arXiv:2602.03356v1 [math.DG] 3 Feb 2026

论度量接触辛结构的特征叶状结构

AMINE HADJAR

摘要。我们研究流形上接触辛对（η, ω）的相容的度量与伴随度量。我们表明，对于任意相容的度量，Reeb向量场的积分曲线都是测地线。我们证明，所有伴随度量共享同一个体积元，并给出其显式表达式。当 η 与 ω 的特征叶状结构关于某一相容度量正交时，它们的叶以及 $d\eta$的特征叶丛的叶都是极小的。我们在幂零李群和幂零流形上构造了显式例子，其中特征叶状结构并非都是全测地的。

1. 引言

Bande [1] 引入了接触辛对的概念，随后与Ghiggini和Kotschick [2, 4]共同研究了这一概念。此后，他与本文作者将伴随度量适配到该结构上，以便在Boothby–Wang 纤维化[3]上构造接触对结构。

流形上的接触辛对 M 由一个 1-形式 η 和一个 2-形式 ω 组成，使得三元组 (M, η, ω) 局部上是一个接触流形与一个辛流形的乘积。这些流形自然地由 η 的特征叶丛 $\mathcal{S}$ 和 ω的特征叶丛$\mathcal{C}$ 分叶，这两个叶丛彼此横截且互补。形式 η 在 $\mathcal{C}$的叶上诱导出接触形式，而 ω 在 $\mathcal{S}$的叶上诱导出辛形式。接触叶上的 Reeb向量场共同定义了一个全局向量场 ξ，称为该接触辛对的 Reeb向量场。

相容度量和伴随度量的定义类似于接触几何中的定义，首先考虑一个在 ξ 上为零、并限制在 η 的核上成为近复结构的 (1,1)-张量场 ϕ 。因此，三元组 (η, ξ, ϕ) 确定了一个近接触结构，其中省略了 ω。对于一个伴随度量 g，三元组 (η, ω, g) 在 M上称为**度量接触辛结构** 。

本文证明，接触辛对的 Reeb向量场的积分曲线相对于任意相容度量都是测地线。我们还证明，所有伴随度量共享同一个体积元，并给出其关于该对（η, ω）的显式表达式。对于叶状结构 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 彼此正交的伴随度量，我们证明它们的所有叶都是极小的。此外，我们还证明 $d\eta$的特征叶丛的叶也是极小的。

日期：2026年2月4日；2020年数学主题分类：主要分类 53C25；次要分类 53B20、53D10、53B35、53C12。关键词。度量接触辛结构、极小子流形、几乎接触度量流形、叶状结构。

我们给出了赋有度量接触辛结构的幂零李群和幂零流形的例子，其特征叶状结构彼此正交，但并非二者都全测地。
所有考虑的微分对象均假定为光滑的。

2. 预备知识

由流形 M 上的 1-形式 η 和闭2-形式 ω 构成的一对 $(\eta,\ \omega)$，若满足以下条件，则称为类型为 $(m,\ n)$ 的接触辛对：

$$\eta \wedge (d\eta)^m \wedge \omega^n \quad \text{is a volume form},$$
$$(d\eta)^{m+1} = 0 \quad \text{and} \quad \omega^{n+1} = 0.$$

这种流形必定可定向，且维数为奇数 $2n + 2m + 1$。由于情形 $n = 0$ 或 $m = 0$ 分别对应经典的接触流形和余辛流形，以下我们将假设 $m \geq 1$ 且 $n \geq 1$。

´形式 η 和 ω 的埃利·嘉当类为常数，分别等于 $2m + 1$ 和 $2n$。因此，分布

$$T\mathcal{S} = \{X \in TM \mid \eta(X) = 0, d\eta(X, Y) = 0\ \forall Y \in TM\}$$
$$T\mathcal{C} = \{X \in TM \mid \omega(X, Y) = 0\ \forall Y \in TM\}$$

在 M 上可积并确定两个横截且互补的叶状结构，分别记为 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{C}$。$\mathcal{S}$ 的叶是维数为 $2n$ 的辛流形，其辛形式由 ω 诱导；而 $\mathcal{C}$ 的叶是维数为 $2m+1$ 的切触流形，其切触形式由 η 诱导（见 [1]）。

由下列方程唯一确定的向量场 ξ

$$\eta(\xi) = 1, \quad i_\xi d\eta = 0, \quad i_\xi \omega = 0$$

称为接触辛对的***Reeb*向量场**。它与叶状结构 $\mathcal{C}$ 相切，并且限制在每个切触叶上时即为经典的 Reeb 向量场（见 [1]）。其流保持两个形式 η 和 ω:

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \omega = 0,$$

其中 $\mathcal{L}_X$ 表示沿向量场 X 的李导数。

$d\eta$ 的特征子丛为 $\mathbb{R}\xi \oplus T\mathcal{S}$，它是可积的。相应的叶状结构记为 $\mathcal{K}$。其每个叶都是一个 $(2n + 1)$ 维余辛流形，并由 $\mathcal{S}$ 的叶状结构分叶（见 [1]）。

我们还将维数为 $2n + 2m$ 的水平子丛 $\mathcal{H}$定义为 η 的核，并将维数为 $2m$ 的子丛 $\mathcal{D} = \mathcal{H} \cap T\mathcal{C}$ 定义为沿着 $\mathcal{C}$ 的叶的切触分布。因此，M 的切丛分解为：

$$TM = T\mathcal{S} \oplus T\mathcal{C} = T\mathcal{S} \oplus \mathbb{R}\xi \oplus \mathcal{D} = T\mathcal{K} \oplus \mathcal{D} = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}\xi.$$

一个基本例子是一个（$2m + 1$）维接触流形与一个 $2n$ 维辛流形的乘积。事实上，任意类型为（m, n）的接触辛对，在局部都与这样的乘积同构。

流形 M 上的一个 近接触辛结构 是一个三元组（η, ω, ϕ），其中（η, ω）是一个接触辛对，其Reeb向量场为 ξ，而 ϕ 是一个满足下列条件的 (1,1)-张量场

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

该条件确保三元组（ϕ， ξ， η）在 M上定义了一个近接触结构，特别是：

$$\phi\xi = 0, \quad \eta \circ \phi = 0$$

并且 ϕ 在水平子丛 $\mathcal{H}$上诱导出一个近复结构。

在赋予几乎接触辛结构的流形上，可以如下定义与该结构相适应的黎曼度量：

定义1. 设（η， ω， ϕ）是流形 M上的一个近接触辛结构，其Reeb向量场为 ξ。 M 上的黎曼度量 g 称为：

（i）相容的，如果对所有向量场 X、 Y，

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

(ii) 伴随的 若对所有向量场 X, Y，

$$g(X, \phi Y) = (\mathrm{d}\eta + \omega)(X, Y)$$
$$g(X, \xi) = \eta(X)$$

度量 g与近接触辛结构 (η, ω, ϕ) 相容，当且仅当四元组 (ϕ, ξ, η, g) 是一个几乎接触度量结构（定义见 [5]）。因此，一个几乎接触辛对结构 (η, ω, ϕ) 总是存在相容度量。特别地，对于任意相容度量 g，我们有

$$g(\xi, \xi) = 1 \quad \text{and} \quad g(X, \xi) = \eta(X),$$

因此子丛 $\mathcal{H}$ 和 $\mathbb{R}\xi$ 正交，其中 ξ 是接触辛对的 Reeb向量场。

命题 2. 对于近接触辛结构，每个伴随度量都是相容的。然而，反过来一般不成立。

证明。 设 g 为伴随度量。则：

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) &= (\mathrm{d}\eta + \omega)(\phi X, Y) \\ &= -(\mathrm{d}\eta + \omega)(Y, \phi X) \\ &= -g(Y, \phi^2 X) \\ &= -g(Y, -X + \eta(X)\xi) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned}$$

这表明 g 是相容的。

为证明逆命题一般不成立，设 (η, ω, ϕ) 是一个近接触辛结构。那么 $(\eta, -\omega, \phi)$ 也定义了这样的结构。取一个与共同的近接触结构 (ϕ, ξ, η) 相容的度量 g。它不可能同时与二者伴随，因为这将意味着

$$(\mathrm{d}\eta + \omega)(X, Y) = g(X, \phi Y) = (\mathrm{d}\eta - \omega)(X, Y),$$

由此可得

$$\omega(X,Y)=0$$

对所有 X，Y，这与 ω 在 $T\mathcal{S}$ 上是辛形式这一事实矛盾。 □

度量接触辛结构是一个四元组 $(\eta,\ \omega,\ \phi,\ g)$，其中三元组 $(\eta,\ \omega,\ \phi)$ 是一个近接触辛结构，且 g 是与之伴随的黎曼度量。注意，所要求的方程使用由 $(\eta,\ \omega,\ g)$ 唯一定义的对象 ξ 和 ϕ。因此，该定义也可以等价地改写如下：

定义 3。流形上的度量接触辛结构是一个三元组 $(\eta,\ \omega,\ g)$，其中 $(\eta,\ \omega)$ 是一个接触辛对，其 Reeb向量场为 ξ，且 g 是一个黎曼度量，使得：

(i) $g(X,\ \xi)=\eta(X)$，并且 (ii) 由 $g(X,\ \phi Y)=(\mathrm{d}\eta+\omega)(X,\ Y)$ 定义的端同态场 ϕ 满足 $\phi^2=-I+\eta\otimes\xi$。

3. Examples

我们从以下简单的构造开始。

例4. 赋有相容度量的辛流形与接触度量流形的乘积（定义见 [5] ）产生一个具有度量接触辛结构的流形。在这种情况下，两个特征叶状结构彼此正交，而且都是全测地的。

需要指出的是，尽管任何接触辛流形在局部都是接触流形与辛流形的乘积，但也存在具有正交特征叶状结构、却并非局部为这种乘积的度量接触辛流形。以下例子对此作了很好的说明。

例5. 设 G^5 为由以下结构方程定义的单连通五维幂零李群

$$\mathrm{d}\alpha_2=\alpha_1\wedge\alpha_3,\quad \mathrm{d}\alpha_4=\alpha_1\wedge\alpha_5,\quad \mathrm{d}\alpha_1=\mathrm{d}\alpha_3=\mathrm{d}\alpha_5=0.$$

对 (η,ω)，其中 $\eta=\alpha_2$ 和 $\omega=\alpha_4\wedge\alpha_5$，是 G^5上的一个类型为(1,1)的接触辛对。Reeb向量场为 $\xi=X_2$，其中 X_i是 α_i的对偶。 η的特征分布$T\mathcal{S}$由 X_4和 X_5张成，而 ω的特征分布 $T\mathcal{C}$由 X_1、X_2 和 X_3张成。考虑度量

$$g=\alpha_2^2+\frac{1}{2}\left(\alpha_1^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\alpha_5^2\right)$$

当配备由下式定义的端态射场 ϕ 时，它便成为该接触辛对的相容度量

$$\phi X_2=0,\quad \phi X_3=X_1,\quad \phi X_1=-X_3,\quad \phi X_5=X_4,\quad \phi X_4=-X_5.$$

关于此度量，两个特征分布 $T\mathcal{S}$ 和 $T\mathcal{C}$ 正交。很容易看出，叶状结构 $\mathcal{C}$ 是全测地的。然而，记 ∇ 为 Levi-Civita联络，则有：

$$\begin{aligned}-2g(\nabla_{X_4}X_5,X_1)&=g([X_5,X_1],X_4)+g([X_4,X_1],X_5)+g([X_5,X_4],X_1)\\&=g(X_4,X_4)\\&\neq 0\end{aligned}$$

这表明叶状结构 $\mathcal{S}$ 不是全测地的。

由于 G^5 的李代数的结构常数是有理数，该群容许余紧格 Γ。左不变度量接触辛结构（η, ω, g）随后下降到任意紧致幂零流形 G^5/Γ，从而得到一个（1,1）型的度量接触辛结构，其具有正交的特征叶状结构，且二者中仅有一个是全测地的。

例6. 设 G^7 为由下列结构方程定义的单连通7维幂零李群:

$$\mathrm{d}\alpha_{j-1} = \alpha_1 \wedge \alpha_j \quad \text{for} \quad j = 3, 4, 5, 7 \quad \text{and} \quad \mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_5 = \mathrm{d}\alpha_7 = 0$$

令 $\eta = \alpha_2$ 与 $\omega = \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_6 \wedge \alpha_7$。则（$\eta, \omega$）是 G^7上的一个（1, 2）型接触辛对，其Reeb向量场为 $\xi = X_2$，其中 X_i与 α_i对偶。η 的特征分布 $T\mathcal{S}$ 由 X_4、X_5、X_6 和 X_7张成，而ω 的特征分布 $T\mathcal{C}$ 由 X_1、X_2 和 X_3张成。考虑度量

$$g = \alpha_2^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \alpha_6^2 + \alpha_7^2\right)$$

它通过端同态场 ϕ 与接触辛对相关联，该端同态场在 X_2 上定义为零，并且:

$$\begin{aligned} &\phi X_3 = X_1, \quad \phi X_1 = -X_3, \quad \phi X_5 = X_4, \\ &\phi X_4 = -X_5, \quad \phi X_7 = X_6, \quad \phi X_6 = -X_7. \end{aligned}$$

特征分布 $T\mathcal{S}$和 $T\mathcal{C}$相对于此度量仍然正交。现在我们证明这两个叶状结构都不是全测地的。令 ∇ 表示Levi-Civita联络，我们计算得:

$$\begin{aligned} -2g(\nabla_{X_3} X_1, X_4) &= g([X_1, X_4], X_3) + g([X_3, X_4], X_1) + g([X_1, X_3], X_4) \\ &= -g(X_3, X_3) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -2g(\nabla_{X_4} X_5, X_1) &= g([X_5, X_1], X_4) + g([X_4, X_1], X_5) + g([X_5, X_4], X_1) \\ &= g(X_4, X_4) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

由此证明，两个叶状结构 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 都不是全测地的。

与前一种情形一样，结构常数的有理性保证了 G^7中存在余紧格 Γ。于是，左不变度量接触辛结构（η, ω, g）可下降到每个紧致幂零流形 G^7/Γ上，从而得到一个类型为 (1, 2) 的度量接触辛结构，其特征叶状结构彼此正交，且都不是全测地的。

4. 极小叶状结构

我们首先关注赋有相容黎曼度量的几乎接触辛结构的Reeb向量场的积分曲线。

定理7。 设(η, ω, ϕ, g) 是流形上的一个近接触辛结构，并配有相容的黎曼度量 g。那么，其 ***Reeb***向量场 ξ 的积分曲线是测地线。

证明。 令 ∇ 表示 g的 Levi-Civita联络。由于 η 在 ξ 的流下保持不变，即$\mathcal{L}_\xi \eta = 0$，因此对于任意向量场 X:

$$\begin{aligned} 0 = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) &= \xi(\eta(X)) - \eta(\mathcal{L}_\xi X) \\ &= \xi g(X,\xi) - g(\xi, \nabla_\xi X - \nabla_X \xi) \\ &= g(\nabla_\xi X, \xi) + g(X, \nabla_\xi \xi) - g(\xi, \nabla_\xi X - \nabla_X \xi) \\ &= g(X, \nabla_\xi \xi) + g(\xi, \nabla_X \xi) \end{aligned}$$

但是由于 $g(\xi,\ \xi) = 1$，我们对等式两边求导，得到:

$$0 = Xg(\xi,\xi) = 2g(\xi, \nabla_X \xi)$$

因此，根据前面的计算，对于所有 X，$g(X,\ \nabla_\xi \xi) = 0$，从而 $\nabla_\xi \xi = 0$。因此，ξ 的积分曲线是测地线。□

几乎接触辛结构和接触结构是更广泛的几乎接触结构这一类结构的特例。以下结果给出了与接触辛对相伴随的黎曼度量的体积元的显式表达式，从而推广了接触几何和辛几何中的一个经典结果（见 [5]）。

定理8。 在流形上，类型为 （η、 ω）的接触辛对的所有相容度量都具有相同的体积元，其表达式为

$$dV = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n} m!\ n!}\, \eta \wedge (d\eta)^m \wedge \omega^n$$

证明。 我们知道，对于流形 M 上类型为 $(m,\ n)$、具有 Reeb向量场 ξ 的度量接触辛结构 $(\eta,\ \omega,\ g,\ \phi)$，$(\phi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 是 M 上的几乎接触度量结构。因此，可以在局部构造一个 ϕ-基，即一个正交归一标架 $\{\xi, X_1, \ldots, X_{m+n}, X_{1^*}, \ldots\ldots,\ X_{(m+n)^*}\}$，其中 $X_{i^*} = \phi X_i$。 令 $\{\eta, \theta^1, \ldots, \theta^{m+n}, \theta^{1^*}, \ldots, \theta^{(m+n)^*}\}$ 为其对偶基。于是

$$dV = \eta \wedge \theta^1 \wedge \theta^{1^*} \wedge \cdots \wedge \theta^{m+n} \wedge \theta^{(m+n)^*}.$$

注意到

$$d\eta + \omega = \sum_{i=1}^{m+n} (\theta^{i^*} \wedge \theta^i - \theta^i \wedge \theta^{i^*}) = -2 \sum_{i=1}^{m+n} \theta^i \wedge \theta^{i^*}$$

这由恒等式 $g(X,\ \phi Y) = (\mathrm{d}\eta + \omega)(X,\ Y)$ 以及局部ϕ-基的正交归一性可得。接下来，我们有

$$(d\eta + \omega)^{m+n} = (-2)^{m+n} (m+n)!\ \theta^1 \wedge \theta^{1^*} \wedge \cdots \wedge \theta^{m+n} \wedge \theta^{(m+n)^*}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} (d\eta + \omega)^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} (d\eta)^k \wedge \omega^{m+n-k} \\ &= \frac{(m+n)!}{m!\ n!} (d\eta)^m \wedge \omega^n. \end{aligned}$$

比较这两个表达式可得:

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^m \wedge \omega^n &= (-2)^{m+n} m!\ n!\ \eta \wedge \theta^1 \wedge \theta^{1^*} \wedge \cdots \wedge \theta^{m+n} \wedge \theta^{(m+n)^*} \\ &= (-2)^{m+n} m!\ n!\ dV. \end{aligned}$$

由此可得该公式。 □

现在我们转而研究由度量接触辛结构（η， ω， g）所产生的特征叶状结构。令 $\mathcal{S}$、 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示 η、 ω 和 $d\eta$的特征叶丛。它们的叶分别是辛流形、接触流形和余辛流形。

定理 9. 设 (η, ω, g) 是流形 M上的度量接触辛结构，并假设 η 的特征叶丛 $\mathcal{S}$ 与 ω 的特征叶丛 $\mathcal{C}$ 正交。那么：

– $\mathcal{S}$的叶，– $\mathcal{C}$的叶，– 以及 $d\eta$的特征叶丛 $\mathcal{K}$的叶，

都是黎曼流形 (M, g)上的极小子流形。

证明。 我们应用 Rummler 极小性判据（见 [6]）。该判据指出，黎曼流形上的一个 p维叶状结构 $\mathcal{F}$ 是极小的，当且仅当其特征形式 α 在 $T\mathcal{F}$上相对闭；也就是说，

$$d\alpha(X_1, \ldots, X_p, Y) = 0$$

对于所有 X_1，……， X_p 切于 $\mathcal{F}$且 Y切于该流形。我们回顾， α 是在与 $\mathcal{F}$ 正交的向量上为零的 p-形式，且其在 $\mathcal{F}$ 上的限制是叶上诱导度量的体积形式。

设（m， n）为接触辛对（η， ω）的型数，并设 ξ 表示其Reeb向量场。

– 叶状结构 $\mathcal{S}$的维数为 $2n$。由于 $T\mathcal{C}$ 是 $T\mathcal{S}$的正交子丛， $\mathcal{S}$ 的特征形式为：

$$\alpha_{\mathcal{S}} = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\, \omega^n,$$

它是闭的，因而在 $T\mathcal{S}$上相对闭。因此， $\mathcal{S}$ 的叶是极小的。

– 叶状结构 $\mathcal{C}$ 的维数为 $2m + 1$，其特征形式为：

$$\alpha_{\mathcal{C}} = \frac{(-1)^m}{2^m\, m!}\, \eta \wedge (d\eta)^m,$$

它同样是闭的。因此， $\mathcal{C}$ 的叶是极小的。

– 叶状结构 $\mathcal{K}$ 的维数为 $2n + 1$，其特征形式为：

$$\alpha_{\mathcal{K}} = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\, \eta \wedge \omega^n.$$

由于 ξ 是 $\mathcal{K}$ 的切的，并且

$$i_\xi d(\eta \wedge \omega^n) = i_\xi(d\eta \wedge \omega^n) = 0,$$

形式 $\alpha_{\mathcal{K}}$ 在 $T\mathcal{K}$上是相对闭的。因此， $\mathcal{K}$ 的叶也是极小的。 □

参考文献

[1] Bande, Gianluca. 接触辛对。美国数学会会刊，355 (2003), 1699–1711[2] Bande, Gianluca; Ghiggini, Paolo; Kotschick, Dieter. 辛对与接触对的稳定性定理。国际数学研究公告，2004:68 (2004), 3673–3688[3] Bande, Gianluca; Hadjar, Amine. 关于正规接触对。国际数学杂志，21 (2010), 737–754 [4] Bande, Gianluca, Kotschick, Dieter. 辛对的几何。美国数学会会刊，358 (2006),1643–1655[5] Blair, David: 接触流形与辛流形的黎曼几何。 数学进展，203（第二版）。Birkh¨auser Boston (2010)[6] Rummler, Hansklaus. 黎曼几何中的若干简单概念及其在紧叶状结构中的应用。瑞士数学会评论，54 (1979),224–239

数学系，IRIMAS，法国上阿尔萨斯大学，FRÈRES LUMIÈRE 街 18 号，68093 米卢斯 CEDEX，法国电子邮箱地址：mohamed.hadjar@uha.fr