从最少量子组分导出的热力学状态变量

Uwe Holm，[1] Hans-Peter Weber，[1] Morgan Berkane，[1,2] Camilla Wulf，[1]Anton Kantz，[1] Anja Kuhnhold，[1] 以及 Andreas Buchleitner[1]，[2]，*[1]弗莱堡大学物理研究所，*Hermann-Herder-Straße 3*，*D-79104* 弗赖堡，德国[2]弗赖堡阿尔贝特-路德维希大学 *EUCOR*量子科学与量子计算中心，*Hermann-Herder-Straße 3*，*D-79104* 弗赖堡，德国（日期：2026年2月4日）

我们展示了如何从二维区域中一个或两个粒子的（量子）混沌谱结构，严格推导出平衡热力学的宏观状态变量——压力、熵和温度。这为功和热量提供了第一性原理定义，为热力学第一定律和第二定律奠定了微观基础，并清晰阐释了“本征态热化假说”。

arXiv:2602.03276v1 [quant-ph] 3 Feb 2026

I. 引言

平衡热力学是一种极为可靠的理论——尽管它有意忽略了其所要预测的系综动力学的微观细节。它建立在少数基本假设之上，例如“分子混沌”（例如，见 [1]第177页）以及按层级组织的时间尺度；其中，它以确定性的精度指出——尽管所用的纯粹是概率论证——在一座高大的大讲堂里，听众中没有人需要担心所有可用的空气分子会突然堆积在天花板正下方一层狭窄（且无法触及、因而无法呼吸）的区域内。此类预测本身有力地支撑了这样一个事实：指数级受抑制的事件概率确实意味着确凿的事实，正如确定性方程一样。

平衡热力学教科书推导的一块基石是等先验概率原理 [1–3], ，该原理指出，在任一时刻，所考虑系统中与其宏观状态相一致的所有微观态都具有同等的可能性。在时间轴上，这意味着某种粗粒化以及上述时间尺度层级，从而可以谈论平衡态的准静态状态变换——这种变换忽略了扰动之后在有限但足够短的时间尺度上发生的平衡化过程。从微观上看，等先验概率因此传统上被理解为所考虑系统（通常是气体）组分由碰撞引起的混沌多体动力学的结果 [1–3]。

因此，热力学在许多方面被视为一种涌现理论：对（过多的）微观自由度及相关短时间尺度进行粗粒化不仅不可避免，而且还能从所研究的多组分系统中提取数量相对少得多的宏观特征——而这些特征已足以实现对该系统稳健的描述与控制。

因此，一个不言而喻的问题是：热力学行为在何种典型尺度上涌现；反之，在何种尺度以下，系统组分的微观特征会妨碍状态变量的明确界定，或迫使对热力学预言作出微观的——最终是量子的——修正 [1]。一个专门聚焦此类问题的重要研究方向是“量子热力学” [4], ，其本质上是对开放量子系统热力学性质的研究 [5]——亦即至少有部分自由度与某些环境自由度耦合（即被开放）的系统。然而，与热力学本身颇为相似，这些方法往往依赖于对开放系统业已建立的有效描述，即通过对环境取迹，并对（过）短时间尺度取平均 [6]。就此而言，它们并未在最基本的层面上分辨微观动力学。另一种方法研究幺正的、相互作用的多组分量子系统中的平衡化现象（常被称为“热化” [7] ——本文避免使用这一术语），以及其偏离（可能有多种成因），这些偏离被统称为“多体局域化” [8]和/或“-疤痕” [9–12]。然而，迄今为止，这类研究尚未完全建立与标准热力学的联系——尽管已有如 [13], 那样引入某些状态变量的尝试。

II. 模型与数值方法

我们目前的贡献确立了微观量子模型的最小要素，这些要素允许直接根据被限制在二维——后一种情形下为分区——区域内的单个粒子或两个相互作用粒子的谱与特征向量结构，一致地定义热力学状态变量。我们将看到，单粒子（量子）混沌允许定义压力，而（相互作用的）双粒子量子混沌允许对热流作出微观定义，并由此定义熵和温度，最终导向第一和第二

* a.buchleitner@physik.uni-freiburg.de

平衡热力学定律。所有谱信息均通过对相关特征值问题进行精确数值对角化生成，采用有限元表示 [14–18]。我们设定 $\hbar \equiv m \equiv 1$，使得所有量均以参考长度尺度 $\mathcal{L}$给出，该尺度由粒子区域的几何延展范围确定。能量随后以 $\mathcal{L}^{-2}$ 为单位度量，时间以 $\mathcal{L}^{2}$ 为单位，相互作用强度以 $\mathcal{L}^{-1}$ 为单位。通过额外设定 $k_B \equiv 1$，温度也以 $\mathcal{L}^{-2}$ 为单位度量。

III. 压力的各向同性与波义耳-马略特定律

我们首先考虑一个在二维区域内自由运动的单粒子，即一个单粒子台球；在硬壁处，粒子发生镜面反射。对于矩形台球，粒子的经典动力学是可积的，因此其沿台球壁面的动量分量是运动常数，并在量子层面产生相应的好量子数。这无法导出压力的一致定义 [19], ，因为粒子作用于台球壁面的广义力（以及由此产生的压力）通常不是各向同性的，这是粒子可积动力学（或缺乏“分子混沌”[1]）的直接结果 [15]。

因此，有必要通过选择能够诱导遍历动力学的边界条件来打破运动的可积性。事实上，如果量子化的不是矩形台球，而是西奈 [20]，粒子波矢的方向（其模长由于能量守恒而保持不变）会被经典动力学随机化。在量子层面，这会产生遍历本征态；它们在台球区域上是离域的，并且可以理解为平面波的随机叠加[21, 22]。

因此，作为对本征态热化假说的一个启发性说明，量子化粒子的运动施加于台球边界上的压力可推导如下：在能量 $E = p^2/2$ 下，对于具有西奈边界条件的哈密顿量 $H = -\Delta/2$，平衡热力学的标准定义 [25]可借助海尔曼-费曼定理 [26, 27], 重新表述，该定理可直接从能级对参数的依赖关系中提取压力：

$$
\begin{aligned}
P &= -\left\langle \frac{\partial H(p;\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle , \\
&= -\left\langle E(\lambda) \middle| \frac{\partial H(p;\lambda)}{\partial \lambda} \middle| E(\lambda) \right\rangle , \\
&= -\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

在这里，$H(\lambda)$的能量本征值，其对应的本征向量为 $|E(\lambda)\rangle$，

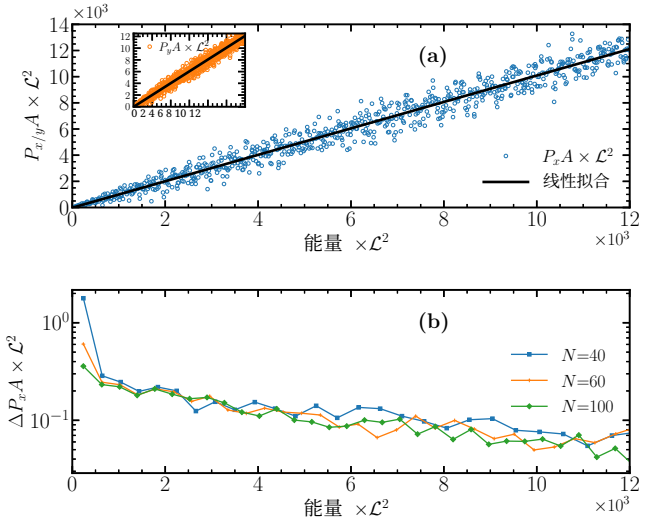

图1. 对波义耳-马略特定律的检验：一个在Sinai台球基本域内自由运动的单粒子，该台球的边长为 $L_x = 1.09\,\mathcal{L}$、$L_y = 1.00\,\mathcal{L}$，四分之一圆半径为 $R = 0.5\,\mathcal{L}$，所得体积为 A。为验证压力的各向同性 P，通过公式(1)从台球的各个本征能量中提取压力，其中 $\lambda = L_x$ (L_y)，得到 P_x (P_y)。对台球最低的800个本征能量对应的乘积P_x、$_yA$ 进行线性拟合$f_{P_x,\ {}_yA}(E) = a_x$、$_y E + b_x$、$_y$ ，以验证(a)（及插图）中的波义耳-马略特定律，所得结果为 $a_x = 1.010$、$b_x\mathcal{L}^2 = -0.016\times10^3$、$a_y = 1.008$、$b_y\mathcal{L}^2 = -0.010\times10^3$，与预期值 $a = 1$、$b\mathcal{L}^2 = 0$ 非常吻合。(b) 相对涨落 $\Delta P_xA = |P_x(E)A - f_{P_xA}(E)|/|f_{P_xA}(E)|$ ，即P_xA对每个点取后续25个本征态的平均值，并以能量为函数绘出；结果对应有限元对角化程序 [14–18]所采用的三种三角剖分网格尺寸 N 。除低能区外，随着能量增加， ΔP_xA平滑下降，这符合德布罗意波长减小的预期；在低能区， ΔP_xA 随 N 突然下降，表明离散化过于粗糙，导致数值尚未收敛。(a)中的结果采用了沿Sinai台球四分之一圆设置$N = 100$、$2N$ 个网格点，长度变化为δL_x、$_y = 0.01\,\mathcal{L}$，并在所得本征值之间进行三阶多项式插值，以根据能级导数提取P_x、$_y$ 。对于台球边长的不同比值L_x/L_y ，即 [16]，也得到了质量相当的类似结果。

由 λ 参数化；在此处考虑的具体情形中， λ 可以是Sinai台球（缩减至其基本区域，即从一个角上去掉四分之一圆的矩形）的一面直墙的长度，也可以是四分之一圆的半径，从而能够改变台球的二维体积 [15–17]。

所得数值 P 与 λ的具体选择无关，但会受到由粒子的有限德布罗意波长（相当于 $\hbar$的有限尺寸）导致的剩余涨落影响，其大小将在未来的研究中加以考察。此外，通过式（1）从量子化粒子的参数能级动力学中提取的 P 与台球的二维体积（面积） A的乘积为 $PA = E$ （正如

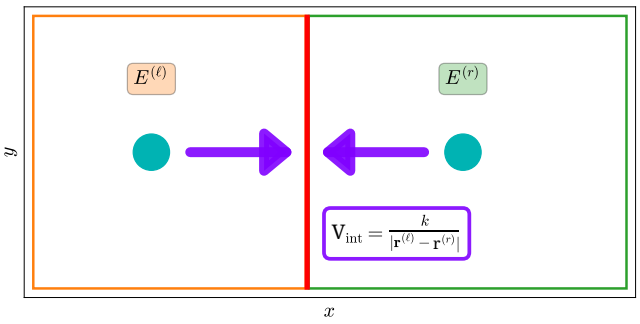

图 2. 将两个相同质量的粒子 $m \equiv 1$ 放入两个相邻的二维盒中，两个盒由宽度有限的固定壁 $b = 0.001\,\mathcal{L}$ 隔开，边长固定为 $L_x^{(\ell)} = 1.1\,\mathcal{L}$、$L_x^{(r)} = 1.3\,\mathcal{L}$、 $L_y = 1.4\,\mathcal{L}$，其中 $L_x^{(\ell)} \neq L_x^{(r)}$ 以减少对称性，并施加完全反射边界条件。粒子最初处于乘积态$|\Psi_0\rangle = |\epsilon_{\rm m_0}^{(\ell)},\ \epsilon_{\rm n_0}^{(r)}\rangle$ 分别由左侧和右侧盒中相互解耦的单粒子能量本征态构成；它们通过库仑相互作用 $V_{\rm int}$ 交换能量，从而产生随时间变化的局域能量期望值 $\langle E^{(\ell,r)}(t)\rangle$。

我们当前的二维情形 [1, 25]）中，该关系具有很高的准确度，如图1所示。这再次重现了 [16] 玻意耳-马略特定律，但仍存在由粒子波长控制的涨落。请注意，这些涨落的相对大小随能量增加而减小，这在定性上符合预期，因为随着粒子动量增大，量子动力学趋近于射线光学极限。

IV. 微观热平衡与热流

虽然波义耳-马略特定律或许提供了一条定义温度的初步途径 [16], ，即通过统计力学中温度与能量的关系 [1, 3, 28], ，但我们希望像经典热力学通常采用的做法那样引入温度 [25],，即通过系统组分之间不可逆的能量交换，也就是热量交换。为此，我们扩展台球模型，将一个Sinai台球中的单粒子替换为两个粒子，每个粒子分别被限制在一个二维矩形区域的两个矩形隔间之一中，见图2。两个隔间之间的隔墙固定不动（因此不会做功），并再次为两个粒子设定反射边界条件。我们进一步假设它们之间存在强度为 k的吸引库仑力，从而形成经典混合相空间；我们通过运行若干条经典轨迹验证了这一点 [18]。相应的哈密顿量写作：

量子化形式

$$\begin{aligned} H_{\rm 2p} &= h^{(\ell)} + h^{(r)} + V_{\rm int}\,, \\ h^{(\ell,r)} &= \frac{(\mathbf{p}^{(\ell,r)})^2}{2} + V_{\rm box}^{(\ell,r)}\,, \\ V_{\rm int} &= \frac{k}{|\mathbf{r}^{(\ell)} - \mathbf{r}^{(r)}|}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\mathbf{r}^{(\ell,r)}$、$\mathbf{p}^{(\ell,r)}$ 分别表示左侧（ℓ）和右侧（r）粒子在二维空间中的位置和动量，左侧和右侧的边界条件则分别由 $V^{(\ell,r)}$ 盒子表示。

现在，我们将每个粒子制备为未耦合的局域单粒子哈密顿量 $h^{(\ell,r)}$在（本征）能量 $\epsilon_{\rm m_0}^{(\ell)} > \epsilon_{\rm n_0}^{(r)}$ 或 $\epsilon_{\rm m_0}^{(\ell)} < \epsilon_{\rm n_0}^{(r)}$ [29]下对应的能量本征态，并令相应的双粒子初态 $|\Psi_0\rangle = |\epsilon_{\rm m_0}^{(\ell)},\ \epsilon_{\rm n_0}^{(r)}\rangle$ 在幺正算符 $U(t)$ 的作用下演化；该算符由耦合的哈密顿量 $H_{\rm 2p}$生成。随后，我们监测左右粒子的能量期望值

$$\langle E^{(\ell,r)}\ t\ \rangle = \langle\Psi_0|\,U\ t\ ^{\dagger} h^{(\ell,r)} U\ t\ \ |\Psi_0\rangle$$

()()() 随时间的变化，典型结果见图 3(a)。如我们所见，在相当短的时间尺度内，能量便在两个粒子之间不可逆地重新分配；剩余涨落的幅度严格小于演化初始瞬态阶段左侧粒子的能量损失或右侧粒子的能量增益。作为反例，图 3 (b) 展示了由一个初始条件引发的时间演化，我们将其与经典相空间的规则区域相关联 [18]：时间演化并未呈现热化，观测信号的频率成分也很稀疏（这与其对应经典规则运动的判断一致）。

对左右粒子的能量期望值的剩余涨落（a）或振荡（b）取平均后，两个粒子的渐近能量都可与其能量期望值的（与时间无关的）对角近似 $E^{(\ell,r)}$ 对应起来 $\langle E^{(\ell,r)}(t)\rangle$。根据将 $U(t)$ 谱分解为投影到耦合双粒子能量本征态 $|E_j\rangle$ 上的投影算符 $H_{\rm 2p}$，可得 [30]

$$\overline{E^{(\ell,r)}} = \sum_j |\langle\Psi_0|E_j\rangle|^2 \sum_{m,n} |\langle\epsilon_{\rm m}^{(\ell)}, \epsilon_{\rm n}^{(r)}|E_j\rangle|^2 \epsilon_{\rm m,n}^{(\ell,r)}. \tag{3}$$

然而，正如图中插图所示，对于不稳定初始条件会动态涌现出均分现象，而对于稳定初始条件则不会；这种差异已体现在通过非零 $|\langle\Psi_0|E_j\rangle|^2$ 对动力学作出贡献的耦合本征态中。图3(a、b)以及(c)展示了这一点：当双粒子系统从规则相空间区域出发时，能量平衡比的对数值 $\ln(E_j^{(\ell)}/E_j^{(r)})$ 明显偏离零值（b）；而对于由不稳定初始条件所激发的动力学中作出贡献的本征态，该比值则对称地集中在零值附近（a）。后一特征在特定初始

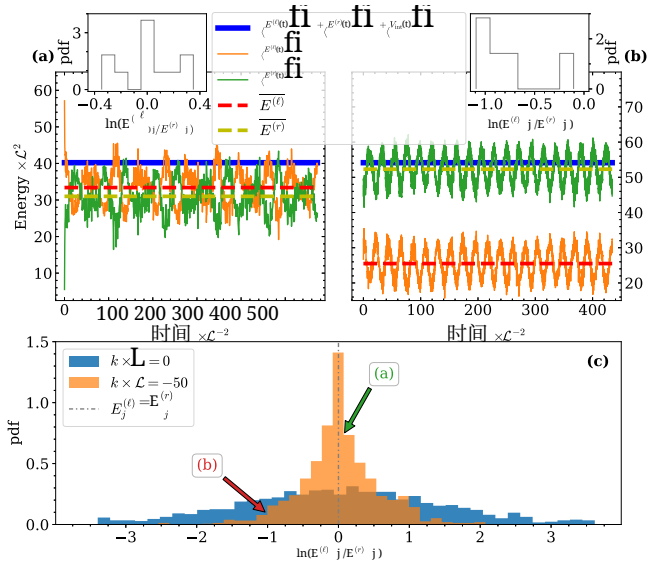

图3. 能量期望值$\langle E^{(\ell,r)}(t)\rangle$的时间演化，初始态为 $|\Psi_0\rangle = |\epsilon^{(\ell)}_{\mathrm{m}_0}, \epsilon^{(r)}_{\mathrm{n}_0}\rangle$，其初始局域量子数为(a) $\mathrm{m}^{(\ell)}_0 \equiv (2,4)$, $\mathrm{n}^{(r)}_0 \equiv (1,1)$, (b) $\mathrm{m}^{(\ell)}_0 \equiv (1,3)$, $\mathrm{n}^{(r)}_0 \equiv (4,1)$；同时给出由 $\langle E^{(\ell,r)}(t)\rangle$ 和 $\langle V_{\mathrm{int}}(t)\rangle$之和得到的（守恒）总能量，适用于 $k\mathcal{L} = -50$。(c) 相互作用强度 $k\mathcal{L} = 0$为零时，以及对于$k\mathcal{L} = -50$，前1000个按能量排序的本征态的能量平衡比$\ln(E^{(\ell)}_j/E^{(r)}_j)$分布。(a,b)中的插图显示了相应的分布，但仅包括与各自初始态 $|\Psi_0\rangle$ 的重叠为 $|\langle\Psi_0|E_j\rangle|^2 \geq 2\%$的本征态 $|E_j\rangle$ （(a)中有十一个，(b)中有五个）。而(c)中的箭头则标示了与(a,b)中演化的初始态重叠 $|\langle\Psi_0|E_j\rangle|$ 最大的那些单个粒子 $|E_j\rangle$ 的能量平衡比。系统边长如前所定义，为$L^{(\ell)}_x = 1.1\,\mathcal{L}$, $L^{(r)}_x = 1.3\,\mathcal{L}$, $L_y = 1.4\,\mathcal{L}$。这里涉及的能量尺度较图1中的小，因为两个粒子在数值上可及的能量范围远小于一个粒子的能量范围。

条件的传播层面上清晰可见，同样编码在所有本征态中，如图3 (c)所示。对于 $H_{2\mathrm{p}}$ 的最低能 1000 个耦合本征态，其能量平衡比的对数分布明显集中在零值附近，与从未耦合的（$k = 0$）本征态中提取的分布形成鲜明对比。对图(a)所示动力学贡献最大的（$k \neq 0$）本征态位于该分布的中心，而对图(b)中的动力学贡献最大的本征态则位于分布两翼，如(c)中的红色和绿色箭头所示。

鉴于图 3(a,c) 中提供了平衡化的证据，我们可以按照标准程序定义热量、温度和能量 [1–3, 25, 28]。热量由净能量交换 $\delta Q = \epsilon^{(\ell)}_{\mathrm{m}_0} - E^{(\ell)} = E^{(r)} - \epsilon^{(r)}_{\mathrm{n}_0}$给出，其时间尺度长于开关切换后瞬态过程的时间尺度，发生于 $t = 0$粒子间相互作用时。

它可以写成

$$\delta Q = \sum_j \Delta\rho^{(\ell)}_{jj}\epsilon^{(\ell)}_j = \mathrm{tr}^{(\ell)}(\Delta\rho^{(\ell)}h^{(\ell)}),$$

其中 $\Delta\rho^{(\ell)} = \rho^{(\ell)}(t=0) - \overline{\rho^{(\ell,r)}}$，约化单粒子态 $\rho^{(\ell)}$ 表示在左侧粒子的未耦合本征态中（这些本征态就是各个未耦合粒子的自然微观态）。上划线再次表示对角近似，该近似刻画了新的平衡态。后者使两个粒子中与固定的二维体积 $A^{(\ell,r)}$以及守恒的总能量 $E_{\mathrm{tot}} = \epsilon^{(\ell)}_{\mathrm{m}_0} + \epsilon^{(r)}_{\mathrm{n}_0} + \langle V_{\mathrm{int}}\rangle(t=0)$相容的微观态数量最大化（注意，由于$\langle V_{\mathrm{int}}\rangle \approx \mathrm{const}$, $E = \epsilon^{(\ell)}_{\mathrm{m}_0} + \epsilon^{(r)}_{\mathrm{n}_0}$也会在平均意义下守恒）。这一最大化要求左右两侧各个粒子的熵对其局域能量的导数相等，并在其局域平衡能量 $E^{(\ell,r)}$ [1, 25, 28]处取值。

给定相互作用双粒子谱及其对应的相互作用本征态，局域熵可表示为

$$S^{(\ell,r)} = -\sum_j \rho^{(\ell,r)}_{jj}\ln\rho^{(\ell,r)}_{jj}, \tag{4}$$

其中，$\rho^{(\ell,r)}_{jj}$ 是对右/左粒子取 $U|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|U^\dagger$后得到的，并且仍以左/右粒子的未耦合本征态表示。对 $E = \epsilon^{(\ell)}_{\mathrm{m}_0} + \epsilon^{(r)}_{\mathrm{n}_0}$的不同实例进行采样，可获得不同涌现平衡子系统能量$E^{(\ell,r)}$下的局域熵值；这些值可拟合为 $S^{(\ell,r)}$ 关于$E^{(\ell,r)}$ 的对数依赖关系（这一函数依赖关系由前文所述的先验等概率原理所蕴含）。随后，局域逆温度 $1/T^{(\ell,r)}$ 可由 $S^{(\ell,r)}(E^{(\ell,r)})$对能量求导得到。

如图 3 (a) 所示，从动力学过程中提取的平衡能量 $E^{(\ell,r)}$ 若要符合热平衡的标准定义，就必须对应于相同的温度 $T^{(\ell)} = T^{(r)}$，该温度由 $S^{(\ell,r)}$ [1, 25, 28] 推断得出。图 4证实了这一点，但存在有限误差范围，这可能是因为在有限激发能量下，所涉及粒子的波长有限。图中显示，剩余绝对温度偏差 $\Delta T_{\mathrm{abs}} = |T^{(\ell)} - T^{(r)}|$以及相对温度偏差 $\Delta T_{\mathrm{rel}} = \Delta T_{\mathrm{abs}}/T_{\mathrm{mean}}$（其中 $T_{\mathrm{mean}} = (T^{(\ell)} + T^{(r)})/2$）确实会随能量 $E = \epsilon^{(\ell)}_{\mathrm{m}_0} + \epsilon^{(r)}_{\mathrm{n}_0}$ 增加而系统性减小。然而，当 $E\mathcal{L}^2 \geq 150$ 时，这种减小趋于饱和；我们将其归因于较高本征能量下数值收敛性变差。

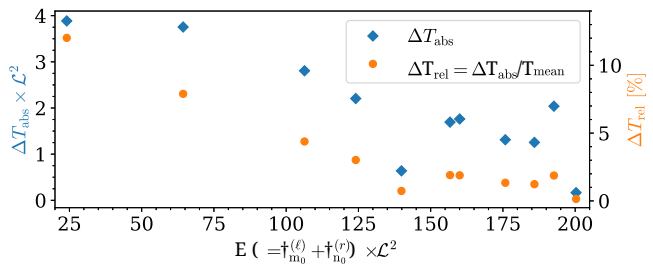

图4. 绝对的， $\Delta T_{\rm abs}$，以及相对的， $\Delta T_{\rm rel}$，右侧与左侧粒子平衡温度之间的偏差 $T^{(\ell,r)}$ (其中 $k_B \equiv 1$)，根据 $S^{(\ell,r)}$的能量导数推断得出，针对初始态 $|\Psi_0\rangle = |\epsilon_{m_0}^{(\ell)}, \epsilon_{n_0}^{(r)}\rangle$ 按照两项标准选取： (i) 初始能量失配较大，即 $\epsilon_{m_0}^{(\ell)} \gg \epsilon_{n_0}^{(r)}$ (反之亦然)，以及 (ii) 最终能量失配较小，即 $E^{(\ell)} \approx E^{(r)}$。 $\Delta T_{\rm abs}$ 和 $\Delta T_{\rm rel}$ 初始时均随能量 $\overline{E} = \overline{\epsilon_{m_0}^{(\ell)}} + \epsilon_{n_0}^{(r)}$增加而明显下降，这与接近短波长极限时的预期一致。对于 $E\mathcal{L}^2 \geq 150$ ，其饱和归因于本征能量的有限数值误差 [18]。

五、结论

对于此处考虑的教科书式示例（其中相互作用粒子的激发谱为非—平凡的输入），我们得以一致地定义平衡态变量 P， T 和 S，从而确保第一定律。通过开启左、右粒子之间的相互作用项（见（2））来解除热隔离，相当于放宽一项约束，因此双粒子系统的微观态数在平衡化过程中增加，这意味着第二定律成立。平衡化过程中，相互作用能本身仅有微小涨落；随着总能量增加，它变得可以忽略，因为其平均值不会随能量增加。功可按照平衡热力学中的定义，直接根据单粒子能级速度来定义为 $\delta W = -PdA$，其中 P 由（1）给出；热量则定义为 $\delta Q = TdS$，其中 S 的能量依赖关系如（4）所定义（通过 $\rho_{jj}^{(\ell,r)}$ 的能量依赖关系），它是基本量。

致谢

我们感谢 Jonathan Brugger 开发了本文用于生成数值结果的有限元代码原始版本；感谢 Gabriel Dufour（G.D.）在项目早期进行的有益讨论；并感谢 G.D.、Cord A. Müller 和 Benoît Zumer 对稿件提出的批评性意见。M.B. 感谢 Georg H. Endress Stiftung 提供经费和支持。

[1] A. Sommerfeld，《热力学与统计学》（Harri Deutsch，1989）。[2] C. Kittel 和 H. Krömer，《热物理学》（R. Oldenbourg Verlag，1984）。[3] B.-G. Englert，《统计力学讲义》（World Scientific，2020）。[4] J. Gemmer、M. Michel 和 G. Mahler，《量子热力学》（Springer，2009）。[5] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，《开放量子系统理论》（Oxford University Press，2002）。[6] C. Cohen-Tannoudji、J. Dupont-Roc 和 G. Grynberg，《光子与原子相互作用过程》（In- terEditions，1996）。[7] M. Rigol、V. Dunjko 和 M. Olshanii，《自然》452，1038（2008）。[8] F. Evers、I. Modak 和 S. Bera，物理评论B 108，134204 2023( )。[9] Q. Hummel、K. Richter 和 P. Schlagheck，物理评论快报 130，250402（2023）。[10] D. J. Papoular 和 B. Zumer，物理评论A 107，022217（2023）。[11] B. Evrard、A. Pizzi、S. I. Mistakidis 和 C. B. Dag，物理评论B 110，144302（2024）。[12] Z. Lu、A. M. Graf、E. J. Heller、J. Keski-Rahkonen 和 C. B. Dag，物理评论A 112，043307（2025）。[13] P. C. Burke 和 M. Haque，物理评论E 107，034125（2023）。[14] J. Brugger，《一维少体量子系统的精确动力学》，博士论文，阿尔伯特-路德维希-弗莱堡大学（2024）。[15] C. Wulf，《压力的微观模型》，理学学士论文，弗赖堡阿尔贝特-路德维希大学（2024）。[16] A. Kantz，《单粒子量子系统中的玻意耳定律》，理学学士论文，弗赖堡阿尔贝特-路德维希大学（2025）。[17] H.-P. Weber，《平衡化的微观模型》，理学硕士论文，弗赖堡阿尔贝特-路德维希大学（2025）。[18] U. Holm，《孤立双体量子系统中的弛豫动力学》，理学硕士论文，弗赖堡阿尔贝特-路德维希大学（2025）。[19] 这与许多教科书所暗示的观点相反，例如参见 [2, 25]! [20] Y. G. Sinai，《俄罗斯数学综述》25，137（1970）。[21] M. V. Berry，《物理学杂志A：数学与综合》10，2083（1977）。[22] S. W. McDonald 和 A. N. Kaufman，《物理评论A》37，3067（1988）。[23] J. M. Deutsch，《物理评论A》43，2046（1991）。[24] M. Srednicki，《物理评论E》50，888（1994）。[25] M. Bartelmann、B. Feuerbacher、T. Krüger、D. Lüst、A. Rebhan 和 A. Wipf，《理论物理学》（施普林格，2015）。[26] H. Hellmann，《量子化学导论》（Franz Deuticke Verlag，1937）。[27] R. P. Feynman，《物理评论》56，340（1939）。[28] L. Reichl，《统计物理学现代教程》（Edward Arnold LTD，1987）。

[29] 多重指标 $\mathbf{m}_0$,$\mathbf{n}_0$ 各自都是由正整数构成的元组，这些量子数表示相应本征态在 x-方向和 y-方向上的激发，分别tively.[30] 对于 $H_{2\mathrm{p}}$的固定参数，当改变定义 $|\Psi_0\rangle = |\epsilon^{(\ell)}_{\mathbf{m}_0}, \epsilon^{(r)}_{\mathbf{n}_0}\rangle$的初始局域能量时，只需重新计算权重 $|\langle\Psi_0|E_j\rangle|^2$。