效应处理器的完备范畴语义

Satoshi
K
urasatos
hikura@acm.org 早稻田大
学 东京，日本

arXiv:2602.03275v1 [cs.LO] 3 Feb 2026

摘要

对于程序设计语言，关于等式理论的可靠性与完备性是范畴语义研究中的基本性质。然而，带有代数效应和效应处理器的程序设计语言尚无完备性结果，这引出了一个问题：文献中常用的模型，即由代数理论生成的自由模型单子，是否是效应处理器唯一有效的语义模型。本文表明事实并非如此。我们确定了效应处理器范畴模型的精确刻画，从而能够针对某个效应处理构造的等式理论建立可靠性与完备性结果。值得注意的是，这使我们不仅能够将自由单子模型纳入其中，还能将效应处理器的 CPS 语义作为该演算的模型。

CCS 概念

•**计算理论** → **范畴语义**。

关键词

指称语义，效应处理器，完备性，续延传递风格

1 引言

在程序设计语言和 λ 演算的范畴语义中，可靠性和完备性是衡量给定的模型定义是否精确刻画某个演算预期模型类的标准。可靠性确保，演算中两个项之间语法上可推导的方 $M = N$ 程在语义上有效，这意味着模型定义对模型施加了必要条件。这一性质通常被视为有效模型定义的最低要求。相反，完备性确保项之间所有语义上有效的方程都可以在语法上推导出来，这意味着模型定义没有对模型施加过强的限制。尽管完备性结果未必像可靠性结果那样常见，但人们已为多种演算建立了此类结果，例如简单类型 λ 演算 [22] 和计算 λ 演算 [27], 等。

对于带有代数效应 [28, 30]和效应处理器 [31, 32]的程序设计语言，可靠性与完备性这一根本问题鲜少受到关注。鉴于许多计算效应都可以表示为由操作和等式公理构成的代数理论，代数效应的处理器提供了一种模块化机制来实现这些操作。效应处理器演算事实上的标准范畴语义，是由代数理论（或等价地，由 Lawvere 理论 [1, 31, 32]）生成的自由模型单子。自由仅由操作生成的单子也被用作模型 [3, 6, 13], , 因为在效应处理器的实际实现中，强制满足这些等式公理并不常见。尽管这些模型相对于效应处理器演算的某种等式理论可以得到可靠性结果 [31, Section 7] [3,Section 6],，但据我们所知，尚未建立完备性结果。

缺乏完备性结果意味着，自由模型单子（或者在没有等式公理时的自由单子）可能并非效应处理器唯一有效的语义模型。事实上，似乎有一个重要的模型例子并非自由模型单子，即效应处理器的 CPS 语义 [10]。对于计算 λ 演算，已知 CPS 变换对应于通过延续单子进行的解释 [7]。类比而言，我们预计效应处理器的 CPS 语义由某种类似延续的单子来建模。为了刻画这类模型，我们需要考虑效应处理器更一般的模型概念。推广模型概念的另一个动机，来自纤维化逻辑关系在效应处理器中的应用 [8] 。纤维化逻辑关系的思路是，沿着一个纤维化 p，将基范畴 $\mathbb{B}$ 中的模型提升到全范畴 $\mathbb{E}$，从而构造逻辑关系 $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$。针对不含效应处理器的 λ 演算，人们已研究了这类提升的若干构造 [14, 16, 18] 。若要将这些技术应用于效应处理器，对模型施加不必要的限制可能会成为障碍。

本文确定了效应处理器范畴模型的精确刻画，从而能够建立可靠性和完备性结果。我们将效应处理器演算的两个变体作为研究对象。其中一个是基于 [3], 的深层效应处理器基本演算，不包含代数理论中的等式公理。另一个是基于 [24], 的效应处理器演算，通过引入等式公理扩展了前一种演算。

我们通过确定解释效应处理器演算所需且充分的结构，来刻画这些演算的模型，以解释效应处理构造 handle M with H to $x.N$。对于不含等式公理的效应处理器演算，该构造的类型规则指出：若 (i) M 是一个类型为 $A!\Sigma$ 的计算，其中 A是返回值的类型， Σ 是操作的签名；(ii) H 是针对 Σ 中操作的处理器，其返回类型为 C；且 (iii) N 是一个类型为 C 的计算，它将处理 M 所得的结果作为 x：A接收，那么 handle M with H to $x.N$ 就是一个类型为C的计算。为了根据 M、 H和 N的解释来解释 handle M with H to $x.N$，我们自然需要一个具有以下形式的态射。

$$\mathbf{handle}_{\Sigma,\ A,\ C} \colon\ T_\Sigma[\![A]\!] \times \mathcal{H}(\Sigma;\ [\![C]\!]) \times [\![A \to C]\!] \to [\![C]\!]$$

这里，我们使用一个由签名索引的单子族 $\{T_\Sigma\}_\Sigma$，将计算类型 $A!\Sigma$ 解释为 $T_\Sigma[\![A]\!]$；$\mathrm{H}(\Sigma; [\![C]\!])$ 表示对类型为 $\Sigma \Rightarrow C$ 的处理器的一种适当解释。我们不直接使用这个态射，而是通过消去 A 对其进行简化，并将以下由 Σ 和 C 索引的态射族用作解释效应处理器的结构：

$$\mathbf{handle}_{\Sigma,C} : \mathcal{H}(\Sigma; [\![C]\!]) \times T_\Sigma [\![C]\!] \to [\![C]\!] \tag{1}$$

然后，我们对 $\mathbf{handle}_{\Sigma,\ C}$ 施加适当的条件，使得 handle M with H to $x.N$ 的解释满足所需的方程。由此得到的效应处理器演算模型具有可靠性和完备性结果。值得注意的是，这一模型概念不仅能够捕获自由单子模型，还能将效应处理器的 CPS 语义作为该演算的模型。

对于带有等式公理的效应处理器演算，我们采用类似的策略。在这一设定下，计算类型扩展为 $A!\ \Sigma/\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}$ 是针对 Σ 中操作的一组等式公理，如 [24] 中所示。此外，类型为 $A!\Sigma/\mathrm{E}$ 的计算只能由遵守 E 中方程的处理器进行处理。为捕获这一情形，我们需要修改（1）中的结构，使得 $\mathbf{handle}_{\Sigma,\ C}$ 仅对遵守 E 中方程的处理器进行定义。这在技术上比前面的演算更为复杂，但我们同样可以在这一设定下证明可靠性和完备性结果。

尽管效应处理器的纤维化逻辑关系目前仍留待未来研究，我们预计，我们的结果是朝这一方向迈出的第一步。 [4] 中已使用双正交闭包研究了效应处理器的逻辑关系。这表明，可以通过将 ⊤⊤-提升 [16] 调整到效应处理器来构造纤维化逻辑关系；而这需要一种灵活的效应处理器模型概念，正如本文所提供的那样。

我们的贡献总结如下。

- 我们为简单类型的深层效应处理器演算给出了首个可靠且完备的范畴语义。
- 我们证明，我们的语义不仅涵盖自由单子，还涵盖效应处理器的 CPS 语义。
- 我们将该框架扩展到带有等式公理 [24] 的效应处理器演算，并证明其可靠性和完备性。

本文结构如下：第2节回顾带有计算效应的 λ 演算的范畴语义的一些预备概念。第3节介绍 λ_{eff}，一种不带等式公理的简单类型深层效应处理器演算，并给出 λ_{eff}的等式理论。第4节定义 λ_{eff} 的范畴模型，并证明可靠性和完备性结果。第5节展示自由单子模型和效应处理器的 CPS 语义都是我们模型的实例。第6节将该框架扩展到带有等式公理的效应处理器演算。在第7节讨论相关工作之后，我们在第8节总结全文。省略的证明和细节见附录。

2 预备知识

我们介绍细粒度按值调用的语义基础概念和记号 [23], ，这是第3节中介绍的效应处理器演算的基础。

强单子与强 *Kleisli* 三元组。 令 $\mathbb{C}$为一个笛卡尔范畴。 $\mathbb{C}$上的一个强单子是一个四元组（T、 η^T、 μ^T、 θ^T），由一个函子 $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 以及自然变换 $\eta^T\colon \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \to T$ （单位类型）、 $\mu^T\colon T^2 \to T$ （乘法）和 $\theta^T_{X、Y}\colon X \times TY \to T(X \times Y)$（强度）组成，并满足标准的单子律和强度律。我们通常说 T 是一个强单子，而将该四元组的其他组成部分留作隐含。

众所周知，在笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$ 上的强单子 (T， η^T， μ^T， θ^T) [25] 等价于一个强 *Kleisli* 三元组 (T， η^T， $(–)^\sharp$)。由于验证强 Kleisli 三元组的定律通常比验证 (T， η^T， μ^T， θ^T) 的定律更容易，因此我们有时使用强 Kleisli 三元组来定义强单子。

定义 *2.1*。 笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$ 上的强 *Kleisli* 三元组 是一个三元组 (T， η^T， $(–)^\sharp$)，由以下数据组成：

- 对象上的一个映射 $X \mapsto TX$。
- 对于每个对象 X，一个单位类型 态射 $\eta^T_X\colon X \to TX$。
- 对于每个态射 $f\colon X \times Y \to TZ$，一个态射 $f^\sharp\colon X \times TY \to TZ$，称为 f 的强 *Kleisli* 扩张 。

这些数据必须满足以下方程：

$$(\eta^T_X \circ \lambda)^\sharp = \lambda \qquad : 1 \times TX \to TX$$
$$f^\sharp \circ (X \times \eta^T_Y) = f \qquad : X \times Y \to TZ$$
$$g^\sharp \circ (W \times f^\sharp) \circ \alpha = (g^\sharp \circ (W \times f) \circ \alpha)^\sharp : (W \times X) \times TY \to TZ$$

其中 $\lambda_X\colon 1 \times X \to X$和 $\alpha_{X、Y、Z}\colon (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ 是典范同构。

Kleisli 范畴与 *Kleisli* 指数。 我们将 $\mathbb{C}_T$ 记作范畴 $\mathbb{C}$上的单子 T的*Kleisli* 范畴。与 Kleisli 范畴相关联的是一个典范伴随 $J^T \dashv K^T\colon \mathbb{C}_T \to \mathbb{C}$。具体而言，这些函子对对象定义为 $J^T X = X$ 和 $K^T X = TX$，对态射定义为 $J^T f = \eta^T \circ f$和 $K^T g = \mu^T \circ Tg$。当单子 T在上下文中明确时，我们有时会省略 J^T和 K^T中的上标 T。细粒度按值调用中的函数类型通过*Kleisli* 指数进行解释。

定义 *2.2*（*Kleisli* 指数）。 设 T是笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$上的强单子。Kleisli 指数 *Kleisli* 指数 $Y \Rightarrow^T Z$由自然同构 $\mathbb{C}_T(J(X \times Y)\ Z) \cong \mathbb{C}(X、\ Y \Rightarrow^T Z)$定义。我们将柯里化写作 $\Lambda\ \mathbb{C}\ KZ \cong \mathbb{C}_T\ J\ Z \cong :\ (X \times Y、\ )\ \mathbb{C}\ X\ Y \Rightarrow^T Z$ （（$X \times Y$））（、），并将求值态射写作$\mathbf{ev}(\mathrm{id})\colon (X \Rightarrow^T Y) \times X \to KY$。 $= \Lambda^{-1}$

注意，如果 $\mathbb{C}$是笛卡尔闭的，那么 $\mathbb{C}$中从 Y到 TZ的指数对象 $Y \Rightarrow TZ$给出一个Kleisli 指数 $Y \Rightarrow^T Z$。

细粒度按值调用的模型。 一个 λ_c-模型 由笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$、其上的强单子 T（在 $\mathbb{C}$ 上）以及 Kleisli 指数 $Y \Rightarrow^T Z$（针对每个 Y 和 Z）组成。该术语反映了如下事实： λ_c-模型为 Moggi 的计算 λ-演算（亦称 λ_c-演算） [27] 提供了可靠且完备的语义。此外，Levy 等人 [23] 证明 λ_c-模型对于细粒度按值调用同样是可靠且完备的。他们进一步证明， λ_c-模型等价于闭 *Freyd* 范畴，但本文并不使用这一等价关系。我们以 λ_c-模型作为效应处理器指称语义的基础。

$$\frac{\Gamma \vdash V : A}{\Gamma \vdash \mathsf{return}\ V : A\,!\,\Sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A\,!\,\Sigma \qquad \Gamma, x : A \vdash N : B\,!\,\Sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ x \leftarrow M\ \mathsf{in}\ N : B!\Sigma}$$

$$\frac{(\text{操作} : A \twoheadrightarrow B) \in \Sigma \qquad \Gamma \vdash V : A}{\Gamma \vdash \text{操作}(V) : B\,!\,\Sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A\,!\,\Sigma \qquad \Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C \qquad \Gamma,\ x : A \vdash N : C}{\Gamma \vdash \mathsf{handle}\ M\ \text{用}\ H\ \text{到}\ x : A.N : C}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset : \emptyset \Rightarrow C}$$

$$\frac{\Gamma,\ x : A_{\mathsf{op}},\ k : B_{\mathsf{op}} \to C \vdash M_{\mathsf{op}} : C \qquad \Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma \vdash \{\text{操作}(x,\ k) \mapsto M_{\mathsf{op}}\} \cup H : \{\text{操作} : A_{\mathsf{op}} \twoheadrightarrow B_{\mathsf{op}}\} \cup \Sigma \Rightarrow C}$$

图 1：选取的类型规则。参见附录 B 以获取完整类型规则。

3 效应处理器演算

接下来 [3, 10, 13, 24], 我们定义一种效应处理器演算，称为 λ_{eff}。为聚焦于核心思想，我们先在本节给出一种最小演算，然后在第4.4节和第 6节讨论若干扩展。

3.1 类型和项

遵循细粒度按值调用的语法，我们的演算区分值和计算。我们定义以下值项 V，W；计算项 M，N；以及处理器 H。

$$\begin{array}{rcl} V, W & ::= & x \mid \lambda x.M \mid \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \mid \pi_i\ V \\ M, N & ::= & V\ W \mid \mathsf{return}\ V \mid \mathsf{let}\ x \leftarrow M\ \mathsf{in}\ N \\ & & \mid \mathsf{op}(V) \mid \mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N \\ H & ::= & \emptyset \mid \{\mathsf{op}(x, k) \mapsto M\} \cup H \end{array}$$

值项包括变量 x、λ 抽象 $\lambda x.M$、元组 $V_1, \ldots, V_n$ 和投影 $\pi_i\ V$。计算项包括函数应用 $V\ W$、返回值 return V、let 表达式 let $x \leftarrow M$in N、操作调用 op(V)，以及效应处理构造（或 handle-with 表达式）handle $M$with $H$to $x.N$。在 handle-with 中， M中的操作由 H处理，结果值绑定到 $x$in N。效应处理器 H定义为由操作子句 op(x, k) $\mapsto M$ 组成的有限集合。我们将 H 中的操作子句与返回子句 N 分开，因为这样可以简化第 3.2 节中效应处理器等式理论的阐述。尽管这种语法在近期效应处理器文献中不太常见，但效应处理的原始语法 [32] 也将操作子句与返回子句分开。我们按通常方式定义值项对变量的代换 $W[V/x]$、
$M[V\ x]$　　$H[V\ x]$　　V　　x　　/ 和 /。

我们为 λ_{eff} 定义如下简单类型系统。类型定义如下：

$$\begin{array}{lrcl} \text{value types} & A, B & ::= & A \to C \mid \prod_{i=1}^{n} A_i \\ \text{computation types} & C, D & ::= & A!\Sigma \\ \text{signatures} & \Sigma & ::= & \emptyset \mid \{\mathsf{op} : A \twoheadrightarrow B\} \cup \Sigma \\ \text{handler types} & H & ::= & \Sigma \Rightarrow C \end{array}$$

这里， $n \geq 0$ 是一个自然数，op 是一个操作符号。对于积类型，我们有时写作 $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$和 $\prod_{i=1}^{0} A_i =$ 单位类型。签名 Σ 是有限个操作符号 op 及其参数类型和返回类型构成的集合。Σ 中的操作符号顺序无关紧要。计算类型 $A!\Sigma$ 表示返回类型为 A 的值、且可能执行签名 Σ中操作的计算的类型。处理器类型 $\Sigma \Rightarrow C$ 表示处理器的类型；这些处理器处理签名 Σ中的操作，并将类型为 $A!\Sigma$的计算转换为类型为 C的计算。和通常一样，上下文 $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ 定义为由变量和值类型组成的有序对列表。图 1 展示了涉及签名和处理器的类型规则。

3.2 等式理论

我们考虑以下形式的带类型等式判断：

$$\Gamma \vdash V = W : A, \qquad \Gamma \vdash M = N : C, \qquad \Gamma \vdash H = H' : \Sigma \Rightarrow C$$

这些判断定义为包含图中方程的最小同余关系2 和 3。我们省略了自反性、对称性、传递性以及针对每个项构造子的同余性的显然规则；这些规则的完整描述见附录C。图中规则2 分别对应于 λ 抽象和积类型的标准 β-/η- 律，以及 let 表达式的单子律。

等式理论中最重要的部分是图中关于 handle-with 的方程3。这里我们考虑三个方程。（Handle-Ret）指出，如果被处理的计算返回一个值，就会执行返回子句。（Handle-Let）指出，处理 let 表达式等价于先处理第一个计算，再使用第一个计算的结果处理第二个计算。（Handle-Op）指出，当操作在被处理的计算中被调用时，处理器中相应的操作子句会被执行。

请注意，图中的方程3 与 [3]所考虑的方程不同。我们的等式理论对应于针对效应处理器研究的细粒度操作语义，见 [15, 34], ；而 [3] 中的等式理论则对应于传统的上下文捕获操作语义。与上下文捕获操作语义相对应的方程如下。

$$\begin{array}{l} \mathsf{handle}\ \mathsf{return}\ V\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N = N[V/x] \\ \mathsf{handle}\ C[\mathsf{op}(V)]\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N \\ \quad = M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda y.C[\mathsf{return}\ y]/k] \end{array}$$

这里，C 是求值上下文，而 $(\mathsf{op}(x,\ k) \mapsto M_{\mathsf{op}}) \in H$ 是 op 的操作子句。我们采用细粒度版本，因为与捕获上下文的版本相比，它能更清晰地展现 handle-with 与单子结构（即 return 和 let）之间的交互。这两种风格之间的关系

$$(\lambda x.M)\ V \ =\ M[V/x] \qquad V \ =\ \lambda x.(V\ x)$$
$$\pi_i\ \langle V_1, \ldots, V_n\rangle \ =\ V_i \qquad V \ =\ \langle \pi_1\ V, \ldots, \pi_n\ V\rangle$$
$$\mathsf{let}\ x \leftarrow \mathsf{return}\ V\ \mathsf{in}\ M \quad = \quad M[V/x]$$
$$\mathsf{let}\ x \leftarrow M\ \mathsf{in}\ \mathsf{return}\ x \quad = \quad M$$
$$\mathsf{let}\ y \leftarrow (\mathsf{let}\ x \leftarrow M\ \mathsf{in}\ N)\ \mathsf{in}\ L$$
$$= \quad \mathsf{let}\ x \leftarrow M\ \mathsf{in}\ \mathsf{let}\ y \leftarrow N\ \mathsf{in}\ L$$

图 2：λ 抽象和积类型的 β 与 η 律，以及 let表达式的单子律。

$$\mathsf{handle}\ \mathsf{return}\ V\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.M \quad = \quad M[V/x] \qquad \text{(Handle-Ret)}$$
$$\mathsf{handle}\ (\mathsf{let}\ x \leftarrow L\ \mathsf{in}\ M)\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N$$
$$= \quad \mathsf{handle}\ L\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.\mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N \qquad \text{(Handle-Let)}$$
$$\mathsf{handle}\ \mathsf{op}(V)\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.M \quad = \quad M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda x.M/k]$$
$$\text{where } (\mathsf{op}(x,k) \mapsto M_{\mathsf{op}}) \in H \qquad \text{(Handle-Op)}$$

图 3：效应处理器的方程。

操作语义的研究见 [34]。我们将在第 3.3 节看到，我们的等式理论与上下文捕获操作语义一致。

3.3 操作语义

作为对等式理论的合理性检查，我们证明它与一种上下文捕获小步操作语义一致。

定义 *3.1*。我们在闭计算项上定义$\rightsquigarrow$个关系，它是满足以下规则的最小关系。

$$C[M] \rightsquigarrow C[N] \qquad \text{if } M \rightsquigarrow N$$
$$\mathsf{let}\ x \leftarrow \mathsf{return}\ V\ \mathsf{in}\ M \rightsquigarrow M[V/x]$$
$$(\lambda x.M)\ V \rightsquigarrow M[V/x]$$
处理 return V，其中 H 到 $x.M \rightsquigarrow M[V/x]$
处理 C[操作(V)]，其中 H 到 $x.M \rightsquigarrow$
$$M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda y.\mathsf{handle}\ C[\mathsf{return}\ y]\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.M/k]$$
$$\text{if } C \text{ does not contain handle-with} \qquad (3)$$

这里，求值上下文 C 定义如下 ：

$$C \quad ::= \quad [\,] \mid \mathsf{let}\ x \leftarrow C\ \mathsf{in}\ N \mid \mathsf{handle}\ C\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.M$$

正如预期，操作语义满足类型可靠性。

命题 3.2（类型可靠性）。若 $\vdash M : C$ 是一个闭计算项，则要么 M 是正规形式，要么存在一个计算项 N，使得 $M \quad N$ 且 $\vdash N : C$。此处，正规形式是具有以下形式的计算项：*(a)* $\mathsf{return}\ V$，*(b)* C[操作(V)]，其中C 不含 *handle-with*，或 *(c)* $C[(\pi_i\ V)\ W]$，其中 C 可以包含 *handle-with*。□

备注 *3.3*。在该定义中，我们并未纳入分解元组的规则（例如，$\pi_1\langle V_1, V_2\rangle V_1$），因此我们具有形如 $C[(\pi_i\ V)\ W]$ 的范式，见命题 3.2。有两种可能的做法可避免此类范式；（a）为形如 $\pi_i\ V$ 的值项添加归约规则，或（b）从值项的定义中去掉投影，并把元组的模式匹配作为计算项加入，如 [10]。我们在附录中讨论这两种做法。尽管后一种做法（b）就操作语义而言更为自然，我们仍选择在值项中纳入投影，因为在讨论范畴语义的完备性时这更为标准 [23]。范畴语义的常见做法与操作语义在处理元组方面的这一细微差异，与我们的主要目标（即效应处理器）相互正交，因此我们不再进一步讨论该问题。

相对于我们在第 3.2 节中考虑的等式理论，归约关系是可靠的。这证明了我们在第 3.2 节中的等式理论是合理的。

Proposition 3.4. *If* $M \rightsquigarrow N$, *then* $\Gamma \vdash M = N : C$. □

4 指称语义

我们将细粒度按值调用（即 λ_c-模型，第 2 节）中的范畴语义扩展到效应处理器的解释。

4.1 模型与解释

我们首先非正式地讨论在 λ_{eff} 中解释签名、计算类型、效应处理器和 handle-with 所需的结构。然后，我们正式定义 λ_{eff} 的模型。

签名的语义。我们将范畴 $\mathbb{C}$ 中的语义签名 定义为一个偏函数 S，它将操作符号映射到 $\mathbb{C}$ 中的对象对，并且 S 的定义域是有限的。我们常用类似集合的记法表示语义签名：

$$S \quad = \quad \{\mathsf{op}_1 : A_1 \nrightarrow B_1,\quad \mathsf{op}_2 : A_2 \nrightarrow B_2, \ldots\}$$

我们也写作 (操作 : $A \nrightarrow B$) $\in S$，若 S(操作) $= (A, B) \in \mathbb{C}^2$。令 $\mathbf{ET}(\mathbb{C})$ 表示范畴 $\mathbb{C}$中的所有语义签名的集合。我们将在定义 4.3 中看到，（语法）签名 Σ 被解释为语义签名 $[\![\Sigma]\!] \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})$。

计算类型的语义。计算类型 $A!\Sigma$ 通过强单子来解释：$[\![A!\Sigma]\!] = T_{[\![\Sigma]\!]}[\![A]\!]$。在这里，我们需要一个 族 强单子 $\{T_S\}_{S \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})}$，它按语义签名索引，而不是使用单个强单子，因为只有当两个计算的签名相同时，才能定义它们的顺序执行（回想一下图 1）。不同签名之间的交互只会在处理效应时发生，我们将在下文讨论。

效应处理器的语义。根据处理器的类型规则，类型为 $\Sigma \Rightarrow C$ 的处理器由有限族的项 $\lambda x.\lambda k.M_{\mathsf{op}}$ 组成：对于每个 (op :) ，都有
$A_{\mathsf{op}} \to B_{\mathsf{op}} \to C \to C$ $A_{\mathsf{op}} \nrightarrow B_{\mathsf{op}}$ ∈ ( )。因此，我们将其语义对应物定义如下。

定义 *4.1.* 设 $\mathbb{C}$为一个笛卡尔范畴，T为 $\mathbb{C}$上的一个强单子，且 $\mathbb{C}$ 对于 T 具有 Kleisli 指数。对于任意语义签名 S 和 $X \in \mathbb{C}_T$，我们将 H $(S;\ X) \in \mathbb{C}$定义为

$$\mathcal{H}(S;X) \quad ::= \quad \prod_{(\mathsf{op}:A_{\mathsf{op}} \nrightarrow B_{\mathsf{op}}) \in S} (A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \Rightarrow^T X) \Rightarrow^T X).$$

注意，$\mathrm{H}(S; X)$可以看作 Kleisli 范畴 $\mathbb{C}_T$中 X上的 S-代数结构对象。

于是，效应处理器 $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow A!\Sigma'$ 被解释为 $[\![H]\!] : [\![\Gamma]\!] \to \mathrm{H}([\![\Sigma]\!]; J[\![A]\!])$，其中 $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_{T_{[\![\Sigma']\!]}}$。

handle-with 的解释。 handle-with 表达式的解释应由其子项的解释构造而成。根据类型规则（图 1），如果我们有如下形式的态射，就能实现这一点：

$$[\![A!\Sigma]\!] \times [\![\Sigma \Rightarrow B!\Sigma']\!] \times [\![A \to B!\Sigma']\!] \to [\![B!\Sigma']\!]$$

对于每个值类型 A，B和签名 Σ，Σ'。如上所述，$[\![\Sigma \Rightarrow B!\Sigma']\!]$ 和 $[\![A!\Sigma]\!]$ 分别对应于 $\mathrm{H}([\![\Sigma]\!]; J[\![B]\!])$ 和 $T_{[\![\Sigma]\!]}[\![A]\!]$。将上述态射分解，使其经过求值态射 $T_{[\![\Sigma]\!]}[\![A]\!] \times ([\![A]\!] \Rightarrow^{T_{[\![\Sigma,]\!]}} J[\![B]\!]) \to T_{[\![\Sigma]\!]}T_{[\![\Sigma']\!]}[\![B]\!]$，我们可以消去 A，转而考虑以下形式的态射：

$$\mathbf{handle} : \mathcal{H}([\![\Sigma]\!]; J[\![B]\!]) \times T_{[\![\Sigma]\!]}T_{[\![\Sigma']\!]}[\![B]\!] \to T_{[\![\Sigma']\!]}[\![B]\!]$$

态射 **handle** 必须满足某些方程，以刻画图 3中效应处理器的方程，正如我们将在定义 4.2中形式化的那样。

的模型与解释 λ_{eff}。综上所述，我们将 λ_{eff} 的模型定义如下。

定义 *4.2*（λ_{eff}-模型）。一个 λ_{eff}-模型 $(\mathbb{C}, T, [\![-]\!], \mathbf{handle})$ 是由以下数据组成的元组：

- 一个笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$。
- 一个由语义签名索引的强单子族 $\{T_S\}_{S \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})}$，定义在 $\mathbb{C}$ 上。
- 对于每个语义签名 $S \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})$ 和 $(\mathrm{op} : A_{\mathrm{op}} \rightarrowtriangle B_{\mathrm{op}}) \in S$，一个态射 $[\![\mathrm{op}]\!]^T_S : A_{\mathrm{op}} \to T_S B_{\mathrm{op}}$，位于 $\mathbb{C}$ 中；我们通常将其简写为 $[\![\mathrm{op}]\!]$。
- 对于每个语义签名 $S, S' \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})$ 和 $X \in \mathbb{C}_{T_{S'}}$，在 $\mathbb{C}$ 中都有一个如下形式的态射。

$$\mathbf{handle}^T_{S,S',X} : \mathcal{H}(S; X) \times T_S K^{T_{S'}} X \to K^{T_{S'}} X$$

这些数据必须满足以下条件。

- 范畴 $\mathbb{C}$ 对每个 T_S 都有 Kleisli 指数。
- 态射 $\mathbf{handle}^T_{S,S',X}$ 满足以下三个方程。

$$\mathbf{handle}_{S,\,S',\,X} \circ (\mathrm{id} \times \eta) = \pi_2 : \mathcal{H}(S; X) \times K^{T_{S'}} X \to K^{T_{S'}} X \qquad \text{(handle-unit)}$$

$$\mathbf{handle}_{S,\,S',\,X} \circ (\mathrm{id} \times \mu) = \mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times T_S \mathbf{handle}_{S,S',X}) \circ \langle \pi_1, \theta \rangle : \mathcal{H}(S; X) \times {T_S}^2 K^{T_{S'}} X \to K^{T_{S'}} X \qquad \text{(handle-mult)}$$

$$\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{A}_{S',X}([\![\text{操作}]\!]^T_S)) = \mathbf{ev} \circ (\pi_{\mathrm{op}} \times \mathrm{id}) : \mathcal{H}(S; X) \times (A_{\mathrm{op}} \times (B_{\mathrm{op}} \Rightarrow^{T_{S'}} X)) \to K^{T_{S'}} X \qquad \text{(handle-op)}$$

这里，$\pi_{\mathrm{op}} : \mathrm{H}(S; X) \to (A_{\mathrm{op}} \times (B_{\mathrm{op}} \Rightarrow^{T_{S'}} X)) \Rightarrow^{T_{S'}} X$是投影，而 $\mathrm{A}_{S',X}([\![\mathrm{op}]\!]^T_S)$ 是如下定义的态射。

$$\mathcal{A}_{S',X}([\![\mathrm{op}]\!]^T_S) \coloneqq T_S \mathbf{ev} \circ \theta^{T_S} \circ \sigma \circ ([\![\mathrm{op}]\!]^T_S \times \mathrm{id}) : A_{\mathrm{op}} \times (B_{\mathrm{op}} \Rightarrow^{T_{S'}} X) \to T_S K^{T_{S'}} X$$

这里，$\sigma_{X,Y} : X \times Y \to Y \times X$是 $\mathbb{C}$ 中的典范同构。图 4 展示了对应于上述三个方程的交换图。请注意，$\mathrm{A}_{S',X}([\![\mathrm{op}]\!]^T_S)$ 的定义方式类似于对应于泛型效应的代数运算，但它混合了两个不同的签名 S 和 S'：如果 $S = S'$，那么$\mu^{T_S} \circ \mathrm{A}_{S,X}([\![\mathrm{op}]\!]^T_S) : A_{\mathrm{op}} \times (B_{\mathrm{op}} \Rightarrow^{T_S} X) \to K^{T_S} X$是对应于泛型效应 $[\![\mathrm{op}]\!]^T_S : A_{\mathrm{op}} \to T_S B_{\mathrm{op}}$ 的代数运算。

理解这三个方程的一种方式，是看到它们对应于图3中效应处理器的三个方程。另一种方式是将态射$\mathbf{handle}^T_{S,\,S',\,X}$视为从效应处理器到Eilenberg–Moore T_S-代数（在 $K^{T_{S'}} X$上）的映射。于是，两个方程（处理器-单位）和（处理器-乘法）对应于Eilenberg–Moore 代数的定律。最后一个方程（Handle-Op）表明，某一操作在Eilenberg–Moore 代数中的解释与处理器中相应操作子句的解释一致。我们将在第4.3节进一步讨论与Eilenberg–Moore 代数的关系。

定义 *4.3*（解释）。let（$\mathbb{C}$，T，$[\![-]\!]$，**handle**）为一个 λ_{eff}-模型。我们如下定义 λ_{eff}的解释。值类型 $[\![A]\!] \in \mathbb{C}$ 的解释与细粒度按值调用的情形类似地定义：函数类型和积类型分别由 Kleisli 指数和积来解释。

$$[\![A \to B!\Sigma]\!] \coloneqq [\![A]\!] \Rightarrow^{T_{[\![\Sigma]\!]}} J[\![B]\!] \qquad [\![\prod_{i=1}^{n} A_i]\!] \coloneqq \prod_{i=1}^{n} [\![A_i]\!]$$

计算类型被解释为 $[\![A!\ \Sigma]\!] \coloneqq J^{T_{[\![\Sigma]\!]}}[\![A]\!] \in \mathbb{C}_{T_{[\![\Sigma]\!]}}$。签名以显然的方式被解释为 $\mathbb{C}$ 中的语义签名。

$$[\![\Sigma]\!] \coloneqq \{\mathrm{op} : [\![A_{\mathrm{op}}]\!] \rightarrowtriangle [\![B_{\mathrm{op}}]\!] \mid (\mathrm{op} : A_{\mathrm{op}} \rightarrowtriangle B_{\mathrm{op}}) \in \Sigma\}$$

值类型的解释自然诱导出上下文 $[\![x_1 :\ A_1,\ \ldots\ldots,\ x_n :\ A_n]\!] \coloneqq [\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!] \in \mathbb{C}$ 的解释。项和处理器的解释通过对其类型推导进行同时归纳来定义。

$$\begin{aligned} &[\![\Gamma \vdash V : A]\!] && : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!] \\ &[\![\Gamma \vdash M : A!\Sigma]\!] && : [\![\Gamma]\!] \to T_{[\![\Sigma]\!]}[\![A]\!] \\ &[\![\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow A!\Sigma']\!] && : [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{H}([\![\Sigma]\!]; J^{T_{[\![\Sigma']\!]}}[\![A]\!]) \end{aligned}$$

为简洁起见，我们省略大多数情形（详见附录F），这里只给出与效应处理器相关的解释。对 $\Gamma \vdash \mathrm{op}(V) :\ A!\ \Sigma$ 的解释由 λ_{eff}-模型中的相应态射定义：$[\![\mathrm{op}(V)]\!] = [\![\mathrm{op}]\!]^T_\Sigma \circ [\![V]\!]$。处理器 $\Gamma \vdash H :\ \Sigma \Rightarrow A!\ \Sigma'$ 的解释通过对其操作子句的解释进行配对来定义：

$$\Lambda[\![M_{\mathrm{op}}]\!] : [\![\Gamma]\!] \to ([\![A_{\mathrm{op}}]\!] \times ([\![B_{\mathrm{op}}]\!] \Rightarrow^{T_{[\![\Sigma']\!]}} J[\![A]\!])) \Rightarrow^{T_{[\![\Sigma']\!]}} J[\![A]\!]$$

其中 $(\mathrm{op}(x,\ k) \mapsto M_{\mathrm{op}}) \in H$。最后，handle- with $\Gamma \vdash$ handle M with H to $x.N :\ A!\Sigma'$ 的解释定义如下，它使用效应处理强单子的态射 $\mathbf{handle}_{[\![\Sigma]\!],\ [\![\Sigma']\!],\ J[\![A]\!]}$。

$$[\![\text{handle } M \text{ 使用 } H \text{ 至 } x.N]\!] \coloneqq \mathbf{handle}_{[\![\Sigma]\!],[\![\Sigma']\!],J[\![A]\!]} \circ \langle [\![H]\!], T_{[\![\Sigma]\!]}[\![N]\!] \circ \theta^{T_{[\![\Sigma]\!]}} \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \rangle$$

正如预期，指称语义相对于 λ_{eff}的等式理论是可靠的。

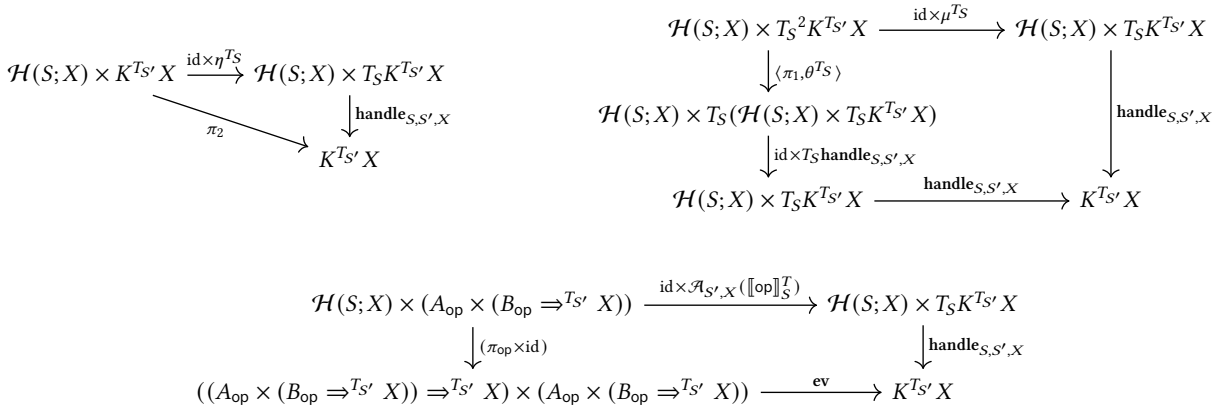


图 4：以下是 (处理器-单位)、(处理器-乘法) 和(操作)的交换图。

定理 4.4（可靠性）。如果可推导出 $\Gamma \vdash V = W\colon A$，那么对于任意 λ_{eff}-模型，$\llbracket V \rrbracket = \llbracket W \rrbracket$ 也成立。类似地，如果可推导出 $\Gamma \vdash M = N\colon C$ 或$\Gamma \vdash H = H'\colon \Sigma \Rightarrow C$，那么 $\llbracket M \rrbracket = \llbracket N \rrbracket$ 或 $\llbracket H \rrbracket = \llbracket H' \rrbracket$也分别成立。□

根据命题 3.4，我们还可以得到操作语义相对于指称语义的可靠性。

推论 4.5。 操作语义相对于指称语义是可靠的：若 $M \rightsquigarrow N$，则 $\llbracket M \rrbracket = \llbracket N \rrbracket$。□

4.2 完备性

相对于 λ_{eff}的等式理论，指称语义也是完备的。证明通过构造一个项模型来完成，与细粒度按值调用 [23]的情况相同。

定义 *4.6.* 我们如下定义范畴 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$。

- $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$ 中的对象是值类型 A。
- 态射 $V\colon A \to B$是值项 $x\colon A \vdash V\colon B$模方程 $x\colon A \vdash V = W\colon B$。为记号简便起见，我们常常直接写 V，而不写其等价类 $[V]$。
- 恒等态射由 $x\colon A \vdash x\colon A$ 给出。
- 两个态射 $V\colon A \to B$与 $W\colon B \to C$的复合由代换 $V \circ W = V[W/x]$ 定义。

容易看出，$\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$ 是一个笛卡尔范畴，其中范畴积由积类型给出。

定义 *4.7.* 我们如下在笛卡尔范畴 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$ 上定义一个 λ_{eff}-模型结构。

- 对于每个语义签名 $S \in \mathrm{ET}(\mathrm{Syn}(\lambda\mathrm{eff}))$，我们通过以下强 Kleisli 三元组定义一个强单子 T_S。– 对象映射由 $T_S A := \mathrm{unit} \to A!S$给出。这里，我们自然地将 $\mathrm{Syn}(\lambda\mathrm{eff})$ 中的语义签名 S 视为句法签名。– 对于每个类型 A，单位类型 $\eta_A\colon A \to T_S A$ 由 $x\colon A \vdash \lambda y.\mathrm{return}\ x\colon \mathrm{unit} \to A!S$ 给出。– 对于 $x\colon A_1 \times A_2 \vdash V\colon \mathrm{unit} \to B!S$，强 Kleisli 扩展 $x'\colon A_1 \times (\mathrm{unit} \to A_2!S) \vdash V^\sharp\colon \mathrm{unit} \to B!S$由 $\lambda y.\mathrm{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\, x'\ \mathrm{in}\ V[\pi_1\, x' x_2/x]$ 给出。
- Kleisli 指数 $A \Rightarrow^{T_S} B$ 由 $A \to B!S$给出。
- 态射 $\mathrm{handle}_{S,S'A}$ 定义为$x\colon \mathrm{H}\,(S; A!S') \times (\mathrm{unit} \to (\mathrm{unit} \to A!S')!S) \vdash \lambda z.\mathrm{handle}\ \pi_2\, x\ \mathrm{with}\ H\ \mathrm{to}\ r.r\colon \mathrm{unit} \to A!S'$ where H是由 $\pi_1\, x\colon \mathrm{H}\,(S; A!S')$诱导的效应处理器。$H := \{\mathrm{op}(y,k) \mapsto \pi$操作 $(\pi_1\, x)\, y, k \mid (\mathrm{op}\colon A$操作 $\to B$操作$) \in S$
- 操作的解释定义如下：$\lambda y.\ x \vdash x \to B\ S$：$A_{\text{操作}}\ \mathrm{op}() : $单位类型 $_{\text{操作}}!$。

定理 4.8。 定义 4.7 确实给出了一个 λ_{eff}-模型 *el.* □

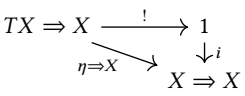
通过在项模型中解释项，我们可以证明指称语义的完备性。详细证明见附录 G。

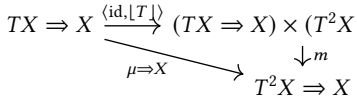
定理 4.9（完备性）。 设 $\Gamma \vdash V\colon A$和 $\Gamma \vdash W\colon A$是值项，且对任意 λ_{eff}-模型都有 $\llbracket V \rrbracket = \llbracket W \rrbracket$ 在 $\Gamma \vdash$成立。那么，$V = W\colon A$ 可导出。计算项和处理器也有类似的结论。□

4.3 与 Eilenberg–Moore代数的关系

假设 $\mathbb{C}$ 是一个具有等化子的笛卡尔闭范畴。那么，我们可以用 Eilenberg–Moore 代数来重新表述 λ_{eff}-模型。

定义 *4.10.* let T是 $\mathbb{C}$ 和 $X \in \mathbb{C}$上的强单子。我们将 $e\colon \mathbf{EM}(T; X) \to TX \Rightarrow X$定义为以下两个图表的联合等化子。





这里，$i_X\colon 1 \to X \Rightarrow X$和$m_{X,Y,Z}\colon (Y \Rightarrow Z) \times (X \Rightarrow Y) \to X \Rightarrow Z$分别是内部 Hom 的恒等态射和复合态射；而 $\lfloor T \rfloor\colon X \Rightarrow Y \to TX \Rightarrow TY$是强函子 T对内部 Hom 的应用。

直观地说，$\mathbf{EM}(T;\ X)$ 是内部 Hom $TX \Rightarrow X$ 的一个子对象，用于收集 X 上的 Eilenberg–Moore T-代数。如果 $\mathbb{C} = \mathbf{集合}$，那么 $\mathbf{EM}(T;\ X)$ 就是 X 上的 Eilenberg–Moore T-代数的集合。

命题 4.11。 若 $\mathbb{C}$ 是具有等化子的笛卡尔闭范畴，则 $\mathbb{C}$ 上的 λ_{eff}-模型与以下数据之间存在一一对应关系：

- 一族定义在 $\mathbb{C}$ 上的强单子 $\{T_S\}_{S \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})}$。
- 对于每个语义签名 $S \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})$ 以及 (操作 : A操作 $\to$ B $\in S$ $[\![\ ]\!]_S^T$ $A \to T_S B$ $\mathbb{C}$ 操作)，有一个态射 操作: 操作 操作 in。
- 对于每个语义签名 $S, S' \in ET(\mathbb{C})$ 和 $X \in \mathbb{C}_{T_S}$，有一个态射 $h_{S,S'X}$: H (S; X) $\to EM(T_S;\ KX)$，使得对于每个 $(op :\ A op\ op)$，$\pi = {}_{S\ X}\ e \to op\ (A'\ ([\![op]\!]_S^T)$ $B \Rightarrow {}_{\in S} KX)$ $\circ$ $\circ$ h。 □

4.4 添加基类型和求和类型

在第 3 节中，语言 λ_{eff} 被刻意保持精简，以便聚焦于效应处理器的核心概念。为了让语言更实用，我们在此考虑几种扩展。

基类型和原始操作。扩展 λ_{eff} 以包含整数和布尔值等基类型，以及常量和原始操作，是很直接的：

$$A ::= \cdots \mid b \qquad\qquad V ::= \cdots \mid f(V_1, \ldots, V_n)$$

这里，$b \in \text{Base}$ 表示基类型，$f\colon \prod_{i=1}^n A_i \to B$ 表示常量和原始操作。这里，常量可以看作类型为单位类型 $\to B$ 的原始操作。为了对这一扩展后的语言进行解释，我们在 λ_{eff}-模型的定义中加入这些基类型和常量的解释。扩展了基类型和原始操作的 λ_{eff}模型是一个 λ_{eff}-模型（$\mathbb{C}, T, [\![-]\!]$, handle），其中 $[\![-]\!]$ 扩展为：它为每个基类型 $b \in \text{Base}$ 指定 $[\![b]\!] \in \mathbb{C}$，并为每个原始操作 $f\colon \prod_{i=1}^n A_i \to B$指定一个态射 $[\![f]\!]\colon \prod_{i=1}^n [\![A_i]\!] \to [\![B]\!]$ in $\mathbb{C}$，此外还包括定义 4.2 中对操作的解释。接下来，只需直接将可靠性和完备性定理扩展到这一情形即可。

和类型。 添加和类型同样直接。我们将$\lambda^+{}_{\text{eff}}$ 定义为在 λ_{eff} 的基础上扩展和类型：

$$A ::= \cdots \mid A + B \qquad\qquad V ::= \cdots \mid \iota_1\ V \mid \iota_2\ V$$
$$M ::= \cdots \mid \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x \mapsto M;\ \iota_2\ y \mapsto N\}$$

为简单起见，这里我们只考虑二元和类型，但扩展到 n 元和类型 $A_1 + \cdots + A_n$ 也很直接。我们通过以下和类型的 β/η 定律扩展 λ_{eff} 的等式理论。

$$\forall i \in \{1,2\},\quad \mathsf{case}\ \iota_i\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x \mapsto M_1;\ \iota_2\ x \mapsto M_2\} = M_i[V/x]$$
$$\mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ y \mapsto M[\iota_1\ y/x];\ \iota_2\ z \mapsto M[\iota_2\ z/x]\} = M[V/x]$$

无需为和类型与 handle-with 表达式之间的交互添加额外方程，因为这些方程可以由现有方程推导出来。

命题 4.12. 以下方程可在$\lambda^+{}_{\text{eff}}$.$\mathsf{handle}\ \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x_1 \mapsto M_1;\ \iota_2\ x_2 \mapsto M_2\}\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N = \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x_1 \mapsto \mathsf{handle}\ M_1\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N; \iota_2\ x_2 \mapsto \mathsf{handle}\ M_2\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N\}$

证明. Let $L : M_2 \quad H \quad y.N = z \quad \iota_2\ x_2 \mapsto$ handle case of $\{\iota_1\ x_1 \mapsto M_1;\}$ with to，其中 是一个新变量。

$$\begin{aligned}
&\mathsf{handle}\ \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x_1 \mapsto M_1;\ \iota_2\ x_2 \mapsto M_2\}\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N \\
&= L[V/z] \\
&= \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x_1 \mapsto L[\iota_1\ x_1/z];\ \iota_2\ x_2 \mapsto L[\iota_2\ x_2/z]\} \\
&= \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x_1 \mapsto \mathsf{handle}\ M_1\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N; \\
&\qquad\qquad \iota_2\ x_2 \mapsto \mathsf{handle}\ M_2\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N\}
\end{aligned}$$

□

在 $\lambda^+{}_{\text{eff}}$ 中，注入 $\iota_i\ V$ 是值构造子，而 case 分析则是计算构造子。因此，我们使用一种与普通范畴余积略有不同的结构来解释和类型，并将其称为 *Kleisli* 余积。这种情况类似于 Kleisli 指数对象，后者用于解释函数类型：由于 λ 抽象是值构造子，而应用是计算构造子，Kleisli 指数对象是利用 $\mathbb{C}$ 与 Kleisli 范畴 $\mathbb{C}_T$ 之间的伴随定义的。同样，我们也利用这一伴随定义 Kleisli 余积。

定义 *4.13*。 笛卡尔范畴$\mathbb{C}$ 中带有强单子 T的*Kleisli* 二元余积是一个图表 $X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_1 + X_2 \xleftarrow{\iota_2} X_2$，位于 $\mathbb{C}$ 中，且其在 J^T: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}_T$下的像是 $\mathbb{C}_T$中的余积图表；也就是说，对于任意 Y以及 $\mathbb{C}$ 中的态射 $f_1\colon X_1 \to TY$ 和 $f_2\colon X_2 \to TY$，存在唯一的态射 $[f_1, f_2]\colon X_1 + X_2 \to TY$，使得 $[f_1, f_2] \circ \iota_1 = f_1$且 $[f_1, f_2] \circ \iota_2 = f_2$。若 Kleisli 二元余积 $X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_1 + X_2 \xleftarrow{\iota_2} X_2$ 满足：对于任意 $Z \in \mathbb{C}$，$Z \times (-)$ 将图表映射为 Kleisli 二元余积图表$Z \times X_1 \xrightarrow{Z \times \iota_1}{}_{\text{id}} Z \times (X_1 + X_2) \xleftarrow{Z \times \iota_2}{}_{\text{id}} Z \times X_2$，则称其为可分配的 。

如果 $\mathbb{C}$ 具有二元余积，那么对于任意强单子 T，它都具有 Kleisli 二元余积，因为左伴随 J^T 保余极限。进一步地，如果 $\mathbb{C}$ 是可分配的，那么 Kleisli 二元余积也是可分配的。另一方面，Kleisli 二元余积不一定是 $\mathbb{C}$中的二元余积：例如，如果 $T = 1$ 是由终对象 $1 \in \mathbb{C}$定义的单子，那么任何形如 $X_1 \to Z \leftarrow X_2$的图表都是 Kleisli 二元余积图，因为每个同态集 $\mathbb{C}_T(X,\ Y)$ 都是单元素集。

在一个 λ_{eff}-模型中，我们有一个强单子族，但和类型的解释不应依赖于所选择的强单子。为此，我们定义如下概念。

定义 *4.14*。 设 $\{T_i\}_{i \in I}$ 是笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$上的一个强单子族。我们称图表 $X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_1 + X_2 \xleftarrow{\iota_2} X_2$为一个联合 *Kleisli* 二元余积，如果它对于每个强单子 T_i都是 Kleisli 二元余积。我们类似地定义联合可分配 *Kleisli* 二元余积 。

我们按如下方式扩展 λ_{eff}-模型。

定义 *4.15*。 A $\lambda^+{}_{\text{eff}}$-模型 是一个 λ_{eff}-模型（$\mathbb{C}$，T），满足 $\mathbb{C}$对于 $\{T_S\}_{S \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})}$具有联合可分配 Kleisli 二元余积。

命题 4.16。 演算 $\lambda^+{}_{\text{eff}}$ 相对于 $\lambda^+{}_{\text{eff}}$-模型是可靠且完备的。 □

注 *4.17.* 我们也可以通过将 case 分析添加为值构造子，来考虑一种略有不同的演算。

$$V ::= \cdots \mid \iota_1\ V \mid \iota_2\ V \mid \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_1\ x \mapsto W_1;\ \iota_2\ y \mapsto W_2\}$$

在这种情况下，模型只需定义为 λ_{eff}-模型，其中 $\mathbb{C}$ 是一个分配范畴。然而，这会使操作语义不那么自然，类似于注 3.3 中讨论的模式匹配情形。

5 模型示例

本节将介绍 λ_{eff}-模型的示例。第一个是基于自由单子的传统模型，第二个则是基于效应处理器 [10]的延续传递风格（CPS）语义的新颖模型。

5.1 自由单子

下面我们将展示，**集合**上的自由单子可以构成一个 λ_{eff}-模型。

定义 *5.1*。范畴 $\mathbb{C}$ 上的**自由单子**，是相对于从 $\mathbb{C}$ 上的单子范畴到 $\mathbb{C}$上的自函子范畴的遗忘函子的自由对象。具体而言，给定一个自函子 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，$F$的自由单子是一个单子 T，连同一个自然变换 $\zeta\colon F \to T$，使得对于任意单子T'和自然变换 $\phi\colon F \to T'$，都存在唯一的单子态射 $\hat{}\,\phi\colon T \to T'$，满足 $\phi = \hat{}\,\phi \circ \zeta$。

每个具有自然数对象的初等托扑斯都存在多项式自函子的自由单子 [26]。具体而言，**集合** 存在所有多项式自函子的自由单子。

定义 *5.2*。自函子$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的一个代数**自由单子** 是一个单子 T，使得 F-代数的范畴**Alg(*F*)**与 Eilenberg–Moore T-代数的范畴**EMAlg(*T*)**之间存在一个同构，且该同构与到 $\mathbb{C}$的遗忘函子相容。

任何代数自由单子都是自由单子。反过来，如果T是局部小且完备范畴 $\mathbb{C}$上的自由单子，那么 T是一个代数自由单子 [20, 第 22]节。具体而言，**集合** 上的自由单子都是代数自由的。下文中，我们将注意力限制在范畴**集合**上。

命题5.3。对于每个语义签名 $S \in \mathbf{ET}(\textbf{集合})$，我们定义一个多项式函子 $F_S\colon$ **集合** $\to$ **集合**，定义如下

$$F_S X \quad := \quad \sum_{(\mathsf{op}:A_{\mathsf{op}} \twoheadrightarrow B_{\mathsf{op}}) \in S} A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \Rightarrow X).$$

令 T_S为 F_S的自由单子。那么，$\{T_S\}_{S \in \mathbf{ET}(\mathbf{Set})}$连同以下结构构成了定义在 **集合**上的一个 λ_{eff}-模型。

操作 由于 T_S是自由的，我们有一个自然变换 $\zeta\colon F_S \to T_S$。因此，我们将 $[\![op]\!]$ 定义为以下复合，其中 ι_{op} 是余积注入。

$$A_{\mathsf{op}} \to A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \Rightarrow B_{\mathsf{op}}) \xrightarrow{\iota_{\mathsf{op}}} F_S B_{\mathsf{op}} \xrightarrow{\zeta} T_S B_{\mathsf{op}}$$

handle 对于每个 $X \in$集合$^{T_{S'}}$，$h \in H(S; X)$ 都是 F_S 上的一个 F_S-代数结构（或与之等价）。因此，我们定义函数 $\mathit{handle}_{S,S',X}\colon H(S; X) \times T_S K_{T_{S'}} X \to K_{T_{S'}} X$，使得对于每个 h，*handle*$(h, –)$ 都定义为 *Eilenberg–Moore* T_S-代数，并满足 *handle*$(h, –) \circ \zeta = h'$，其中 h' 是与 h 对应的 F_S-代数结构。□

5.2 效应处理器的CPS语义

众所周知，计算 λ 演算（λ_c-演算）的延续传递风格（CPS）变换对应于通过延续单子 [7] 进行的解释。我们证明，对于 λ_{eff} 的 CPS 变换也有类似的结果。

定义 *5.4.* 针对 λ_{eff} [10, 13][1] 的类型化*CPS*变换 $(\!|–|\!)$ 是一种具有以下形式的句法变换。

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash V : A \quad &\mapsto \quad (\!|\Gamma|\!) \vdash (\!|V|\!) : (\!|A|\!) \\
\Gamma \vdash M : A!\Sigma \quad &\mapsto \quad (\!|\Gamma|\!) \vdash (\!|M|\!) : (\!|A!\Sigma|\!) \\
\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow A!\Sigma' \quad &\mapsto \quad (\!|\Gamma|\!) \vdash (\!|H|\!) : \mathcal{H}_\Sigma[(\!|A!\Sigma'|\!)]
\end{aligned}$$

这里，源语言为 λ_{eff}，目标语言为 System F，即一种带有全称量化的多态λ演算。类型 $\mathrm{H}_\Sigma[\beta]$ 定义如下。

$$\mathcal{H}_\Sigma[\beta] \quad := \quad \prod_{(\mathsf{op}:A_{\mathsf{op}} \twoheadrightarrow B_{\mathsf{op}}) \in \Sigma} \Big((\!|A_{\mathsf{op}}|\!) \times ((\!|B_{\mathsf{op}}|\!) \to \beta) \to \beta \Big)$$

具体而言，变换 $(\!|–|\!)$ 定义如下。

- 值类型和项按同态方式转换。
- 计算类型的转换方式如下。

$$(\!|A!\Sigma|\!) \quad := \quad \forall\beta.(X \to \beta) \to \mathcal{H}_\Sigma[\beta] \to \beta$$

- 计算项的转换方式如下。

$$\begin{aligned}
&(\!|V\ W|\!) \quad := \quad (\!|V|\!)\ (\!|W|\!) \\
&(\!|\text{return } V|\!) \quad := \quad \forall\beta.\lambda k.\lambda h.k\ (\!|V|\!) \\
&(\!|\text{let } x \leftarrow M \text{ in } N|\!) \quad := \quad \forall\beta.\lambda k.\lambda h.(\!|M|\!)\ \beta\ (\lambda x.(\!|N|\!)\ \beta\ k\ h)\ \ h \\
&(\!|\text{操作}(V)|\!) \quad := \quad \forall\beta.\lambda k.\lambda h.\pi_{\mathsf{op}}\ h\ (\!|V|\!),\ \ k \\
&(\!|\text{handle } M \text{ 与 } H \text{ 至 } x.N|\!) \quad := \quad (\!|M|\!)\ (\!|A!\Sigma|\!)\ (\lambda x.(\!|N|\!))\ \ (\!|H|\!) \\
&\qquad \text{其中 } N : A!\Sigma
\end{aligned}$$

- 处理器的转换如下。

$$(\!|\{\mathsf{op}(x,k) \mapsto M_{\mathsf{op}} \mid \mathsf{op} \in \Sigma\}|\!) \quad := \quad \langle \lambda\langle x,k\rangle.(\!|M_{\mathsf{op}}|\!) \mid \mathsf{op} \in \Sigma \rangle$$

下面，我们说明如何从语义层面理解上述定义的 CPS 变换。我们简要回顾 System F 的范畴模型，它由 $\lambda{\to}\forall$-纤维化给出。关于这一概念的更多细节，可参见文献 [12]。

定义 *5.5*（$\lambda{\to}\forall$-纤维化）。多态纤维化是一种带有泛对象 Ω、纤维有限积以及基范畴中有限积的纤维化。$\lambda{\to}$- 纤维化是带有纤维指数对象的多态纤维化。$\lambda{\to}\forall$-纤维化是一个 $\lambda{\to}$-纤维化，具有简单的 Ω-积 $\prod_\Omega\colon \mathbb{E}_{I\times\Omega} \to \mathbb{E}_I$。

为了刻画效应处理器的 CPS 变换，我们使用由 System F 的项模型定义的 $\lambda{\to}\forall$-纤维化。

定义 *5.6*。System F 的项模型 **Syn($\lambda{\to}\forall$)** 定义如下。我们考虑 System F 的以下类型。

$$A, B \quad := \quad X \mid \mathtt{unit} \mid A \times B \mid A \to B \mid \forall X.A$$

let $\Delta = X_1, \dots, X_m$为一个类型变量上下文，且 $\Gamma = x_1\colon A_1, \dots, x_n\colon A_n$ 为一个项变量上下文。良构类型记为 $\Delta \vdash A$，良类型项记为 $\Delta \mid \Gamma \vdash V\colon A$。则以下构造给出一个 $\lambda{\to}\forall$-纤维化。

[1]我们对 [10, 13]，中 CPS 变换的定义稍作修改，因为他们的定义不满足处理器的方程。

基范畴 对象是类型变量上下文 Δ。态射 $\Delta \to \Delta'$ 是代换，即为每个 $X_i \in \Delta'$指定一个 $\Delta' \vdash A_i$。由此得到一个笛卡尔范畴，其积由类型变量上下文的拼接给出。

全范畴 在 Δ 上的一个对象是一个良定义的类型 $\Delta \vdash A$。一个垂直态射 $\Delta \vdash A \to \Delta \vdash B$ 是一个项 $\Delta \mid x\colon A \vdash V\colon B$，模 β/η-等价。为方便起见，我们通常将 $\Delta \mid x_1\ \ A_1\quad x_n\ \ A_n \vdash V\ \ B$ 认作 $\Delta \mid x\ \ A_1 \times \cdots \times A_n \vdash \langle\ldots,\ldots,\rangle : V[\pi_1\, x\ \ x_1\ \ldots\ \ \pi_n\, x\ \ x_n]\ \ B$。

根据 $\lambda{\to}\forall$-纤维化的定义，终对象 1 上的纤维范畴 $\mathbf{Syn}(\lambda{\to}\forall)_1$ 是一个笛卡尔闭范畴。由于终对象 1 对应于空类型变量上下文，纤维范畴 $\mathbf{Syn}(\lambda{\to}\forall)_1$ 可以看作限制在不含自由类型变量的类型上的项模型。我们可以在 $\mathbf{Syn}(\lambda{\to}\forall)_1$ 上构造一个 λ_{eff}-模型，为效应处理器的 CPS 变换提供范畴论解释。

定义 *5.7.* 我们如下在纤维范畴 $\mathbf{Syn}(\lambda{\to}\forall)_1$ 上定义一个强单子 $\{D_S\}_{S \in \mathbf{ET}(\mathbf{Syn}(\lambda\to\forall)_1)}$。

对象映射 对于每个 S 和 X，我们如下定义 D_S。

$$X : \mathbf{Type} \quad \mapsto \quad \forall\beta.(X \to \beta) \to \mathcal{H}_S[\beta] \to \beta : \mathbf{Type}$$

这里，$\mathrm{H}_S[\beta]$ 是如下定义的类型。

$$\mathcal{H}_S[\beta] \quad \coloneqq \prod_{(\mathrm{op}:A_{\mathrm{op}} \nrightarrow B_{\mathrm{op}}) \in S} (A_{\mathrm{op}} \times (B_{\mathrm{op}} \to \beta) \to \beta)$$

单位 对于每个 A，单位定义如下。

$$x : A \vdash \quad \forall\beta.\, \lambda k : A \to \beta.\, \lambda h : \mathcal{H}_S[\beta].\, k\, x \quad : D_S A$$

强 Kleisli 扩张 对于每个 $x_1\colon A_1, x_2\colon A_2 \vdash M\colon D_S B$，其强 Kleisli 扩张 $x_1\colon A_1, x_2\colon D_S A_2 \vdash M^\sharp\colon D_S B$ 定义如下。

$$M^\sharp \coloneqq \forall\beta.\, \lambda k : B \to \beta.\, \lambda h : \mathcal{H}_S[\beta].\, x_2\ \beta\ (\lambda x_2 : A_2.\, M\ \beta\ k\ h)\ h$$

命题 5.8. 定义 *5.7* 中的强单子与以下结构一起是一个 λ_{eff}-模型。

操作 对于每个 S 和操作 $\mathrm{op} : A \nrightarrow B$（属于 S），我们按如下方式定义 $[\![\mathrm{op}]\!] : A \to D_S B$。

$$x : A_{\mathrm{op}} \vdash \forall\beta.\, \lambda k : B_{\mathrm{op}} \to \beta.\, \lambda h : \mathcal{H}_S[\beta].\, \pi_{\mathrm{op}}\ h\ \langle x, k\rangle : D_S B_{\mathrm{op}}$$

处理 我们按如下方式定义 $\mathbf{handle}_{S,S',A}$。

$$h : \mathcal{H}_S[D_{S'}A], \quad x : D_S D_{S'} A \vdash \quad x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y : D_{S'}A.\, y)\ h \quad : D_{S'}A \qquad \square$$

定理 5.9. 项 M 在 λ_{eff}-模型中的解释，与命题 *5.8* 中 *CPS* 变换后的项 $(\!|M|\!)$ 在 $\lambda{\to}\forall$-纤维化 $\mathbf{Syn}(\lambda{\to}\forall)$ 中的解释一致，也就是说，它们是关于 $(\!|M|\!)$ 模 β/η-等价的等价类。 $\square$

由指称语义的可靠性（定理 4.4），可立即得出 CPS 变换在以下意义下是正确的。

推论 5.10. 如果 $\Gamma \vdash M = N\colon A!\Sigma$ *in* λ_{eff}，那么 $(\!|M|\!)$ 和 $(\!|N|\!)$ 在 *System F* 中模 $\beta\ \eta$ M-/-等价。特别是，如果 N λ_{eff} $(\!|M|\!)$ $(\!|N|\!)$ $\beta\ \eta$ *in*，那么 和 在 /- 等价下相等。 $\square$

6 纳入效应理论

效应处理器的思想源于对代数理论的研究，[31, 32], 代数理论由操作以及操作之间的等式公理所规定。然而，我们在第3 节和4 节介绍的效应处理器演算λ^+_{eff} 并未考虑操作之间的等式公理。在本节中，我们考虑对 λ^+_{eff} 的扩展，将操作之间的等式公理纳入其中。我们为这一扩展后的演算提供范畴语义，并证明其可靠性和完备性。

在深入细节之前，我们先简要介绍本节的技术内容。扩展演算的语法（我们将其称为 $\lambda^+_{,=}$ eff）主要受到 [24] 的启发。它与 λ^+ eff 的主要区别在于，我们使用形式为 $A!\Sigma/\mathrm{E}$ 的计算类型，其中 E 是 Σ 中操作之间的一组等式公理。此类型旨在表示可能执行 Σ 中操作、且保证满足 E 中方程的计算。要对 M 使用 H 处理 $x.N$ 进行类型判定，其中 M 的类型为 $A!\Sigma/\mathrm{E}$，我们要求效应处理器 H 遵守 E 中的方程，具体将在图 5 中说明。依照 [24, 32] 的术语，我们称一对 (Σ, E) 为一个效应理论。

λ^+效应理论 $_{=}$ eff 的语义通过调整第 4 节中给出的 λ^+ eff 的语义来定义。尽管模型的结构与 λ^+ eff 的相似，但这会带来一些技术上的困难。一个困难源于 $\mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N$ 的类型规则经过修改，该规则使类型规则与方程的推导规则之间产生了相互依赖。为了解决这一问题，我们定义了一种不依赖于方程推导规则的项的部分解释，随后通过与 $\lambda^+_{,=}$ eff 的可靠性定理进行相互归纳，证明该解释对所有良类型项都有定义。另一个困难在于修改定义 4.2 中 $\mathsf{handle}_{S,S',X}$ 的定义。由于只有当 H 遵循 M 的效应理论中的方程时，$\mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N$ 才是良类型的，因此态射 $\mathsf{handle}_{S,S',X} : \mathrm{H}(S; X) \times T_S K^{T_S} X \to K^{T_S} X$ 不一定对 $\mathrm{H}(S; X)$ 的任意（广义）元素都有定义。因此，我们将 $\mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}\colon H_{\mathcal{T}} \times yT_{\mathcal{T}}K^{T_{\mathcal{T}'}}X \to yK^{T_{\mathcal{T}'}}X$ 定义为预层范畴 $[\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ 中的一个态射，其中 $yX = \mathbb{C}(-, X)$ 是 Yoneda 嵌入，而 $H_{\mathcal{T}}$ 是 $y\mathrm{H}(S; X)$ 的一个子预层，由遵循效应理论 $\mathrm{T}\ _{=}(\Sigma, \mathrm{E})$ 中方程的广义元素构成。接着，我们证明，按此定义的模型具有可靠性（定理 6.14）和完备性（定理 6.15）。

6.1 效应理论

为了定义效应理论（Σ，E）的语法，[24, 32], 我们首先考虑 λ^+_{eff}中值类型和值项的一阶片段，分别称为基类型和基项。

$$\begin{aligned} \hat{A}, \hat{B} \quad &\coloneqq \quad b \mid \hat{A}_1 \times \cdots \times \hat{A}_n \mid \hat{A}_1 + \cdots + \hat{A}_n \\ \hat{V}, \hat{W} \quad &\coloneqq \quad x \mid \langle \hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_n \rangle \mid \pi_i\ \hat{V} \mid \iota_i\ \hat{V} \end{aligned}$$

这里，b 遍历基类型。我们用带帽号的形式书写基类型和基项，以便将它们与效应处理器演算 $\lambda^+_{,=\text{ eff}}$ 中的值类型和值项区分开来，后者将在稍后定义。基项的类型判断形式为 $\Delta \vdash V\colon A$，其中 Δ 是一个仅包含基类型变量的上下文。类型规则与 λ^+_{eff} 中的定义方式相同。

操作之间的等式公理使用如下定义的 效应理论项来指定。

$$\begin{aligned}\hat{M}, \hat{N} \quad &:= \quad \mathtt{return}\ \hat{V} \mid \mathtt{let}\ x \leftarrow \mathsf{op}(\hat{V})\ \mathtt{in}\ \hat{M} \\ &\quad \mid \mathtt{case}\ \hat{V}\ \mathtt{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i\}_{i=1}^{n}\end{aligned}$$

这些项的直观含义与 λ^{+} 效应中的计算项相同。请注意，文献中常将操作应用写作操作$(\hat{}V; x.\hat{}M)$， [24], 这与我们的语法 let $x \leftarrow$ 操作$(\hat{}V)$ in $\hat{}M$等价。这些项的类型判断写作 $\hat{}\hat{}\hat{}\Delta \vdash M : A!\Sigma$，其推导规则的定义方式与 λ^{+} 效应类似。此处，操作签名（或简称签名）中出现的类型 Σ 仅限于基类型。

$$\Sigma \quad := \quad \emptyset \mid \{\mathsf{op} : \hat{A} \twoheadrightarrow \hat{B}\} \cup \Sigma$$

定义 *6.1*。签名 Σ 的等式公理是一对良类型项 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M : \hat{}A!\Sigma$ 和 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}N : \hat{}A!\Sigma$，它们具有相同的上下文和类型。为简洁起见，等式公理常写作 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M \sim \hat{}N : \hat{}A!\Sigma$。效应理论是一个二元组 (Σ, E)，其中Σ 是一个签名，E 是一组等式公理。

例 *6.2.* 非确定性的等式理论定义如下。令 $\Sigma = \{\mathsf{choice} : \text{单位类型} \twoheadrightarrow \text{单位类型} + \text{单位类型}\}$。为简化记号，我们定义以下语法糖。

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}M$或 $N :=$ let $x \leftarrow$选择 在 case x中 $\{\iota_1\ \_ \mapsto M; \iota_2\ \_ \mapsto N\}$

choice 的幂等性、交换性和结合律可表示为以下等式公理。

$$\begin{aligned}&\vdash \mathtt{return}\ \langle\rangle\ \mathtt{or}\ \mathtt{return}\ \langle\rangle \sim \mathtt{return}\ \langle\rangle : \mathsf{unit}!\Sigma \\ &\vdash \mathtt{return}\ \iota_1\ \langle\rangle\ \mathtt{or}\ \mathtt{return}\ \iota_2\ \langle\rangle \\ &\qquad \sim \mathtt{return}\ \iota_2\ \langle\rangle\ \mathtt{or}\ \mathtt{return}\ \iota_1\ \langle\rangle : \mathsf{unit} + \mathsf{unit}!\Sigma \\ &\vdash (\mathtt{return}\ \iota_1\ \langle\rangle\ \mathtt{or}\ \mathtt{return}\ \iota_2\ \langle\rangle)\ \mathtt{or}\ \mathtt{return}\ \iota_3\ \langle\rangle \\ &\qquad \sim \mathtt{return}\ \iota_1\ \langle\rangle\ \mathtt{or}\ (\mathtt{return}\ \iota_2\ \langle\rangle\ \mathtt{or}\ \mathtt{return}\ \iota_3\ \langle\rangle) \\ &\qquad\quad : \mathsf{unit} + \mathsf{unit} + \mathsf{unit}!\Sigma\end{aligned}$$

6.2 效应理论项的两种解释

令 T为笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$上的强单子，且 $\mathbb{C}$对 T具有分配的 Kleisli 余积。给定一个效应理论 (Σ, E)，假设我们对每个操作 $(\mathsf{op} : \hat{}A_{\mathsf{op}} \twoheadrightarrow \hat{}B_{\mathsf{op}}) \in \Sigma$都有一个解释 $[\![\mathsf{op}]\!] : [\![\hat{}A_{\mathsf{op}}]\!] \to T[\![\hat{}B_{\mathsf{op}}]\!]$。这里，对于每个基类型 $\hat{}A$，其解释 $[\![\hat{}A]\!] \in \mathbb{C}$ 按标准方式定义，如 λ^{+} eff 中所示。我们考察 T何时满足 E 中的方程。

定义 *6.3.* 我们称 $\{[\![\text{操作}]\!] : [\![\hat{}A_{\text{操作}}]\!] \to T[\![\hat{}B_{\text{操作}}]\!]\}_{(\mathsf{op}:\hat{}A_{\text{操作}} \twoheadrightarrow \hat{}B_{\text{操作}}) \in \Sigma}$在 E 中满足等式公理，如果对于 E 中的每个等式公理 $\Delta \vdash \hat{}M \sim \hat{}N : \hat{}A!\Sigma$，都有 $[\![\hat{}M]\!] = [\![\hat{}N]\!]$，其中 $[\![\hat{}M]\!] : [\![\hat{}\Delta]\!] \to T[\![\hat{}A]\!]$定义如下。

$$\begin{aligned}&[\![\mathtt{return}\ \hat{}V]\!] := \quad \eta \circ [\![\hat{}V]\!] \\ &[\![\mathtt{let}\ x \leftarrow \mathsf{op}(\hat{V})\ \mathtt{in}\ \hat{M}]\!] \quad := \quad \mu \circ T[\![\hat{M}]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \rangle \\ &[\![\mathtt{case}\ \hat{V}\ \mathtt{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i\}_{i=1}^{n}]\!] \quad := \quad [[\![\hat{M}_1]\!], \ldots, [\![\hat{M}_n]\!]] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \rangle\end{aligned}$$

请注意，这一解释与 λ^{+} 效应中计算项的解释本质上相同。

在 λ^{+} 效应 中，效应处理器 $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow A!\Sigma'$ 的解释由 $[\![H]\!] : [\![\Gamma]\!] \to \mathrm{H}(\Sigma; J^{T_{\Sigma'}}[\![A]\!])$ 给出。要定义 $[\![H]\!]$ 满足 E 中的方程时，我们使用另一种效应理论项的解释，定义如下。

定义 *6.4*。对于每个 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M : \hat{}A!\Sigma$ 和 $X \in \mathbb{C}_T$，我们定义

$$\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle_X^T : \mathcal{H}(\Sigma; X) \to [\![\hat{\Delta}]\!] \times ([\![\hat{A}]\!] \Rightarrow^T X) \Rightarrow^T X$$

按$\hat{}M$ 进行归纳如下。

$$\begin{aligned}&\Lambda^{-1}\langle\!\langle \mathtt{return}\ \hat{V} \rangle\!\rangle_X^T \quad := \quad \mathbf{ev} \circ \sigma \circ ([\![\hat{V}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2 \\ &\Lambda^{-1}\langle\!\langle \mathtt{let}\ x \leftarrow \mathsf{op}(\hat{V})\ \mathtt{in}\ \hat{M} \rangle\!\rangle_X^T \\ &:= \mathbf{ev} \circ \langle \pi_{\mathsf{op}} \circ \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle_X^T \circ w) \rangle \rangle \\ &\Lambda^{-1}\langle\!\langle \mathtt{case}\ \hat{V}\ \mathtt{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i\}_{i=1}^{n} \rangle\!\rangle_X^T \\ &:= [\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle_X^T \circ w, \ldots, \Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle_X^T \circ w] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \rangle\end{aligned}$$

这里， $w : (\mathrm{H}(\Sigma; X) \times ([\![\hat{}\Delta]\!] \times ([\![\hat{}B]\!] \Rightarrow^T X))) \times [\![\hat{}A]\!] \to \mathrm{H}(\Sigma; X) \times ([\![\hat{}\Delta,\ x : \hat{}A]\!] \times ([\![\hat{}B]\!] \Rightarrow^T X))$ 是重新排列各分量的典范同构。我们称 $f : Z \to \mathrm{H}(\Sigma; X)$ 满足方程$\hat{}\hat{}\hat{}$公理 如果对于 E 中的每个方程公理 $\Delta \vdash M \sim N : A!\Sigma$，都有 $\hat{}M_X^T \circ f = \hat{}N_X^T \circ f$。

正如预期，这两种解释密切相关。众所周知， [30]形如 $A \to TB$ 的泛型效应与形如 $B \Rightarrow^T X \to A \Rightarrow^T X$ 的代数运算之间存在一一对应关系。利用这种对应关系，我们可以将上述两种解释联系起来。给定一个态射 $f : A \to TB$，对于每个 $X \in \mathbb{C}_T$，我们定义 $A \times (B \Rightarrow^T X) \to KX$ 为 $\lfloor f \rfloor_X := \mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (f \times \mathrm{id})$。

引理 6.5。对于每个效应理论项 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M : \hat{}A!\Sigma$ 和 $X \in \mathbb{C}_T$，我们有以下方程，它关联了 $\langle\!\langle \hat{}M \rangle\!\rangle_X^T$ 与 $[\![\hat{}M]\!]$。

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle_X^T \circ \langle \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \pi_2) \rangle_{\mathsf{op} \in \Sigma} \quad &= \quad \Lambda(\lfloor [\![\hat{M}]\!] \rfloor_X \circ \pi_2) \\ &: 1 \to ([\![\hat{\Delta}]\!] \times ([\![\hat{A}]\!] \Rightarrow^T X)) \Rightarrow^T X\end{aligned}$$

□

根据引理 6.5，定义 6.3 可化简为定义 6.4，因此 $\langle\!\langle \hat{}M \rangle\!\rangle_X^T$ 可视为效应理论项的一种更基础的解释。

推论 6.6。一个解释 $\{[\![\text{操作}]\!]\}_{\mathsf{op} \in \Sigma}$ 满足定义 *6.3* 所述的等式公理，当且仅当对每个 $X \in \mathbb{C}_T$，$h := \langle \Lambda(\lfloor [\![\text{操作}]\!] \rfloor \circ \pi_2) \rangle_{\mathsf{op} \in \Sigma} : 1 \to \mathcal{H}(\Sigma; X)$满足定义 *6.4*所述的等式公理。 □

6.3 带效应理论的 EffectHandler 演算

我们通过在 λ^{+} eff 的类型系统上加入效应理论，定义 $\lambda^{+,=}$ eff 的类型系统。值类型 A, B、计算类型 C, D 和 处理器类型 H定义如下。

$$\begin{aligned}A, B \quad &:= \quad b \mid A \to C \mid A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_1 + \cdots + A_n \\ C, D \quad &:= \quad A!\Sigma/\mathcal{E} \qquad\qquad H \quad := \quad \Sigma \Rightarrow C\end{aligned}$$

此处， b 遍历基类型。请注意，与 λ^{+} eff 不同，签名 Σ 现在仅限于基类型，正如我们在第 6.1 节中所解释的那样。项的定义与 λ^{+} eff 中相同。

类型规则。的大多数类型规则 $\lambda^{+,\ =\ \text{效应}}$ 与以下规则相同：λ^{+} 效应，但计算类型 $A!\Sigma$ 被替换为 $A!\Sigma/\mathcal{E}$。一个显著的区别是 handle-with 的类型规则（图 5），其中我们使用以下附加判断。

$$\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C \ \mathbf{respects}\ \mathcal{E},$$

$$\frac{\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C \qquad \Gamma, \hat{\Delta}, k : \hat{A} \to C \vdash \hat{M}[H,k] = \hat{N}[H,k] : C \quad \forall\, \hat{\Delta} \vdash \hat{M} \sim \hat{N} : \hat{A}!\Sigma \in \mathcal{E}}{\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C \textbf{ respects } \mathcal{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A!\Sigma/\mathcal{E} \qquad \Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C \textbf{ respects } \mathcal{E} \qquad \Gamma, x : A \vdash N : C}{\Gamma \vdash \mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x : A.N : C}$$

图 5：与效应处理器相关的 $\lambda^{+,\ =\ 效应}$ 的类型规则。我们ˆ默认假设 Γ 和 Δ 中的变量互不相交。

此判断表示一个效应处理器 H 具有类型 $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C$ 并且遵循效应理论$(\Sigma, \mathcal{E})$中的等式公理。此判断的推导规则定义于图5中。在该规则中，我们使用以下辅助翻译。

定义 *6.7*。对于每个效应理论项 $\hat{}M$和新变量 k，我们按归纳方式定义 $\hat{}\,M[H,k]$ 如下。

$$(\mathtt{return}\ \hat{V})[H,k] \quad \coloneqq \quad k\ \hat{V}$$

$$(\mathtt{let}\ x \leftarrow 操作(\hat{}V)\ \mathtt{in}\ \hat{}N)[H,k] \quad \coloneqq \quad M_{\mathsf{op}}[\hat{}V/x, \lambda x.\hat{}N[H,k]/k']$$

$$(\mathtt{case}\ \hat{}V \mathtt{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{}M_i\}_{i=1}^n)\ [H,k]$$

$$\coloneqq \quad \mathtt{case}\ \hat{V}\ 的\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i[H,k]\}_{i=1}^n$$

这里，M_{op} 是 op 的操作子句 $\mathsf{op}(x,\ k') \mapsto M_{\mathsf{op}} \in H$。

引理 6.8。若 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M : \hat{}A!\Sigma$ 且 $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C$，则 $\Gamma, \hat{}\Delta, k : \hat{}A \to C \vdash \hat{}M[H,k] : C$。□

$\hat{}$ 上述翻译的直观含义是，$M[H,k]$ 表示这样一个计算项：将 $\hat{}M$ 中的每个操作调用替换为效应处理器 H中对应的子句后得到该计算项，最后再将结果传递给续延 k。[24, 32]中也使用了类似的翻译。

等式理论。在 $\lambda^{+,\ =\ 效应}$ 中，我们通过同时归纳法定义类型规则以及方程 $\Gamma \vdash M = N : C$ 的推导规则，因为要推导判断 $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C$ **满足** E，必须先得到计算项相等的判断。

方程的推导规则 $\Gamma \vdash M = N : C$ 与 $\lambda^{+\ \text{eff}}$中的规则大多相同，但我们增加了一条新规则，用于在效应理论中实例化等式公理。

$$\textsc{Inst-Ax}\ \frac{\hat{\Delta} \vdash \hat{M} \sim \hat{N} : \hat{A}!\Sigma \in \mathcal{E} \qquad \sigma : \Gamma \to \hat{\Delta}}{\Gamma \vdash \hat{M}[\sigma] = \hat{N}[\sigma] : \hat{A}!\Sigma/\mathcal{E}}$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 这里，$\sigma : \Gamma \to \Delta$ 是一个代换，对于每个 $x : B \in \Delta$，$\sigma(x)$都是 $\lambda^{+,=\ \text{eff}}$的一个值项，且满足 $\Gamma \vdash \sigma(x) : \hat{}B$；而 $\hat{}\,M[\sigma]$ 是 $\lambda^{+,=\ \text{eff}}$ 中的计算项，它是通过将 $\hat{}M$ 中的每个变量 x 替换为 $\sigma(x)$ 而得到的。

6.4 指称语义

现在，我们扩展$\lambda^{+\ 效应}$模型的定义，以解释 $\lambda^{+,\ =\ 效应}$。

Definition 6.9. A $\lambda^{+,=}_{\text{eff}}$*-model* consists of the following.

- 一个笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$ 以及一个强单子族 $T_{(\Sigma,\ \mathcal{E})}$，它定义在由效应理论 $(\Sigma,\ \mathrm{E})$ 索引的 $\mathbb{C}$ 上，并且 $\mathbb{C}$ 具有 Kleisli 指数和联合分配 Kleisli 余积。$\hat{}\,\hat{}$
- 对于每个效应理论 (Σ, E) 和 $(\mathrm{op} : A\mathrm{op} \nrightarrow B\mathrm{op}) \in \Sigma$，都有一个态射 $[\![\mathrm{op}]\!]_{(\Sigma,\mathrm{E})} : [\![\hat{}A\mathrm{op}]\!] \to T_{(\Sigma,\mathrm{E})}[\![\hat{}B\mathrm{op}]\!]$，它属于 $\mathbb{C}$，并且满足定义 6.3 意义下的等式公理。
- 对于每个效应理论 $\mathrm{T} = (\Sigma、\mathrm{E})$、$\mathrm{T}' = (\Sigma'、\mathrm{E}')$ 和对象 $X \in \mathbb{C}_{T_{\mathcal{T}'}}$，有一个自然变换

$$\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X} : H_{\mathcal{T}} \times yT_{\mathcal{T}}K^{T_{\mathcal{T}'}}X \to yK^{T_{\mathcal{T}'}}X$$

其中 $yX = \mathbb{C}(-、\ X)$ 是 Yoneda 嵌入，$H_{(\Sigma,\mathcal{E})} : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to$ **集合** 是 $y\mathrm{H}\ (\Sigma;\ X)$ 的一个子对象，由下式定义

$$H_{(\Sigma,\mathcal{E})}(Z) \coloneqq \{f \in \mathbb{C}(Z, \mathcal{H}(\Sigma; X)) \mid f \text{ satisfies } \mathcal{E} \text{ (Definition 6.4)}\}.$$

$\mathbf{handle}_{\mathcal{T}、\mathcal{T}'、X}$ 的自然性意味着我们有以下方程。

$$\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h,f) \circ g \quad = \quad \mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h \circ g, f \circ g)$$

要求 **handle** 满足以下方程，对任意 $h \in H_{\mathcal{T}}(Z)$ 均成立。

$$\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h, \eta \circ f) = f \quad \text{for } f \in \mathbb{C}(Z, K^{T_{\mathcal{T}'}}X) \tag{5}$$

$$\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h, \mu \circ f)$$
$$= \mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h, T\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h \circ \pi_1, \pi_2) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, f \rangle)$$
$$\text{for } f \in \mathbb{C}(Z, T^2_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}'}X) \tag{6}$$

$$\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h, \mathcal{A}_{\mathcal{T}',X}([\![\mathrm{op}]\!]^T_{\mathcal{T}}) \circ f) = \mathbf{ev} \circ \langle \pi_{\mathsf{op}} \circ h, f \rangle$$
$$\text{for } f \in \mathbb{C}(Z, A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \Rightarrow^{T_{\mathcal{T}'}} X)) \tag{7}$$

与 $\lambda^{+\ 效应}$-模型的主要区别在于：(a) $[\![操作]\!]$ 必须满足等式公理；(b) **handle** 被定义为预层之间的自然变换。后一项要求稍显技术性，但其直观含义是：$H_{(\Sigma,\mathcal{E})}$ 在上述定义中表示效应处理器的解释 $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C$ **满足**$\mathcal{E}$ 中的等式公理的$\mathcal{E}$，因此**handle** 对应于图5 中 handle-with 的类型规则。

如果 $\mathbb{C}$ 是一个足够完备的范畴，那么与 $\lambda^{+\ 效应}$-模型的情形类似，**handle** 可以表示为 $\mathbb{C}$ 中的一个态射，而不是预层之间的自然变换。

命题 6.10。如果 $\mathbb{C}$ 有联合等化子，那么 $H_{\mathcal{T}} : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to$ **集合**可表为 $H_{\mathcal{T}} \cong yQ$，其中 $Q \in \mathbb{C}$ 是某个对象；并且 $\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\ \mathcal{T}',\ X}$ 可以表示为如下形式的态射：$\mathbf{handle}'_{\mathcal{T}\mathcal{T}'X} \quad Q \times {}_{,\ ,} : \quad 。$

$T_{\mathcal{T}}K^{T_{\mathcal{T}'}}X \to K^{T_{\mathcal{T}'}}X$ □

然而，一般而言并不能保证这样的极限存在，尤其是在考虑用于证明完备性的项模型时。因此，在一般情形下，我们使用预层。

回顾一下，$\lambda^{+,\ =\ 效应}$ 的类型规则和方程是通过同时归纳来定义的。因此，项的解释不能仅通过对类型推导进行归纳来定义。相反，我们首先定义良类型项的部分解释，随后证明该解释实际上对所有良类型项都有定义。

定义 *6.11.* 我们对类型推导进行归纳，部分定义 $\lambda^{+,=\ \text{eff}}$ 中良类型项的解释。

$$\Gamma \vdash M : A!\Sigma/\mathcal{E} \quad \mapsto \quad [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to T_{(\Sigma,\mathcal{E})}[\![A]\!]$$

大多数情况与 λ^{+}_{eff}类似，但我们如下定义 handle-with 的解释。

$$[\![\text{handle } M \text{ 用 } H \text{ 到 } x.N]\!] \coloneqq \begin{cases} \mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}([\![H]\!], T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle) & [\![H]\!] \in H_{\mathcal{T}}([\![\Gamma]\!]) \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\mathsf{T} = (\Sigma, \mathsf{E})$ 满足 $\Gamma \vdash M : A!\Sigma/\mathsf{E}$，且 $\mathsf{T}' = (\Sigma', \mathsf{E}')$ 满足 $\Gamma, x : A \vdash N : B!\Sigma'/\mathsf{E}'$。

为了证明 $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C$ **尊重** E 被解释为 $[\![H]\!] \in H_{\mathcal{T}}([\![\Gamma]\!])$，我们需要如下引理。

引理 *6.12.* *let* $\hat{\Delta} \vdash \hat{M} : \hat{A}!\Sigma$。若 $[\![H]\!] : [\![\Gamma]\!] \to H([\![\Sigma]\!]; [\![C]\!])$ 有定义，则 $[\![\hat{M}[H,k]]\!] : [\![\Gamma, \hat{\Delta}, k : \hat{A} \to C]\!] \to [\![C]\!]$ 有定义且等于 $\Lambda^{-1}(\langle\langle \hat{M} \rangle\rangle \circ [\![H]\!]) \circ s$，其中 s 是典范同构 $s : [\![\Gamma, \hat{\Delta}, k : \hat{A} \to C]\!] \cong [\![\Gamma]\!] \times [\![\hat{\Delta}, k : \hat{A} \to C]\!]$。具体而言，我们有 $[\![\hat{M}[H,k]]\!] = [\![\hat{N}[H,k]]\!]$ 当且仅当 $\langle\langle \hat{M} \rangle\rangle \circ [\![H]\!] = \langle\langle \hat{N} \rangle\rangle \circ [\![H]\!]$。 □

利用部分解释建立必要的引理后，我们可以证明该解释实际上对所有良类型项都有定义。通过与 $\lambda^{+}_{,=\text{eff}}$ 的可靠性定理同时归纳，即可证明这一点。

命题 6.13 $\Gamma \vdash M \quad A\,\Sigma \quad [\![M]\!] \quad [\![\Gamma]\!] \to .. \text{若} : !/\mathcal{E}, \text{则} :$ 有定义。$T_{(\Sigma,\mathcal{E})}[\![A]\!]$ 值项和处理器也同样如此。

定理 6.14. 若 $\Gamma \vdash M = N : A!\Sigma/\mathcal{E}$，则 $[\![M]\!]$ 和 $[\![N]\!]$ 有定义，且 $[\![M]\!] = [\![N]\!]$ 成立。

证明概要。 命题 6.13 和定理 6.14通过同时归纳证明。 □

通过构造 $\lambda^{+}_{,=\text{效应}}$ 的项模型，我们也可以证明完备性定理。

定理 6.15（完备性）。如果 $[\![M]\!] = [\![N]\!]$，那么 $\Gamma \vdash M = N : A!E/\mathsf{E}$。 □

例 6.16。我们说明，传统的自由模型单子给出了一个 $\lambda^{+}_{,=}$ 效应模型。为简单起见，考虑范畴 Set。假设所有基类型都解释为可数集合，那么任意基类型也都解释为可数集合。令 $T_{(\Sigma,\mathcal{E})}$ 为效应理论 (Σ, E) 的自由模型单子，即，$T_{(\Sigma,\mathcal{E})}X$ 是由 $X \in \mathsf{Set}$ 生成的自由 (Σ, E)-代数的底层集合。于是，这自然给出了一个 $\lambda^{+}_{,=}$ 效应模型。这里，根据命题 6.10，handle 由函数 $\mathrm{handle}'_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X} : Q \times T_{\mathcal{T}}K^{T_{\mathcal{T}'}}X \to K^{T_{\mathcal{T}'}}X$ 定义，其中 Q 是 $K^{T_{\mathcal{T}'}}X$ 上的 (Σ, E)-代数集合。由 $T_{\mathcal{T}}$ 的自由性，我们可以将 $\mathrm{handle}'_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(h, -) : T_{\mathcal{T}}K^{T_{\mathcal{T}'}}X \to K^{T_{\mathcal{T}'}}X$ 定义为对应于 $h \in Q$ 的 Eilenberg–Moore 代数。显然可以证明，这个 handle 满足所需方程。 □

7 相关工作

效应处理器的范畴语义。 效应处理器的一种早期范畴语义，是通过代数理论的自由模型单子给出的 [24, 31, 32], , 其建立在代数理论与 Lawvere 理论的理论基础之上 [11, 29, 30]。后续研究通常采用由不带等式公理的代数运算生成的自由单子作为语义模型 [3, 21]。由于函子 F 的自由单子 T 被定义为最小不动点 $TX = \mu Y.X + FY$，这类模型通常在域论语境中表述。

文中提出了一种基于可实现性的指称模型 [36]。他们的效应处理器演算与我们的不同之处在于，它基于原始单子，这些单子无需满足单子律，因此其等式理论与我们的不同。特别是，他们明确将（Handle-Op）排除在其等式理论之外。因此，他们的模型与我们的模型互不包含。

虽然这些研究通常探讨等式理论并证明可靠性结果，但尚未得到任何完备性结果。

效应处理器演算的变体。 文献中研究了若干种效应处理器变体。这里，我们将我们的演算与其中一些进行比较。本文关注的是深层效应处理器，而非浅层效应处理器 [9]。深层和浅层效应处理器可以通过递归相互模拟 [9,Section 3], , 这表明我们的范畴模型或许可以适配浅层效应处理器。我们将对浅层效应处理器的详细研究留待未来工作。

我们的效应系统基于 [3]; 不过，为简洁起见，我们省略了由签名之间的子集关系 $\Sigma \subseteq \Sigma'$ 所诱导的子类型 。我们认为，只需引入针对 $\Sigma \subseteq \Sigma'$的单子态射 $T_{\Sigma} \to T_{\Sigma'}$，便可轻松将子类型纳入我们的框架。一些效应处理器演算支持答案类型修改 [19, 33], , 使类型系统能够跟踪答案类型的变化。从语义角度看，这对应于参数化单子 [2, 第 3.2 节。1]

高阶效应已知会表现出“非代数”行为 [35],, 针对这类效应的演算也已有研究 [5, 36]。此处，高阶效应指输入类型和输出类型可能涉及非基类型的操作。在我们的效应处理器演算中 λ_{eff}，操作签名不限于基类型，这可能导致计算的语义与操作签名之间相互依赖。我们通过使用由语义签名索引的单子来定义语义，从而消除这种潜在的循环依赖。相比之下，在 $\lambda^{+}_{,=\text{eff}}$ 中，我们仅考虑具有基类型的签名，因此效应理论不涉及高阶效应。

8 结论与未来工作

我们为效应处理器演算的两种变体给出了可靠且完备的范畴语义，分别对应带有和不带有操作等式公理的情形。我们还通过证明经典自由模型单子和 CPS 语义都可以作为我们演算的模型，展示了框架的表达能力。

作为未来的研究工作，我们计划研究效应处理器的纤维化逻辑关系。具体而言，我们希望将范畴式 $\top\top$-提升 [16, 17] 扩展到我们的场景中。我们预计，这需要求解混合变差不动点方程，以便将基范畴中的**handle**态射提升到纤维化的全范畴中，并可能采用经典的域论技术或步索引。

参考文献

[1] Danel Ahman。2018。《处理纤维化代数效应》。*ACM* 编程语言学报 2, 2018 1 29 10 1145 3158095 POPL（1月），–。

[2] doi:/Robert Atkey。2009.《参数化计算概念》。函数式编程期刊19，3-4（2009年7月），335–376。doi:10.1017/S095679680900728X[3] Andrej Bauer 和 Matija Pretnar。2014。《代数效应与处理器的效应系统》。计算机科学中的逻辑方法10，4（2014年12月），9。doi:10.2168/LMCS-10(4:9)2014

[4] Dariusz Biernacki、Maciej Piróg、Piotr Polesiuk 和 Filip Sieczkowski。2018。《谨慎处理：代数效应与处理器的关系解释》。ACM 编程语言学报 2，POPL（2018年1月），1–30。doi:10.1145/3158096[5] Roger Bosman、Birthe Van Den Berg、Wenhao Tang 和 Tom Schrijvers。2024。《作用域效应与处理器演算》。计算机科学中的逻辑方法，第 20， 4 2024 11234 10 46298 20 4 17 2024 卷第 期（11月），。[6] doi: . /lmcs- (:) Yannick Forster、Ohad Kammar、Sam Lindley 和 Matija Pretnar。。《用户定义效应的表达能力：效应处理器、单子反射与分隔控制》。函数式编程期刊 29（2019），e15。doi:10. 1017/S0956796819000121[7] Carsten Führmann 和 Hayo Thielecke。2004。《按值调用 CPS 变换及其语义》。信息与计算 188，2（2004年1月），241–283。doi: 10 1016 2003 08 001 . /j.ic. . . Claudio Hermida。。《纤维化、逻辑谓词与不定元》。博士论文。爱丁堡大学，英国。[9] Daniel Hillerström 和 Sam Lindley。2018。《浅层效应处理器》。载于《程序设计语言与系统》（《计算机科学讲义》，第11275卷）。施普林格国际出版社，Cham，415–435。doi:10.1007/978-3-030-02768- 1 22[10] Daniel Hillerström、Sam Lindley、Robert Atkey 和 K. C. Sivaramakrishnan。2017。《效应处理器的延续传递风格》。载于第二届形式化结构与计算演绎国际会议（FSCD 2017）（《莱布尼茨国际信息学会议录》（Lipics），第84卷）。达格斯图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，德国达格斯图尔，18:1–18:19。doi:10.4230/LIPIcs.FSCD.2017.18[11] Martin Hyland 和 John Power。2007。《普适代数的范畴论理解：Lawvere 理论与单子》。理论计算机科学电子札记 172 2007 437 458 10 1016 2007 02 019（4月），–。[12] doi: . /j.entcs. . . Bart Jacobs。。《范畴逻辑与类型理论》（平装版）。《逻辑与数学基础研究》第141号。爱思唯尔，阿姆斯特丹。[13] Ohad Kammar、Sam Lindley 和 Nicolas Oury。2013。《效应处理器实战》。载于第18届 ACM SIGPLAN 函数式编程国际会议论文集。ACM，波士顿，美国马萨诸塞州，145–158。doi:10.1145/2500365. 2500590[14] Ohad Kammar 和 Dylan McDermott。2018。《类型与效应系统语义中逻辑关系与单子提升的分解系统》。理论计算机科学电子札记 341（2018年12月），239–260。doi:10.1016/j. entcs.2018.11.012[15] Georgios Karachalias、Filip Koprivec、Matija Pretnar 和 Tom Schrijvers。2021。《代数效应处理器的高效编译》。ACM 编程语言学报 5， 2021 1 28 10 1145 3485479 面向对象编程、系统、语言与应用会议（10月），–。doi: . / Shin-ya Katsumata。。《-提升与计算元语言逻辑谓词的语义表述》。载于《计算机科学逻辑》（《计算机科学讲义》，第3634卷）。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，87 102 10 1007 11538363_8 –。doi: . / Shin-ya Katsumata。。《通过 ⊤⊤-提升关联计算效应》。信息与计算 222 2013 228 246 10 1016 2012 10 014（1月），–。[18] doi: . /j.ic. . . Shin-ya Katsumata。。《参数化效应单子与效应系统语义》。载于第41届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会论文集——POPL '14。ACM 出版社，美国加利福尼亚州圣迭戈，633–645。doi:10.1145/2535838.2535846[19] Fuga Kawamata、Hiroshi Unno、Taro Sekiyama 和 Tachio Terauchi。2024。《答案细化修改：代数效应与处理器的细化类型系统》。ACM 编程语言学报 8，POPL（1月 2024 115 147 10 1145 3633280），–。doi: . / G.M. Kelly。。《自由代数、自由幺半群、余极限、相关层等的超限构造统一处理》。澳大利亚数学学会通报 22，1（1980年8月），1–83。doi:10.1017/ S0004972700006353[21] Oleg Kiselyov、Shin-Cheng Mu 和 Amr Sabry。2021。《不止方程：使用可扩展效应进行推理》。函数式编程期刊 31（1月 2021 2 10 1017 0956796820000271），e。doi: . /S Joachim Lambek 和 P. J. Scott。。《高阶范畴逻辑导论》。《剑桥高等数学研究》第7号。剑桥大学出版社，剑桥 [剑桥郡]；纽约。[23] Paul Blain Levy、John Power 和 Hayo Thielecke。2003。《按值调用编程语言中的环境建模》。信息与计算 185，2（9月 2003 182 210 10 1016 0890 5401 03 00088 9），–。doi: . /S - ( ) - Žiga Lukšič 和 Matija Pretnar。。《局部代数效应理论》。函数式编程期刊 30 2020 13 10 1017 0956796819000212 ( )，e。doi: . /S Dylan McDermott 和 Tarmo Uustalu。。《什么造就了强单子？》。载于第九届数学结构化函数式编程研讨会（《理论计算机科学电子会议录》，第360卷），113–133。doi:10.4204/ EPTCS.360.6[26] Ieke Moerdijk 和 Erik Palmgren。2000。《范畴中的良基树》。纯粹与应用逻辑年刊 104，1-3（2000年7月），189–218。doi:10.1016/S0168- 0072 00 00012 9 ( ) - E. Moggi. . 计算λ演算与单子。载于 *[1989]* 论文集。第四届计算机科学逻辑年度研讨会。IEEE计算机学会出版社，美国加利福尼亚州太平洋格罗夫，14 23 10 1109 1989 39155 – 。doi: 。/ LICS. 。Gordon Plotkin 和 John Power。. 代数效应的适切性。载于《软件科学与计算结构基础》（计算机科学讲义，第2030卷）。Springer Berlin Heidelberg，德国柏林，1–24。doi:10.1007/3-540-45315-6 1[29] Gordon Plotkin 和 John Power。2002。计算概念决定单子。载于《软件科学与计算结构基础》（计算机科学讲义，第2303卷）。Springer Berlin Heidelberg，德国柏林，342 356 10 1007 3 540 45931 6_24 – 。doi: 。/ - - - Gordon Plotkin 和 John Power。2003。代数运算与泛型效应。《应用范畴结构》 11, 1 2003 69 94 10 1023 1023064908962 ( )，– 。doi: 。/ A: Gordon Plotkin 和 Matija Pretnar。. 代数效应处理器。载于《程序设计语言与系统》（计算机科学讲义，第5502卷）。Springer Berlin Heidelberg，德国柏林，80–94。doi:10.1007/978-3-642-00590-9 7[32] Gordon Plotkin 和 Matija Pretnar。2013。处理代数效应。《计算机科学中的逻辑方法》 9, 4 2013 23 10 2168 9 4 23 2013 (12月)，。[33] doi: 。/LMCS- (:) Taro Sekiyama 和 Hiroshi Unno。. 使用应答效应修改进行时序验证：具有有界续延的依赖时序类型与效应系统。《ACM 编程语言学报》7，POPL（1月 2023 2079 2110 10 1145 3571264），– 。doi: 。/ Filip Sieczkowski、Mateusz Pyzik 和 Dariusz Biernacki。2023。效应处理器的一般细粒度归约理论。《ACM 编程语言学报》 7， 2023 511 540 10 1145 3607848 ICFP（8月），–。doi: 。[35] / Nicolas Wu 、 Tom Schrijvers 和 Ralf Hinze。. 作用域中的效应处理器。载于《2014年ACM SIGPLAN Haskell研讨会论文集》。ACM，瑞典哥德堡，1 12 10 1145 2633357 2633358 – 。doi: 。/ 。Zhixuan Yang 和 Nicolas Wu。. 使用判断式单子律处理高阶效应操作。《ACM 编程语言学报》10，POPL（2026年1月），1036–1065。doi:10.1145/3776678

第 3 节的证明 (带效应处理器演算)

命题的证明3.2。我们通过对 $\vdash M : C$ 的结构作归纳，证明计算项 M或者是正规形式，或者是可约的。

• 若 $M = V\ W$，则 V：根据类型规则， $A \to C$的形式为 $\lambda x.N$、 $\pi_i\ V$或一个变量。由于 M是闭项， V不可能是变量。若 $M = (\lambda x.N)\ W$，则它是可约的。若 $M = (\pi_i\ V)\ W$，则它是一个范式。• 若 $M = \mathsf{let}\ x \leftarrow N_1\ \mathsf{in}\ N_2$，根据归纳假设， N_1要么是一个范式，要么是可约的。若 N_1是可约的，则 M也是可约的，因为 $\mathsf{C} = \mathsf{let}\ x \leftarrow [\,]\ \mathsf{in}\ N_2$是一个求值上下文。若 N_1是形式为 $\mathsf{return}\ V$的范式，则 M是可约的。若 N_1是形式为 $\mathsf{C}[\mathsf{op}(V)]$或 $\mathsf{C}[(\pi_i\ V)\ W]$的范式，则 M也是一个范式。• 若 $M = \mathsf{handle}\ N_1\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N_2$，则根据归纳假设， N_1要么是一个范式，要么是可约的。若 N_1是可约的，则 M也是可约的，因为 $\mathsf{C} = \mathsf{handle}\ [\,]\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N_2$是一个求值上下文。若 N_1是形式为 $\mathsf{return}\ V$或 $\mathsf{C}[\mathsf{op}(V)]$,的范式，则 M是可约的。若 N_1是形式为 $\mathsf{C}[(\pi_i\ V)\ W]$的范式，则 M也是一个范式。• 其他情况都是范式。

接下来，我们证明类型保持：若 $\Gamma \vdash M : C$and $M \rightsquigarrow N$，则 $\Gamma \vdash N : C$。大多数情况都很直接。当 $M = \mathsf{handle}\ \mathsf{C}[\mathsf{op}(V)]\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N$，且 C 不包含 handle-with 时，$\mathsf{C}[\mathsf{op}(V)]$ 的签名与 $\mathsf{op}(V)$ 的签名相同，因此 H中存在相应的操作子句。 □

下面，我们考虑两种避免出现形如 $(\pi_i\ V)\ W$ 的正规形式的方法。第一种是为值项添加归约规则，以扩展操作语义。

定义 *A.1.* 我们通过添加以下规则来扩展定义 3.1：

$$V\ W \rightsquigarrow V'\ W \qquad \text{if } V \rightsquigarrow^{v} V'$$

其中，值项归约 ^{v} 定义如下：

$$\pi_i\ \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \rightsquigarrow^{v} V_i$$

$$\mathcal{D}[V] \rightsquigarrow^{v} \mathcal{D}[W] \quad \text{if } V \rightsquigarrow^{v} W \text{ where } \mathcal{D} \coloneqq [\,] \mid \pi_i\ \mathcal{D}$$

引理 A.2. 对于任意闭值项 $\vdash V$： A，要么 V是正规形式，要么存在一个值项 W使得 $V \ {}^{v}\ W$。后一种情况下，我们有 $\vdash W$: A。这里，值项的正规形式包括变量 x 、 λ 抽象 $\lambda x.M$ 以及元组 $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$。

证明。对 V 的结构进行归纳。只需证明形如 $\pi_i\ V$ 的值项是可约的。如果 V 是范式，那么根据类型规则，它的形式为 V_1、.....、 V_n，因此 $\pi_i\ V$ 是可约的。如果 V 可约，那么根据 ^{v}的定义， $\pi_i\ V$ 也可约。□ $\rightsquigarrow$

命题 A.3。 如果我们使用定义 *A.1*中的扩展操作语义，那么类型可靠性（命题 *3.2*）仍然成立，其中范式是形如 $\mathtt{return}\ V$或 C[操作(V)] 的计算项，且 C 不包含 *handle-with*。

证明。 根据引理 A.2，形如 $C[(\pi_i\ V)\ W]$ 的计算项现在是可约的。 □

第二种方法是修改 λ_{eff} （第 3 节）的语法，使得元组分解只发生在计算项中。从操作语义的角度来看，这种方法更自然，且 [10] 采用了这种方法。

定义 *A.4.* 我们如下修改 λ_{eff} 的值项和计算项语法。

$$V, W ::= x \mid \lambda x.M \mid V_1, \ldots, V_n M, \quad N ::= V\ W \mid \mathsf{return}\ V \mid \mathsf{let}\ x \leftarrow M \mathsf{in}\ N \mid \text{操作}(V) \mid \mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H \mathsf{to}\ x.N \mid \mathsf{pm}\ V \mathsf{to} x_1, \ldots, x_n \mathsf{in}\ M$$

模式匹配的类型规则 以显而易见的方式定义。我们还如下定义操作语义。 $\rightsquigarrow$

$$C[M] \rightsquigarrow C[N] \quad \text{if } M \rightsquigarrow N$$

$$\mathtt{let}\ x \leftarrow \mathtt{return}\ V\ \mathtt{in}\ M \rightsquigarrow M[V/x]$$

$$(\lambda x.M)\ V \rightsquigarrow M[V/x]$$

$$\mathtt{handle}\ \mathtt{return}\ V\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M \rightsquigarrow M[V/x]$$

$$\mathtt{handle}\ C[\mathtt{op}(V)]\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M \rightsquigarrow M_{\mathtt{op}}[V/x, \lambda y.\mathtt{handle}\ C[\mathtt{return}\ y]\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M/k] \quad \text{if } C \text{ does not contain handle-with}$$

$$\mathtt{pm}\ \langle V_1, \ldots, V_n \rangle\ \mathtt{to}\ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle\ \mathtt{in}\ M \rightsquigarrow M[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n]$$

这里，求值上下文 C 定义如下：

$$C \quad ::= \quad [\,] \mid \mathtt{let}\ x \leftarrow C\ \mathtt{in}\ N \mid \mathtt{handle}\ C\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M$$

与原始语法的主要区别在于，投影 $\pi_i\ V$已从值项中移除，并作为元组的模式匹配 $\mathtt{pm}\ V$到 $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$于 M中加入计算项。利用这一修改后的定义，我们可以证明如下类型可靠性结果，它比命题 3.2更为自然。

命题 A.5。 考虑定义 A.4中经修改的语法与操作语义。则类型可靠性（命题 3.2）成立，其中范式为形如 $\mathtt{return}\ V$ 或 $C[\text{操作}(V)]$ 的计算项，且 C 不包含 *handle-with*。

证明。 该证明类似于命题 3.2 的证明。主要区别在于，我们可以排除形如 $C[(\pi_i\ V)\ W]$ 的范式，并且需要如下考虑模式匹配的情形。假设 $M = \mathtt{pm}\ V$ 为 $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ 在 N 中。由于 V 是类型为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 的闭值项，它具有形式 $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$（根据类型规则）。因此， M 是可约的。 □

我们证明命题 3.4。在证明之前，我们先给出如下引理。

引理 A.6. 若 C 不包含 *handle-with*，则下列方程可推导。

$$\mathtt{handle}\ C[\mathsf{op}(V)]\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M \quad = \quad M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda y.\mathtt{handle}\ C[\mathtt{return}\ y]\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M/k]$$

证明。 对求值上下文 C 的结构使用归纳法。若 $C = []$，则由（Handle-Op）和（Handle-Ret）可得。

$$\begin{aligned}&\mathtt{handle}\ \mathsf{op}(V)\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M\\ &= M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda x.M/k]\\ &= M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda y.\mathtt{handle}\ \mathtt{return}\ y\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M/k]\end{aligned}$$

如果 $C = \mathtt{let}\ y \leftarrow C\ \mathtt{in}\ N$，则由归纳假设和（Handle-Let）得出。

$$\begin{aligned}&\mathtt{handle}\ \mathtt{let}\ y \leftarrow C[\mathsf{op}(V)]\ \mathtt{in}\ N\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M\\ &= \mathtt{handle}\ C[\mathsf{op}(V)]\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.\mathtt{handle}\ N\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M\\ &= M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda z.\mathtt{handle}\ C[\mathtt{return}\ z]\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.\mathtt{handle}\ N\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M/k]\\ &= M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda z.\mathtt{handle}\ \mathtt{let}\ y \leftarrow C[\mathtt{return}\ z]\ \mathtt{in}\ N\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M/k]\end{aligned}$$

□

命题3.4的证明。情形 $C[M]\,C[N]$ 由同余规则和归纳假设得出。情形（3）由引理A.6得出。其余情形由等式理论中的相应方程得出。

□

B 类型规则

上下文定义如下。

$$\Gamma ::= \cdot \mid \Gamma, x : A$$

值项 $\Gamma \vdash V :\ A$

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : C}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to C} \qquad \frac{\forall i, \Gamma \vdash V_i : A_i}{\Gamma \vdash \langle V_1, \ldots, V_n\rangle : \prod_{i=1}^n A_i} \qquad \frac{\Gamma \vdash V : \prod_{i=1}^n A_i}{\Gamma \vdash \pi_i\ V : A_i}$$

计算项 $\Gamma \vdash M :\ C$

$$\frac{\Gamma \vdash V :\ A \to C \qquad \Gamma \vdash W : A}{\Gamma \vdash V\ W : C} \qquad \frac{\Gamma \vdash V :\ A}{\Gamma \vdash \mathsf{return}\ V :\ A!\ E} \qquad \frac{\Gamma \vdash M :\ A!\ E \qquad \Gamma,\ x :\ A \vdash N :\ B!\ E}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ x \leftarrow M\ 在\ N :\ B!\ E} \qquad \frac{(\text{操作} : A \twoheadrightarrow B) \in E \qquad \Gamma \vdash V :\ A}{\Gamma \vdash \text{操作}(V) :\ B!E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A!E \qquad \Gamma \vdash H :\ E \Rightarrow C \qquad \Gamma,\ x :\ A \vdash N :\ C}{\Gamma \vdash \mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.N : C}$$

处理器 $\Gamma \vdash H :\ E \Rightarrow C$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \emptyset : \emptyset \Rightarrow C} \qquad \frac{\Gamma, x : A_{\mathsf{op}}, k : B_{\mathsf{op}} \to C \vdash M_{\mathsf{op}} : C \qquad \Gamma \vdash H : E \Rightarrow C}{\Gamma \vdash \{\mathsf{op}(x, k) \mapsto M_{\mathsf{op}}\} \cup H : \{\mathsf{op} : A_{\mathsf{op}} \twoheadrightarrow B_{\mathsf{op}}\} \cup E \Rightarrow C}$$

C 等式理论

我们考虑以下判断形式：

$$\Gamma \vdash V = W : A \qquad \Gamma \vdash M = N : C \qquad \Gamma \vdash H = H' : \Sigma \Rightarrow C$$

在推导规则中，我们默认使用约束变量的 α-转换。我们有四组推导规则。

- 自反性、对称性、传递性和同余规则
- β 以及 η 关于 λ 抽象和积类型的规则
- let表达式的单子律
- 效应处理器的规则

值类型的自反性、对称性和传递性规则如下。计算项和处理器也有类似的规则。

值-自反
$$\frac{\Gamma \vdash V : A}{\Gamma \vdash V = V : A}$$

值-对称
$$\frac{\Gamma \vdash V = W : A}{\Gamma \vdash W = V : A}$$

Val-Trans
$$\frac{\Gamma \vdash U = V : A \qquad \Gamma \vdash V = W : A}{\Gamma \vdash U = W : A}$$

同余规则针对每个项构造子给出。为简洁起见，此处不列出所有同余规则。例如，λ 抽象的同余规则如下。

Abs-Congr
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M = N : C}{\Gamma \vdash \lambda x.M = \lambda x.N : A \to C}$$

其他推导规则如下。

Abs-Beta
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B ! \Sigma \qquad \Gamma \vdash V : A}{\Gamma \vdash (\lambda x.M)\ V = M[V/x] : B ! \Sigma}$$

抽象-η
$$\frac{\Gamma \vdash V : A \to C \qquad x \text{ 新鲜}}{\Gamma \vdash V = \lambda x.(V\ x) : A \to C}$$

Prod-Beta
$$\frac{\forall i, \quad \Gamma \vdash V_i : A_i}{\Gamma \vdash \pi_i \langle V_1, \ldots\ldots, V_n \rangle = V_i}$$

积-Eta
$$\frac{\Gamma \vdash V : \prod_{i=1}^{n} A_i}{\Gamma \vdash V = \langle \pi_1\ V, \ldots\ldots, \pi_n\ V \rangle : \prod_{i=1}^{n} A_i}$$

返回-Let
$$\frac{\Gamma \vdash V : A \qquad \Gamma, x : A \vdash M : B ! \Sigma}{\Gamma \vdash \text{let } x \leftarrow \text{return } V \text{在 } M = M[V/x] : B ! \Sigma}$$

Let-Let
$$\frac{\Gamma \vdash M : A_1 ! \Sigma \qquad \Gamma, x : A_1 \vdash N : A_2 ! \Sigma \qquad \Gamma, y : A_2 \vdash L : A_3 ! \Sigma}{\Gamma \vdash \text{let } y \leftarrow (\text{let } x \leftarrow M \text{中 } N) \text{ 中 } L = \text{let } x \leftarrow M \text{中 let } y \leftarrow N \text{中 } L : A_3 ! \Sigma}$$

Let-Ret
$$\frac{\Gamma \vdash M : A ! \Sigma}{\Gamma \vdash \text{let } x \leftarrow M \text{中 return } x = M : A ! \Sigma}$$

Handle-Ret
$$\frac{\Gamma \vdash V : A \qquad \Gamma, x : A \vdash M : C \qquad \Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma \vdash \text{handle return } V \text{使用 } H \text{转换为 } x.M = M[V/x] : C}$$

Handle-Let
$$\frac{\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C \qquad \Gamma \vdash L : A ! \Sigma \qquad \Gamma, x : A \vdash M : B ! \Sigma \qquad \Gamma, y : B \vdash N : C}{\Gamma \vdash \text{handle (let } x \leftarrow L \text{ in } M) \text{ with } H \text{ to } y.N = \text{handle } L \text{ 用 } H \text{ 到 } x.\text{handle } M \text{ 用 } H \text{ 到 } y.N : C}$$

Handle-Op
$$\frac{(\text{操作} : A_{\text{op}} \rightarrowtriangle B_{\text{op}}) \in \Sigma \qquad (\text{操作}(x, k) \mapsto M_{\text{op}}) \in H \qquad \Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C \qquad \Gamma, x : B_{\text{op}} \vdash M : C \qquad \Gamma \vdash V : A_{\text{op}}}{\Gamma \vdash \mathtt{handle}\ \mathtt{op}(V)\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M = M_{\text{op}}[V/x, \lambda x.M/k] : C}$$

Handler-Congr
$$\frac{\Gamma \vdash H = H' : \Sigma \Rightarrow C \qquad \Gamma, x : A_{\text{op}}, k : B_{\text{op}} \to C \vdash M_{\text{op}} = N_{\text{op}} : C}{\Gamma \vdash \{\text{op}(x, k) \mapsto M_{\text{op}}\} \cup H = \{\text{op}(x, k) \mapsto N_{\text{op}}\} \cup H' : \{\text{op} : A_{\text{op}} \rightarrowtriangle B_{\text{op}}\} \cup \Sigma \Rightarrow C}$$

D 基本性质

引理 D .1. 对于任意值项 V，下列规则是可容许的：

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash V : A}{\Gamma, x : B, \Delta \vdash V : A}$$

对计算项和处理器同样成立。

证明。通过（同时）对类型推导进行归纳即可直接得出。 □

定义 *D.2.* 代换 是一个从变量到值项的有限映射 σ。代换 σ对项 M的应用，记作 $M[\sigma]$，定义为：将 M中变量 x的每个自由出现替换为 $\sigma(x)$（如果 x属于 σ的定义域）；否则， x保持不变。按项的结构进行归纳定义的具体形式是标准的，此处略去。如果 σ的定义域为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$，且对于每个 $i = 1, \ldots, n$，$\sigma(x_i) = V_i$，那么我们常将 $M[\sigma]$写作 $M[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n]$。

定义 D.3. </style}令 σ为一个代换。若 σ的定义域是上下文 Δ 中的变量集合，并且对于上下文 Δ中的每个 $x : A$，都有 $\Gamma \vdash \sigma(x) : A$，则记作 $\sigma : \Gamma \to \Delta$。

引理 D.4. 对于任意值项 V，以下规则是可容许的：

$$\frac{\Delta \vdash V : B \qquad \sigma : \Gamma \to \Delta}{\Gamma \vdash V[\sigma] : B}$$

计算项和处理器也同样如此。

证明。通过对 V 的类型推导进行（同时）归纳来证明。 □

定义 *D.5*。我们定义代换的复合如下。给定两个代换 σ_1 和 σ_2，它们的复合 $\sigma_2 \circ \sigma_1$ 是由 $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(x) \coloneqq \sigma_2(x)[\sigma_1]$定义的代换。

引理 D.6。设 $\sigma_1 : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ *and* $\sigma_2 : \Gamma_2 \to \Gamma_3$ 是代换，并且 $\Gamma_3 \vdash V : A$ 是一个值项。那么，以下定义等式 *holds*：

$$V[\sigma_2 \circ \sigma_1] = V[\sigma_2][\sigma_1].$$

计算项和处理器同样如此。

证明。我们同时对值项、计算项和处理器证明该命题。证明对 V进行归纳。大多数情况都是直接的。如果项构造子涉及变量绑定，我们使用弱化（引理 D.1）将 $\sigma : \Gamma \to \Delta$扩展为 $\sigma[z \mapsto z] : \Gamma, z : B \to \Delta, z : B$其中 z是在 V中绑定的变量。按照惯例，$\sigma[z \mapsto W]$是如下定义的代换。

$$\sigma[z \mapsto W](x) \coloneqq \begin{cases} W & \text{if } x = z \\ \sigma(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

例如，如果 $V = \lambda z : B.M$，那么将归纳假设应用于 $\sigma_1[z \mapsto z] : \Gamma_1, z : B \to \Gamma_2$、$z : B$、$\sigma_2[z \mapsto z] : \Gamma_2, z : B \to \Gamma_3, z : B$ 以及 $\Gamma_3, z : B \vdash M : C$，可得

$$\begin{aligned} M[\sigma_2 \circ \sigma_1] &= M[\sigma_2[z \mapsto z] \circ \sigma_1[z \mapsto z]] \\ &= M[\sigma_2[z \mapsto z]][\sigma_1[z \mapsto z]] \\ &= M[\sigma_2][\sigma_1] \end{aligned}$$

根据 λ 抽象的同余规则和代换的定义，我们有

$$(\lambda z.M)[\sigma_2 \circ \sigma_1] = (\lambda z.M)[\sigma_2][\sigma_1].$$ □

E 第 4 节的证明 （指称语义）

命题 4 的证明。由于 $\mathbb{C}$ 是笛卡尔闭的，[11] 对于 $\mathbb{C}$ 上的任意强单子，$\mathbb{C}$ 都具有 Kleisli 指数。接下来只需证明 $\mathbf{handle}_{E,E',X}$ 与 $h_{E,E',X}$ 之间的对应关系。容易证明，定义 4.2 中的三个方程等价于关于 $\Lambda\mathbf{handle}_{E,E',X}$ 的以下方程：$\mathrm{H}(E; X) \to T_E KX \Rightarrow KX$。

$$\begin{aligned} (\eta \Rightarrow KX) \circ \Lambda\mathbf{handle}_{E,E',X} &= i_{KX} \circ ! \\ (\mu \Rightarrow KX) \circ \Lambda\mathbf{handle}_{E,E',X} &= m \circ \langle \mathrm{id}, \lfloor T \rfloor \rangle \circ \Lambda\mathbf{handle}_{E,E',X} \\ (\mathcal{A}_{E',X}(\llbracket \mathsf{op} \rrbracket_E^T) \Rightarrow KX) \circ \Lambda\mathbf{handle}_{E,E',X} &= \pi_{\mathsf{op}} \end{aligned}$$

因此，给定 $\mathrm{handle}_{E,E',X}$，我们可以将 $\Lambda\mathrm{handle}_{E,E',X}$ 经由等化子 $e : \mathrm{EM}(T_E; KX) \to T_E KX \Rightarrow KX$ 分解，从而得到 $h_{E,E',X} : \mathrm{H}(E; X) \to \mathrm{EM}(T_E; KX)$。反过来，给定 $h_{E,E',X}$，我们可以通过 $\Lambda^{-1}(e \circ h_{E,E',X})$ 定义 $\mathrm{handle}_{E,E',X}$。□

F 可靠性证明

F.1 解释定义的细节

定义 *F.1.* 值类型 A、计算类型 C和签名 Σ 的解释通过同时归纳定义如下。

- 值类型 $\llbracket A \rrbracket \in \mathbb{C}$：

$$\llbracket A \to C \rrbracket \coloneqq \llbracket A \rrbracket \Rightarrow^{T\llbracket \Sigma \rrbracket} \llbracket C \rrbracket \qquad \llbracket \prod_{i=1}^{n} A_i \rrbracket \coloneqq \prod_{i=1}^{n} \llbracket A_i \rrbracket$$

- 计算类型 $\llbracket A!\Sigma \rrbracket \in \mathbb{C}^{T\llbracket \Sigma \rrbracket}$：

$$\llbracket A!\Sigma \rrbracket \coloneqq J^{T\llbracket \Sigma \rrbracket} \llbracket A \rrbracket$$

- 签名 $\llbracket \Sigma \rrbracket \in \mathbf{ET}(\mathbb{C})$：

$$\llbracket \emptyset \rrbracket \coloneqq \emptyset \qquad \llbracket \{\mathsf{op} : A_{\mathsf{op}} \rightarrowtriangle B_{\mathsf{op}}\} \cup \Sigma \rrbracket \coloneqq \{\mathsf{op} : \llbracket A_{\mathsf{op}} \rrbracket \rightarrowtriangle \llbracket B_{\mathsf{op}} \rrbracket\} \cup \llbracket \Sigma \rrbracket$$

上下文 $\llbracket \Gamma \rrbracket \in \mathbb{C}$ 的解释如下。

$$\llbracket \cdot \rrbracket \coloneqq 1 \qquad \llbracket \Gamma, x : A \rrbracket \coloneqq \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket$$

定义 *F.2*。 项和处理器的解释通过对类型推导进行同时归纳定义如下。

- 值项 $[\![\Gamma \vdash V \colon A]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ (为简洁起见，通常写作 $[\![V]\!]$):

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma, y : B \vdash x : A]\!] &\coloneqq \begin{cases} \pi_2 & x = y \\ [\![\Gamma \vdash x : A]\!] \circ \pi_1 & x \neq y \end{cases} \\
[\![\langle V_1, \dots, V_n \rangle]\!] &\coloneqq \langle [\![V_1]\!], \dots, [\![V_n]\!] \rangle \\
[\![\pi_i\ V]\!] &\coloneqq \pi_i \circ [\![V]\!] \\
[\![\lambda x : A.M]\!] &\coloneqq \Lambda([\![M]\!])
\end{aligned}$$

- 计算项 $[\![\Gamma \vdash M \colon A!\Sigma]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to T_{[\![\Sigma]\!]}[\![A]\!]$:

$$\begin{aligned}
[\![V\ W]\!] &\coloneqq \mathbf{ev} \circ \langle [\![V]\!], [\![W]\!] \rangle \\
[\![\mathtt{return}\ V]\!] &\coloneqq \eta^{T_{[\![\Sigma]\!]}} \circ [\![V]\!] \\
[\![\mathtt{let}\ x \leftarrow M\ \mathtt{in}\ N]\!] &\coloneqq \mu^{T_{[\![\Sigma]\!]}} \circ T_{[\![\Sigma]\!]}[\![N]\!] \circ \theta^{T_{[\![\Sigma]\!]}} \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \ = \ [\![N]\!]^\sharp \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \\
[\![\mathsf{op}(V)]\!] &\coloneqq [\![\mathsf{op}]\!]^T_{[\![\Sigma]\!]} \circ [\![V]\!] \\
[\![\mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.N]\!] &\coloneqq \mathbf{handle}_{[\![\Sigma]\!],[\![\Sigma']\!],J[\![B]\!]} \circ \langle [\![H]\!], T_{[\![\Sigma]\!]}[\![N]\!] \circ \theta^{T_{[\![\Sigma]\!]}} \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \rangle
\end{aligned}$$

  在定义 $[\![\mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.N]\!]$ 时，我们假设 $\Gamma \vdash \mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.N \colon B!\Sigma'$，且右侧的态射为 $\mathbf{handle}_{[\![\Sigma]\!],[\![\Sigma']\!],J[\![B]\!]} \colon \mathrm{H}([\![\Sigma]\!], J[\![B]\!]) \times T_{[\![\Sigma]\!]}T_{[\![\Sigma']\!]}[\![B]\!] \to T_{[\![\Sigma']\!]}[\![B]\!]$ and

$$[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle} [\![\Gamma]\!] \times T_{[\![\Sigma]\!]}[\![A]\!] \xrightarrow{\theta^{T_{[\![\Sigma]\!]}}} T_{[\![\Sigma]\!]}([\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!]) \xrightarrow{T_{[\![\Sigma]\!]}[\![N]\!]} T_{[\![\Sigma]\!]}T_{[\![\Sigma']\!]}[\![B]\!].$$

- 处理器 $[\![\Gamma \vdash H \colon \Sigma \Rightarrow C]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to \mathrm{H}([\![\Sigma]\!], [\![C]\!])$:

$$[\![H]\!] \coloneqq \langle \Lambda([\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1}) \rangle_{(\mathsf{op} : A_{\mathsf{op}} \to B_{\mathsf{op}}) \in \Sigma}$$

  其中 $\alpha_{X,Y,Z} \colon (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$ 是笛卡尔幺半群范畴 $\mathbb{C}$ 中的结合子，而 $[\![M_{\mathsf{op}}]\!] \colon ([\![\Gamma]\!] \times [\![A_{\mathsf{op}}]\!]) \times ([\![B_{\mathsf{op}}]\!] \Rightarrow^{T_{[\![\Sigma,]\!]}} J[\![B]\!]) \to T_{[\![\Sigma']\!]}[\![B]\!]$。也就是说，对于每个操作，我们都有一个态射

$$\Lambda([\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1}) : [\![\Gamma]\!] \to ([\![A_{\mathsf{op}}]\!] \times ([\![B_{\mathsf{op}}]\!] \Rightarrow^{T_{[\![\Sigma']\!]}} J[\![B]\!])) \Rightarrow^{T_{[\![\Sigma']\!]}} J[\![B]\!]$$

  并且 $[\![H]\!]$ 是这些态射的配对。

F.2 证明

非平凡之处在于图 3 中关于效应处理器的三个方程。其他方程（图 2）是细粒度按值调用中的标准方程 [23]。

引理 F. 3（弱化）。设 $\Gamma, \Delta \vdash V \colon A$ 是一个良类型项。$\Gamma, x \colon B, \Delta \vdash V \colon A$ 的解释为

$$[\![\Gamma, x : B, \Delta \vdash V : A]\!] = [\![\Gamma, \Delta \vdash V : A]\!] \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta}$$

其中 $\mathrm{proj}^{\Gamma;x:B;\Delta} \colon [\![\Gamma, x \colon B, \Delta]\!] \to [\![\Gamma, \Delta]\!]$ 是由下式定义的典范投影

$$\mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\cdot} = \pi_1 \qquad \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta,y:B'} = \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta} \times \mathrm{id}$$

对于计算和处理器，我们也有类似的方程 .

证明。通过直接归纳法。 □

引理 F.4（代换）。对于 $\Gamma \vdash V_1 \colon A_1, \dots, \Gamma \vdash V_n \colon A_n$ 和 $x_1 \colon A_1, \dots, x_n \colon A_n \vdash W \colon B$，$\Gamma \vdash W[V_1/x_1, \dots, V_n/x_n] : B$ 的解释为

$$[\![W[V_1/x_1, \dots, V_n/x_n]]\!] = [\![W]\!] \circ [\![V_1, \dots, V_n]\!]$$

其中 $[\![V_1, \dots, V_n]\!] \colon [\![\Gamma]\!] \to [\![x_1 \colon A_1, \dots, x_n \colon A_n]\!]$ 的定义为

$$[\![\cdot]\!] = ! \qquad [\![V_1, \dots, V_n, V_{n+1}]\!] = \langle [\![V_1, \dots, V_n]\!], [\![V_{n+1}]\!] \rangle$$

我们还有类似的等式 适用于计算项 $x_1 \colon A_1, \dots, x_n \colon A_n \vdash M \colon C$ 和处理器 $x_1 \colon A_1, \dots, x_n \colon A_n \vdash H \colon E \Rightarrow C$.

证明。通过直接归纳法。我们使用引理 F.3。 □

引理 F.5。 (Handle-Ret)是可靠的。

证明。 我们使用引理 F.4。令 Σ 为满足以下条件的签名 $\Gamma \vdash H : \ \Sigma \Rightarrow C$。为简洁起见，我们将 $[\![\Sigma]\!]$ 记作 Σ。于是，我们有如下结论。

$$
\begin{aligned}
&[\![\texttt{handle } \mathbf{return}\ V \texttt{ with } H \texttt{ to } x.M]\!] \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta^{T_\Sigma} \circ \langle \mathrm{id}, \eta^{T_\Sigma} \circ [\![V]\!] \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], \eta^{T_\Sigma} \circ [\![M]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![V]\!] \rangle \rangle \\
&= \pi_2 \circ \langle [\![H]\!], [\![M]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![V]\!] \rangle \rangle \\
&= [\![M]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![V]\!] \rangle \\
&= [\![M[V/x]]\!]
\end{aligned}
$$

□

引理 F.6。 (Handle-Let)是可靠的。

证明 。 我们使用引理 F.3。为简便起见，记 $[\![\Sigma]\!]$ 为 Σ。左侧可改写如下。

$$
\begin{aligned}
&[\![\texttt{handle } (\texttt{let } x \leftarrow L \texttt{ in } M) \texttt{ with } H \texttt{ to } y.N]\!] \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], T_\Sigma [\![N]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \mu \circ T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], T_\Sigma [\![N]\!] \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times \mu) \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], T_\Sigma [\![N]\!] \circ \mu \circ T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], \mu \circ (T_\Sigma)^2 [\![N]\!] \circ T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times \mu) \circ \langle [\![H]\!], (T_\Sigma)^2 [\![N]\!] \circ T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times T_\Sigma \mathbf{handle}) \circ \langle \pi_1, \theta \rangle \circ \langle [\![H]\!], (T_\Sigma)^2 [\![N]\!] \circ T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times T_\Sigma \mathbf{handle}) \circ \langle [\![H]\!], \theta \circ \langle [\![H]\!], (T_\Sigma)^2 [\![N]\!] \circ T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \rangle
\end{aligned}
$$

另一方面，右侧可改写如下。

$$
\begin{aligned}
&[\![\texttt{handle } L \texttt{ with } H \texttt{ to } x.\texttt{handle } M \texttt{ with } H \texttt{ to } y.N]\!] \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], T_\Sigma \mathbf{handle} \circ T_\Sigma \langle [\![H]\!] \circ \pi_1, T_\Sigma ([\![N]\!] \circ (\pi_1 \times \mathrm{id})) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times T_\Sigma \mathbf{handle}) \circ \langle [\![H]\!], T_\Sigma \langle [\![H]\!] \circ \pi_1, T_\Sigma ([\![N]\!] \circ (\pi_1 \times \mathrm{id})) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle
\end{aligned}
$$

因此，只需证明下列方程成立。

$$
\begin{aligned}
&\theta \circ \langle [\![H]\!], (T_\Sigma)^2 [\![N]\!] \circ T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= T_\Sigma \langle [\![H]\!] \circ \pi_1, T_\Sigma [\![N]\!] \circ T_\Sigma (\pi_1 \times \mathrm{id}) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle
\end{aligned}
$$

证明如下。

$$
\begin{aligned}
&\theta \circ \langle [\![H]\!], (T_\Sigma)^2 [\![N]\!] \circ T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma \theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma (\mathrm{id} \times \theta) \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times \theta) \circ \alpha \circ \langle \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma (\mathrm{id} \times \theta) \circ T_\Sigma \alpha \circ \theta \circ (\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle \times \mathrm{id}) \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma (\mathrm{id} \times \theta) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \rangle \circ T_\Sigma (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \rangle \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times \theta) \circ \alpha \circ \langle \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle, [\![L]\!] \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \rangle \circ T_\Sigma \alpha \circ \theta \circ \langle \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle, [\![L]\!] \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \rangle \circ T_\Sigma \alpha \circ T_\Sigma (\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle \times \mathrm{id}) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \rangle \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \\
&= (T_\Sigma ([\![H]\!] \times T_\Sigma [\![N]\!])) \circ T_\Sigma \langle \pi_1, \theta \circ \langle \pi_1, [\![M]\!] \rangle \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \\
&= T_\Sigma \langle [\![H]\!] \circ \pi_1, T_\Sigma [\![N]\!] \circ \theta \circ (\pi_1 \times \mathrm{id}) \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \\
&= T_\Sigma \langle [\![H]\!] \circ \pi_1, T_\Sigma [\![N]\!] \circ T_\Sigma (\pi_1 \times \mathrm{id}) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle
\end{aligned}
$$

□

引理 F.7. 令 $\Gamma \vdash V : A$ 为一个类型良好的值项，$\Gamma, x : B \vdash M : C$ 为类型良好的计算项，并且操作 $\mathsf{op} : A \nrightarrow B$ 是 Σ 中的一个操作符号。那么，以下方程成立。

$$T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![V]\!] \rangle \quad = \quad \mathcal{A}_{\Sigma', X}([\![\mathsf{op}]\!]) \circ \langle [\![V]\!], \Lambda [\![M]\!] \rangle$$

证明。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{\Sigma', X}([\![\mathsf{op}]\!]) \circ \langle [\![V]\!], \Lambda [\![M]\!] \rangle \\
&= T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ ([\![\mathsf{op}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \langle [\![V]\!], \Lambda [\![M]\!] \rangle \\
&= T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \langle \Lambda [\![M]\!], [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![V]\!] \rangle \\
&= T\mathbf{ev} \circ T(\Lambda [\![M]\!] \times \mathrm{id}) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![V]\!] \rangle \\
&= T [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![V]\!] \rangle
\end{aligned}$$

□

引理 F.8. (Handle-Op)是可靠的。

证明。 我们使用引理 F.4。

$$\begin{aligned}
&[\![\mathtt{handle}\ \mathsf{op}(V)\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M]\!] \\
&= \mathbf{handle} \circ \langle [\![H]\!], T_\Sigma [\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![V]\!] \rangle \rangle \\
&= \mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times \mathcal{A}_{\Sigma', X}([\![\mathsf{op}]\!])) \circ \langle [\![H]\!], \langle [\![V]\!], \Lambda [\![M]\!] \rangle \rangle \\
&= \mathbf{ev} \circ (\pi_{\mathsf{op}} \times \mathrm{id}) \circ \langle [\![H]\!], \langle [\![V]\!], \Lambda [\![M]\!] \rangle \rangle \\
&= \mathbf{ev} \circ (\Lambda([\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1}) \times \mathrm{id}) \circ \langle \mathrm{id}, \langle [\![V]\!], \Lambda [\![M]\!] \rangle \rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1} \circ \langle \mathrm{id}, \langle [\![V]\!], \Lambda [\![M]\!] \rangle \rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \langle \langle \mathrm{id}, [\![V]\!] \rangle, \Lambda [\![M]\!] \rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda x.M/k]]\!]
\end{aligned}$$

□

G 完备性证明

G.1 范畴

引理 G .1. 定义 4.6 构成一个范畴。

证明。此处分为几个引理。

- 复合由引理 G.2、G.3良好定义。
- 左右单位律显然成立。
- 结合律由引理 D.6得出。

$$U \circ (V \circ W) = U[V[W/x]/x] = U[V/x][W/x] = (U \circ V) \circ W$$

□

引理 G.2（方程替换）。对于任意值项W，以下规则是可容许的：

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash W : B \qquad \forall i = 1, \ldots, n.\ \Gamma \vdash V_i = V_i' : A_i}{\Gamma \vdash W[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n] = W[V_1'/x_1, \ldots, V_n'/x_n] : B}$$

计算项和处理器也同样成立 .

证明。我们同时对值项、计算项和处理器证明该命题。证明采用对 W 的归纳法。对于每个项构造子，我们应用同余规则。大多数情形都很直接。如果涉及变量绑定，我们将 $[V_1/x_1, \ldots\ldots, V_n/x_n]$ 扩展为 $[V_1/x_1, \ldots\ldots, V_n/x_n, z/z]$，其中 z 是在 W 中绑定的变量。□

引理 G.3。 对于任意值项 W 和 W'，以下规则是可容许的：

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash W = W' : B \qquad \forall i = 1, \ldots, n.\ \Gamma \vdash V_i : A_i}{\Gamma \vdash W[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n] = W'[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n] : B}$$

计算项和处理器也同样成立 .

证明。我们同时对值项、计算项和处理器证明该命题。证明采用对 x_1 的推导的归纳法：$A_1, \ldots\ldots, x_n : A_n \vdash W = W' : B$。

- 如果 $W = W'$是由自反性、对称性、传递性或同余规则之一推导得出的，那么证明是直接的。
- 公理（β-/η-律、单子律以及效应处理器的方程）在代换下封闭：如果 $W = W'$是其中某条公理的一个实例，那么 $W[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n] = W'[V_1/x_1, \ldots, V_n/x_n]$也是同一条公理的一个实例。 □

G.2 有限积

引理 G.4. $\mathbf{Syn}(\lambda_{\text{eff}})$ 中的有限积如下所示。

- $A_1 \times \quad \times A_n$ 积：$\cdots$ 投影：$:\cdots \quad \times A_n \vdash \pi_i\ x \quad A_i$:
- $x \quad A_1 \times$ • $x \quad A \vdash V_i \quad B_i$

配对：给定 $::$ 对每个 $i = 1, \ldots, n$，我们有

$$x : A \vdash \langle V_1, \ldots, V_n \rangle : B_1 \times \cdots \times B_n.$$

证明。 我们证明泛性质。根据积的 β-律，配对满足以下方程：

$$\pi_i \circ \langle V_1, \ldots, V_n \rangle = V_i$$

此类态射的唯一性也可由积的 η-律推出。若 $\pi_i W = V_i$ 对每个 i，则 n

$$W = \langle \pi_1\ W, \ldots, \pi_n\ W \rangle = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle.$$

□

G.3 强单子

引理 G .5. 定义 *4 .7* 定义了 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\text{eff}})$。

证明。我们证明强 Kleisli 三元组的公理成立。

- $(\eta_A^T \circ \lambda)^\sharp = \lambda$

$$\begin{aligned}
&(\eta_A^T \circ \lambda)^\sharp \\
&= \lambda y.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x'\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ (\lambda y.\mathtt{return}\ x)[\pi_2\ x/x][\langle \pi_1\ x', x_2 \rangle / x]\ \langle\rangle \\
&= \lambda y.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x'\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{return}\ x_2 \\
&= \lambda y.\pi_2\ x'\ \langle\rangle \\
&= \lambda y.\pi_2\ x'\ y \\
&= \pi_2\ x' \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

- 给定

$$x : A_1 \times A_2 \vdash V : \mathtt{unit} \to B!\Sigma$$

我们证明

$$x : A_1 \times A_2 \vdash \quad V^\sharp \circ (A_1 \times \eta_{A_2}^T) = V \quad : \mathtt{unit} \to B!\Sigma$$

$$\begin{aligned}
&V^\sharp \circ (A_1 \times \eta_{A_2}^T) \\
&= (\lambda y.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x'\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ V[\langle \pi_1\ x', x_2 \rangle / x]\ \langle\rangle)[\langle \pi_1\ x, \lambda y.\mathtt{return}\ \pi_2\ x \rangle / x'] \\
&= \lambda y.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \mathtt{return}\ \pi_2\ x\ \mathtt{in}\ V[\langle \pi_1\ x, x_2 \rangle / x]\ \langle\rangle \\
&= \lambda y.V[\langle \pi_1\ x, \pi_2\ x \rangle / x]\ \langle\rangle \\
&= \lambda y.V\ \langle\rangle \\
&= V
\end{aligned}$$

- 给定

$$x : A_2 \times A_3 \vdash V : \mathtt{unit} \to B_1!\Sigma \qquad y : A_1 \times A_2 \vdash W : \mathtt{unit} \to B_2!\Sigma$$

我们证明

$$x : (A_1 \times A_2) \times (\mathtt{unit} \to A_3!\Sigma) \vdash \quad W^\sharp \circ (A_1 \times V^\sharp) \circ \alpha = (W^\sharp \circ (A_1 \times V) \circ \alpha)^\sharp \quad : \mathtt{unit} \to B_2!\Sigma$$

左侧：

$$\begin{aligned}
&W^\sharp \circ (A_1 \times V^\sharp) \circ \alpha \\
&= (\lambda z.\mathtt{let}\ y_2 \leftarrow \pi_2\ y'\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ y', y_2 \rangle / y]\ \langle\rangle) \\
&\qquad [\langle \pi_1\ x, (\lambda z.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x'\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ V[\langle \pi_1\ x', x_2 \rangle / x]\ \langle\rangle)[\pi_2\ x/x'] \rangle / y'] \\
&\qquad [\langle \pi_1\ \pi_1\ x, \langle \pi_2\ \pi_1\ x, \pi_2\ x \rangle \rangle / x] \\
&= (\lambda z.\mathtt{let}\ y_2 \leftarrow (\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ V[\langle \pi_1\ \pi_2\ x, x_2 \rangle / x]\ \langle\rangle)\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ x, y_2 \rangle / y]\ \langle\rangle) \\
&\qquad [\langle \pi_1\ \pi_1\ x, \langle \pi_2\ \pi_1\ x, \pi_2\ x \rangle \rangle / x] \\
&= \lambda z.\mathtt{let}\ y_2 \leftarrow (\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ V[\langle \pi_2\ \pi_1\ x, x_2 \rangle / x]\ \langle\rangle)\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ \pi_1\ x, y_2 \rangle / y]\ \langle\rangle
\end{aligned}$$

$$= \lambda z.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y_2 \leftarrow V[\langle \pi_2\ \pi_1\ x, x_2\rangle/x]\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ \pi_1\ x, y_2\rangle/y]\ \langle\rangle$$

右侧：

$$\begin{aligned}
&W^\sharp \circ (A_1 \times V) \circ \alpha \\
&= (\lambda z.\mathtt{let}\ y_2 \leftarrow \pi_2\ y'\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ y', y_2\rangle/y]\ \langle\rangle)[\langle \pi_1\ x, V[\pi_2\ x/x]\rangle/y'] \\
&\qquad [\langle \pi_1\ \pi_1\ x, \langle \pi_2\ \pi_1\ x, \pi_2\ x\rangle\rangle/x] \\
&= (\lambda z.\mathtt{let}\ y_2 \leftarrow V[\pi_2\ x/x]\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ x, y_2\rangle/y]\ \langle\rangle) \\
&\qquad [\langle \pi_1\ \pi_1\ x, \langle \pi_2\ \pi_1\ x, \pi_2\ x\rangle\rangle/x] \\
&= (\lambda z.\mathtt{let}\ y_2 \leftarrow V[\langle \pi_2\ \pi_1\ x, \pi_2\ x\rangle/x]\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ \pi_1\ x, y_2\rangle/y]\ \langle\rangle) \\
&(W^\sharp \circ (A_1 \times V) \circ \alpha)^\sharp \\
&= \lambda z.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ (W^\sharp \circ (A_1 \times V) \circ \alpha)[\langle \pi_1\ x, x_2\rangle/x]\ \langle\rangle \\
&= \lambda z.\mathtt{let}\ x_2 \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ y_2 \leftarrow V[\langle \pi_2\ \pi_1\ x, x_2\rangle/x]\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ W[\langle \pi_1\ \pi_1\ x, y_2\rangle/y]\ \langle\rangle
\end{aligned}$$

□

G.4 Kleisli 指数

定义 *G .6*（*Kleisli* 范畴）. 对于每个 $\Sigma \in \mathbf{ET}(\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}}))$，我们定义一个范畴$\mathbf{Kl}_\Sigma$ 如下。

- 对象：类型 A
- 态射：计算 $x:\ A \vdash M:\ B!\ \Sigma$ 模方程
- 恒等态射：$x:\ A \vdash \mathrm{return}\ x:\ A!\ \Sigma$
- 复合：$M \circ\ N = \mathrm{let}\ x \leftarrow N \mathrm{in}\ M$

证明。我们证明这确实是一个范畴。

- 复合的良定义性由 let 的同余规则得出。• 左/右单位律和结合律由单子律得出。

□

引理 G.7. *Kleisli* 范畴$\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})^{T_\Sigma}$ 同构于$\mathbf{Kl}_\Sigma$。

证明。该同构 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})^{T_\Sigma}(A,\ B) \cong \mathbf{Kl}_\Sigma(A,\ B)$ 定义如下。

$$\frac{x : A \vdash M : B!\Sigma}{x : A \vdash \lambda y.M : \mathtt{unit} \to B!\Sigma} \qquad \frac{x : A \vdash V : \mathtt{unit} \to B!\Sigma}{x : A \vdash V\ \langle\rangle : B!\Sigma}$$

很容易验证它们互为逆映射。接下来只需证明上述映射 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})^{T_\Sigma}(A,\ B) \to \mathbf{Kl}_\Sigma(A,\ B)$ 具有函子性。

- 恒等态射 $x:\ A \vdash \lambda y.\mathrm{return}\ x : \mathrm{unit} \to A!\Sigma$ in $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})^{T_\Sigma}$ 被映射为 $x:\ A \vdash (\lambda y.\mathrm{return}\ x) = \mathrm{return}\ x : \mathrm{unit} \to A!\Sigma$。
- 复合：令 V和W 为 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})^{T_\Sigma}$中的态射。它们在 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})^{T_\Sigma}$ 中的复合定义如下。

$$\begin{aligned}
\mu \circ T_\Sigma V \circ W &= \lambda y.\mathtt{let}\ z \leftarrow (\lambda y.\mathtt{let}\ x \leftarrow W\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{return}\ V)\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ z\ \langle\rangle \\
&= \lambda y.\mathtt{let}\ z \leftarrow (\mathtt{let}\ x \leftarrow W\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{return}\ V)\ \mathtt{in}\ z\ \langle\rangle \\
&= \lambda y.\mathtt{let}\ x \leftarrow W\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{let}\ z \leftarrow \mathtt{return}\ V\ \mathtt{in}\ z\ \langle\rangle \\
&= \lambda y.\mathtt{let}\ x \leftarrow W\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ V\ \langle\rangle
\end{aligned}$$

□

根据引理 G.7，我们用 $\mathbf{Kl}_\Sigma$ 替代 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})^{T_\Sigma}$ 来解释 Kleisli 指数。注意，伴随 $J \dashv K : \mathbf{Kl}_\Sigma \to \mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$ 定义如下。

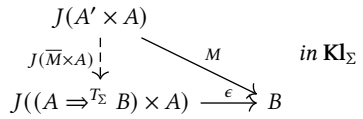
- J: $\mathbf{Syn}(\lambda_{\text{效应}}) \to \mathbf{Kl}_\Sigma$ 定义为：对每个对象 A，$JA = A$；对每个态射 V，return V。• K: $\mathbf{Kl}_\Sigma \to \mathbf{Syn}(\lambda_{\text{效应}})$ 定义为：对每个对象 A，单位类型 $\to A!\Sigma$；对每个态射 M，let $x \leftarrow x$ in $KM = \lambda y.$ m 态射 M。

引理 G.8（Kleisli 指数）。定义 *4.7* 中的强单子的 *Kleisli* 指数如下给出。

- $A \Rightarrow^{T_\Sigma} B = A \to B\ \Sigma!$余单位 $\mathbf{Kl}_\Sigma(J(A \Rightarrow^{T_\Sigma} B) \times A, B)$ 定义如下。
- $\epsilon \in$

$$x : (A \to B!\Sigma) \times A \vdash (\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x) : B!\Sigma \tag{8}$$

- 泛性质：对于 $x:\ A_\prime \times A \vdash M:\ B!\ \Sigma$，存在唯一的态射 $M:\ A_\prime \to A \overline{\Rightarrow}^{T_\Sigma} B$，它属于 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$，并使下图表可交换。



唯一的态射 M 定义为

$$x : A' \vdash \lambda y.M[\langle x, y\rangle/x] : A \to B!\Sigma. \tag{9}$$

证明。我们证明泛性质。注意，我们有以下方程。

$$\begin{aligned}\epsilon \circ J(\overline{M} \times A) &= \mathtt{let}\ x \leftarrow \mathtt{return}\ \langle \overline{M}[\pi_1\ x/x], \pi_2\ x\rangle\ \mathtt{in}\ (\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x)\\ &= \overline{M}[\pi_1\ x/x]\ (\pi_2\ x)\end{aligned}$$

- 存在性：我们证明 M 在（9）中定义的使图表交换。

$$\begin{aligned}\epsilon \circ J(\overline{M} \times A) &= \overline{M}[\pi_1\ x/x]\ (\pi_2\ x)\\ &= (\lambda y.M[\langle \pi_1\ x, y\rangle/x])\ (\pi_2\ x)\\ &= M[\langle \pi_1\ x, \pi_2\ x\rangle/x]\\ &= M\end{aligned}$$

- 唯一性：若 $\epsilon \circ J(\overline{M} \times A) = M$，则有 $M[\pi_1\ x/x]\ (\pi_2\ x) = M$，这意味着

$$\lambda y.M[\langle x, y\rangle/x] = \lambda y.\overline{M}\ y = \overline{M}.$$

□

注意，（8）和（9）分别对应求值 **ev** 和柯里化 Λ，模去引理 G.7中的同构。现在不难看出，项模型 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$ 中的类型和签名的解释 就是它们本身。

引理 G.9. • 对于任意值类型 A，其在项模型 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$ 中的解释 $[\![A]\!]$ 就是其本身。• 对于任意签名 Σ，其在项模型 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\mathrm{eff}})$ 中的解释 $[\![\Sigma]\!]$ 就是其本身。

证明。对类型和签名同时归纳。证明是直接的。 □

G.5 处理器

引理 G.10。 定义 *4.7* 满足 (处理器-单位)，(处理器-乘法)，以及 (handle-op)。

证明。首先，注意到效应处理器 H 中的变量 x 仅以 $\pi_1\ x$ 的形式出现，因此对于任意值项 V，我们有 $H[\pi_1\ x,\ V/x] = H$。

- 我们证明 (处理器-单位)。

$$\begin{aligned}&\mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times \eta)\\ &= (\lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle)[\langle \pi_1\ x, \lambda y.\mathtt{return}\ \pi_2\ x\rangle/x]\\ &= \lambda z.\mathtt{handle}\ \mathtt{return}\ \pi_2\ x\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle\\ &= \lambda z.\pi_2\ x\ \langle\rangle\\ &= \pi_2\ x\end{aligned}$$

- 我们证明 (处理器-乘法)。左侧：

$$\begin{aligned}&\mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times \mu)\\ &= (\lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle)[\langle \pi_1\ x, \lambda z.\mathtt{let}\ y \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ y\ \langle\rangle\rangle/x]\\ &= \lambda z.\mathtt{handle}\ (\mathtt{let}\ y \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ y\ \langle\rangle)\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle\\ &= \lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.\mathtt{handle}\ y\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle\end{aligned}$$

右侧：

$$\begin{aligned}&\mathbf{handle} \circ (\mathrm{id} \times T_\Sigma\mathbf{handle})\\ &= (\lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle)\\ &\quad [\langle \pi_1\ x, \lambda z.\mathtt{let}\ y \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{return}\ (\lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ y\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle)\rangle/x]\\ &= \lambda z.\mathtt{handle}\ \mathtt{let}\ y \leftarrow \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{in}\ \mathtt{return}\ (\lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ y\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle)\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle\\ &= \lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ x\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.\\ &\quad \mathtt{handle}\ \mathtt{return}\ (\lambda z.\mathtt{handle}\ \pi_2\ y\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle)\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ r.r\ \langle\rangle\end{aligned}$$

$$= \lambda z.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } y.\text{handle } \pi_2\ y \text{ with } H \text{to } r.r \text{ handle} \circ (\text{id} \times T_\Sigma \text{handle}) \circ \pi_1, \theta\text{let } x_2 \leftarrow \pi_2\ x \text{ in return } (\pi_1\ x, x_2)/x] = \lambda z.\text{handle let } x_2 \leftarrow \pi_2\ x() \text{ in return } (\pi_1\ x, x_2) \text{ with } H \text{to } y.\text{handle } \pi_2\ y \text{ with } H \text{to } r.r = \lambda z.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } x_2.\text{handle return } (\pi_1\ x, x_2) \text{ with } H \text{to } x.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } r.r = \lambda z.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } x_2.\text{handle } x_2 \text{ with } H \text{to } r.r = \lambda z.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } y.\text{handle } y \text{ with } H \text{to } r.r$$

- 我们证明（Handle-Op）。左侧：

$$\text{handle} \circ (\text{id} \times T_\Sigma \text{ev}) = (\lambda z.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } r.r)[\pi_1\ x, \lambda z.\text{let } y \leftarrow \pi_2\ x \text{ in return } (\lambda z.(\pi_1\ y)\ (\pi_2\ y))/x] = \lambda z.\text{handle let } y \leftarrow \pi_2\ x \text{ in return } (\lambda z.(\pi_1\ y)\ (\pi_2\ y)) \text{ with } H \text{to } r.r = \lambda z.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } y.(\pi_1\ y)\ (\pi_2\ y) \text{ handle} \circ (\text{id} \times T_\Sigma \text{ev}) \circ (\text{id} \times \theta) = (\lambda z.\text{handle } \pi_2\ x \text{ with } H \text{to } y.(\pi_1\ y)\ (\pi_2\ y))[\pi_1\ x, \lambda z.\text{let } x_2 \leftarrow \pi_2 (\pi_2\ x) \text{ in return } (\pi_1 (\pi_2\ x)\ x_2)/x] = \lambda z.\text{handle let } x_2 \leftarrow \pi_2 (\pi_2\ x) \text{ in return } (\pi_1 (\pi_2\ x)\ x_2) \text{ with } H \text{to } x.(\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x) = \lambda z.\text{handle } \pi_2 (\pi_2\ x) \text{ with } H \text{to } x_2.(\pi_1 (\pi_2\ x))\ x_2 \text{ handle} \circ (\text{id} \times T_\Sigma \text{ev}) \circ (\text{id} \times \theta) \circ (\text{id} \times (\text{id} \times [\![\text{操作}]\!]) = (\lambda z.\text{handle } \pi_2 (\pi_2\ x) \text{ with } H \text{to } x_2.(\pi_1 (\pi_2\ x))\ x_2)[\pi_1\ x, \pi_1 (\pi_2\ x)\ \lambda z.\text{操作}(\pi_2 (\pi_2\ x))/x] = \lambda z.\text{handle 操作}(\pi_2 (\pi_2\ x)) \text{ with } H \text{to } x_2.(\pi_1 (\pi_2\ x))\ x_2 = \lambda z.\pi_{\text{op}} (\pi_1\ x)\ \pi_2 (\pi_2\ x)\ \lambda x_2.(\pi_1 (\pi_2\ x))\ x_2 = \lambda z.\pi_{\text{op}} (\pi_1\ x)\ \pi_2 (\pi_2\ x)\ \pi_1 (\pi_2\ x) \text{ handle} \circ (\text{id} \times T_\Sigma \text{ev}) \circ (\text{id} \times \theta) \circ (\text{id} \times \sigma) \circ (\text{id} \times ([\![\text{操作}]\!] \times \text{id})) = \text{handle} \circ (\text{id} \times T_\Sigma \text{ev}) \circ (\text{id} \times \theta) \circ (\text{id} \times (\text{id} \times [\![\text{操作}]\!]) \circ (\text{id} \times \sigma) = \text{handle} \circ (\text{id} \times T_\Sigma \text{ev}) \circ (\text{id} \times \theta) \circ (\text{id} \times \sigma) \circ (\text{id} \times ([\![\text{操作}]\!] \times \text{id}))[\pi_1\ x, \pi_2 (\pi_2\ x)\ \pi_1 (\pi_2\ x)/x] = \lambda z.\pi_{\text{op}} (\pi_1\ x)\ \pi_1 (\pi_2\ x)\ \pi_2 (\pi_2\ x) = \lambda z.\pi_{\text{op}} (\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x)$$

右侧：

$$\begin{aligned}&\mathbf{ev} \circ (\pi_{\text{op}} \times \text{id})\\ &= (\lambda z.(\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x))[\langle \pi_{\text{op}}\ (\pi_1\ x), \pi_2\ x\rangle/x]\\ &= \lambda z.\pi_{\text{op}}\ (\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x)\end{aligned}$$

□

G.6 项模型中的解释

我们证明，**Syn**(λ_{eff}) 中一个项的解释，本质上等于该项本身。这里，“本质上”是指等式在两个同构意义下成立。

- 计算项 $\Gamma \vdash M : A!\Sigma$ 的解释是一个形如 $\Gamma \vdash [\![M]\!] : \text{unit} \to A!\Sigma$的值项。因此，我们需要利用引理 G.7 中的同构，将类型为 $\text{unit} \to A!\Sigma$ 的值项与类型为 $A!\Sigma$ 的计算项对应起来。• **Syn**(λ_{eff}) 中的态射定义为一个值项 $x : A \vdash V : B$，其上下文仅包含一个变量 x。解释上下文包含多个变量的项时，我们需要修改上下文，使其仅包含一个变量。具体做法是使用以下代换 s_Γ。

定义 *G.11*。给定一个上下文 Γ，我们将 $\Gamma^\times$ 定义为 $x^\times\colon A_\Gamma$，其中 A_Γ 是 Γ中各类型的积类型。

$$A_{\cdot} \coloneqq \mathsf{unit} \qquad A_{\Gamma, y:B} \coloneqq A_\Gamma \times B$$

我们还按如下方式归纳定义一个代换 s_Γ。

$$s_{\Gamma,y:B}(z) \quad \coloneqq \quad \begin{cases} s_\Gamma(z)[\pi_1\ x^\times/x^\times] & z \text{ is a variable in } \Gamma \\ \pi_2\ x^\times & z \text{ is } y \end{cases}$$

对于每个（$x\colon A$）$\in\Gamma$，都有 $\Gamma^\times \vdash s_\Gamma(x)\colon A$。

我们可以如下定义 s_Γ 的“逆”　　. 给定一个上下文 Γ，我们定义一个项 $\Gamma \vdash V_\Gamma\colon A_\Gamma$，如下所示　s.

$$V_{\cdot} \quad \coloneqq \quad \langle\rangle \qquad V_{\Gamma,y:B} \quad \coloneqq \quad \langle V_\Gamma, y\rangle$$

那么，$s_\Gamma[V_\Gamma/x^\times]$是 Γ上的恒等替换。

命题 G.12. 项模型 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\text{eff}})$ 中项的解释如下。

- 对于每个值项 $\Gamma \vdash V\colon B$，其在项模型 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\text{eff}})$ 中的解释为 $[\![V]\!]\colon [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]$ $\Gamma^\times \vdash V[s_\Gamma]\colon B$。
- 对于每个计算项 $\Gamma \vdash M\colon B!\Sigma$，其在项模型 *Syn(λeff)* 中的解释为 $[\![M]\!]\colon [\![\Gamma]\!] \to T_\Sigma[\![B]\!]$ $\Gamma^\times \vdash M[s_\Gamma]\colon B!\Sigma$，这里视为同构 *Syn(λeff)* $_{T_\Sigma}([\![\Gamma]\!], [\![B]\!]) \cong Kl_\Sigma([\![\Gamma]\!], [\![B]\!])$，如引理 *G.7* 所述。• 对于每个处理器 $\Gamma \vdash H\colon \Sigma \Rightarrow C$，其在项模型 *Syn(λeff)* 中的解释 $[\![H]\!]\colon [\![\Gamma]\!] \to H([\![\Sigma]\!], [\![C]\!])$ 如下。

$$\Gamma^\times \vdash \langle \lambda\langle x, k\rangle . M_{\mathsf{op}}[s_\Gamma] \mid (\mathsf{op}(x,k) \mapsto M_{\mathsf{op}}) \in H\rangle : \prod_{(\mathsf{op}:A_{\mathsf{op}} \twoheadrightarrow B_{\mathsf{op}}) \in \Sigma} A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \to C) \to C$$

证明。 回想引理 G.9指出，项模型中类型的解释 $\mathbf{Syn}(\lambda_{\text{eff}})$ 就是它们自身。上下文 Γ 的解释显然是 $[\![\Gamma]\!] = A_1 \times \cdots \times A_n$。因此，只需证明项的解释如所述。我们通过归纳法证明该结论。大多数情形都很直接。这里只展示几个有意思的情形。

- 很容易证明，变量 $\Gamma \vdash x\colon A$的解释由 $s_\Gamma(x)$ 给出。• 我们在证明中说明如何处理变量绑定。举例来说，考虑 λ 抽象 $\Gamma \vdash \lambda y\colon A.M\colon C$。根据归纳假设，$M$ 的解释由 $M[s_{\Gamma,y:\ A}]$给出。因此，$\lambda y\colon A.M$ 的解释由

$$\begin{aligned} [\![\lambda y : A.M]\!] &= \Lambda([\![M]\!]) \\ &= \Gamma^\times \vdash \lambda y.(M[s_{\Gamma,y:A}][\langle x^\times, y\rangle/x^\times]) : A \to C \\ &= \Gamma^\times \vdash \lambda y.M[s_\Gamma] : A \to C \\ &= \Gamma^\times \vdash (\lambda y.M)[s_\Gamma] : A \to C \end{aligned}$$

- $\Gamma \vdash$ handle M与 H到 $x.N\colon C$: 我们有

$$\begin{aligned} &[\![\mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N]\!] \\ &= \mathbf{handle}_{[\![\Sigma]\!],[\![\Sigma']\!],J[\![B]\!]} \circ \langle [\![H]\!], T_{[\![\Sigma]\!]}[\![N]\!] \circ \theta^{T[\![\Sigma]\!]} \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!]\rangle\rangle \\ &= \lambda z.\mathsf{handle}\ V\ \langle\rangle\ \mathsf{with}\ H'\ \mathsf{to}\ r.r\ \langle\rangle \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} V &= T_{[\![\Sigma]\!]}[\![N]\!] \circ \theta^{T[\![\Sigma]\!]} \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!]\rangle \\ H' &= \{\mathsf{op}(y,k) \mapsto \pi_{\mathsf{op}}\ [\![H]\!]\ \langle y, k\rangle \mid (\mathsf{op} : A_{\mathsf{op}} \twoheadrightarrow B_{\mathsf{op}}) \in \Sigma\}. \end{aligned}$$

根据归纳假设，显然可得 $H' = H[s_\Gamma]$。另一方面，V计算如下。

$$\begin{aligned} &T_{[\![\Sigma]\!]}[\![N]\!] \circ \theta^{T[\![\Sigma]\!]} \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!]\rangle \\ &= (\eta \circ [\![N]\!])^\sharp \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!]\rangle \\ &= \lambda z.\mathsf{let}\ x \leftarrow M[s_\Gamma]\ \mathsf{in}\ \mathsf{return}\ \lambda z.N[s_\Gamma] \end{aligned}$$

因此，我们有如下结论。

$$\begin{aligned} &[\![\mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N]\!] \\ &= \lambda z.\mathsf{handle}\ (\mathsf{let}\ x \leftarrow M[s_\Gamma]\ \mathsf{in}\ \mathsf{return}\ \lambda z.N[s_\Gamma])\ \mathsf{with}\ H[s_\Gamma]\ \mathsf{to}\ r.r\ \langle\rangle \\ &= \lambda z.\mathsf{handle}\ M[s_\Gamma]\ \mathsf{with}\ H[s_\Gamma]\ \mathsf{to}\ x.\mathsf{handle}\ \mathsf{return}\ \lambda z.N[s_\Gamma]\ \mathsf{with}\ H[s_\Gamma]\ \mathsf{to}\ r.r\ \langle\rangle \\ &= \lambda z.\mathsf{handle}\ M[s_\Gamma]\ \mathsf{with}\ H[s_\Gamma]\ \mathsf{to}\ x.N[s_\Gamma] \end{aligned}$$

- $\Gamma \vdash H : \Sigma \Rightarrow C$: 对于每个 Γ，$x : A_{\text{操作}} k : B_{\text{操作}} \to C \vdash M_{\text{操作}} : C$，我们有如下结论。

$$\begin{aligned}
[\![M_{\mathsf{op}}]\!] &= \lambda z. M_{\mathsf{op}}[s_{\Gamma, x:A_{\mathsf{op}}, k:B_{\mathsf{op}} \to C}] \\
&= \lambda z. M_{\mathsf{op}}[s_\Gamma[\pi_1\ (\pi_1\ x^\times)], \pi_2\ (\pi_1\ x^\times)/x, \pi_2\ x^\times/k] \\
[\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1} &= \lambda z. M_{\mathsf{op}}[s_\Gamma[\pi_1\ x^\times], \pi_1\ (\pi_2\ x^\times)/x, \pi_2\ (\pi_2\ x^\times)/k] \\
&= \lambda z. M_{\mathsf{op}}[s_\Gamma[\pi_1\ x^\times], \pi_2\ x^\times/(x, k)] \\
\Lambda([\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1}) &= \lambda \langle x, k \rangle. M_{\mathsf{op}}[s_\Gamma]
\end{aligned}$$

□

定理证明 4.9。 假设我们有 $[\![V]\!] = [\![W]\!]$ 对于任意 λ_{eff}-模型，其中 V 和 W 都是值项。于是，根据命题 G.12，我们有 $V[s_\Gamma] = W[s_\Gamma]$ λ_{eff} $s_\Gamma[V_\Gamma\ x^\times]$ V =作为项模型中的解释 **Syn**()。由于 /是恒等 □
$V[s_\Gamma][V_\Gamma\ x^\times] = W[s_\Gamma][V_\Gamma\ x^\times] = W$
替换，因此有 //。计算项和处理器的情形可以类似地证明。

H 第5 节证明（模型示例）

命题证明5.3。 （处理器-单位）和（处理器-乘法）由以下事实推出： **handle**s, s', $X(h, -)$ 是一个埃伦伯格–穆尔代数。此外，我们有 $\mathcal{A}_{s', X}([\![\text{操作}]\!]^T_S) = \zeta \circ \iota_{\mathsf{op}}$，这意味着（Handle-Op）。注意，在 **集合** 中，任意函子都有规范的强度，并且函子之间的任意自然变换都自动是强的。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{S', X}([\![\mathsf{op}]\!]^T_S) \\
&= T_S\mathbf{ev} \circ \theta^{T_S} \circ \sigma \circ ((\zeta \circ \iota_{\mathsf{op}} \circ \langle \mathrm{id}, \Lambda\pi_2 \rangle) \times \mathrm{id}) \\
&= T_S\mathbf{ev} \circ \zeta \circ \theta^{F_S} \circ \sigma \circ ((\iota_{\mathsf{op}} \circ \langle \mathrm{id}, \Lambda\pi_2 \rangle) \times \mathrm{id}) \\
&= \zeta \circ F_S\mathbf{ev} \circ \theta^{F_S} \circ \sigma \circ ((\iota_{\mathsf{op}} \circ \langle \mathrm{id}, \Lambda\pi_2 \rangle) \times \mathrm{id}) \\
&= \zeta \circ \iota_{\mathsf{op}} \circ (A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \Rightarrow \mathbf{ev})) \circ \theta^{(A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \Rightarrow -))} \circ \sigma \circ ((\langle \mathrm{id}, \Lambda\pi_2 \rangle) \times \mathrm{id}) \\
&= \zeta \circ \iota_{\mathsf{op}}
\end{aligned}$$

□

命题的证明 5.8。 首先，我们证明 D_S 是一个强单子。

- $(\eta \circ \lambda)^\sharp = \lambda$：左侧是以下映射的强 Kleisli 扩张

$$u : 1, x : A \vdash \forall \beta. \lambda k. \lambda h. k\ x : D_S A$$

$$\begin{aligned}
&(\eta \circ \lambda)^\sharp \\
&= \forall \beta. \lambda k. \lambda h. x\ \beta\ (\lambda x. (\forall \beta. \lambda k. \lambda h. k\ x)\ \beta\ k\ h)\ h \\
&= \forall \beta. \lambda k. \lambda h. x\ \beta\ (\lambda x. k\ x)\ h \\
&= \forall \beta. \lambda k. \lambda h. x\ \beta\ k\ h \\
&= x
\end{aligned}$$

- $V^\sharp \circ (A_1 \times \eta_{A_2}) = V$：令 V 为一个类型为 x_1 的项：$A_1,\ x_2 : A_2 \vdash V : B$。

$$\begin{aligned}
&V^\sharp \circ (A_1 \times \eta_{A_2}) \\
&= \forall \beta. \lambda k. \lambda h. (\forall \beta. \lambda k. \lambda h. k\ x_2)\ \beta\ (\lambda x_2. V\ \beta\ k\ h)\ h \\
&= \forall \beta. \lambda k. \lambda h. (\lambda x_2. V\ \beta\ k\ h)\ x_2 \\
&= \forall \beta. \lambda k. \lambda h. V\ \beta\ k\ h \\
&= V
\end{aligned}$$

- $W^\sharp \circ (A_1 \times V^\sharp) \circ \alpha = (W^\sharp \circ (A_1 \times V) \circ \alpha)^\sharp$：令 V 和 W 为类型为

$$x_2 : A_2, x_3 : A_3 \vdash V : D_S B_1 \qquad x_1 : A_1, y : B_1 \vdash W : D_S B_2$$

我们给出

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2, x_3 : D_S A_3 \vdash W^\sharp \circ (A_1 \times V^\sharp) \circ \alpha = (W^\sharp \circ (A_1 \times V) \circ \alpha)^\sharp : D_S B_2$$

$$W^\sharp = \forall \beta. \lambda k. \lambda h. y\ \beta\ (\lambda y. W\ \beta\ k\ h)\ h$$

$$V^\sharp = \forall \beta. \lambda k. \lambda h. x_3\ \beta\ (\lambda x_3. V\ \beta\ k\ h)\ h$$

$$
\begin{aligned}
&W^\sharp \circ (A_1 \times V^\sharp) \circ \alpha \\
&= \forall\beta.\lambda k.\lambda h.(\forall\beta.\lambda k.\lambda h.x_3\ \beta\ (\lambda x_3.V\ \beta\ k\ h)\ h)\ \beta\ (\lambda y.W\ \beta\ k\ h)\ h \\
&= \forall\beta.\lambda k.\lambda h.x_3\ \beta\ (\lambda x_3.V\ \beta\ (\lambda y.W\ \beta\ k\ h)\ h)\ h \\
&(W^\sharp \circ (A_1 \times V) \circ \alpha)^\sharp \\
&= \forall\beta.\lambda k.\lambda h.x_3\ \beta\ (\lambda x_3.(\forall\beta.\lambda k.\lambda h.V\ \beta\ (\lambda y.W\ \beta\ k\ h)\ h)\ \beta\ k\ h)\ h \\
&= \forall\beta.\lambda k.\lambda h.x_3\ \beta\ (\lambda x_3.V\ \beta\ (\lambda y.W\ \beta\ k\ h)\ h)\ h
\end{aligned}
$$

我们给出效应处理强单子的公理。

- $\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \eta) = \pi_2$ 右侧为

$$h : \mathcal{H}_S[D_{S'}A], x : D_{S'}A \vdash x : D_{S'}A$$

左侧为

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \eta) \\
&= (\forall\beta.\lambda k.\lambda h.k\ x)\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.y)\ h \\
&= x
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mu) = \mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times T_S\mathbf{handle}_{S,S',X}) \circ \pi_1, \theta$ 这等价于

$$\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mu) = \mathbf{handle}_{S,S',X} \circ \langle \pi_1, (\eta \circ \mathbf{handle}_{S,S',X})^\sharp \rangle$$

由于 $\mu = \lambda^\sharp \circ \lambda^{-1}, \mu$ 被给定为如下项。

$$x : (D_S)^2 D_{S'}A \vdash \forall\beta.\ \lambda k.\ \lambda h.\ x\ \beta\ (\lambda x.\ x\ \beta\ k\ h)\ h : D_S D_{S'}A$$

左侧 $h : \mathrm{H}_S[D_{S'}A], x : (D_S)^2 D_{S'}A \vdash \mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mu) : D_{S'}A$ 如下所示。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mu) \\
&= (\forall\beta.\ \lambda k.\ \lambda h.\ x\ \beta\ (\lambda x.\ x\ \beta\ k\ h)\ h)\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h \\
&= x\ (D_{S'}A)\ (\lambda x.\ x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h)\ h
\end{aligned}
$$

右侧如下所示。

- $h : \mathrm{H}_S[D_{S'}A],\ x : D_S D_{S'}A \vdash \eta \circ \mathbf{handle}_{S,\ S',\ X} : D_S D_{S'}A$ 是

$$\forall\beta.\ \lambda k.\ \lambda h'.\ k\ (x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h)$$

- $h : \mathrm{H}_S[D_{S'}A],\ x : (D_S)^2 D_{S'}A \vdash (\eta \circ \mathbf{handle}_{S,\ S',\ X})^\sharp : D_S D_{S'}A$ 是

$$
\begin{aligned}
&\forall\beta.\ \lambda k.\ \lambda h'.\ x\ \beta\ (\lambda x.\ (\forall\beta.\ \lambda k.\ \lambda h'.\ k\ (x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h))\ \beta\ k\ h')\ h' \\
&= \forall\beta.\ \lambda k.\ \lambda h'.\ x\ \beta\ (\lambda x.\ k\ (x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h))\ h'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ \langle \pi_1, (\eta \circ \mathbf{handle}_{S,S',X})^\sharp \rangle \\
&= (\forall\beta.\ \lambda k.\ \lambda h'.\ x\ \beta\ (\lambda x.\ k\ (x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h))\ h')\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h \\
&= x\ (D_{S'}A)\ (\lambda x.\ (\lambda y.\ y)\ (x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h))\ h \\
&= x\ (D_{S'}A)\ (\lambda x.\ x\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.\ y)\ h)\ h
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{handle}_{S,\ S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{A}_{S',X}([\![\text{操作}]\!]_S)) = \mathbf{ev} \circ (\pi_{\text{操作}} \times \mathrm{id})$ 使用强 Kleisli 扩张，我们可以将 $\mathrm{A}_{S',X}([\![\text{操作}]\!]_S)$改写如下。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{S',X}([\![\mathsf{op}]\!]_S) \\
&= D_S\mathbf{ev} \circ \theta^{T_S} \circ \sigma \circ ([\![\mathsf{op}]\!]_S \times \mathrm{id}) \\
&= (\eta \circ \mathbf{ev})^\sharp \circ \sigma \circ ([\![\mathsf{op}]\!]_S \times \mathrm{id})
\end{aligned}
$$

然后，我们展开

$$x : A_{\mathsf{op}}, c : B_{\mathsf{op}} \to D_{S'}C \vdash \mathcal{A}_{S',X}([\![\mathsf{op}]\!]_S) : D_S D_{S'}C$$

如下。

- $x :\ A_{\mathsf{op}} \vdash [\![\text{操作}]\!]_S :\ D_S B_{\mathsf{op}}$ 是 $\forall\beta.\lambda k.\lambda h.\pi_{\mathsf{op}}\ hx,\ k$。- $c :\ B_{\mathsf{op}} \to D_{S'}C,\ b :\ B_{\mathsf{op}} \vdash \eta \circ$ **求值**$:\ D_S D_{S'}C$ 是 $\forall\beta.\lambda k.\lambda h.k(c\ b)$。

– $\mathrm{A}_{S',\ X}([\![\text{操作}]\!]_S)$由下式给出

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{S',X}([\![\mathsf{op}]\!]_S)\\
&= (\eta \circ \mathbf{ev})^\sharp \circ \sigma \circ ([\![\mathsf{op}]\!]_S \times \mathrm{id})\\
&= \forall\beta.\lambda k.\lambda h.(\forall\beta.\lambda k.\lambda h.\pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, k\rangle)\ \beta\ (\lambda b.(\forall\beta.\lambda k.\lambda h.k\ (c\ b))\ \beta\ k\ h)\ h\\
&= \forall\beta.\lambda k.\lambda h.(\forall\beta.\lambda k.\lambda h.\pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, k\rangle)\ \beta\ (\lambda b.k\ (c\ b))\ h\\
&= \forall\beta.\lambda k.\lambda h.\pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, \lambda b.k\ (c\ b)\rangle
\end{aligned}$$

因此，左侧

$$h : \mathcal{H}_S[D_{S'}C], x : A_{\mathsf{op}}, c : B_{\mathsf{op}} \to D_{S'}C \vdash \mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mathcal{A}_{S',X}([\![\mathsf{op}]\!]_S)) : D_{S'}C$$

如下所示。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{handle}_{S,S',X} \circ (\mathrm{id} \times \mathcal{A}_{S',X}([\![\mathsf{op}]\!]_S))\\
&= (\forall\beta.\lambda k.\lambda h.\pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, \lambda b.k\ (c\ b)\rangle)\ (D_{S'}A)\ (\lambda y.y)\ h\\
&= \pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, \lambda b.(\lambda y.y)\ (c\ b)\rangle\\
&= \pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, \lambda b.c\ b\rangle\\
&= \pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, c\rangle
\end{aligned}$$

另一方面，右侧为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{ev} \circ (\pi_{\mathsf{op}} \times \mathrm{id})\\
&= \pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle x, c\rangle
\end{aligned}$$

□

第 I 节6 的证明（纳入效应理论）

形式化地说，效应理论项的类型规则如下所示。

$$\frac{\hat{\Delta} \vdash \hat{V} : \hat{A}}{\hat{\Delta} \vdash \mathtt{return}\ \hat{V} : \hat{A}!E} \qquad \frac{\hat{\Delta} \vdash \hat{V} : \hat{A}_{\mathsf{op}} \qquad (\mathsf{op} : \hat{A}_{\mathsf{op}} \nrightarrow \hat{B}_{\mathsf{op}}) \in \Sigma \qquad \hat{\Delta}, x : \hat{B}_{\mathsf{op}} \vdash \hat{M} : \hat{A}!\Sigma}{\hat{\Delta} \vdash \mathtt{let}\ x \leftarrow \mathsf{op}(\hat{V})\ \mathtt{in}\ \hat{M} : \hat{A}!\Sigma}$$

$$\frac{\hat{\Delta} \vdash \hat{V} : \hat{A}_1 + \cdots + \hat{A}_n \qquad \forall i \quad \hat{\Delta}, x_i : \hat{A}_i \vdash \hat{M}_i : \hat{B}!\Sigma}{\hat{\Delta} \vdash \mathtt{case}\ \hat{V}\ \mathtt{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i\}_{i=1}^n : \hat{B}!\Sigma}$$

引理的证明 6.5。 对 $\hat{M}$ 作归纳。为简洁起见，我们定义 $h \coloneqq \langle \Lambda(\lfloor [\![\text{操作}]\!] \rfloor \circ\ \pi_2)\rangle_{\mathsf{op} \in \Sigma}$。

- 如果 $\hat{M} = \mathtt{return}\ \hat{V}$，那么

$$\begin{aligned}
&\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle_X^T \circ h\\
&= \Lambda(\mathbf{ev} \circ \sigma \circ ([\![\hat{V}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2) \circ h\\
&= \Lambda(\mathbf{ev} \circ \sigma \circ ([\![\hat{V}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)\\
&\Lambda(\lfloor [\![\hat{M}]\!] \rfloor_X \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ ((\eta \circ [\![\hat{V}]\!]) \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mathbf{ev} \circ \sigma \circ ([\![\hat{V}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)
\end{aligned}$$

- 如果 $\hat{M} = \mathtt{let}\ x \leftarrow$ 操作($\hat{V}$) 于 $\hat{N}$，那么

$$\begin{aligned}
&\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle_X^T \circ h\\
&= \Lambda(\mathbf{ev} \circ \langle \pi_{\mathsf{op}} \circ \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ w)\rangle\rangle) \circ h\\
&= \Lambda(\mathbf{ev} \circ \langle \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \pi_2) \circ \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ w) \circ (h \times \mathrm{id})\rangle\rangle)\\
&= \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \pi_2 \circ \langle \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ w) \circ (h \times \mathrm{id})\rangle\rangle)\\
&= \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ w) \circ (h \times \mathrm{id})\rangle)\\
&= \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ (h \times \mathrm{id}) \circ w)\rangle)\\
&= \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ h) \circ w)\rangle)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\lfloor [\![\hat{N}]\!] \rfloor \circ \pi_2 \circ w)\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ ([\![\mathsf{op}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\lfloor [\![\hat{N}]\!] \rfloor \circ \pi_2 \circ w)\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \langle \Lambda(\lfloor [\![\hat{N}]\!] \rfloor \circ \pi_2 \circ w), [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T(\lfloor [\![\hat{N}]\!] \rfloor \circ \pi_2 \circ w) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ ([\![\hat{N}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2 \circ w) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mu \circ T(T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!]) \circ \sigma \circ \pi_2 \circ w) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mu \circ T(T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!]) \circ \alpha \circ ((\sigma \circ \pi_2) \times \mathrm{id})) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mu \circ T(T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!]) \circ \alpha) \circ \theta \circ ((\sigma \circ \pi_2) \times \mathrm{id}) \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mu \circ T(T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!]) \circ \alpha) \circ \theta \circ \langle \sigma, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1\rangle \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mu \circ T(T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!])) \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times \theta) \circ \alpha \circ \langle \sigma, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1\rangle \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mu \circ T(T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!])) \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times \theta) \circ \sigma \circ (\langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!]\rangle \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ \mu \circ T(T\mathbf{ev} \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!])) \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times \theta) \circ \sigma \circ (\langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!]\rangle \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Lambda(\lfloor [\![\hat{M}]\!] \rfloor \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\lfloor \mu \circ T[\![\hat{N}]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!]\rangle \rfloor \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ ((\mu \circ T[\![\hat{N}]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!]\rangle) \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \mu \circ T\theta \circ \theta \circ \sigma \circ ((T[\![\hat{N}]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!]\rangle) \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \mu \circ T\theta \circ T(\mathrm{id} \times [\![\hat{N}]\!]) \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times \theta) \circ \sigma \circ (\langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!]\rangle \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)
\end{aligned}
$$

- 若 $\hat{\hat{M}} = \mathsf{case}\ V\ \mathsf{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto M_i\}_{i=1}^n$，则

$$
\begin{aligned}
&\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle_X^T \circ h\\
&= \Lambda([\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle_X^T \circ w, \ldots, \Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle_X^T \circ w] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle) \circ h\\
&= \Lambda([\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle_X^T \circ w, \ldots, \Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle_X^T \circ w] \circ \langle h \times \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda([\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle_X^T \circ (h \times \mathrm{id}) \circ w, \ldots, \Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle_X^T \circ (h \times \mathrm{id}) \circ w] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda([\lfloor [\![\hat{M}_1]\!] \rfloor_X \circ \pi_2 \circ w, \ldots, \lfloor [\![\hat{M}_n]\!] \rfloor_X \circ \pi_2 \circ w] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ [([\![\hat{M}_1]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2 \circ w, \ldots, ([\![\hat{M}_n]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2 \circ w] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ \langle [[\![\hat{M}_1]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ w, \ldots, [\![\hat{M}_n]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ w], \pi_2 \circ \pi_2 \circ w\rangle \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ \langle [[\![\hat{M}_1]\!], \ldots, [\![\hat{M}_n]\!]] \circ ((\pi_1 \circ \pi_2) \times \mathrm{id}), \pi_2 \circ \pi_2 \circ \pi_1\rangle \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ \langle [[\![\hat{M}_1]\!], \ldots, [\![\hat{M}_n]\!]] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!]\rangle \circ \pi_1 \circ \pi_2, \pi_2 \circ \pi_2\rangle)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ \langle [[\![\hat{M}_1]\!], \ldots, [\![\hat{M}_n]\!]] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!]\rangle \circ \pi_1, \pi_2\rangle \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ (([[\![\hat{M}_1]\!], \ldots, [\![\hat{M}_n]\!]] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!]\rangle) \times \mathrm{id}) \circ \pi_2)\\
&= \Lambda(\lfloor [\![\hat{M}]\!] \rfloor \circ \pi_2)
\end{aligned}
$$

□

推论的证明6.6。Th e 的仅当部分可直接由引理6.5得到。对于当部分，只需证明以下方程。

$$
\mathbf{ev} \circ \langle \langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle^T_{[\![\hat{A}]\!]} \circ \langle \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \pi_2)\rangle_{\mathsf{op} \in \Sigma} \circ !, \langle \mathrm{id}, \Lambda(\eta \circ \pi_2) \circ !\rangle\rangle \quad = \quad [\![\hat{M}]\!] : [\![\hat{\Delta}]\!] \to T[\![\hat{A}]\!]
$$

证明如下，依据是引理6.5 。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{ev} \circ \langle \langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle^{T}_{[\![\hat{A}]\!]} \circ \langle \Lambda(\lfloor [\![\mathsf{op}]\!] \rfloor \circ \pi_2) \rangle_{\mathsf{op} \in \Sigma} \circ !, \langle \mathrm{id}, \Lambda(\eta \circ \pi_2) \circ ! \rangle \rangle \\
&= \mathbf{ev} \circ \langle \Lambda(\lfloor [\![\hat{M}]\!] \rfloor_X \circ \pi_2) \circ !, \langle \mathrm{id}, \Lambda(\eta \circ \pi_2) \circ ! \rangle \rangle \\
&= \lfloor [\![\hat{M}]\!] \rfloor_X \circ \pi_2 \circ \langle !, \langle \mathrm{id}, \Lambda(\eta \circ \pi_2) \circ ! \rangle \rangle \\
&= \lfloor [\![\hat{M}]\!] \rfloor_X \circ \langle \mathrm{id}, \Lambda(\eta \circ \pi_2) \circ ! \rangle \\
&= \mu \circ T\mathbf{ev} \circ \theta \circ \sigma \circ ([\![\hat{M}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \langle \mathrm{id}, \Lambda(\eta \circ \pi_2) \circ ! \rangle \\
&= \mu \circ T(\mathbf{ev} \circ (\Lambda(\eta \circ \pi_2) \times \mathrm{id})) \circ \theta \circ \sigma \circ \langle [\![\hat{M}]\!], ! \rangle \\
&= \mu \circ T(\eta \circ \pi_2) \circ \theta \circ \langle !, [\![\hat{M}]\!] \rangle \\
&= \pi_2 \circ \langle !, [\![\hat{M}]\!] \rangle \\
&= [\![\hat{M}]\!]
\end{aligned}$$

□

引理6.8的证明：对$\hat{}M$进行归纳。

- 若 $\hat{}M = \mathsf{return}\ \hat{}V$，则 $\hat{}\Gamma, \hat{}\Delta, k\colon \hat{}A \to C \vdash k\ \hat{}V\colon C$。
- 若 $\hat{}M = \mathsf{let}\ C \vdash M \quad C \quad x\ k \quad \mapsto M \quad \in H$ $\quad x \quad \vdash \quad x \quad \to$ $\Gamma\ x \quad B \quad \Delta\ k \quad A \to C \vdash \quad C \quad$ 操作($\hat{}V$)

in $\hat{}N$，则根据效应处理器的类型规则，我们有 $\Gamma, : \hat{}B$操作 $\hat{}N\colon \hat{}A!\Sigma$ 以及 $\Gamma, : \hat{}A$操作 $k' : \hat{}B$操作操作 : where (操作(, ') 操作) 。根据归纳假设，我们有 , : ˆ操作, ˆ , : ˆ ˆ$N[H,k]$: 。因此，通过将 $\hat{}V$代入 x，并将 $\lambda x.\hat{}N[H,k]$代入 k'，我们有 $\Gamma, \hat{}\Delta, k\colon \hat{}A \to C \vdash M$操作$[\hat{}V/x, \lambda x.\hat{}N[H,k]/k']\colon C$。- 若 $\hat{}M = \mathsf{case}\ \hat{}V \mathsf{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{}N_i\}_{i=1}^n$，则根据归纳假设，我们对每个 i都有 $\Gamma, x\colon \hat{}A_i, \hat{}\Delta, k\colon \hat{}A \to C \vdash \hat{}N_i[H,k]\colon C$。因此，根据情况表达式的类型规则，我们有 $\Gamma, \hat{}\Delta, k\colon \hat{}A \to C \vdash \mathsf{case}\ \hat{}V \mathsf{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{}N_i[H,k]\}_{i=1}^n\colon C$。□

命题 6.10 的证明。 根据定义 6.4，如果以下态射的联合等化子 $e\colon Q \to \mathcal{H}(\Sigma; X)$ 存在，那么它就表示 $H_{\mathcal{E}}$为 yQ。

$$\mathcal{H}(\Sigma; X) \xrightarrow[\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle]{\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle} ([\![\hat{\Delta}]\!] \times ([\![\hat{A}]\!] \Rightarrow^{T(\Sigma', \mathcal{E}')} X)) \Rightarrow^{T(\Sigma', \mathcal{E}')} X \qquad \text{for each } \hat{\Delta} \vdash \hat{M} \sim \hat{N} : \hat{A}!\Sigma \in \mathcal{E}$$

由于 y 保持极限，$\mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}$ 等价于如下形式的自然变换：$y(Q \times T_{\mathcal{T}} K^{T_{\mathcal{T}'}} X) \to y K^{T_{\mathcal{T}'}} X$。根据米田引理，该自然变换对应于一个态射 $\mathsf{handle}'_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}\colon Q \times T_{\mathcal{T}} K^{T_{\mathcal{T}'}} X \to K^{T_{\mathcal{T}'}} X$。具体而言，$\mathsf{handle}'_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}$ 满足 $\mathsf{handle}'_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X} \circ\ h', f\ = \mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(e \circ\ h', f)$。□

与引理F.3 类似，定义 6.11 满足以下弱化性质。

引理 I.1（弱化）。 令 $\Gamma, \Delta \vdash V\colon A$ 为一个良类型项。若 $[\![\Gamma, \Delta \vdash V\colon A]\!]$ 已定义，则 $\Gamma, x\colon B, \Delta \vdash V\colon A$ 的解释已定义，且给出如下结果

$$[\![\Gamma, x : B, \Delta \vdash V : A]\!] = [\![\Gamma, \Delta \vdash V : A]\!] \circ \mathrm{proj}_{\Gamma; x:B; \Delta}$$

其中 $\mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta}\colon [\![\Gamma,\ x\colon\ B, \Delta]\!] \to [\![\Gamma, \Delta]\!]$ 是典范投影。对于计算和 *handle*，我们也有类似的方程 *rs.*

证明。 对类型推导进行归纳法。大多数情况与引理 F.3类似。对于 handle-with 的情况，根据 **handle** 的自然性和归纳假设，可得如下结果。

$$\begin{aligned}
&[\![\Gamma, x : B, \Delta \vdash \mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.N : C]\!] \\
&= \mathbf{handle}([\![\Gamma, x : B, \Delta \vdash H : \Sigma \Rightarrow C]\!], T_{\mathcal{T}}[\![\Gamma, x : B, \Delta, y : A \vdash N : C]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\Gamma, x : B, \Delta \vdash M : A!\Sigma]\!] \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta}, T_{\mathcal{T}}([\![N]\!] \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta,y:A}) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta} \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta}, T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta}) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle) \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta} \\
&= [\![\Gamma, \Delta \vdash \mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.N : C]\!] \circ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta}
\end{aligned}$$

这里，我们用到了这样一个事实：如果 $[\![H]\!] \in H_{\mathcal{T}}([\![\Gamma,\ \Delta]\!])$，那么 $[\![H]\!] \circ\ \mathrm{proj}_{\Gamma;x:B;\Delta} \in H_{\mathcal{T}}([\![\Gamma,\ x\colon\ B,\ \Delta]\!])$。 □

我们还有以下与引理 F.4 类似的代换性质。

引理 I.2（代换）。对于 $\sigma\colon \Gamma \to \Delta$ 和 $\Delta \vdash W\colon B$，如果 $[\![\sigma]\!]\colon [\![\Gamma]\!] \to [\![\Delta]\!]$ 和 $[\![W]\!]\colon [\![\Delta]\!] \to [\![B]\!]$ 有定义，那么$\Gamma \vdash W[\sigma]\colon B$ 的解释有定义，且其值为

$$[\![W[\sigma]]\!] = [\![W]\!] \circ [\![\sigma]\!].$$

我们对计算项和处理器也有类似的方程 .

证明。 对类型推导进行归纳。大多数情况与引理 F.4 类似。对于 handle-with 的情况，我们使用 **handle** 的自然性。 □

引理的证明 6.12。 我们通过对 $\hat{}M$ 作归纳法证明前一个陈述。后一个陈述可由前一个陈述立即推出。$\hat{}$ $\hat{}$

- 若 $M = \mathsf{return}\ V$:

$$\begin{aligned}
[\![\hat{M}[H,k]]\!] &= [\![k\ \hat{V}]\!] \\
&= \mathbf{ev} \circ \langle \pi_2 \circ \pi_2 \circ s, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ s \rangle \\
&= \mathbf{ev} \circ \langle \pi_2, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \rangle \circ \pi_2 \circ s \\
&= \mathbf{ev} \circ \sigma \circ ([\![\hat{V}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2 \circ s \\
\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) &= \Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle \circ ([\![H]\!] \times \mathrm{id}) \\
&= \mathbf{ev} \circ \sigma \circ ([\![\hat{V}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2 \circ ([\![H]\!] \times \mathrm{id}) \\
&= \mathbf{ev} \circ \sigma \circ ([\![\hat{V}]\!] \times \mathrm{id}) \circ \pi_2
\end{aligned}$$

- 若 $\hat{}M = \mathsf{let}\ x \leftarrow$ 操作($\hat{}V$) 中 $\hat{}N$:

$$\begin{aligned}
[\![\hat{M}[H,k]]\!] &= [\![M_{\mathsf{op}}[\hat{V}/x, \lambda x.\hat{N}[H,k]/k']]\!] \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \langle \langle \pi_1 \circ s, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ s \rangle, \Lambda([\![\hat{N}[H,k]]\!] \circ \alpha^{-1} \circ (\mathrm{id} \times \sigma) \circ \alpha) \rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \langle \langle \pi_1, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \rangle, \Lambda(\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ [\![H]\!]) \circ w) \rangle \circ s \\
\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) &= \mathbf{ev} \circ \langle \pi_{\mathsf{op}} \circ \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ w) \rangle \rangle \circ ([\![H]\!] \times \mathrm{id}) \\
&= \mathbf{ev} \circ \langle \pi_{\mathsf{op}} \circ [\![H]\!] \circ \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ [\![H]\!]) \circ w) \rangle \rangle \\
&= \mathbf{ev} \circ \langle \Lambda([\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1}) \circ \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ [\![H]\!]) \circ w) \rangle \rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1} \circ \langle \pi_1, \langle [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2, \Lambda(\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ [\![H]\!]) \circ w) \rangle \rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \langle \langle \pi_1, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \rangle, \Lambda(\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{N} \rangle\!\rangle_X^T \circ [\![H]\!]) \circ w) \rangle
\end{aligned}$$

- 如果 $\hat{}\hat{}\hat{}M =$ 情况 V 则 $\{\iota_i\ x_i \mapsto M_i\}_{i=1}^n$:

$$\begin{aligned}
[\![\hat{M}[H,k]]\!] &= [\![\mathsf{case}\ \hat{V}\ \mathsf{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i[H,k]\}_{i=1}^n]\!] \\
&= [[\![\hat{M}_1[H,k]]\!] \circ \alpha^{-1} \circ (\mathrm{id} \times \sigma) \circ \alpha, \ldots, [\![\hat{M}_n[H,k]]\!] \circ \alpha^{-1} \circ (\mathrm{id} \times \sigma) \circ \alpha] \\
&\quad \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ s \rangle \\
&= [\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) \circ w \circ (s \times \mathrm{id}), \ldots, \Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) \circ w \circ (s \times \mathrm{id})] \\
&\quad \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ s \rangle \\
&= [\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) \circ w, \ldots, \Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) \circ w] \\
&\quad \circ (s \times \mathrm{id}) \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ s \rangle \\
&= [\Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) \circ w, \ldots, \Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) \circ w] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \circ s \\
&= [\Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_1 \rangle\!\rangle \circ w, \ldots, \Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M}_n \rangle\!\rangle \circ w] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \circ ([\![H]\!] \times \mathrm{id}) \circ s \\
&= \Lambda^{-1}\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle \circ ([\![H]\!] \times \mathrm{id}) \circ s \\
&= \Lambda^{-1}(\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle \circ [\![H]\!]) \circ s
\end{aligned}$$

□

引理 I.3. 设有 $\Delta \vdash \hat{}M : \hat{}A!\Sigma$ 以及 $\sigma : \Gamma \to \hat{}\Delta$。若 $[\![\sigma]\!]$ 有定义，则 $[\![\hat{}M[\sigma]]\!] = [\![\hat{}M]\!] \circ [\![\sigma]\!]$。

证明。容易证明，对于任意 $\hat{}V$，$[\![\hat{}V[\sigma]]\!] = [\![\hat{}V]\!] \circ [\![\sigma]\!]$ 成立。然后，我们对 $\hat{}M$ 进行归纳法来证明该命题。$\hat{}\hat{}$

- 如果 $M = \mathsf{return}\ V$:

$$\begin{aligned}
[\![\hat{M}[\sigma]]\!] &= [\![\mathsf{return}\ \hat{V}[\sigma]]\!] \\
&= \eta \circ [\![\hat{V}[\sigma]]\!] \\
&= \eta \circ [\![\hat{V}]\!] \circ [\![\sigma]\!] \\
&= [\![\hat{M}]\!] \circ [\![\sigma]\!]
\end{aligned}$$

- 如果 $\hat{}M = \mathsf{let}\ x \leftarrow$ 操作$(\hat{}V)$ in $\hat{}N$:

$$\begin{aligned}
[\![\hat{M}[\sigma]]\!] &= [\![\mathsf{let}\ x \leftarrow \mathsf{op}(\hat{V}[\sigma])\ \mathsf{in}\ \hat{N}[\sigma]]\!] \\
&= \mu \circ T([\![\hat{N}]\!] \circ ([\![\sigma]\!] \times \mathrm{id})) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \circ [\![\sigma]\!] \rangle \\
&= \mu \circ T[\![\hat{N}]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![\hat{V}]\!] \rangle \circ [\![\sigma]\!] \\
&= [\![\hat{M}]\!] \circ [\![\sigma]\!]
\end{aligned}$$

- 如果 $\hat{}\hat{}\hat{}M =$ 情况 V 则 $\{\iota_i\ x_i \mapsto M_i\}_{i=1}^n$:

$$\begin{aligned}
[\![\hat{M}[\sigma]]\!] &= [\![\mathsf{case}\ \hat{V}[\sigma]\ \mathsf{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i[\sigma]\}_{i=1}^n]\!] \\
&= [[\![\hat{M}_1[\sigma]]\!], \dots, [\![\hat{M}_n[\sigma]]\!]] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}[\sigma]]\!] \rangle \\
&= [[\![\hat{M}_1]\!] \circ ([\![\sigma]\!] \times \mathrm{id}), \dots, [\![\hat{M}_n]\!] \circ ([\![\sigma]\!] \times \mathrm{id})] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \circ [\![\sigma]\!] \rangle \\
&= [[\![\hat{M}_1]\!], \dots, [\![\hat{M}_n]\!]] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\hat{V}]\!] \rangle \circ [\![\sigma]\!] \\
&= [\![\hat{M}]\!] \circ [\![\sigma]\!]
\end{aligned}$$

□

命题的证明 6.13。对类型推导进行归纳，并与定理 6.14同时进行。大多数情况与 $\lambda^{+}{}_{\mathrm{eff}}$中的相同。唯一非平凡的情况是 handle-with 的情况。根据引理 6.12 和归纳假设，若 $\Gamma \vdash H\colon \Sigma \Rightarrow C$**满足** $\mathcal{E}$，则有 $[\![H]\!] \in H_{\mathcal{T}}([\![\Gamma]\!])$。因此，$[\![\mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.N]\!]$ 有定义。□

定理 6.14 的证明。根据 $\Gamma \vdash M = N\colon A!\Sigma/\mathrm{E}$ 的推导进行同时归纳，并结合命题 6.13。大多数情况与 $\lambda^{+}{}_{\mathrm{eff}}$中的相同。非平凡的情况是 handle-with 方程的情况（图 3），以及实例化等式公理的情况。后者由引理 I.3 得出。对于前者，我们可以使用定义 $\lambda^{+}{}_{,=\ \mathrm{eff}}$-模型中 **handle** 的方程来证明这些方程。

- （Handle-Ret）：

$$\begin{aligned}
&[\![\mathsf{handle}\ \mathsf{return}\ V\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.M]\!] \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T_{\mathcal{T}}[\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \eta \circ [\![V]\!] \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], \eta \circ [\![M]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![V]\!] \rangle) \\
&= [\![M]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![V]\!] \rangle \\
&= [\![M[V/x]]\!]
\end{aligned}$$

- （Handle-Let）：

$$\begin{aligned}
&[\![\mathsf{handle}\ \mathsf{let}\ x \leftarrow L\ \mathsf{in}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N]\!] \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \mu \circ T[\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], \mu \circ T^2_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ T\theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T[\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T\mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \pi_1, \pi_2) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T^2_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ T\theta \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, T[\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T\mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \pi_1, T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ \pi_2) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, T[\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T\mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \pi_1, T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \circ \pi_2) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle)
\end{aligned}$$

这里，我们使用以下方程。

$$\begin{aligned}
&\theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \rangle \\
&= \theta \circ (\mathrm{id} \times \theta) \circ \alpha \circ \langle \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle, \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= T\alpha \circ \theta \circ \langle \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle, \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= T\langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle \rangle \\
&= T\langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle \circ T\langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle
\end{aligned}$$

继续计算：

$$\begin{aligned}
&[\![\mathsf{handle}\ \mathsf{let}\ x \leftarrow L\ \mathsf{in}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N]\!] \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T\mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \pi_1, T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \circ \pi_2) \circ T\langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle \circ T\langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T\mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \pi_1, T_{\mathcal{T}}[\![N]\!] \circ \theta \circ (\mathrm{id} \times [\![M]\!]) \circ \langle \pi_1, \mathrm{id} \rangle) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T\mathbf{handle}([\![H]\!] \circ \pi_1, T_{\mathcal{T}}([\![N]\!] \circ (\pi_1 \times \mathrm{id})) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!] \rangle) \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![L]\!] \rangle) \\
&= [\![\mathsf{handle}\ L\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ x.\mathsf{handle}\ M\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.N]\!]
\end{aligned}$$

- (Handle-Op)：我们使用引理F.7。

$$\begin{aligned}
&[\![\mathtt{handle}\ \mathsf{op}(V)\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.M]\!] \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T_{\mathcal{T}}[\![M]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![\mathsf{op}]\!] \circ [\![V]\!]\rangle) \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], \mathcal{A}_{E',X}([\![\mathsf{op}]\!]) \circ \langle [\![V]\!], \Lambda[\![M]\!]\rangle) \\
&= \mathbf{ev} \circ \langle \pi_{\mathsf{op}} \circ [\![H]\!], \langle [\![V]\!], \Lambda[\![M]\!]\rangle\rangle \\
&= \mathbf{ev} \circ \langle \Lambda([\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1}), \langle [\![V]\!], \Lambda[\![M]\!]\rangle\rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}]\!] \circ \alpha^{-1} \circ \langle \mathrm{id}, \langle [\![V]\!], \Lambda[\![M]\!]\rangle\rangle \\
&= [\![M_{\mathsf{op}}[V/x, \lambda x.M/k]]\!]
\end{aligned}$$

□

定理 6.15 的证明。我们通过构造 $\lambda^{+,=}\,\mathsf{eff}$ 的项模型来证明完备性。我们定义范畴 $\mathbf{Syn}(\lambda^{+,=}\,\mathsf{eff})$，其对象是值类型，态射是模去等式理论后的值项，与 λ_{eff} 和 $\lambda^{+}\,\mathsf{eff}$ 的情形相同。我们还定义强单子 $T_{(\Sigma,\mathcal{E})}\,\mathbf{by}\,T_{(\Sigma,\mathcal{E})}A \coloneqq \mathsf{unit} \to A!\Sigma/\mathrm{E}$。于是，这给出了 $\lambda^{+,=}\,\mathsf{eff}$ 的一个模型。证明的大部分内容与 $\lambda^{+}\,\mathsf{eff}$ 的项模型相似。非平凡之处在于：(1) 证明我们可以定义满足所需方程的 handle；(2) 证明操作的解释满足等式公理。对于前者，给定 $x\colon A \vdash H\colon \prod \mathrm{op}{:}A\mathrm{op} \twoheadrightarrow B\mathrm{op} \in \Sigma(A_{\mathsf{op}} \times (B_{\mathsf{op}} \to B!\Sigma'/\mathrm{E}') \to B!\Sigma'/\mathrm{E}')$，使得 $H \in H_{(\Sigma,\mathcal{E})}(A)$，以及 $x\colon A \vdash V\colon T_{(\Sigma,\mathcal{E})}T_{(\Sigma',\mathrm{E}')}B$，我们如下定义 $x\colon A \vdash \mathsf{handle}(H,V) : T_{(\Sigma',\mathrm{E}')}B$。

$$\mathbf{handle}(H,V) \quad \coloneqq \quad \lambda z.\mathtt{handle}\ V\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.y\ \langle\rangle$$

在此，我们将 H 等同于由 H 诱导的效应处理器 $\{\text{操作}(x,k) \mapsto \pi_{\mathsf{op}}\,Hx,k \mid \text{操作} \in \Sigma\}$。根据 $H \in H_{(\Sigma,\mathcal{E})}(A)$ 的定义，对于 E 中的每个方程公理 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M \sim \hat{}N\colon \hat{}A!\Sigma$，我们有 $\hat{}M \circ H = \hat{}N \circ H$。在 $\mathbf{Syn}(\lambda^{+,=\,\mathsf{eff}})$ 中，$h\colon \mathrm{H}(\Sigma;C) \vdash \hat{}M : (\prod \hat{}\Delta \times (\hat{}A \to C)) \to C$ 如下给出。

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathtt{return}\ \hat{V} \rangle\!\rangle &= \lambda\langle \tilde{x}, k\rangle.k\ \hat{V} \\
\langle\!\langle \mathtt{let}\ y \leftarrow \mathsf{op}(\hat{V})\ \mathtt{in}\ \hat{M} \rangle\!\rangle &= \lambda\langle \tilde{x}, k\rangle.\pi_{\mathsf{op}}\ h\ \langle \hat{V}, \lambda y.\langle\!\langle \hat{M} \rangle\!\rangle\ \langle \tilde{x}, y, k\rangle\rangle \\
\langle\!\langle \mathtt{case}\ \hat{V}\ \mathtt{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \hat{M}_i\}_{i=1}^{m} \rangle\!\rangle &= \lambda\langle \tilde{x}, k\rangle.\mathtt{case}\ \hat{V}\ \mathtt{of}\ \{\iota_i\ x_i \mapsto \langle\!\langle \hat{M}_i \rangle\!\rangle\ \langle \tilde{x}, x_i, k\rangle\}_{i=1}^{m}
\end{aligned}$$

在此，我们 let $\hat{}\Delta = x_1\colon \hat{}B_1, \ldots, x_n\colon \hat{}B_n$ 以及 $\tilde{x} = x_1, \ldots, x_n$。这意味着 $\hat{}M \circ H$ 由 $\lambda\tilde{x}, k.\hat{}M[H,k]$ 给出，因而相应的效应处理器遵守 E。不难证明，在 $\mathbf{Syn}(\lambda^{+,=\,\mathsf{eff}})$ 中，解释 $[\![\mathtt{handle}\ M \mathtt{with}\ H \mathtt{to}\ x.N]\!]$ 是项 λz: 单位类型.handle $M$with $H$to $x.N$ 的等价类。

$$\begin{aligned}
&[\![\mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ x.N]\!] \\
&= \mathbf{handle}([\![H]\!], T_{(\Sigma,\mathcal{E})}[\![N]\!] \circ \theta \circ \langle \mathrm{id}, [\![M]\!]\rangle) \\
&= \lambda z.\mathtt{handle}\ \mathtt{let}\ x \leftarrow M\ \mathtt{in}\ \mathtt{return}\ \lambda z.N\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.y\ \langle\rangle \\
&= \lambda z.\mathtt{handle}\ M\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.N
\end{aligned}$$

现在，我们证明**handle**满足所需方程。

- 自然性：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{handle}(H,V) \circ W \\
&= (\lambda z.\mathtt{handle}\ V\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.y\ \langle\rangle)[W/x] \\
&= \lambda z.\mathtt{handle}\ V[W/x]\ \langle\rangle\ \mathtt{with}\ H[W/x]\ \mathtt{to}\ y.y\ \langle\rangle \\
&= \mathbf{handle}(H \circ W, V \circ W)
\end{aligned}$$

- 单位类型 (5)：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H, \eta \circ V) \\
&= \lambda z.\mathtt{handle}\ \mathtt{return}\ V\ \mathtt{with}\ H\ \mathtt{to}\ y.y\ \langle\rangle \\
&= \lambda z.V\ \langle\rangle \\
&= \lambda z.V\ z \\
&= V
\end{aligned}$$

- 乘法（6）：

  $\mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H, \mu \circ\ V) = \lambda z.\mathsf{handle}\ \mathsf{let}\ y_1 \leftarrow V\ 于\ y_1\ 用\ H 到\ y_2.y_2 = \lambda z.\mathsf{handle}\ V\ 用\ H 到\ y_1.\mathsf{handle}\ y_1\ 用\ H 到\ y_2.y_2\ \mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H \circ\ \pi_1, \pi_2) = \lambda z.\mathsf{handle}\ \pi_2\ x\ 用\ H[\pi_1\ x/x]\ 到\ y.y\ T\mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H \circ\ \pi_1, \pi_2) \circ\ \theta \circ\ \mathrm{id}\ V = \lambda z.\mathsf{let}\ y \leftarrow V\ 于\ \mathsf{return}\ (\lambda z.\mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H \circ\ \pi_1, \pi_2))[x, y/x] \models \lambda z.\mathsf{let}\ y \leftarrow V\ 于\ \mathsf{return}\ \lambda z.\mathsf{handle}\ y\ 用\ H 到\ y.y\ \mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H, T\mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H \circ\ \pi_1, \pi_2) \circ\ \theta \circ\ \mathrm{id}\ V) = \lambda z.\mathsf{handle}\ (\mathsf{let}\ y \leftarrow V\ 于\ \mathsf{return}\ \lambda z.\mathsf{handle}\ y\ 用\ H 到\ y.y)\ 用\ H 到\ y.y = \lambda z.\mathsf{handle}\ V\ 用\ H 到\ y.\mathsf{handle}\ (\mathsf{return}\ \lambda z.\mathsf{handle}\ y\ 用\ H 到\ y.y)\ 用\ H 到\ y.y = \lambda z.\mathsf{handle}\ V\ 用\ H 到\ y.\mathsf{handle}\ y\ 用\ H 到\ y.y$

- 操作 (7):

  $\mathsf{handle}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',X}(H, \mathrm{A}_{\mathcal{T}',X}([\![操作]\!]^{T}_{\mathcal{T}}) \circ\ V, W) = \lambda z.\mathsf{handle}\ \mathsf{let}\ y \leftarrow 操作\ V\ \mathsf{in}\ \mathsf{return}\ \lambda z.W\ y\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.y = \lambda z.\mathsf{handle}\ 操作\ V\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.\ \mathsf{handle}\ (\mathsf{return}\ \lambda z.W\ y)\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.y = \lambda z.\mathsf{handle}\ 操作\ V\ \mathsf{with}\ H\ \mathsf{to}\ y.W\ y = \lambda z.M_{\mathsf{op}}[V/x, W/k] \models \mathrm{ev} \circ\ \pi_{\mathsf{op}} \circ\ H, V, W$

最后，我们证明操作的解释 $[\![\mathrm{op}]\!]$ 满足等式公理。对于每个效应项 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M : \hat{}A!\Sigma$，其在 $\mathrm{Syn}(\lambda^{+}, =\ \mathrm{eff})$ 中的解释 $[\![\hat{}M]\!]$ 由计算项 $\lambda z.\hat{}M$ 的等价类给出。因此，对于 E 中的每个等式公理 $\hat{\Delta} \vdash \hat{}M \sim \hat{}N : \hat{}A!\Sigma$，我们有 $[\![\hat{}M]\!] = [\![\hat{}N]\!]$，依据 Inst-Ax。

□