arXiv:2602.03281v2 [physics.app-ph] 4 Feb 2026

复杂介质中波速分布的基于物理的学习。

Baptiste H´eriard-Dubreuil[1,*], Emma Brenner[1,3], Benjamin Rio[1], William Lambert[3], Foucauld Chamming's[2], MathiasFink[1], AlexandreAubry[1,*]

[1]Langevin研究所，ESPCI，PSL大学，法国国家科学研究中心，巴黎，法国。[2]SuperSonic Imagine公司，艾克斯-普罗旺斯，法国。[2]波尔多贝尔戈涅研究所，法国。

[*]通讯作者。电子邮箱：baptiste.heriard-dubreuil@espci.fr，alexandre.aubry@espci.fr

波速是复杂介质成像的关键参数，但体内测量通常仅限于反射几何，只能获取短尺度非均匀性产生的背向散射波。因此，传统反射成像无法恢复波速分布的大尺度变化。本文表明，矩阵成像利用波聚焦质量作为内禀导星，克服了这一局限。我们将波传播建模为可训练多层网络，借助优化和深度学习工具推断波速分布。我们通过对组织仿体和人体乳腺组织开展超声实验验证了这一方法，展示了其在肿瘤检测和表征方面的潜力。我们的方法广泛适用于任何能够测得反射矩阵的波和介质。

在波成像中，目标是通过主动探测未知介质并记录其内部非均质性产生的散射波，对其进行表征。波速的大尺度变化会导致波前畸变，在透射几何构型中可利用这些畸变重建速度分布，正如光学（*1*）、超声（*2*）中的衍射层析成像以及

地震学（*3*）中的相关方法。相比之下，大多数体内或原位应用采用反射方式，只能获取由短尺度非均匀性产生的后向散射回波。在此类表面检测配置中，记录的信号主要编码反射率而非波速，因此生成的图像仅对物体空间频谱中有限的一部分进行采样，属于定性图像（*4*）。

从反射数据中恢复波速的大尺度变化并非易事，通常需要超越单次散射（Born）近似，并利用多重散射（*5,6, 7*）。这一挑战推动了全波形反演（*8*）、非线性重建技术（*9, 10,11*）和基于学习的方法（*12, 13*）的发展。尽管这些方法功能强大，但往往计算开销大、对模型失配敏感，且容易出现收敛问题，这限制了它们的稳健性和实际应用价值。

在此，我们采用一种基于反射矩阵成像（*14, 15,16*）的、更具物理依据的方法。传统反射成像依靠在每个点进行共焦聚焦，以提取局部反射率。相比之下，矩阵成像将发射焦点与接收焦点解耦（*17*），从而得到一个聚焦反射矩阵，其中编码了直接在介质内部合成的虚拟换能器之间的串扰。这种表征能够揭示波聚焦本身的质量，进而反映传播过程中累积的波前畸变（*17,18,16*）。这些畸变源于真实波速分布与用于聚焦的背景模型之间的差异。先前研究已表明，可以通过反演这类畸变来估计速度图，但通常依赖直射线传播（*19,20*）或简化几何结构（*21,22*）等严格假设。

在这项工作中，我们提出了一种基于学习的矩阵成像方法，将波聚焦质量用作内禀导星。我们将波传播建模为一种可微多层前向模型，该模型基于级联衍射相位屏（*23,24*），并与自由空间传播（*25,26*）交替进行。这种表述使我们能够采用基于梯度的优化，仅凭反射数据迭代恢复波速分布。我们通过在组织模拟体模、离体组织和人体乳腺数据上进行超声实验验证了这一方法，展示了在反射几何下进行定量声速成像的能力。所提出的框架具有通用性，可应用于任何能够测量反射矩阵的波模态。

矩阵成像：一种灵活多用的框架

矩阵成像首先通过依次向介质中发射入射波前，并在传感器阵列上记录后向散射信号，来采集反射矩阵（材料与方法，图 1A）。测得的数据构成一个随时间变化的反射矩阵 $\boldsymbol{R_{io}}(t) = [\mathrm{R}(\mathbf{u}_{\mathrm{in}}, \mathbf{u}_{\mathrm{out}}, t)],$，其元素编码了各发射源/接收器对之间的脉冲响应，这些发射源/接收器对由其位置 $\mathbf{u}_{\mathrm{in/out}}$ 标识。在单次后向散射近似下，该矩阵可在频域中表示为对介质反射率$\gamma(\mathbf{r})$的积分，并与格林函数 $\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, f)$ 卷积；这些格林函数描述波在大尺度速度分布中的传播：

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_{\mathrm{in}}, \mathbf{u}_{\mathrm{out}}, f) = \int d\mathbf{r}\, \mathcal{G}(\mathbf{u}_{\mathrm{in}}, \mathbf{r}, f)\gamma(\mathbf{r})\mathcal{G}(\mathbf{u}_{\mathrm{out}}, \mathbf{r}, f). \tag{1}$$

为生成图像，我们根据试探速度分布 $c(\boldsymbol{r})$ 的估计值，在深度处对记录的信号进行数值聚焦，所用的格林矩阵估计为 $\boldsymbol{T_{xi/o}}(z, f; c) = [\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, z, f; c)],$：

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{xx}}(z; c) = \sum_{f} \boldsymbol{T}^{*}_{\boldsymbol{xi}}(z, f; c) \times \boldsymbol{R_{io}}(f) \times \boldsymbol{T}^{\dagger}_{\boldsymbol{xo}}(z, f; c). \tag{2}$$

符号 $\times$、$*$ 和 † 分别表示矩阵乘积、共轭和共轭转置。该操作得到聚焦反射矩阵 $\boldsymbol{R_{xx}}(z; c)$（图 1D），其对角元素对应于通常用于估计反射率的共焦信号（图 1E）。重要的是，这些矩阵的非对角结构提供了额外信息：后向散射能量从对角线向外扩散，直接反映了速度失配引起的波前畸变。

这一特性使我们能够定义一个聚焦质量指标，用于量化各深度处数值聚焦的效率。具体而言，我们计算 $\boldsymbol{R_{xx}}(z; c)$ 中平均共焦能量与后向散射总能量之比 F（图 1F）：

$$\mathcal{F}(c) = \left\langle \frac{|\overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, z; c)|^2}{\sum_{\boldsymbol{x'}} |\overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x}, z; c)|^2} \right\rangle_{\boldsymbol{x}, z}. \tag{3}$$

符号 $\cdots$ 表示对下标中的变量取平均。这个无量纲量是模型适用性的一个具有物理意义的指标：当速度模型与真实介质相符时，聚焦效果最佳，该指标也达到最大值。

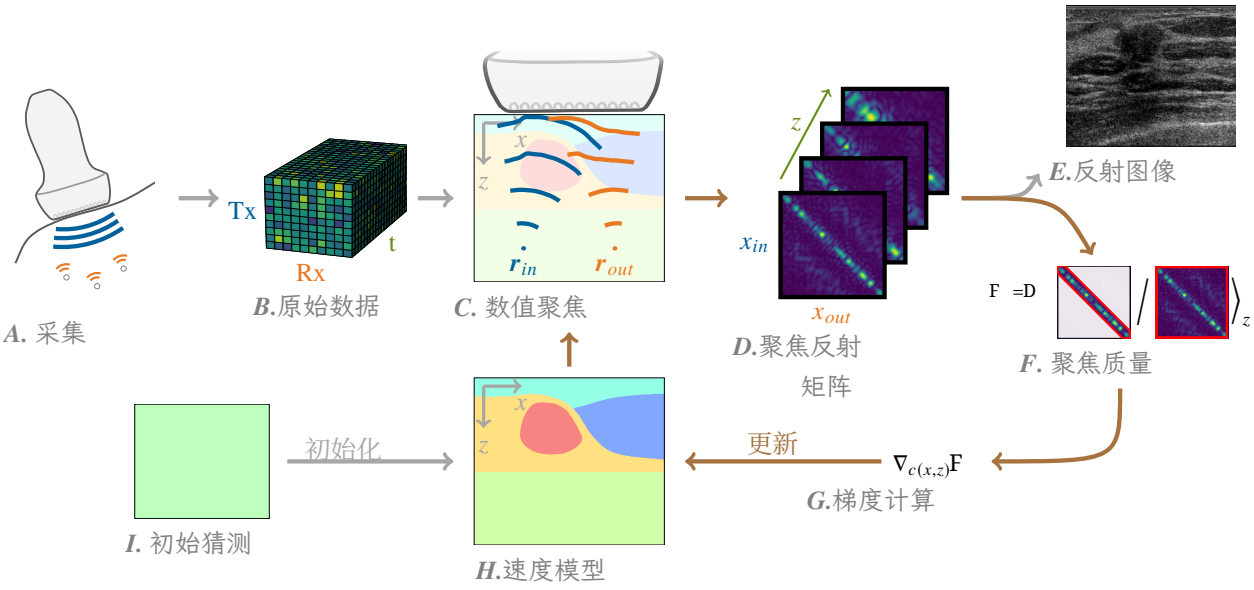

图1： **差分矩阵成像。(A)** 使用超声探头进行超声采集。**(B)** 原始数据收集在一个三维张量中，按发射（Tx）、接收（Rx）和时间（t）索引。**(C)** 数值聚焦算法根据速度模型**(H)**，将信号聚焦于发射端的点 r_{in} 和接收端的点 r_{out}。**(D)** 对不同深度和横向位置重复此操作，即可得到聚焦反射矩阵。根据这些矩阵，我们可以得到**(E)**反射图像，或**(F)** 聚焦质量，其计算方法是将对角线上的能量取平均值，再除以反射矩阵的总能量。**(G)** 随后计算聚焦质量相对于速度模型的梯度，并通过梯度上升方案更新当前速度模型。**(I)** 启动优化过程需要一个速度模型的初始猜测（通常选择均匀模型）。

结合波动物理学与优化

我们不对速度模型进行穷举搜索，而是利用聚焦过程的可微性，针对速度分布对聚焦质量进行梯度上升（图 1 中的棕色循环）。为此，我们可以使用链式法则计算其导数：

$$\nabla_c \mathcal{F}(c) = \sum_z \frac{\partial \mathcal{F}(c)}{\partial \overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{xx}}(z;c)} \cdot \frac{\partial \overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{xx}}(z;c)}{\partial c}. \tag{4}$$

该导数指出了更新速度图后聚焦质量增幅最大的方向。这种表述将波速估计转化为一个由内在的、数据驱动的损失函数引导的优化问题，无需获取透射测量数据，也不需要短尺度无序的先验知识。

梯度上升框架具有很高的灵活性，因为图 1 中的每个模块都可以由任意全可微算子实现。这使得我们能够采用考虑折射、衍射和前向多重散射的先进聚焦策略。本文采用基于地球物理学中使用的分步傅里叶法的前向模型（*25,26*），该方法在光学中也称为光束传播方法（*27*）（材料与方法）。波传播被描述为一系列衍射相位屏，用于刻画横向折射率涨落，$\delta n(x,z) = n(x,z) - \bar{n}(z)$；这些相位屏之间穿插着由横向平均折射率 $\bar{n}(z) = n(x,z)_x$ 控制的自由空间传播（图 2），其中 $n(x,z) = c_0/c(x,z)$。

得益于这种架构，我们的方法实际上可以重新表述为一个自监督学习问题。一方面，聚焦质量函数发挥着损失函数的作用；另一方面，数值聚焦过程可以表示为由一系列基本运算构成的多层网络，这些运算类似于神经层。网络权重由衍射决定，而激活函数则由局部波速参数化。因此，我们可以受益于专为实现和训练深度神经网络而开发的工具。这些工具包括自动微分语言（例如 PyTorch（*28*）、JAX（*29*）），旨在支持基于梯度下降的神经网络训练。这类语言将 Python 高效的原型开发能力与内置的优化功能、自动微分和基于 GPU 的加速相结合。

为涵盖广泛的非均匀介质，我们使用大量相位屏

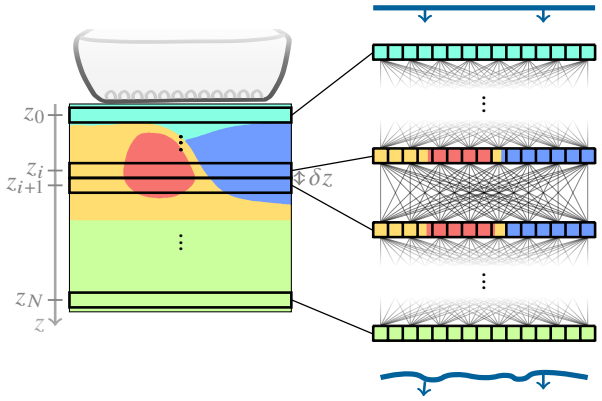

图 2：**作为前向模型的多层网络**。入射波和反射波的传播被建模为一系列衍射相位屏 $\exp\left[j2\pi f \delta n(x, z_i)\delta z/c_0\right]$，以及均匀层中厚度为 δz、折射率为$\bar{n}(z_i)$的自由空间算子 $\mathbf{T}(\delta z, f; c_0/\bar{n}(z_i))$。这一前向模型呈多层网络的形式。

（通常每个波长一个），并同时对它们全部进行优化。由此产生的高维问题是病态且强非线性的，会引发若干收敛问题。我们借助全变分正则化（*30*）、空间滤波、变量分裂和拉格朗日松弛等优化技术来克服这些挑战（见材料与方法）。整个后处理流程（材料与方法）和超参数（表 S1）均已通过补充文本中所述的数值模拟进行调优和验证。

聚焦质量作为导星

超声成像为展示我们的方法提供了一个便捷且灵活的平台。使用换能器阵列，只需发射宽带脉冲并以波长尺度空间采样记录反射波场，即可轻松测量反射矩阵（图 1A；材料与方法）。软生物组织尤其适用于这一框架，因为它们兼具随机分布的未分辨散射体，以及脂肪、皮肤和肌肉等不同组织类型之间显著的声速变化（*31*）。

作为概念验证，我们将该方法应用于一项二维体外实验的公开超声数据（*32*）（图 3A）。组织模拟体模产生随机散斑，并包含浅层声速夹杂物（$z \sim 10$ 毫米）、深部无回声区域（$z \sim 40$毫米）以及中等深度

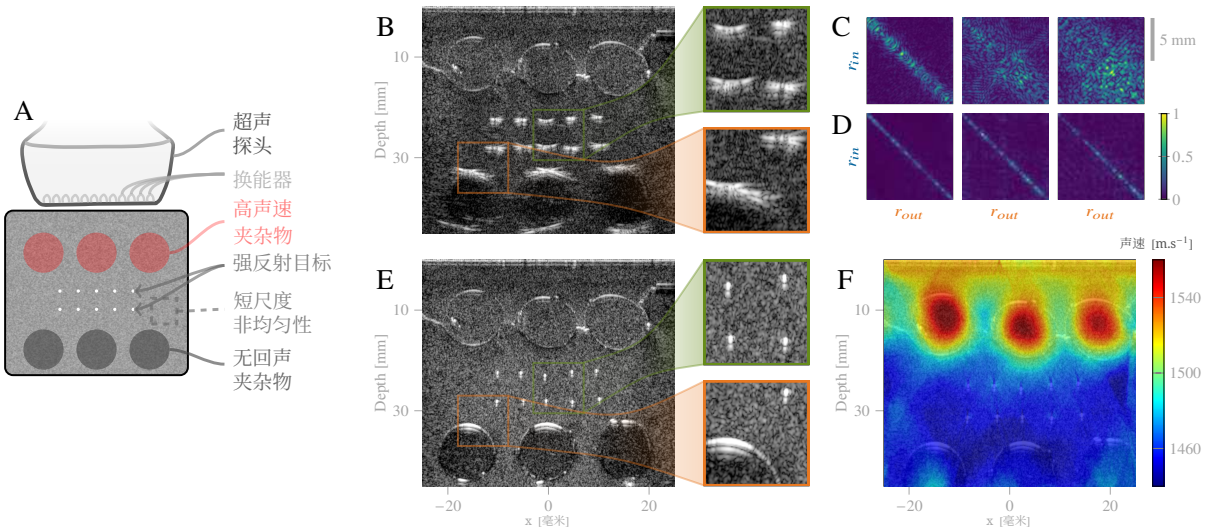

图3： 二维体外 **超声像差校正和声速成像实验-**

实验。 数据取自（*32*）。（**A**）在（*32*）中进行的实验：将超声探头放置在一个含有声速夹杂物的自制组织模拟体模顶部。（**B**）采用均匀声速假设 $c = 1480$ m.s^{-1} 得到的像差反射图像。右侧展示了两个放大区域。黑白标度的动态范围为 50 分贝。（**C**）初始化时获得的聚焦反射矩阵示例，以及（**D**）收敛时在 20 毫米、30 毫米和 40 毫米深度处获得的聚焦反射矩阵示例，均按其最大值归一化。（**E**）收敛时获得的校正反射图像，使用 F 面板所示的声速图（见影片 S1）。（**F**）获得的声速图（叠加在校正后的反射图像上），按以 m.s^{-1} 表示的声速进行颜色编码。

尼龙棒充当点散射体。采用均匀声速（c_0 = 1480 m.s^{-1}）进行常规波束形成的图像如图 3B 所示。

声速非均匀性会诱发强烈像差，表现为点反射体畸变和无回声界面变形，以及聚焦反射矩阵随深度逐渐向非对角线方向扩展（图 3C）。这一行为可由聚焦质量指标 F（c）（式 3）定量刻画，并用于推导差分矩阵成像（DMI）优化（图 1）。所得声速图（图 3F）准确恢复了预期结构，分辨良好的包涵体呈现出 ~100 m.s^{-1} 的对比度，优于以往方法（*20,33*）。

校正后，反射矩阵收缩到其对角线上（图 3D），表明实现了衍射极限聚焦。相应的共焦图像（图 3E）分辨出各个点状散射体，并恢复了无回声区域的圆形几何形状，证明了优化声速模型对反射率成像的益处。

从二维到三维离体成像

为展示我们的方法框架向三维成像的拓展，我们将该方法应用于一项三维体外实验（*16*）。矩阵换能器阵列对置于一层由脂肪和肌肉组成的猪组织后方的组织模拟体模进行成像（图 4 ）。常规超声图像无法区分这些层（图 4B，影片 S2 ），而覆盖其上的组织则充当了强像差体。提取自 $\boldsymbol{R_{xx}}(z)$ 反对角线的反射点扩散函数（反射点扩散函数）揭示了这一效应（图 4C）：畸变的共焦峰叠加在由多重散射产生的弥散背景之上。这些畸变同样反映在聚焦度量 F（c）中。

我们将 DMI 优化应用于相应的开放获取数据集（*34*）。为处理庞大的数据量，我们在梯度计算过程中对前向模型进行因式分解，并对频率分量进行批处理（材料与方法）。收敛后的三维声速图（图 4D）清晰地区分了脂肪（c ~ 1520 m.s^{-1}）和肌肉（c ~ 1560 m.s^{-1}）。它与猪组织层中肌肉和脂肪的分布完全吻合。水平切片（图 4E）突显了横向分辨率，以及在超过 z = 15 毫米深度处重建速度的均匀性。

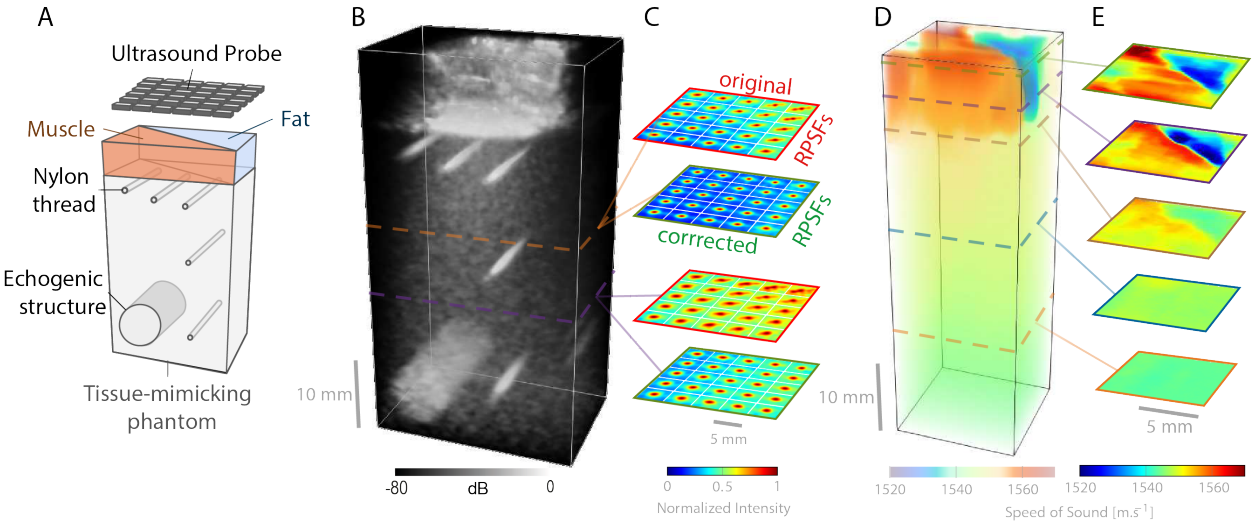

图4：声速成　　像对离体组织的三维配置进行成像。实验

在（*16*）中，使用 1024阵元矩阵探头穿过肌肉和脂肪对组织仿体进行成像。数据可在（*34*）获取。（**A**）（*16*）中所进行实验的示意图。（**B**）利用**D**中显示的三维声速图校正后得到的反射图像。（**C**）对于深度为 z =30 毫米和 40 毫米处，利用聚焦反射矩阵估算的焦点示例：初始化时（红色）和校正后（绿色）。（**D**）获得的三维声速图，按声速（单位：$\mathrm{m.s^{-1}}$）进行颜色编码。（**E**）三维声速图在 5 毫米、10 毫米、15 毫米、30 毫米和 45 毫米处的水平切片。声速以 $\mathrm{m.s^{-1}}$ 为单位显示。

利用优化声速模型进行校正后，恢复了衍射极限共焦焦点（图 4C），与弥散背景相比，对比度有所提高。然而，多重散射残差仍然存在，这凸显了当前前向模型的局限性。尽管多层网络能够捕捉与长程声速波动相关的前向多重散射效应，但无法考虑短尺度非均匀性引发的更复杂路径。若要处理这些效应，则需要更先进的模型，例如 Born 级数方法（*7*），但这会增加对收敛和局部极小值的敏感性。

迈向体内应用

超声成像是一种无创、便携、实时且经济高效的成像方式，广泛应用于临床实践，包括乳腺病变的检测与表征。然而，常规——

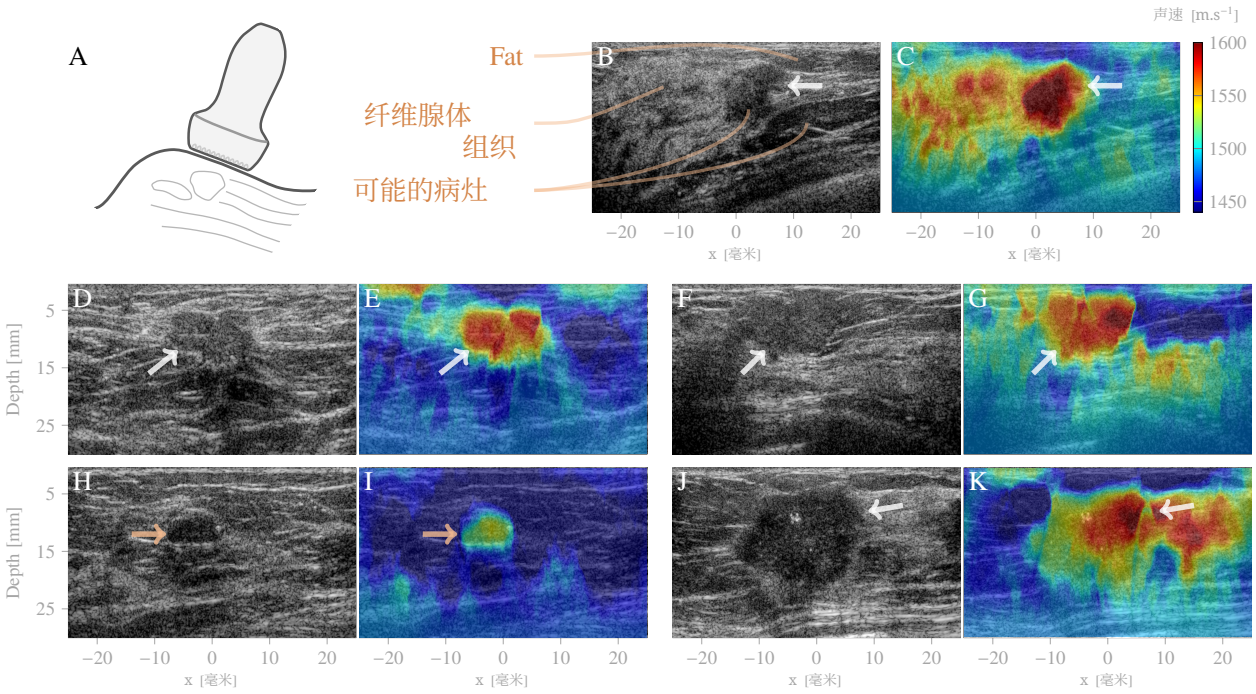

图5：声速成像应用于乳腺超声。（A）的示意图

采集时，超声探头置于乳腺组织表面。（**B**、**D**、**F**、**H**、**J**）校正后的反射图像示例（与初始图像的比较见补充影片 S3-S7）。黑白标度的动态范围为 55 分贝。（**C**、**E**、**G**、**I**、**K**）估算的声速图叠加在对应的反射图像上。声速图以颜色编码，范围从 1420 $m.s^{-1}$（蓝色）到 1600 $m.s^{-1}$（红色）。白色箭头在每幅图中标示浸润性癌（恶性），橙色箭头标示良性肿块。

tional B型图像主要提供定性信息，需要专家判读。尽管已引入剪切波速度等定量超声指标（*35*），但其临床应用仍受硬件复杂性、分辨率限制和操作者依赖性的制约。

在这一背景下，纵波速度是用于组织表征（例如乳腺病变评估）的一个很有前景的参数（*33,36*）。我们对在法国波尔多 Institut Bergoni´e 进行常规乳腺超声检查期间采集的匿名数据进行了回顾性分析。图 5 展示了具有代表性的 B型图像，以及通过 DMI 获得的对应声速图。在所有病例中，重建得到的波速分布都与解剖结构高度吻合

特征，并能够清晰地区分不同组织类型。脂肪的声速较低（~ 1450m.s^{-1}），良性肿块和纤维腺体组织的声速处于中间水平（分别为 ~ 1525m.s^{-1} 和 ~ 1550m.s^{-1}），而恶性肿块的声速则明显更高（~ 1585 m.s^{-1}；白色箭头）。重要的是，与单独使用 B模式成像相比，声速对比度有助于更好地鉴别病灶；如图所示，在 B模式图像中无法区分的无回声区域（图 5B），可根据其波速加以区分（图 5C）。

此外，通过补偿像差，所得声速图显示出明亮的点状散射体（影片 S7），它们对应于反射图像中的微钙化（图 5J）。作为乳腺癌的前兆，这些结构对临床诊断至关重要；然而，由于波速变化引起的像差，它们在常规超声中往往难以检测到。

这些发现为 DMI 在临床条件下用于乳腺病灶检测和评估提供了有希望的初步验证。还需开展前瞻性研究，以确立声速作为肿瘤表征可靠生物标志物的地位。如果这一方法得到证实，便可通过减少不必要的活检和假阴性结果，支持超声辅助乳腺癌诊断。

更广泛地说，声速是一种用途广泛的生物标志物，可用于多种应用，包括肝病评估（*37,38*）和无损检测（*39*）。由于声速反映了组织成分、力学性质以及温度或压力等强度参数，声速成像可作为一种通用的定量探针，用于监测生物和物理系统。

讨论

本研究表明，基于学习的波传播表述为复杂介质中的定量成像提供了一个强大且通用的框架。我们将波成像构建为一个由具有物理意义的聚焦质量指标引导的优化问题，并将正向传播实现为多层可微模型，从而在统一框架中连接波动物理学与现代优化策略。我们的方法并非取代物理建模，而是将其嵌入学习过程的核心，使长期以来被认为是病态问题的反射几何定量成像成为可能。

从逆问题视角来看，本文提出的策略在概念上与地震学中的全波形反演（*8*）以及光学领域发展出的基于学习的重建技术（*9,12*）具有相似之处。这些方法依赖精确的正演模型，以及在测量空间中定义的数据保真损失，通常还需要关于介质、源或初始速度模型的详细先验知识。相比之下，我们的方法由根据数值聚焦质量本身构建的损失函数驱动。这一选择降低了对介质短尺度细节知识的需求，并使得能够直接从反射数据中进行速度估计。

本文考虑的前向模型采用多层相位屏表示，用于描述大尺度速度变化所引起的前向多重散射。只要穿透深度低于输运平均自由程，该近似便有效；在此范围内，波仍保有方向记忆。超出这一范围后，波传播会转为扩散，并涉及复杂的散射轨迹，例如光学显微镜中遇到的情况。将当前框架扩展到这一范围仍颇具挑战，但近期基于多层玻恩近似和修正玻恩级数的进展（*10,40*）为构建可处理的漫散射多重散射模型提供了有前景的途径。

DMI 提供了天然的可解释性，而这在纯数据驱动方法中往往缺失。它使我们能够识别重建过程的根本局限，并设计有针对性的缓解策略，例如共焦滤波或能够稳定收敛的正则化方案。同时，波传播的可微分形式使我们能够使用为深度学习开发的现代计算工具，包括自动微分、GPU 加速和可扩展优化算法。

DMI 的潜在应用范围远不止超声。在光学显微镜中，反射矩阵方法已证明其能够对深层生物组织进行成像（*14,18*）。由于散斑在这类介质中普遍存在，DMI 有望在落射检测中重建折射率分布。在地震学中，DMI 可实现对断层带或火山体等散射环境进行高分辨率速度层析成像（*41*），补充面波方法，并以史无前例的分辨率获取纵波和横波速度。

仍有若干挑战有待解决。考虑电磁波或弹性波的矢量性质会增加计算复杂度，但也能进一步获取其他物理

观测量，例如双折射（*42*）或弹性各向异性（*43*）。更广泛地说，波速只是支配波传播的众多参数之一。所提出框架具有灵活性，因此自然可以扩展到对其他材料性质的估计，包括声学中的密度和压缩率，或电磁学中的介电常数和磁导率。

总而言之，本研究确立了基于学习的矩阵成像这一统一范式，它兼具物理洞见、计算效率和实验可及性。通过利用反射矩阵和内禀聚焦度量，该范式为跨尺度、跨模态的定量波成像开辟了新途径，尤其适用于长期以来难以采用传统反演策略的情形。

参考文献与注释

1. E. Wolf，基于全息数据测定半透明物体的三维结构。 *Opt. Commun.* **1**，153–156（1969）。 2. A. Devaney，一种用于衍射层析成像的滤波反向传播算法。 *Ultrason. Imag-ing* **4**，336–350（1982）。 3. C. Thurber，J. Ritsema，理论与观测——地震层析成像与反演方法（爱思唯尔，2015），第307–337页。 4. A. Sentenac，J. Mertz，三维光学衍射显微术的统一描述：从透射显微术到光学相干层析成像：教程。 *J. Opt. Soc. Am. A***35**，748（2018）。 5. P. Mora，反演=迁移+断层成像（Springer Berlin Heidelberg，1989），第78–101页。 6. T. D. Weber，N. Khetan，R. Yang，J. Mertz，利用后向散射和记忆效应实现超声差分相位衬度。 *Appl. Phys. Lett.* **118**，124103（2021）。 7. T. Wasik，V. Barolle，A. Aubry，J. Garnier，利用多重散射实现光学反射层析成像。 *IEEE Trans.Comput.Imaging (to be published)*（2026年）。 8. J. Virieux，S. Operto，勘探地球物理学中的全波形反演概述。*Geophysics* **74**，WCC1–WCC26（2009）。 9. U. S. Kamilov，I. N. Papadopoulos，M. H. Shoreh，A. Goy，C. Vonesch，M. Unser，D. Psaltis，基于光束传播和稀疏正则化的光学断层成像重建。 *IEEETrans.Comput.Imag.***2**，59–70（2016）。 10. M. Chen，D. Ren，H.-Y. Liu，S. Chowdhury，L. Waller，用于三维相位显微术的多层 Born 多重散射模型。 *Optica* **7**，394–403（2020）。

11. T. Li, J.Zhu,Y. Shen, L. Tian，基于强度图像对反射基底上的多重散射样品进行反射模式衍射断层成像。*Optica* **12,** 406（2025年）。

12. U. S. Kamilov, I. N. Papadopoulos, M. H. Shoreh, A. Goy, C. Vonesch, M. Unser, D. Psaltis，光学断层成像的学习方法。*Optica* **2**, 517–522（2015）。

13. W. A. Simson, M. Paschali, V. Sideri-Lampretsa, N. Navab, J. J. Dahl，利用深度学习研究乳腺超声中的脉冲回波声速估计。*Ultrasonics***137**，107179（2024）。14. S. Yoon, M. Kim, M. Jang, Y. Choi, W. Choi, S. Kang, W. Choi，复杂散射介质中的深层光学成像。*Nat.Rev. Phys.* **2**，141–158（2020）。15. A. Badon, V. Barolle, K. Irsch, A. C. Boccara, M. Fink, A. Aubry，散射介质中深层光学成像的畸变矩阵概念。*Sci.Adv.* **6**, aay7170（2020）。

16. F. Bureau, J. Robin, A. Le Ber, W. Lambert, M. Fink, A. Aubry，三维超声矩阵成像。*Nat. Commun.* **14**，6793（2023）。

17. W. Lambert, L. A. Cobus, M. Couade, M. Fink, A. Aubry，《基于反射矩阵的散射介质定量成像》。*Phys. Rev.X* **10**，021048（2020年）。

18. U. Najar, V. Barolle, P. Balondrade, M. Fink, A. C. Boccara, M. Fink, A. Aubry, 利用前向多重散射实现不透明介质深处的光学成像。*Nat. Commun.***15**，7349（2024年）。

19. P. St¨ahli, M. Kuriakose, M. Frenz, M. Jaeger，用于定量脉冲回波声速成像的改进前向模型。*Ultrasonics***108**，106168（2020年）。

20. W. Simson, L. Zhuang, B. N. Frey, S. J. Sanabria, J. J. Dahl, D. Hyun，超声自动聚焦：通过可微波束形成优化公共中点相位误差。*IEEE Trans. Med.Imaging* （2025年）。

21. R. Ali, A. V. Telichko, H. Wang, U. K. Sukumar, J. G. Vilches-Moure, R. Paulmurugan, J. J. Dahl，《分层介质中脉冲回波超声的局部声速估计》。*IEEE Trans.Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **69**，500–511（2021）。

22. B. H´eriard-Dubreuil, A. Besson, F. Wintzenrieth, C. Cohen-Bacrie, J.-P. Thiran, 《基于折射的分层介质声速估计：一种角度法》。*IEEETrans. Ultrason.Ferroelectr. Freq. Control* **70**，486–497（2023）。23. S. Kang, Y. Kwon, H. Lee, S. Kim, J. H. Hong, S. Yoon, W. Choi, 《追踪散射介质中的多重散射路径以实现深层光学成像》。*Nat. Commun.* **14**，6871（2023）。24. O. Haim, J. Boger-Lombard, O. Katz, 《图像引导的计算全息波前整形》。《自然·光子学》**19**，44–53（2024）。25. R. H. Hardin, 《分步傅里叶法在非线性变系数波动方程数值求解中的应用》。*SiamRev.* **15**，423（1973）。26. P. L. Stoffa, J. T. Fokkema, R. M. De Luna Freire, W. P. Kessinger, 《分步傅里叶迁移》。*GEOPHYSICS* **55**，410–421（1990）。27. M. Feit, J. Fleck Jr, 《渐变折射率光纤中的光传播》。*Appl. Opt.***17**，3990–3998（1978）。28. A. Paszke, S. Gross, F. Massa, A. Lerer, J. Bradbury, G. Chanan, T. Killeen, Z. Lin, N. Gimelshein, L. Antiga，等，《PyTorch：一种命令式、高性能深度学习库》。*Adv. Neural Inf. Process. Syst.***32**（2019）。29. S. Schoenholz, E. D. Cubuk, 《JAX MD：一个用于可微物理的框架》。*Adv. NeuralInf.Process. Syst.* **33**，11428–11441（2020）。30. L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, 《基于非线性全变差的去噪算法》。*Phys. D: Nonlinear Phenom.* **60**，259–268（1992）。31. F. A. Duck, 《超声频率下组织的声学特性》（爱思唯尔，1990），第73–135页。32. R. Ali, T. M. Mitcham, M. Singh, M. M. Doyley, R. R. Bouchard, J. J. Dahl, N. Duric, 《横向变化介质中分布式像差校正的声速估计》。*I EEE Trans.Comput. Imaging* **9**，367–382（2023）。

33. D. Schweizer, M. Farkas, C. D. Bezek, A.Potempa, C. Leo, R. A. Kubik-Huch, O. Goksel，脉冲回波乳腺声速成像作为乳腺癌潜在生物标志物。《*Ultrasound Med. Biol.*》**51**, 1831-1839 (2025年)。

34. F. Bureau, J. Robin, A. Le Ber, W. Lambert, M.Fink, A. Aubry，三维超声矩阵成像 [数据集], Zenodo (2023)。

35. J.Bercoff, S. Chaffai, M.Tanter, L. Sandrin, S. Catheline,M. Fink, J. Gennisson, M.Meunier，使用瞬态弹性成像进行体内乳腺肿瘤检测。《*Ultrasound Med. Biol.*》**29**, 1387–1396 (2003)。

36. C. Li, N. Duric, P. Littrup, L. Huang，利用超声断层成像进行体内乳腺声速成像。《*Ultrasound Med. Biol.*》**35**, 1615–1628 (2009)。

37. M. Imbault、A. Faccinetto、B.-F. Osmanski、A. Tissier、T.Deffieux、J.-L.Gennisson、V.Vilgrain、M. Tanter，面向基于超声的肝脂肪变性评估的稳健声速估计。《*Phys. Med. Biol.*》**62**，3582（2017）。

38. P.St¨ahli、C. Becchetti、N. KortaMartiartu、A. Berzigotti、M. Frenz、M. Jaeger，采用回波模式计算超声断层成像的肝脂肪变性首次人体诊断研究。《*Co mmun. Med.*》**3**，176（2023）。

39. B. Lan、M. Lowe、F. Dunne，六方密排多晶中超声波传播的实验与计算研究：面向织构检测。《*Acta Materialia*》**63**，107–122（2014）。

40. G. Osnabrugge、S. Leedumrongwatthanakun、I. M. Vellekoop，用于求解任意大介质中非均匀亥姆霍兹方程的收敛 Born 级数。《*J. Comput. Phys.*》**322**，113–124（2016）。

41. E. Giraudat、A. Burtin、A. Le Ber、M. Fink、J.-C. Komorowski、A. Aubry，矩阵成像作为利用地震噪声对深部火山管道系统进行高分辨率监测的工具。《*Commun. Earth Environ.*》**5**，509（2024）。

42. M. Villiger、D. Lorenser、R. A. McLaughlin、B. C. Quirk、R. W. Kirk、B. E. Bouma、D. D. Sampson，通过光纤针探头对双折射进行深层组织体积成像，以勾画乳腺肿瘤。《科学报告》 **6**，28771（2016）。

43. S. I. Ranganathan, M. Ostoja-Starzewski，通用弹性各向异性指数。《物理评论快报》《物理评论快报》**101**，055504（2008）。

44. G. Montaldo, M. Tanter, J. Bercoff, N. Benech, M. Fink，相干平面波复合可实现超高帧率超声检查和瞬态弹性成像。《*IEEE*超声、铁电与频率控制汇刊》**56**，489–506（2009）。

45. P. Balondrade, V. Barolle, N. Guigui, E. Auriant, N. Rougier, C. Boccara, M. Fink, A. Aubry，用于超快三维无标记显微成像的多光谱反射矩阵。《自然·光子学》**18**, 1097–1104（2024）。

46. W. Simson, L. Zhuang, S. J. Sanabria, N. Antil, J. J. Dahl, D. Hyun，国际医学图像计算与计算机辅助介入会议（施普林格，2023），第428–437页。

47. B. H´eriard-Dubreuil, A. Besson, C. Cohen-Bacrie, J.-P. Thiran，《用于超声成像像差校正的基于路径的模型》。《IEEE医学影像汇刊》《*IEEE*医学影像汇刊》**44**, 3222-3232 (2025年)。

48. W. Lambert, L. A. Cobus, J. Robin, M. Fink, A. Aubry，《超声矩阵成像——第二部分：用于跨多个等晕区像差校正的畸变矩阵》。《IEEE医学影像汇刊》《*IEEE*医学影像汇刊》**41**, 3921–3938 (2022)。

49. R. Mallart, M. Fink，《通过声速不均匀性在散射介质中实现自适应聚焦：范·西特特-泽尼克方法与聚焦准则》。《美国声学学会杂志》《美国声学学会杂志》**96**, 3721–3732 (1994)。

50. J. Spainhour, K. Smart, S. Becker, N. Bottenus，《超声成像阵列编码的优化》。《Phys. Med. Biol.》《*Phys. Med. Biol.*》**69**, 125024 (2024)。

51. J. Garnier, L. Giovangigli, Q. Goepfert, P. Millien，探测散斑以估计有效声速，迈向定量超声成像的第一步。*arXiv*预印本 *arXiv:2505.07566* （2025年）。

52. U. S. Kamilov, C. A. Bouman, G. T. Buzzard, B. Wohlberg，在计算成像中融合物理模型与学习模型的即插即用方法：理论、算法与应用。*IEEE*《信号处理杂志》**40**，85–97（2023年）。

53. K. C. Tam、V. Perez-Mendez，利用有限角度输入进行断层成像。《美国光学学会杂志》**71**，582（1981）。

54. B. E. Treeby、B. T. Cox，k-Wave：用于光声波场仿真与重建的 Matlab工具箱。《生物医学光学杂志》**15**，021314–021314（2010）。

致谢

我们感谢 F. Bureau 就该方法及其应用开展富有成效的讨论，并提供三维实验的超声数据。我们还要感谢文献（*32*）的作者以开放获取方式发表了用于二维体外实验的实验超声数据。

资金支持： 作者感谢 Labex WIFI（法国未来投资计划旗下的卓越实验室; ANR-10-LABX-24 和 ANR- 10-IDEX-0001-02 PSL*）提供的资助。本项目还获得了欧盟地平线2020研究与创新计划下欧洲研究委员会（ERC）的资助（资助协议编号：610110, REMINISCENCE 项目，A.A.）。E.B. 感谢 SuperSonic Imagine 公司提供的资金支持。

作者贡献： B.H.-D. 和 A.A. 发起了该项目。B.H.-D. 和 A.A. 构思了该方法。B.H.-D. 和 A.A. 建立了理论背景。E.B. 开发了分步傅里叶法的实现。B.H.-D. 实现了差分矩阵成像过程。F.C. 开展了临床实验。E.B. 和 W.L. 收集并处理了临床超声数据。B.R. 将该方法调整为适用于此配置。B.H.-D. 和 A.A. 撰写了稿件。B.H.-D.、E.B.、B.R.、W.L.、F.C.、M.F. 和 A.A. 参与了结果讨论和稿件撰写。

利益冲突：B.H.-D.、M.F.和A.A.是与本研究相关专利（编号 FR2510672，于2025年9月提交）的发明人。E.B.和W.L.曾受雇于SuperSonic Imagine公司。所有作者均声明不存在其他利益冲突。

数据和材料可用性：三维超声数据可在Zenodo获取（https://doi.org/10.5281/zenodo.8159177）。

补充材料

材料与方法 补充文
本

图 S1 至 S3 表 S1 影片
S1 至 S7 的说明 参考文献
影片 S1 至 S7

补充材料

复杂介质中波速分布的基于物理的学习。

Baptiste H´eriard-Dubreuil*、Emma Brenner、Benjamin Rio、William Lambert、Foucauld Chamming's、Mathias Fink、Alexandre Aubry*

*通讯作者。电子邮箱：baptiste.heriard-dubreuil@espci.fr、alexandre.aubry@espci.fr

此 PDF 文件包含：

材料与方法 补充文本 图
S1 至 S3 表 S1 影片 S1 至
S7 的说明 参考文献

材料与方法

在本节中，我们详细描述图1所呈现的方法，重点介绍矩阵成像框架、所选的数值聚焦算法（分步傅里叶方法）、梯度实现、优化技术，以及对应于图3至图5的三项实验所使用的参数。

以下理论推导将针对超声成像的情形进行，但也可像此前矩阵成像那样，适用于其他反射波成像配置。

矩阵成像、数值聚焦与聚焦质量

为进行超声采集，超声探头向感兴趣的介质发射一组入射波（$\boldsymbol{i}$）。对于每次发射，时变的后向散射波场$\mathrm{R}\,(\boldsymbol{i}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{o}_{\mathrm{out}}, t)$在接收基（$\boldsymbol{o}$）中被记录。所有记录到的波场都存储在反射矩阵$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{io}}(t) = [\mathrm{R}\,(\boldsymbol{i}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{o}_{\mathrm{out}}, t)]$中。最简单的采集序列是每次仅用一个阵元发射，并在每次发射时用所有阵元记录从介质反射回来的时变场。在这种情况下，反射矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{uu}}(t)$因此是在换能器基（$\boldsymbol{u}$）中记录的，其元素$\mathrm{R}\,(\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{out}}, t)$对应于各换能器之间的脉冲响应。这一典范基正是后文所述数值模拟以及体外实验（*32*）中所使用的基，该实验的超声数据集已被用于配套论文所述的首次实验概念验证（图 3）。或者，也可利用波束形成来采集反射矩阵（所有阵元协同发射和/或接收，并对每个阵元施加适当的时间延迟），例如形成传统B模式中的聚焦波束，或形成入射角为 α 、用于高帧率成像的平面波（*44*）。该平面波基（$\boldsymbol{\alpha}$）实际上被用作发射基（$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\alpha}$），用以记录配套论文中所处理的体内乳腺数据（图 5）对应的反射矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\alpha u}}(t)$。

为了在介质中的给定点对采集到的信号进行数值聚焦，常规成像技术会对发射波和接收波的传播进行建模，并将其时间反演对应项应用于反射矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{io}}(t)$。在波动物理学的不同领域中，这种操作称为时间反演、反投影、伴随成像或迁移。本文中，这一

聚焦操作是在频域中进行的，方法是考虑传输矩阵$\boldsymbol{T_{ri}}(\ f;\ c)\ =[\mathrm{T}\ (\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}},\ \ \boldsymbol{i}_{\mathrm{in}},\ \ f;\ c)]$。该矩阵在每个频率 f下，依据速度模型c，将发射基（$\boldsymbol{i}$）与聚焦基（$\boldsymbol{r}$）相连；聚焦基包含研究介质内部的一组聚焦点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}}$。对于波速模型 c，传输矩阵的每一列对应于每个发射波 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{in}}$ 在各点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}}$ 诱导的入射波场。

该传输矩阵取决于所选的传播模型，对数值聚焦过程至关重要。下一节将详细讨论采用高级传播模型（分步傅里叶法）时该矩阵的表达式。对于简单的均匀速度模型 $c(\boldsymbol{r})\ = c_0$ 对所有 $\boldsymbol{r}$均成立的情况，可根据均匀波动方程解析地求得其表达式。例如，对于位于位置 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}}$的点源发射，可得到二维波动方程的格林函数：

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{in}}, f; c_0) = -\frac{j}{4}\mathcal{H}_0^{(1)}\left(k_0|\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{in}}|\right), \tag{S1}$$

其中，$k_0 = 2\pi f/c_0$为波数，$\mathrm{H}_0^{(1)}(-)$为第一类汉克尔函数。类似地，对于传播角为 α_{in} 的二维平面波发射，有：

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}}, \alpha_{\mathrm{in}}, f; c_0) = \exp\left[jk_0\begin{pmatrix}\sin\alpha_{\mathrm{in}}\\ \cos\alpha_{\mathrm{in}}\end{pmatrix}\cdot \boldsymbol{r}_{in}\right], \tag{S2}$$

其中，$\cdot$表示标量积，$j = \sqrt{-1}$ 为单位虚数。与发射的情况类似，我们可以定义接收传输矩阵 $\boldsymbol{T_{ro}}(\ f;\ c)\ =[\mathrm{T}\ (\boldsymbol{r}_{\mathrm{out}},\ \ \boldsymbol{o}_{\mathrm{out}},\ \ f;\ c)],$，用于描述接收基 $(\boldsymbol{o})$ 与聚焦基 $(\boldsymbol{r})$ 之间的关系。

为执行数值聚焦，我们将发射响应 T 的时间反演对应项（即其在傅里叶域中的复共轭）与所采集反射矩阵的每个频率分量 $\mathrm{R}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{o}_{\mathrm{out}}, f)$ 相乘。对所有发射次数和接收次数求和，即可在后处理中执行发射与接收聚焦操作。对频率求和，相当于在由波速模型确定的回波时间处对后向散射信号进行时间门控。最终，对于任意位置 $\boldsymbol{r}$，我们得到反射（共焦）图像 $\mathrm{I}\ (\boldsymbol{r};\ c)$：

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{r}; c) = \sum_f \sum_{\substack{\boldsymbol{i}_{\mathrm{in}}\in\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{o}_{\mathrm{out}}\in\boldsymbol{o}}} \mathcal{T}^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i}_{in}, f; c)\mathcal{R}(\boldsymbol{i}_{in}, \boldsymbol{o}_{out}, f)\mathcal{T}^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{o}_{out}, f; c). \tag{S3}$$

其中，符号 $*$表示相位共轭。

矩阵成像框架超越了传统的共焦成像，因为它将发射和接收中的聚焦点分离开来。在实践中，这意味着在传输函数 T 中考虑不同的焦点$\boldsymbol{r}_{in}$ 和 $\boldsymbol{r}_{out}$：

$$\overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{r}_{in},\boldsymbol{r}_{out};c)=\sum_{f}\sum_{\substack{\boldsymbol{i}_{in}\in\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{o}_{out}\in\boldsymbol{o}}}\mathcal{T}^{*}(\boldsymbol{r}_{in},\boldsymbol{i}_{in},f;c)\mathcal{R}(\boldsymbol{i}_{in},\boldsymbol{o}_{out},f)\mathcal{T}^{*}(\boldsymbol{r}_{out},\boldsymbol{o}_{out},f;c), \tag{S4}$$

或者，用矩阵形式表示，

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{rr}}(c)=\sum_{f}\boldsymbol{T}^{*}_{\boldsymbol{ri}}(f;c)\times\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{io}}(f)\times\boldsymbol{T}^{\dagger}_{\boldsymbol{ro}}(f;c). \tag{S5}$$

其中 † 表示厄米转置运算，×表示矩阵乘积。时间门控聚焦反射矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{rr}}=[\mathrm{R}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}},\ \boldsymbol{r}_{\mathrm{out}};c)]$ 包含发射和接收聚焦点之间的串扰，这些聚焦点分别充当虚拟声源 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}}$ 和接收器 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{out}}$。当发射和接收焦点重合（$\boldsymbol{r}_{in}=\boldsymbol{r}_{out}$）时，我们便回到共焦图像 I。共焦图像实际上对应于 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{rr}}$的对角线系数：

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{r};c)=\overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r};c)=\mathrm{diag}\left(\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{rr}}(c)\right). \tag{S6}$$

实际上，我们可以将研究限制在位于相同深度 z的一对虚拟换能器 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{in}}=(\boldsymbol{x}_{\mathrm{in}},\ z)$ 和 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{out}}=(\boldsymbol{x}_{\mathrm{out}},\ z)$ 上。随后，可以在每个深度 z考虑一个聚焦子矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xx}}(z;\ c)=[\mathrm{R}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{in}},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{out}},\ z;\ c)]$：

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{xx}}(z;c)=\sum_{f}\boldsymbol{T}^{*}_{\boldsymbol{xi}}(z,f;c)\times\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{io}}(f)\times\boldsymbol{T}^{\dagger}_{\boldsymbol{xo}}(z,f;c), \tag{S7}$$

与完整的聚焦反射矩阵 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{rr}}(c)$（式 S6）类似，每个子矩阵$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{xx}}(z;\ c)$的对角线对应于深度 z 处的共焦反射图像。

聚焦反射矩阵呈现了聚焦过程的自画像，并已在多种应用中得到研究，例如超声成像（*17,16*）、光学相干显微镜（*45*）或被动地震成像（*41*）。具体而言，它可用于评估数值聚焦效率，因为其对角线的宽度代表焦点的有效尺寸。聚焦反射矩阵反对角线上的剖面称为反射点扩散函数（RPSF）（*17*）。更具体地说，成功聚焦的回波位于聚焦反射矩阵的对角线上，而由像差或多重

散射产生的回波未能被前向模型充分描述，和／或未能通过聚焦过程正确反演，因此扩散到对角线之外。我们通过计算聚焦反射矩阵对角线上的平均能量，并将其归一化为该矩阵各列能量的平均值，提出了一种聚焦质量判据：

$$\mathcal{F}(c) = \left\langle \frac{|\overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},z;c)|^2}{\sum_{\boldsymbol{x}'} |\overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x},z;c)|^2} \right\rangle_{\boldsymbol{x},z}, \tag{S8}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 在二维中表示横向坐标 [x，在三维中表示（x, y）]。该判据能够表征聚焦反射矩阵的对角特征，因此也能反映数值聚焦过程的效率。

为提高该聚焦质量判据的稳健性，尤其是在大范围区域或体内配置中，我们在计算质量判据之前，先对聚焦反射矩阵应用共焦滤波器。该共焦滤波器可降低随机多重散射路径的贡献；这些路径会导致反射点扩散函数出现显著的非对角扩展，而我们的前向模型无法捕捉这种现象。对于宽度为 w （通常为几十个波长 λ）的共焦滤波器，我们得到滤波后的聚焦反射矩阵$\boldsymbol{R}_{xx}$（z； c），其定义如下：

—

$$\overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x}_{in},\boldsymbol{x}_{out},z;c) = \begin{cases} \overline{\mathcal{R}}(\boldsymbol{x}_{in},\boldsymbol{x}_{out},z;c) & \text{if} \quad |x_{in}-x_{out}| < w, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{S9}$$

借助这一矩阵成像框架，在二维或三维配置中，数值聚焦和品质因数可以互换使用。在后一种情况下，位置 $\boldsymbol{r}$ 对应三个坐标（x, y, z），而聚焦反射矩阵则是四维的。

分步傅里叶法

传输矩阵 $\boldsymbol{T}_{ri}(\ f;\ c)$ 和 $\boldsymbol{T}_{ro}(\ f;\ c)$ 的建模，对于在非均匀介质中实现令人满意的聚焦过程至关重要。一方面，模型需要足够简单，使优化过程易于处理；另一方面，模型又必须足够准确，才能在复杂介质中高效聚焦。当前最先进的解决方案通过对波传播作出严格假设来简化传输矩阵。例如，波传播可以建模为直线传播（*46,20*），也可以建模为在均匀介质中传播，并在其中设置一个或多个相位屏（*17,16,47*）。在我们的研究中，我们希望处理高度非均匀的介质，因此

选择一种能够考虑折射和前向多重散射等复杂波传播现象的传播模型。为此，我们采用分步傅里叶法（*25*），也称为光学中的光束传播方法（*27*）。该方法将波传播建模为相位屏与自由场传播在波长尺度上的连续交替，并能在波沿优选方向传播时准确近似波动方程的解。

分步傅里叶法的实现从一次插值开始，其目标是将实验反射矩阵 $\boldsymbol{R_{io}}(f)$ 表示为一组位于起始平面 $z = z_0$ 上、针对所有频率的聚焦反射矩阵$\boldsymbol{R_{xx}}(z_0, f)$。在实践中，我们通常选择起始平面为传感器平面，并在本章其余部分将其定义为 $z_0 = 0$。若发射次数或接收在换能器基中进行，则使用空间插值；若为平面波发射，则使用傅里叶逆变换。对于不太常见的发射次数或接收，此类插值本身可以是一个传输矩阵，表示从发射（或接收）基到平面 $z = 0$ 的传播。我们将该插值算子记为矩阵$\boldsymbol{I_{xi}}(f)$（接收侧则分别为 $\boldsymbol{I_{xo}}(f)$），从而得到如下公式：

$$\boldsymbol{R_{xx}}(0, f; c) = \boldsymbol{I_{xi}}(f; c) \times \boldsymbol{R_{io}}(f) \times \boldsymbol{I_{xo}^T}(f; c). \tag{S10}$$

在标准情形（换能器或平面波发射与接收基）下，可以以一种不依赖于波速模型的方式写出此类插值。在更不常见的情形中，该算子可能依赖于波速假设。

利用在平面 $z = 0$ 处获得的聚焦反射矩阵 $\boldsymbol{R_{xx}}(0,\ f)$，并针对每个频率 f，我们将传输函数分解为一系列基本算子，用于模拟高度为 δz 的薄层中的传播。这些基本算子取决于深度 z 处的波速模型，记为 $c(z)$，并写作 $\boldsymbol{\delta T_{xx}}(\delta z,\ f;\ c(z))$。对于平面 z 与 $z + \delta z$ 之间的传播，我们得到：

$$\boldsymbol{R}(z + \delta z, f; c) = \boldsymbol{\delta T}^* (\delta z, f; c(z)) \times \boldsymbol{R}(z, f; c) \times \boldsymbol{\delta T}^\dagger (\delta z, f; c(z)), \tag{S11}$$

为简洁起见，所有下标 $-_{\boldsymbol{xx}}$ 均已省略。基本算子$\boldsymbol{\delta T}$ 定义为：先在频域中进行自由空间传播，再通过相位屏对波速的横向变化进行建模：

$$\boldsymbol{\delta T}\ (\delta z, f; c(z)) = \boldsymbol{s}(f; c(z)) \odot \left(\boldsymbol{F}^\dagger \times (\boldsymbol{h}(f, c(z)) \odot \boldsymbol{F}) \right), \tag{S12}$$

其中，符号 ⊙表示 Hadamard（逐元素）乘积。 $\boldsymbol{F} = [F(\boldsymbol{f_x},\ \boldsymbol{x})]$ 表示空间傅里叶变换（实际中使用快速傅里叶变换实现），因此：

$$F(\boldsymbol{f_x}, \boldsymbol{x}) = \exp(-j2\pi \boldsymbol{f_x} \cdot \boldsymbol{x}), \tag{S13}$$

其中， $\boldsymbol{f_x}$ 横向空间频率写成向量形式。 $\boldsymbol{h}(f, c_m(z)) = [\mathrm{h}(\boldsymbol{f_x}, f, c_m(z))]$ 是在深度 δz 上、针对恒定波速 $c_m(z)$定义的自由空间传播算子。 $\boldsymbol{s}(f;\ c(z)) = [s(\boldsymbol{x}, f;\ c(z))]$ 是在实空间中定义的相位屏算子。在公式 S12 中，所有大写粗体字母均表示矩阵，所有小写粗体字母均表示向量。传播算子 $\boldsymbol{h}$ 和相位屏 $\boldsymbol{s}$ 可表示为慢度的函数，慢度定义为速度的倒数，即 $\sigma(\boldsymbol{x}, z) = 1/c(\boldsymbol{x}, z)$。更准确地说， $\boldsymbol{h}$ 由平均慢度$\sigma_m(z) = \sigma(\boldsymbol{x}, z)_{\boldsymbol{x}} = 1/c_m(z)$决定，而 $\boldsymbol{s}$由其残差 $\delta\sigma(\boldsymbol{x}, z) = \sigma(\boldsymbol{x}, z) - \sigma_m(z)$在深度 z处决定，使得：

$$\boldsymbol{h}(f, c(z)) = \exp\left(j2\pi\delta z\sqrt{(f\sigma_m(z))^2 - |\boldsymbol{f_x}|^2}\right), \tag{S14}$$

$$\boldsymbol{s}(f, c(z)) = \exp(j2\pi\delta z f\delta\sigma(\boldsymbol{x}, z)), \tag{S15}$$

与 $\sqrt{-}$ 复平方根。

自由空间传播是在空间傅里叶空间中进行的，这要求采用周期边界。实际操作中，我们更倾向于使用吸收边界，这可以通过横向填充实现，并在基本传播结束时添加切趾步骤（S11）。切趾的实现方式是将传播结果乘以一个函数，该函数在关注区域内等于 1，并在填充区域内连续递减至 0（例如使用图基窗）。

根据传输矩阵的这一递归隐式定义，首先将实验反射矩阵投影到平面 $z = 0$ 上（S10），然后按照（S11）在所有深度逐步传播。在每个深度，可以将得到的聚焦反射矩阵沿时间频率求和，以执行时间门控并计算聚焦质量（S8）。

分解

在每个深度计算聚焦反射矩阵的计算成本可能很高，并且需要大量内存。对于三维配置，情况尤其如此

因为两个横向维度的存在会产生四维聚焦反射矩阵。计算成本最高的操作是对 (S11) 进行迭代。该操作无需任何矩阵乘法即可实现，只需使用可分离快速傅里叶变换和逐元素乘法。因此，在每个深度、每个频率下，总体计算成本在二维中为 O $\left(N_x^2 \log\ N_x\right)$，在三维中为 O $\left(N_x^2 N_y^2 \log\ N_x\right)$（不失一般性地取 $N_x > N_y$）。

在超声成像中，发射次数通常远少于横向位置的数量 $N_i \ll N_x$。为利用这一特性，我们将大小为 $N_x \times N_x$ 的聚焦反射矩阵替换为两个大小为 $N_i \times N_x$ 的矩阵（针对每个深度和每个频率）。这两个矩阵分别记为 $\boldsymbol{T_{ix}}(z,\ f;\ c)$ 和 $\boldsymbol{R_{ix}}(z,\ f;\ c)$，分别对应聚焦反射矩阵的发射部分和接收部分。它们可以采用与聚焦反射矩阵类似的方式递归计算。初始化使用与（S10）中相同的插值矩阵进行:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T_{ix}}(0, f; c) = \boldsymbol{I_{xi}^{\dagger}}(f; c), \\ \boldsymbol{R_{ix}}(0, f; c) = \boldsymbol{R_{io}}(f) \times \boldsymbol{I_{xo}^{T}}(f; c). \end{cases} \tag{S16}$$

从深度 z 到 $z + \delta z$ 的传播通过以下更新公式完成:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T_{ix}}(z + dz, f; c) = \boldsymbol{T_{ix}}(z + dz, f; c) \times \boldsymbol{\delta T_{xi}^{T}}(\delta z, f; c(z)), \\ \boldsymbol{R_{ix}}(z + dz, f; c) = \boldsymbol{R_{ix}}(z + dz, f; c) \times \boldsymbol{\delta T_{xi}^{\dagger}}(\delta z, f; c(z)). \end{cases} \tag{S17}$$

借助这种表示, 我们可以恢复每个深度处的聚焦反射矩阵 h:

$$\boldsymbol{R_{xx}}(z, f; c) = \boldsymbol{T_{ix}^{\dagger}}(z, f; c) \times \boldsymbol{R_{ix}}(z, f; c). \tag{S18}$$

因此，这两个矩阵包含了聚焦反射矩阵的全部信息，但由于尺寸较小，计算成本显著降低。对于每个频率，它们在每个深度处的计算成本在二维情况下为 O $(N_i N_x \log\ N_x)$，在三维情况下为 O $\left(N_i N_x N_y \log\ N_x\right)$。然而，（S18）中的矩阵乘法计算开销很大，成为算法的瓶颈。为解决这一问题，我们改为使用畸变矩阵（*48*），它由这两个矩阵逐元素相乘得到:

$$\boldsymbol{D_{ix}}(z, f; c) = \boldsymbol{T_{ix}^{*}}(z, f; c) \odot \boldsymbol{R_{ix}}(z, f; c). \tag{S19}$$

可以注意到 t聚焦反射矩阵的对角线，等于共焦反射率

图像，可以通过对其各行求和，直接从畸变矩阵中恢复：

$$\boldsymbol{I}(z;c) = \sum_{f}\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{D_{ix}}(z,f;c). \tag{S20}$$

因此，我们可以计算聚焦质量指数的分子，而无需显式计算聚焦反射矩阵。不过，若不进行大量乘法运算，就无法得到分母。实际中，我们通过计算$\widetilde{}$畸变矩阵的范数来近似分母。由此得到的聚焦质量指数 F (*c*) 与 Mallart 等人提出的聚焦准则（*49*）相似：

$$\widetilde{\mathcal{F}}(c) = \left\langle \frac{|\sum_{f,\boldsymbol{i}} \mathcal{D}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{x},z,f;c)|^2}{\sum_{\boldsymbol{i}}|\sum_{f}\mathcal{D}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{x},f,z;c)|^2} \right\rangle_{\boldsymbol{x},z}. \tag{S21}$$

采用这一版本的品质因数时，无需显式计算聚焦反射矩阵，因此计算复杂度和内存占用都较低。

只要发射次数显著少于横向位置数，这种分解就能大幅缩短计算时间并减少内存需求。尤其是，这种简化是推广到三维配置的关键。

可微性与梯度实现

在前面的章节中，我们定义了给定速度模型时对原始数据执行的操作，以得到聚焦质量判据。该前向模型在图1的上排中示出。

现在，我们希望计算聚焦质量因子相对于速度模型的梯度，以进行优化，如图1下排所示。该梯度可以像方程（4）那样使用链式法则计算。具体而言，我们得到：

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c} = \sum_{z,f} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{R}(z,f;c)} \sum_{z'\le z} \frac{\partial \boldsymbol{R}(z,f;c)}{\partial \boldsymbol{\delta T}(\delta z,f;c(z'))} \frac{\partial \boldsymbol{\delta T}(\delta z,f;c(z'))}{\partial c}, \tag{S22}$$

为简洁起见，已省略下标 $-_{\boldsymbol{xx}}$。

为计算这些导数，我们选择使用一种可自动求导的语言（在本研究中为 PyTorch）实现前向模型，这一做法受到近期自适应超声成像研究的启发（*46,50,47,20*）。借助此类语言，链式法则可以自动执行。然而，研究所有算子及其导数的可微性，对于构建稳健且高效的

优化过程至关重要。在本研究中，最复杂的操作是计算 $\boldsymbol{\delta T}$，它通过两个向量 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 依赖于波速 c，具体如（S14）和（S15）所述。在这两个方程中，向量 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 依赖于慢度 $\sigma = 1/c$，而非波速 c。因此，我们选择相对于慢度而非波速来优化聚焦质量。此外，表达式 $\boldsymbol{h}$ 是唯一不可微的操作，因为其中涉及一个复平方根，而该平方根在某些频率下可能为零。为消除零点处的奇点并限制模型导数的大小，我们修改 $\boldsymbol{h}$ 的公式，使其包含一个很小的复偏移量，从而在复平面上得到一个平滑表达式：

$$\widetilde{\boldsymbol{h}}(f, c(z)) = \exp\left(j2\pi\delta z\sqrt{(f\sigma_m(z))^2 - |\boldsymbol{f_x}|^2 + j\epsilon}\right), \tag{S23}$$

其中 ϵ 是一个较小的正数，通常设为 $\epsilon = |df_x|^2$ 空间频率步长 df_x .

最后，梯度计算需要大量内存，这主要是因为 (S22) 的前两项。事实上，聚焦质量取决于所有聚焦反射矩阵（即所有深度和频率对应的矩阵），而这些矩阵又取决于所有先前的基本透射算子 $\boldsymbol{\delta T}(\delta z,\ f;\ c(z'))$（对于 $z' < z$）。即使采用巧妙的实现方式，这一梯度计算仍需将所有反射矩阵（或等价地，所有基本传输矩阵）作为中间值存储起来。为限制梯度计算的内存占用，我们将计算分为两部分：第一部分独立处理各个频率，第二部分则混合这些频率。我们按频率分批计算第一部分的梯度，再将所有结果与第二部分结合。这种策略引入了一个新参数（批次大小），用于权衡计算效率与内存管理。

优化问题与收敛

所提出的前向模型将聚焦质量计算为波慢度图的函数，该模型是非线性的，且很可能是病态的。关于梯度上升算法的收敛性，或者聚焦质量因子的全局最大值确实对应于实际慢度图这一点，目前都没有理论保证。对于均匀介质，这样的保证是存在的（*51*），但对于非均匀介质，迄今尚未得到证明。尽管如此，我们仍可以从经验角度研究梯度上升算法的收敛性。

我们首先求解以下优化问题：

$$\max_{\sigma} \mathcal{F}(\sigma), \tag{S24}$$

与 σ 慢度图。我们采用一种朴素的梯度上升算法，其每次迭代都将慢度更新为 $\sigma \leftarrow \sigma + \epsilon \nabla_{\sigma} \mathrm{F}(\sigma)$，其中 ϵ 为学习率。实际中，梯度上升算法通过 Adam 优化器实现。

我们将该算法应用于非均匀介质的仿真。结果显示存在明显的短尺度空间变化，如图 S1.A 所示。这些变化并不符合任何物理实际，因此被视为过拟合。由于我们的目标是恢复波速的大尺度变化，我们引入平滑先验，以正则化的形式抑制这些变化：

$$\max_{\sigma} \mathcal{F}(\sigma) + \eta TV(\sigma), \tag{S25}$$

其中 $TV(\sigma) = ||\nabla \sigma||_{1x,\ z}$ 为采用各向异性 l-1 形式实现的全变分正则化，η 为正则化权重。结果如图 S1.B 所示，速度图中的噪声明显减少。然而，仍残留少量短尺度空间变化。这类伪影尤其稳定，因为它们通常与发射脉冲恰好延迟一个或数个周期有关。在层析成像文献中，这类现象被称为周跳伪影，对应于波的相位干涉。为避免这一问题，同时不对慢度图施加不合理的平滑先验，我们在每次迭代中对梯度上升的结果进行中值滤波。梯度上升步骤变为 $\sigma \leftarrow f(\sigma + \epsilon(\nabla_{\sigma} \mathrm{F}(\sigma) + \eta \nabla_{\sigma} TV(\sigma))$，其中 f 是定义如下的局部中值滤波器：

$$f(\sigma) = \alpha \cdot \sigma + (1 - \alpha) \cdot m(\sigma), \tag{S26}$$

其中，$m(-)$ 为中值滤波算子，α 为一个通常设为 $\alpha = 0.5$ 的小常数。这一步滤波可解释为一种去噪操作，类似于即插即用算法中的隐式近端算子（*52*）。它能实现准确的声速估计器（见图 S1），并加快整体收敛。

尽管正则化和滤波步骤解决了大部分收敛问题，正问题仍存在不对称性。事实上，波传播过程中累积的相位像差会影响聚焦质量。这种累积对应于慢度图的轴向积分，

导致难以恢复波速的高频轴向变化。这一局限与断层成像中所谓的缺失锥问题有关（*53*）。在我们的案例中，对所有深度处聚焦质量的计算，以及散射和折射效应的存在，缓解了缺失锥问题，使我们能够准确恢复轴向剖面。然而，与横向变化的估计相比，这种不对称性仍会导致轴向收敛缓慢。因此，我们的算法倾向于通过生成一个人为的横向剖面来补偿轴向速度变化，如图 S2.B 所示。这种效应的数学根源在于分步傅里叶算法：其中，波慢度被分解为轴向剖面项 σ_m，用于 (S14) 中的自由空间传播；以及残差横向项 $\delta\sigma$，用作 (S15) 中的相位掩模。这种分解可能导致梯度方向相反，从而妨碍收敛。为了解决这一问题，我们将慢度分解为两个不同的变量 σ_m 和 $\delta\sigma$，分别用于自由空间传播 (S14) 和相位屏 (S15)。我们的优化问题变为：

$$\begin{aligned} \max_{\delta\sigma,\sigma_m} \quad & \mathcal{F}(\delta\sigma,\sigma_m)+\eta TV(\delta\sigma,\sigma_m), \\ \text{such that} \quad & \langle\delta\sigma\rangle_{\boldsymbol{x}}=0. \end{aligned} \tag{S27}$$

在这种形式下，该约束仍可能阻碍梯度上升。我们对该约束进行拉格朗日松弛，以解决这一冲突：

$$\max_{\delta\sigma,\sigma_m} \mathcal{F}(\delta\sigma,\sigma_m)+\eta TV(\delta\sigma,\sigma_m)+\mu||\langle\delta\sigma\rangle_x||, \tag{S28}$$

其中，$||-||$ 可以是任意范数。在我们的情形中，取 $\mu=0$，得到的损失与公式 (S25) 中的损失类似，但针对两个独立变量进行优化。这种松弛可以解释为维度增加，从而促进收敛。

最后，我们通过考虑两个优化阶段来调整梯度上升。在第一阶段，我们仅优化轴向剖面 σ_m。在第二阶段，我们从第一阶段的结果出发，联合优化这两个变量。变量分裂与这一改进的上升算法相结合，能够准确估计波速的轴向剖面及其横向变化，如图 S2.C 所示。

实验参数

我们在此给出图3、图4、图5所对应的三项实验以及补充文本中图 S3 所示仿真验证所使用的参数。

所有参数均列于表 S1。由于超声硬件需要针对具体应用进行选择，各实验所用的探头和发射参数有所不同。二维体外采集使用 Verasonics Vantage 256 扫描仪（Verasonics Inc.，美国华盛顿州柯克兰），搭配 L12-5超声探头进行。三维体外实验使用二维换能器矩阵阵列（Vermon），搭配由 Supersonic Imagine（法国艾克斯-普罗旺斯）开发的电子硬件进行。临床采集使用 Mach 30扫描仪（Supersonic Imagine，法国艾克斯-普罗旺斯）进行。

由于采集设置不同，我们会针对每项实验调整网格尺寸。网格分辨率可在半个波长至两个波长之间任意选取，这是重建精度与计算时间之间的权衡。二维配置采用 0.8 个波长，三维情况采用一个波长；此处的波长根据中心频率估算。该网格同时用于速度模型和品质因数的计算。初始速度模型始终设为均匀模型，其取值对应于预期平均值（例如 1480 $m.s^{-1}$ 或 1540 $m.s^{-1}$）。改变初始速度不会导致偏差（在合理变化范围内，即低于 10%），但可能延长收敛时间并引起空间不稳定性。由于发射次数始终少于网格中的横向点数，因此始终采用 (S16) 和 (S17) 中所示的分解。在三维情况下，我们还采用 (S21) 中所示的畸变矩阵表示，以避免显式计算反射矩阵；该矩阵对于每个深度和频率的尺寸为 $60 \times 40 \times 60 \times 40$ （即数千亿个数值）。

最后，针对每种配置，对优化参数进行经验性微调。将迭代次数设置为收敛过程每个阶段（轴向和横向）100次，并采用基于连续10次迭代中损失平均演变的提前停止准则。

在该临床情况中，探头较长且成像深度较浅，导致几何形状较为特殊，宽高比为 1.7。在这种情况下，将慢度图分解为轴向剖面与横向残余慢度的做法存在局限。为了恢复出类似于

其他情况的配置，我们将介质分解为三个相互重叠、宽度为 125 个波长的列，并分别对这三列进行优化。最后，在完整域上进行一次优化，并将前几次优化的结果用作初始速度模型。

补充文本

仿真验证

我们使用 k-Wave（*54*）执行的仿真验证了所提出的方法。仿真参数见表 S1，结果见图 S3。

对于每次仿真，我们定义一个由包涵体或层等大尺度变化构成的波速图，以及一个包含亚波长散射体和无回声区域等短尺度变化的密度图。我们在此类介质中模拟超声采集，并将所提出的方法应用于所得信号。优化在一块 NVIDIA RTX 6000 Ada Generation GPU 上执行，并在 1 到 35 分钟内收敛（具体取决于网格尺寸）。

我们在图 S3 中展示了使用 1540 $m.s^{-1}$ 的均匀波速假设获得的像差反射图像，并将其与收敛时获得的反射图像进行比较。在所有情况下，都能恢复出清晰的反射图像，且不存在任何几何畸变，这验证了所提出方法校正像差的能力。图 S3 右侧将估计的波速图与仿真的波速图进行了比较。在前三次仿真中，我们获得了准确的速度估计，其横向分辨率较高（约为一个波长），轴向分辨率为数个波长。这种不对称分辨率是缺失锥问题的直接表现，尽管在此处折射和散射对其进行了部分缓解。获得的速度值接近真实值，绝对误差低于 20 $m.s^{-1}$。

最后一次仿真模拟了更复杂的配置。在这种情况下，我们观察到在区域中心，估计值与真实值吻合良好。不过，我们也观察到一些横向边界效应，以及在较深处准确度较低。这些局限性可以归因于这些位置的速度值对平均聚焦质量影响较小。对于未来的应用，可通过屏蔽或校正此类边界效应来改进结果。

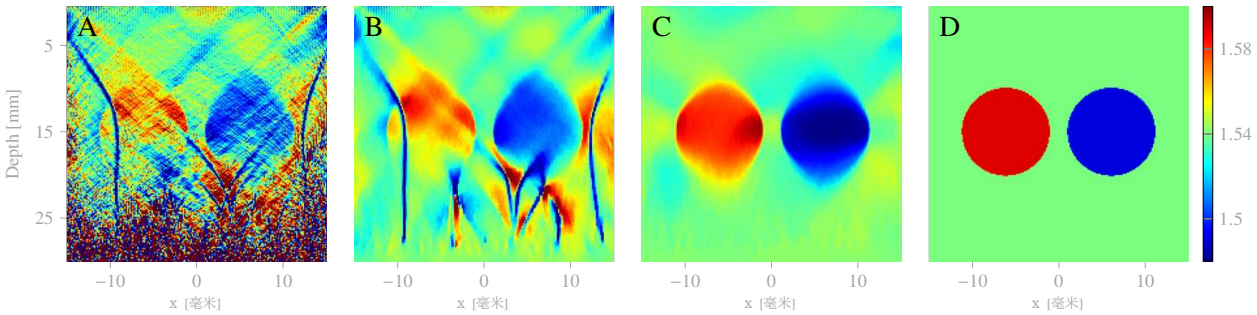

图 S1: **效应　　正则化与滤波对收敛的影响**。波速图 a　　t

超声仿真的收敛情况。**(A)** 未经正则化和滤波的结果。**(B)** 经正则化但未经滤波的结果。**(C)** 经正则化和滤波的结果。**(D)** 真实值。所有声速值均以毫米.μs^{-1}为单位。

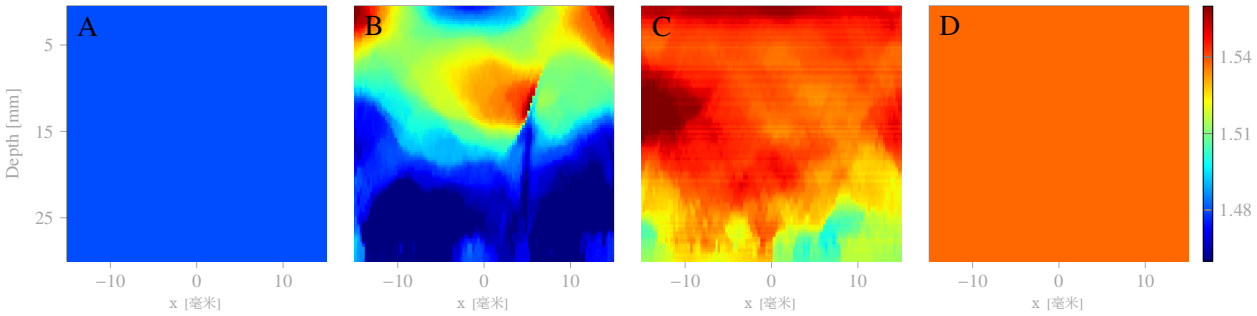

图 S2:**效应　　变量分裂对收敛的影响**。收敛时的波速图 fo　　r

超声仿真。（**A**）波速的初始假设。（**B**）未进行变量分裂的结果。（**C**）进行变量分裂后的结果。（**D**）真实值。所有声速值均以毫米.μs^{-1}为单位。

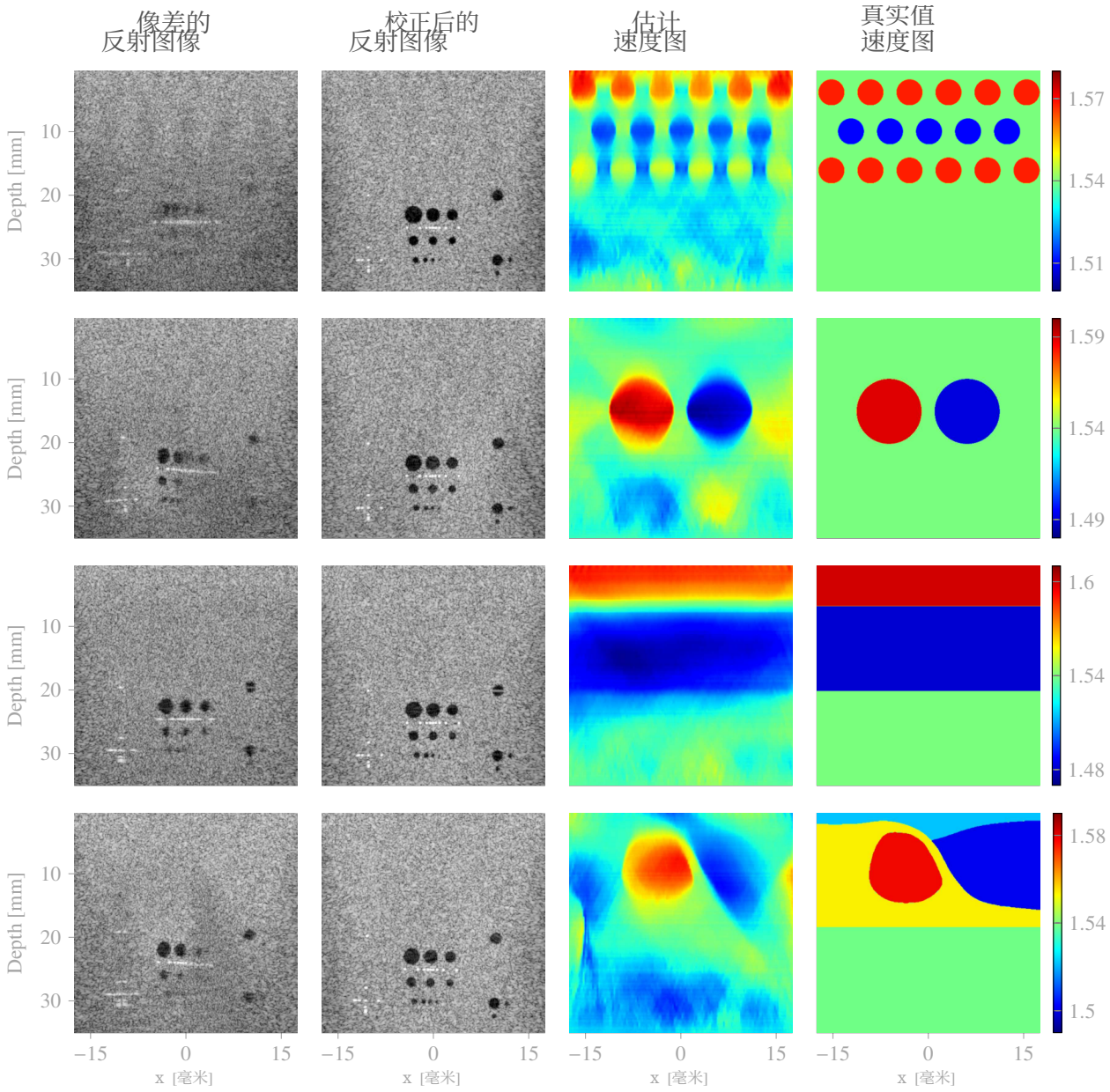

图 S3：**所提方法的仿真验证**。使用 k-Wave 对四种不同介质进行仿真，最右侧一列显示非均匀速度图。仿真得到的反射图像存在像差，如最左侧一列所示。中间两列分别展示收敛时获得的反射图像和波速图。反射图像以 dB 表示，声速值以毫米/μs^{-1}为单位。

表 S1：**实验参数**。四种不同实验的采集参数、空间网格参数、算法选择和优化参数。二维仿真对应图 S3，二维体外对应图 3，二维临床对应图 5，三维体外对应图 4。

参数	二维仿真	二维体外	二维临床	三维体外
中心频率 [（兆赫）]	5.2	6	5 或 6.5	3
带宽 [（-6 分贝处，单位为 %）]	58	50	60	66
换能器数量	128	256	256	32×32
间距 [（毫米）]	0.3	0.195	0.2	0.5
发射基	换能器	换能器	平面波	换能器
发射次数	128	128	61	8×16
横向尺寸 w [in λ]	150	200	250	60×40
轴向尺寸h [英寸 λ]	150	175	150	120
网格分辨率 [英寸 λ]	0.8	0.8	0.8	1
填充宽度	$w/4$	$w/4$	$w/4$	$(w/4) \times (w/4)$
初始速度 [毫米·μs^{-1}]	1.54	1.48	1.48	1.54
分解	Yes	Yes	Yes	Yes
聚焦质量公式	(S8)	(S8)	(S8)	(S21)
共焦滤光片宽度 [英寸 λ]	32	32	32	–
σ_m的学习率	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
$\delta\sigma$的学习率	$6 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
正则化权重（σ_m）	2	2	2	1
正则化权重（$\delta\sigma$）	5	5	5	20
中值滤波器尺寸 [英寸 λ]	12×7	12×7	12×7	$5 \times 5 \times 5$

影片 S1 的说明。**二维**体外**实验中的像差补偿**。交替显示初始图像（红色方框）和校正后的图像（绿色方框）（分别见图 3B 和 E），以突出优化后的声速图（图 3F）对波束形成过程及生成的反射图像的益处。黑白标度的动态范围为 50 分贝。

影片 S2 的说明。**三维配置下**离体**组织的像差补偿**。交替显示初始图像（红色方框）和校正后的图像（绿色方框，图 4B），以突出优化后的声速图（图 4D）对波束形成过程及生成的反射图像的益处。黑白标度的动态范围为 80 分贝。

影片 S3 的说明。**第一次乳腺组织实验中的像差补偿**。交替显示初始图像（红色方框）和校正后的图像（绿色方框，图 5B），以突出优化后的声速图（图 5C）对波束形成过程及生成的反射图像的益处。黑白标度的动态范围为 55 分贝。

影片 S4 的说明。**第二次乳腺组织实验中的像差补偿**。交替显示初始图像（红色方框）和校正后的图像（绿色方框，图 5D），以突出优化后的声速图（图 5E）对波束形成过程及生成的反射图像的益处。黑白标度的动态范围为 55 分贝。

影片 S5 的说明。**第三次乳腺组织实验中的像差补偿**。交替显示初始图像（红色方框）和校正后的图像（绿色方框，图 5F），以突出优化后的声速图（图 5G）对波束形成过程及生成的反射图像的益处。黑白标度的动态范围为 55 分贝。

影片 S6 说明。**第四次乳腺组织实验中的像差补偿**。交替显示初始图像（红色方框）和校正后的图像（绿色方框，图 5H），以突出优化后的声速图（图 5I）对波束形成过程及最终反射图像的益处。黑白标度的动态范围为 55 分贝。

影片 S7 说明。第五次乳腺组织实验中的像差补偿。交替显示初始图像（红色方框）和校正后的图像（绿色方框，图 5J），以突出优化后的声速图（图 5K）对波束形成过程及最终反射图像的益处。黑白标度的动态范围为 55 分贝。