM24] C. Guidi、A. Maalaoui 和 V. Martino，《常数 Webster 曲率奇异 CR 结构及其应用》，《数学新闻》297 (2024年)，第 3 期，943–961。↑2[Gol99] W. M. Goldman，《复双曲几何》，《牛津数学专著》，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1999 年。牛津科学出版物。↑9[Gro96] M. Gromov，《从内部观察 Carnot-Carathéodory 空间》，《次黎曼几何》，1996 年，第 79–323 页。↑6[GY01] N. Gamara 和 R. Yacoub，《CR Yamabe 猜想——共形平坦情形》，《太平洋数学杂志》201 (2001年)，第 1 期，121–175。↑2[JL87] D. Jerison 和 J. M. Lee，《CR 流形上的 Yamabe 问题》，《微分几何杂志》25 (1987年)，第 2 期，167–197。↑1，2，6，8

[JL88] D. Jerison与J. M. Lee，《海森堡群上的Sobole夫不等式极值解与CR Yamabe问题》，J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 1, 1–13. ↑1, 2, 8[JL89] D. Jerison与J. M. Lee，《内在CR正规坐标与CR Yamabe问题》，J. Differential Geom. 29 (1989), no. 2, 303–343. ↑1, 8[Kam94] Y. Kamishima，《Bochner张量消失的凯勒流形的一致化》，Acta Math. 172 (1994), no. 2, 299–308. ↑15[Kap22] M. Kapovich，《复双曲克莱因群综述》，载于《Thurston传统之二：几何与群》，2022年，第7–51页。↑9[LP87] J. M. Lee与T. H. Parker，《Yamabe问题》，Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 17 (1987), no. 1, 37–91. ↑1[MS91] R. Mazzeo与N. Smale，《球面子域上常正标量曲率的共形平坦度量》，J. Differential Geom. 34 (1991), no. 3, 581–621.↑1[Nay99] S. Nayatani，《复双曲等距变换的离散群与伪厄米结构》，《多复变函数中的分析与几何》（片田，1997），1999年，第209–237页。↑2, 9[Rat19] J. G. Ratcliffe，《双曲流形基础》，第三版，《数学研究生教材》，第149卷，Springer，Cham，2019年。↑10[Sch89] R. M. Schoen，《黎曼度量总标量曲率泛函的变分理论及相关主题》，《变分法专题》（蒙特卡蒂尼泰尔梅，1987），1989年，第120–154页。↑1[Sch95] R. Schoen，《关于共形自同构群与CR 自同构群》，Geom. Funct. Anal. 5 (1995), no. 2, 464–481. ↑3, 7[Ser58] J.-P. Serre，《关于特征 p下代数簇的拓扑》，《国际代数拓扑研讨会》，1958年，第24–53页。↑15[Tak20] Y. Takeuchi，《可嵌入CR流形上的CR Paneitz算子的非负性》，Duke Math. J. 169 (2020), no. 18, 3417–3438. ↑2, 8[Tak22] Y. Takeuchi，《球面CR流形的陈类》，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 23 (2022), no. 1, 1–13. ↑7[Tol93] D. Toledo，《基本群非剩余有限的射影簇》，Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 77 (1993), 103–119. ↑15[Wan03] W. Wang，《球形 CR 流形上的典范接触形式》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 5 (2003), no. 3, 245–273. ↑9[Wan15] X. Wang，《关于Jerison和Lee在CR几何中的一个显著公式》，Math. Res. Lett. 22 (2015), no. 1, 279–299. ↑2[Yue99] C. Yue，《复双曲克莱因群的Webster曲率与豪斯多夫维数》，《动力系统：纪念廖山涛教授国际会议论文集》，1999年，第319–328页。↑9

数学系，宾夕法尼亚州立大学，大学公园，宾夕法尼亚州 16802，美国电子邮箱地址：jscase@psu.edu

数学部，纯粹与应用科学研究所，筑波大学，筑波，茨城县 305-8571，日本电子邮箱地址：ytakeuchi@math.tsukuba.ac.jp, yuya.takeuchi.math@gmail.com