arXiv:2602.03385v1 [math.AG] 3 Feb 2026

关于恩里克斯曲面的 Fano 维数

FEDERICO TUFO

摘要。我们构造了一族法诺四重体，其凝聚层导出范畴将一个一般恩里克斯曲面的导出范畴作为半正交分量。该结果改进了 Kuznetsov 的一项成果，将一般恩里克斯曲面的 Fano 维数从六降至四。

1. 引言

Fano 访客问题是代数几何与导出范畴中的一个自然却难以解决的问题。该问题最早由 Bondal 于 2011 年提出，旨在询问：对于任意光滑射影簇 X，是否存在一个光滑 Fano 簇 Y 以及一个全忠实函子$\mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(Y)$。若答案为肯定 X 则称为 Fano 访问者，而 Y则称为X的法诺宿主 [。由此，17], KKLL X定义了簇 X的 Fano 维数，即。

我们来回顾一下这一主题的一些重要结果。Bondal 和 Orlov 在 [BO95] 证明了，亏格为 X 的超椭圆曲线 g 的导出范畴可以嵌入到 $\mathbb{P}^{2g+1}$ 中两个二次超曲面的交的导出范畴。Kuznetsov 在 [Kuz10] 证明了，某些 K3曲面的导出范畴可以嵌入到特殊三次四维簇中。Bernardara、Bolognesi 和 Faenzi 在 [BBF16] 证明了，每条光滑平面曲线都是法诺访问者。Segal 和 Thomas 在 [ST18] 证明了，一般的五次三维簇是十一维法诺宿主中的法诺访问者。最后，Kiem、Kim、H. Lee 和 K. Lee 在 [KKLL17], 证明了，所有光滑射影完全交都是法诺访问者。

在 [Kuz18], Kuznetsov 首先证明，恩里克斯曲面的模空间中某个除子族（所谓的结点 *Enriques*曲面[1]）可以实现为某个法诺四维簇的法诺访问者；该法诺四维簇可表示为在同一恩里克斯曲面上对 $\mathrm{Gr}(2,4)$ 进行胀开所得。随后，他证明了模空间中的一般恩里克斯曲面可以视为六维法诺宿主的法诺访问者。总而言之

- 若 S 是一个结点*Enriques*曲面，则其 Fano 维数为 ≤ 4;
- 若 S 是一般的恩里克斯曲面，则其 Fano 维数为 ≤ 6。

在我们的工作中，我们改进了一般恩里克斯曲面的这一上界。

定理 1.1 (定理 3.1，推论 3.3)。设 S 是一般的恩里克斯曲面。那么， S 的 *Fano* 维数为4，也就是说，存在一个法诺四维簇 Y，其具有

$$\mathbf{D}(Y) = \langle \mathbf{D}(S), E_1, \dots, E_9 \rangle$$

其中 E_1、……、 E_9 是例外丛。 Y的 *Hodge*菱形是对角的，并且 $K_0(Y)$包含一个 *2*-挠类；特别地，$\mathbf{D}(Y)$ 不具有全例外集合。

这样的法诺四维簇 Y可以实现为多重次数为$(1, 2, 0)$、$(1, 0, 2)$的完全交，位于 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 中。更确切地说

$$Y \cong \mathrm{Bl}_S(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2).$$

[1]尽管名称如此，这些 Enriques 曲面是光滑的。

Kuznetsov的构造与我们的构造密切交织。我们将在第 3 节中描述这种关系。

此外，在 命题 2.4中，我们证明了一个一般性结果，解决了某些光滑退化轨迹的法诺访问者问题。

记号。 本文中，所有代数簇都定义在零特征数域 $\mathbb{K}$上。我们将一个维数为 n 的 $\mathbb{K}$-向量空间记作 V_n。格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}(k,n)$ 是以子空间 $V_k \subset V_n$为参数的簇。在 $\mathrm{Gr}(k,n)$ 上，我们有欧拉序列

$$0 \to \mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(k,n)} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(k,n)} \otimes V_n \to \mathcal{Q}_{\mathrm{Gr}(k,n)} \to 0,$$

其中 $\mathcal{U}_{\mathrm{Gr}(k,n)}$ 是秩为 k 的典范丛，而$\mathcal{Q}_{\mathrm{Gr}(k,n)}$ 是秩为$n-k$且具有丰沛行列式的商丛。

设 X 是一个簇，且$\mathcal{E}$ 是 X 上的秩为 e的向量丛。对于每个整数 $k \le e$，我们将,$\mathcal{E}$的格拉斯曼丛 $\mathbb{G}\mathrm{r}_X(k)$记作 $\mathbb{G}\mathrm{r}_X(k,\mathcal{E})$，它以$\mathcal{E}$的纤维中的 k维向量子空间为参数。对于 $\mathbb{G}\mathrm{r}_X(k,\mathcal{E})$，有相对欧拉序列

$$0 \to \mathcal{U}_{\mathcal{E}} \to p^*\mathcal{E} \to \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} \to 0$$

其中 p 是自然投影 $p\colon \mathbb{G}\mathrm{r}_X(k,\mathcal{E}) \to X$，且 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 是相对典范丛，对于该丛有 $p_*\mathcal{U}_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$。

设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 是 X 上的两个向量丛，其秩分别为 e 和 f。若 $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是一个向量丛态射，则记 $\mathrm{D}_r(\varphi) \subset X$ 为秩$(\mathrm{rank}(\varphi_x) \le r)$ 的轨迹；它是 φ 的第（$\min(e, f) - r$）个退化轨迹。若 $\mathcal{F}$ 是光滑簇 X 上的整体生成向量丛，则记 $\mathscr{Z}(\mathcal{F}) \subset X$ 为 X 中 $\mathcal{F}$ 的一般整体截面的零点轨迹，并记 $V(\varphi) \subset X$ 为整体截面 φ 的零点轨迹。

我们用$\mathbf{D}(X)$表示 X上的凝聚层的有界导出范畴。

致谢。 作者感谢 Enrico Fatighenti、Alexander Kuznetsov、Claudio Onorati 和 Andrea Petracci 对本文初稿提出的宝贵意见和建议。本研究部分得到了欧盟通过国家复苏与韧性计划（PNRR）——任务4：教育与研究——组成部分2：从研究到商业——投资1.1号通知 Prin 2022——DD N. 104 del 2/2/2022 资助，项目题目为“辛代数簇：其与法诺流形及导出范畴的相互作用”，项目代码为 2022PEKYBJ，CUP J53D23003840006，资助来源为 NextGenerationEU。作者是 INDAM-GNSAGA 的成员。

2. 几何构造

退化轨迹。 为了构造我们的例子，我们先介绍一些研究向量丛态射退化轨迹的有用工具。大多数结果都是经典的，例如， [Ful84、Wey03、DBFT22、BFMT21、FTT24]。

定理2.1. [*Ful84,* 定理*14.*4] 设 X 为光滑射影簇，设 E 和 F 为 X上的向量丛，且 $E^\vee \otimes F$ 整体生成，并设 $\varphi \in H^0(X, E^\vee \otimes F)$ 为一般整体截面。若 $D_r(\varphi) \neq \varnothing$，则 $D_r(\varphi)$ 的维数为 $m_r = \dim X - (\mathrm{rk}\, E - r)(\mathrm{rk}\, F - r)$。

沿用上述记号，设 $p\colon \mathbb{G}\mathrm{r}_X(k,\mathcal{E}) \to X$为到 X的自然投影，并假设$k \le \mathrm{rk}\,\mathcal{E}$。由投影公式可得

$$p_*(p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}_{\mathcal{E}}^\vee) \cong \mathcal{F} \otimes p_*(\mathcal{U}_{\mathcal{E}}^\vee) \cong \mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^\vee.$$

此外，由勒雷谱序列，我们得到

$$H^0(\mathbb{G}\mathrm{r}(k,\mathcal{E}), p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}_{\mathcal{E}}^\vee) \cong H^0(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}). \tag{1}$$

特别地，对于一般整体截面 $\varphi \in H^0(X, \mathrm{E}^\vee \otimes \mathrm{F})$，经由同构 (1)，存在唯一的整体截面 $\varphi_{\mathcal{E}} \in H^0(\mathbb{G}\mathrm{r}(k, \mathrm{E}) p^*\mathrm{F} \otimes \mathrm{U}^\vee\mathrm{E})$。注意 $\varphi_{\mathcal{E}}$由复合 $\mathrm{U}_{\mathcal{E}} \hookrightarrow p^*\mathrm{E} \xrightarrow{p^*\varphi} p^*\mathrm{F}$ 给出。类似地，设 q: $\mathrm{Gr}_X(k, \mathrm{F}^\vee) \to X$ 是到 X 上的自然投影，并假设 $k \leq \mathrm{rk}\,\mathrm{F}$。于是我们有

$$H^0(\mathbb{G}\mathrm{r}(k, \mathcal{F}^\vee), q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{U}^\vee_{\mathcal{F}^\vee}) \cong H^0(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}). \tag{2}$$

特别地，存在唯一一个与 φ 相关联的 $\varphi_{\mathcal{F}^\vee} \in H^0(\mathbb{G}\mathrm{r}(k, \mathcal{F}^\vee) q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{U}^\vee{}_{\mathcal{F}^\vee})$，由复合映射 $q^*\mathcal{E} \xrightarrow{q^*\varphi} q^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{U}^\vee_{\mathcal{F}^\vee}$ 给出。

在此，我们引入一个对下文有用的概念。

定义 2.2。设 X 是一个簇。在 X 上具有一般纤维 $\mathrm{Gr}(k, n)$ 的分层Grassmann丛是一个二元组 (Y, p)，其中 Y 是一个簇，且 p 是一个满射态射 $p\colon Y \to X$，满足 X 具有一个分层 $X = \bigsqcup_i X_i$，使得对于所有 i，态射 $p^{-1}(X_i) \to X_i$ 都是局部平凡的 $\mathrm{Gr}(k, n+i)$-丛。若 $k = 1$，则称其为分层射影丛。

下一个结果结合了 [Kuz16，引理 2。1] 以及经典结论，但由于我们未能在其他地方找到这种形式的完整证明，因此在此给出完整证明。

引理2.3。设 X 为一个光滑簇。考虑

$$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$$

一个向量丛的通用态射，其中 $\mathrm{rk}E = e > f = \mathrm{rk}F$，定义在 X上，并满足 $E^\vee \otimes F$ 整体生成。令 p: $\mathbb{G}\mathrm{r}_X(k, E) \to X$ 为自然投影，并考虑

$$\varphi_{\mathcal{E}} \in H^0(\mathbb{G}\mathrm{r}_X(k, \mathcal{E}), p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{U}^\vee_{\mathcal{E}}),$$

$p^*F \otimes U^\vee_{\mathcal{E}}$的整体截面，定义为以下复合

$$\mathcal{U}_{\mathcal{E}} \hookrightarrow p^*\mathcal{E} \xrightarrow{p^*\varphi} p^*\mathcal{F}.$$

假设 $\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$ 非空。那么以下陈述成立 .

i. 若 $k = e - f$，则该簇

$$Y_1 = V(\varphi_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{G}\mathrm{r}_X(e - f, \mathcal{E})$$

通过自然投影 p 的限制，它与 X 双有理等价。此外，$p_{|Y}$ 在 X 上的例外轨迹为 $D_{f-1}(\varphi)$。

ii. 若 $k = 1$，则该簇

$$Y_2 = V(\varphi_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$$

是 X 上具有一般纤维 $\mathbb{P}^{e-f-1}$ 的分层射影丛。令 q: $\mathbb{P}_X(F^\vee) \to X$ 为自然投影，并考虑

$$\varphi_{\mathcal{F}^\vee} \in H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee), q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)),$$

通过复合得到的 $q^*E^\vee \otimes O_{\mathcal{F}^\vee}(1)$ 的整体截面

$$q^*\mathcal{E} \xrightarrow{q^*\varphi} q^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1).$$

于是，$\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$ 与下式双有理等价

$$Z = V(\varphi_{\mathcal{F}^\vee}) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee).$$

iii. 使用上述记号，若 $k = e - f$ 和 $f = e - 1$，则 $Y_1 = Y_2$，我们称其为 Y。于是，

$$Y = \mathrm{Bl}_{\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)} X,$$

并且 $\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$与 Z双有理。

证明。我们先证明（i）。根据定义，$\mathbb{G}\mathrm{r}_X(e-f, \mathsf{E})$是一个参数化对（$x, V_x$）的簇，其中 $x \in X$，且 V_x 是E_x的一个（$e-f$）维子空间。点 $y \in Y_1$ 是 $\in \mathbb{G}\mathrm{r}_X(e-f, \mathsf{E})$中的一对（$x$, V_x），满足$\varphi_{\mathcal{E},x}(V_x) = 0$。注意，由同构（1），满足$\varphi_{\mathcal{E},x}(V_x) = 0$ 的点 $x \in X$，正是满足 φ_x $(V_x) = 0$的 X 中的点。因此，$p_{|Y_1}$ 的纤维是$\ker \varphi_x$中所有维数为 $e-f$ 的 $V_x \subset \ker \varphi_x$ 的集合，这对应于格拉斯曼簇$\mathrm{Gr}(e-f, \dim(\ker \varphi_x))$。这意味着一般而言，纤维 $p_{|Y_1}^{-1}(x)$是一个点，因为一般而言，$\mathrm{rk}\ \varphi_x = f$，因此 $\dim(\ker \varphi_x) = e-f$。注意，$X$具有由.....诱导的分层

$$X = \mathrm{D}_f(\varphi) \supset \mathrm{D}_{f-1}(\varphi) \supset \mathrm{D}_{f-2}(\varphi) \supset \dots$$

于是，在 $X_i = \mathrm{D}_{f-i}(\varphi) \setminus \mathrm{D}_{f-i-1}(\varphi)$ 上，映射 $p_{|Y_1}\colon Y_1 \to X$ 是一个局部平凡的 $\mathrm{Gr}(e-f, e-f+i)$-丛。因此，对 $(Y_1, p_{|Y_1})$ 是一个分层Grassmann丛，其一般纤维是 X 上的一个点。X_i 的原像的维数为

$$\dim(X) - i(e-f+i) + i(e-f) = \dim(X) - i^2.$$

因此，Y_1 上诱导分层的维数小于 $\dim(X)$，即开层的维数。从而 $\dim(Y_1) \leq \dim(X)$。注意，Y_1 是秩为 f 的向量丛的一个整体截面在维数为 $\dim(X) + f$ 的光滑簇 $\mathbb{G}\mathrm{r}_X(e-f, \mathcal{E})$ 上的零点轨迹。由此可知，Y_1 是 Cohen–Macaulay 且不可约的。特别地，

$$p_{|Y_1} : Y_1 \to X$$

是一个双有理映射，其例外轨迹为 $\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$。

对于 (ii)，考虑分层

$$X = \mathrm{D}_f(\varphi) \supset \mathrm{D}_{f-1}(\varphi) \supset \mathrm{D}_{f-2}(\varphi) \supset \dots$$

于是，在 $X_i = \mathrm{D}_{f-i}(\varphi) \setminus \mathrm{D}_{f-i-1}(\varphi)$ 上，映射$p_{|Y_2}\colon Y_2 \to X$ 是局部平凡的 $\mathbb{P}^{e-f+i-1}$丛。因此，$(Y_2, p_{|Y_2})$ 是一个一般纤维为 $\mathbb{P}^{e-f-1}$ 、底空间为 X 的分层射影丛。X_i 的原像的维数为

$$\dim(X) - i(e-f+i) + (e-f+i-1) = \dim(X) + (e-f-1) - i(e-f+i-1).$$

对于 $i \geq 1$，有 $i(e-f+i-1) > 1$，因此，Y_2 上诱导分层的维数小于 $\dim(X) + (e-f+1)$，即开层的维数。于是，$\dim(Y_2) \leq \dim(X) + (e-f+1)$。另一方面，$Y_2$ 是光滑簇 $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ 上一个秩为 f 的向量丛的整体截面的零点轨迹，其维数为 $\dim(X) + (e-1)$。由此可知，Y 是 Cohen–Macaulay 且不可约的。

现在我们研究 Z。使用与上文相同的论证，我们得到 X 的一个分层$X = \bigsqcup X_i$，其中 $X_i = \mathrm{D}_{f-i}(\varphi) \setminus \mathrm{D}_{f-i-1}(\varphi)$。对于 $x \in X_i$，有 $q_{|Z}^{-1}(x)$ 是 $\ker \varphi_x^T$ 的 $\mathbb{P}$。特别地，若 $x \in X_0$，则纤维为空；若 $x \in X_i$ 对 $i \geq 1$ 成立，则纤维为 $\mathbb{P}^{i-1}$。因此，$(Z, q_{|Z})$ 是 $\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$ 上的分层射影丛，其一般纤维是一个点。特别地，对于 $i \geq 1$，X_i 的原像的维数为

$$\dim(X) - i(e-f+1) + (i-1) = \dim(\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)) + (1-i)(e-f+i).$$

因此，对于 $i \geq 2$，由此诱导的 Z 的分层中每个分层的维数都小于 $\dim(\mathrm{D}_{f-1}(\varphi))$，故 $Z \leq \mathrm{D}_{f-1}(\varphi) = \dim(X) - (e-f+1)$。另一方面，$Z$ 是光滑簇 $\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee)$ 上一个秩为 e 的向量丛的整体截面的零点轨迹，该光滑簇的维数为 $\dim(X) + f - 1$；因此，Z 是 Cohen–Macaulay 且不可约的，其维数为 $\dim(X) - (e-f+1)$。特别地，Z 与 $\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$ 双有理。

最后，我们证明 (iii)。若 $f = e-1$，则满足 [Kuz16 引理 2 的假设。1], 因此第一部分得证。剩下需要研究 Z。但这由第 (ii) 点可得。□

作为前一个引理的推论，我们可以证明一个结果，从而解决一大类实例中的 Fano 访客问题。

命题 2.4. 设 X 为光滑簇。设 E、F 为秩 $\operatorname{rk} E = e > f = \operatorname{rk} F$ 的向量丛，使得 $E^\vee \otimes F$ 整体生成，并设 $\varphi\colon E \to F$ 为一般的向量丛态射。设 $p\colon \mathbb{P}_X(E) \to X$ 与 $q\colon \mathbb{P}_X(F^\vee) \to X$ 为自然投影，并考虑

$$\varphi_{\mathcal{E}} \in H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{E}), p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)),\ \varphi_{\mathcal{F}^\vee} \in H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee), q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1))$$

对应于 φ。定义这些代数簇

$$Y = V(\varphi_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{E}),\quad Z = V(\varphi_{\mathcal{F}^\vee}) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee).$$

假设下列条件成立：

a. $\mathrm{D}_{f-2}(\varphi) = \emptyset$;
b. $p^*(K_X \otimes \det \mathcal{E} \otimes \det \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-e+f)$ *is anti-ample;*

则 Y 是 Z 的 *Fano* 宿主。

证明。 由 引理2.3（ii），我们有 Y 是一个分层射影丛，位于 X 上，一般纤维为 $\mathbb{P}^{e-f-1}$，并变为 $\mathbb{P}^{e-f}$，在 $\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$上。由引理2.3（ii），$\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$ 双有理于Z，且由于 $\mathrm{D}_{f-2}(\varphi)$ 对 (a) 为空，故它们同构。

我们要证明存在一个嵌入 $\mathbf{D}(Z) \to \mathbf{D}(Y)$。注意，在 $\mathrm{D}_{f-1}(\varphi)$ 上，投影 $p_{|Y}$ 是一个局部平凡的 $\mathbb{P}^{e-f}$-丛，因此

$$\dim(Z \times_X Y) = \dim(Z) + (e-f) = \dim(X) - 1.$$

因此，我们可以应用 [Kuz07，定理 8。8], 并得到

$$\mathbf{D}(Y) = \langle \mathbf{D}(Z), p^*\,\mathbf{D}(X) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1), \ldots, p^*\,\mathbf{D}(X) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(e-f) \rangle.$$

注意， $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ 的典范丛为

$$K_{\mathbb{P}_X(\mathcal{E})} = p^*(K_X \otimes \det \mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-e),$$

其中 $p\colon \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$为自然投影。由伴随公式和条件 (b)， Y 的反典范丛是一个丰沛线丛的限制，因此也是丰沛的。因此，Y 是一个 Fano 簇。□

注 2.5。 若 X 是一个光滑且 Picard 秩为一的 Fano 簇，例如格拉斯曼簇，那么命题 2.4中的条件 (b) 就成为一个数值条件。事实上，设 ι_X 为 X的指标，并设 $\det \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X(\alpha)$， $\det \mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X(\beta)$。那么条件 (b) 可改写为： $\iota_X - \alpha - \beta > 0$ 且 $f < e$。

通过这种方式，我们得到了一组新的代数簇，对于它们，Fano 访客问题有肯定答案。作为应用，我们证明了一般恩里克斯曲面的 Fano 维数可以进一步降低。

3. 一般恩里克斯曲面及其宿主

在本节最后，我们讨论一般恩里克斯曲面的两个法诺宿主：第一个是六维的，由 Kuznetsov 在 [Kuz18]中描述；第二个是四维的，也是本文的主要结果。

我们固定以下记号：设 V_3， V_{13}， W_3 为 3 维向量空间， $X = \mathbb{P}(V_3) \times \mathbb{P}(V_{13})$， $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(2, 0) \oplus \mathcal{O}_X(0, 2)$， $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X \otimes W_3$， 以及 $q\colon \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee) \to X$到 X 的自然投影。

回顾 [OS20，引理 2。1] 一般的恩里克斯曲面可描述为一般态射的第一退化轨迹 $D_1(\varphi)$：

$$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}.$$

根据同构（2）

$$H^0(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) \cong H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee), q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)),$$

将 $\varphi_{\mathcal{F}^\vee}$ 记为 φ 在同构（2）下的像。

因此，我们可以考虑零点轨迹 $S = V(\varphi_{\mathcal{F}^\vee}) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee)$，其可写为

$$S = \mathscr{Z}(q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee)$$

中所考虑的恩里克斯曲面 [Kuz18，引理 3]。注意，$q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1) = \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)^{\oplus 3}$，改变 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)$ 的整体截面的三维子空间，即可得到一般的恩里克斯曲面。我们将在定理 3.1 中证明，S 和 $D_1(\varphi)$ 实际上是同构的。

六维法诺宿主。 在 [Kuz18], 中，为了构造 S的六维法诺宿主，Kuznetsov 考虑了乘积 $\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee) \times \mathbb{P}(W_3)$。关键观察是，由 Künneth公式给出的同构

$$H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee), q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)) \cong H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee) \times \mathbb{P}(W_3), \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_3)}(1)). \tag{3}$$

因此，上一段中的同一个截面 φ 对应于 $H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee) \times \mathbb{P}(W_3), \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_3)}(1))$ 的唯一一般整体截面 $\tilde{\varphi}$。于是我们可以考虑其零点轨迹 $V(\tilde{\varphi}) = T \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee) \times \mathbb{P}(W_3)$，即

$$T = \mathscr{Z}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_3)}(1)) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee) \times \mathbb{P}(W_3).$$

在 [Kuz18中，定理 4]证明了 T 是一个法诺六维簇，可描述为 $\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee)$上的分层射影丛，其一般纤维为一个 $\mathbb{P}^1$，它跃变为 $\mathbb{P}^2$上的一个丛 S。由此可得

$$\mathbf{D}(T) = \langle \mathbf{D}(S), \mathbf{D}(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee)), \mathbf{D}(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee)) \rangle.$$

四维法诺宿主。本文的核心思路是考虑另一个簇Y，它由完全相同的 φ定义，并将其与 S联系起来。事实上，如（3）中所示，可以得到另一个典范同构

$$H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee) \times \mathbb{P}(W_3), \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_3)}(1)) \cong H^0(\mathbb{P}(W_3) \times X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_3)}(1) \boxtimes \mathcal{F}). \tag{4}$$

将 $\tilde{\varphi}$ 记为$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_3)}(1) \boxtimes \mathcal{F}$的唯一整体截面，它 $\tilde{\varphi}$通过（4）与之对应。因此，零点轨迹 $V(\tilde{\varphi}) = Y \subset \mathbb{P}(W_3) \times X$ 定义了一个簇

$$Y = \mathscr{Z}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_3)}(1) \boxtimes \mathcal{F}) \subset \mathbb{P}(W_3) \times X,$$

可改写为

$$Y = \mathscr{Z}(\mathcal{O}(1,0,2) \oplus \mathcal{O}(1,2,0)) \subset \mathbb{P}(W_3) \times \mathbb{P}(V_3) \times \mathbb{P}(V_3').$$

接下来，我们证明 X 与 Y双有理，并说明如何将 Y视为 S的法诺宿主。

定理 3.1. 该簇

$$Y = \mathscr{Z}(\mathcal{O}(1,0,2) \oplus \mathcal{O}(1,2,0)) \subset \mathbb{P}(W_3) \times \mathbb{P}(V_3) \times \mathbb{P}(V_3')$$

是一个法诺四维簇 ld。此外，$Y \cong \mathrm{Bl}_S(\mathbb{P}(V_3) \times \mathbb{P}(V_{\prime 3}))$，其中 $S\,a$ 为一般的恩里克斯曲面 .

证明。在此证明中，与上述记号一致，我们记 $X = \mathbb{P}(V_3) \times \mathbb{P}(V_3)$，$\mathcal{E} = \mathcal{O}_X \otimes W_3$，$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(2, 0) \oplus \mathcal{O}_X(0, 2)$。

与前面的讨论一样，我们从 X 上的一个一般向量丛态射开始，$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$。由（2）中的同构，记 $\varphi_{\mathcal{F}^\vee}$ 为 $q^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)$所对应的整体截面 φ。

$$\varphi_{\mathcal{F}^\vee} \in H^0(\mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee), q^*\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}^\vee}(1)).$$

根据 定理2.1，$\mathrm{D}_1(\varphi) \subset X$ 是一个光滑曲面，因为 $\mathrm{D}_0(\varphi)$ 为空。根据 引理2.3(iii)$\mathrm{D}_1(\varphi)$与.....双有理

$$S = V(\varphi_{\mathcal{F}^\vee}) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{F}^\vee).$$

S 是恩里克斯曲面 S，其描述见 [Kuz18，引理 3]。注意，$\mathrm{D}_0(\varphi)$ 为空，因此我们得出 $\mathrm{D}_1(\varphi) \cong S$。

现在我们转而关注簇 Y。后者定义为 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 中一个秩为 2 的向量丛的截面的零点轨迹，因此 Y 是四维的。根据伴随公式，

$$K_Y = K_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}(1,2,0) \otimes \mathcal{O}(1,0,2)_{|Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}(-1,-1,-1)_{|Y}.$$

因此，Y 是法诺的。

注意到，由于$\mathcal{E} = W_3 \otimes \mathcal{O}_X$，则 $\mathbb{P}(W_3) \times X = \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$。因此，如前所述，若 p： $\mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$是自然投影，则 Y 可改写为

$$Y = V(\varphi_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{E}),$$

其中 $\varphi_{\mathcal{E}}$是如下对象的整体截面： $p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ 对应于 φ，经由同构（1）。因此，我们处于引理2.3。根据引理2.3(i)， Y 双有理于 X。特别地，由于$f = e - 1 = 2$，并且由于我们已经证明 $D_1(\varphi) \cong S$，根据引理2.3(iii)，我们有同构

$$Y \cong \mathrm{Bl}_S(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2).$$

□

现在我们可以描述 Y的数值不变量和范畴性质。

由于 Y 是完全交，其不变量可利用标准正合序列和黎曼-罗赫定理迅速计算。

推论3.2. 簇 Y 具有以下不变量：

$$e(Y) = 21,\ h^0(-K_Y) = 27,\ (-K_Y)^4 = 102.$$

Y 的下半霍奇菱形为

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 13 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & 3 & & 0 & & \\ & & & 0 & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & & & \end{array}$$

此外，若 $\Lambda \subset H^2(S,\mathbb{Z})$ 是与恩里克斯曲面 S相关联的秩十格，则 Y 的整上同调为：

$$H^k(Y,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & if \ \ k=0,\ 8 \\ \mathbb{Z}^{\oplus 3} & if \ \ k=2,\ 6 \\ \mathbb{Z}^{\oplus 3} \oplus \Lambda \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if \ \ k=4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

推论3.3. 簇 Y 是一个具有半正交分解的四维簇 n

$$\mathbf{D}(Y) = \langle \mathbf{D}(S), E_1, \ldots, E_9 \rangle$$

其中 E_1，……， E_9 为例外丛。 Y的*Hodge*菱形是对角的，但 $K^0(Y)$包含一个2-挠类；特别地，$\mathbf{D}(Y)$ 不具有全例外集合。

证明。 该半正交分解由奥尔洛夫爆破公式以及$\mathbf{D}(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$由长度为九的例外集合生成这一事实给出。

格罗滕迪 半正交分解下，ck 群具有可加性，因此 e

$$K_0(Y) = K_0(S) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 9}.$$

注意， S 中的 2-扭子会在 Y中诱导出 2-扭子，因此，根据 [Kuz18，引理 1], $\mathbf{D}(Y)$不具有全例外集合。□

这为模空间中一般的恩里克斯曲面的 Fano 访客问题提供了一个四维簇解。

利用推论 3.3 我们证明了 S 的 Fano 维数至多为 4。注意， $\mathbb{P}^1$ 和德尔佩佐曲面都不能成为 S的 Fano 宿主。因此，如果证明没有任何 Fano 三维簇能成为 S的 Fano 宿主，就可得出一般恩里克斯曲面的 Fano 维数为 4。

反设 Y 是 S的三维 Fano 宿主。于是我们得到以下关于霍赫希尔德同调维数的不等式：

$$12 = \dim(\mathrm{HH}_0(S)) \leq (\dim \mathrm{HH}_0(Y)).$$

若 $\rho(Y)$ 表示 Y的皮卡秩，则有

$$\dim \mathrm{HH}_0(Y) = 2 + \rho(Y),$$

因此 $\rho(Y) \geq 5$。根据 Fano 三维簇的分类，皮卡秩为 ≥ 5 的 Fano 三维簇只有八个族，而且它们都存在全例外集合。这意味着 $K_0(Y)$ 是无挠的，这与假设 $K_0(S) \subset K_0(Y)$ 矛盾。

参考文献

[BBF16] M. Bernardara、M. Bolognesi 与 D. Faenzi。行列式簇的同调射影对偶。数学进展，296:181–209，2016。[BFMT21] M. Bernardara、E. Fatighenti、L. Manivel 与 F. Tanturri。K3 型 Fano 四维簇。傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔），待发表。[BO95] A. Bondal 与 D. Orlov。代数簇的半正交分解。*arXiv:alg-geom/9506012*，1995。[DBFT22] L. De Biase、E. Fatighenti 与 F. Tanturri。由格拉斯曼簇上齐性向量丛得到的 Fano 三维簇。康普卢顿数学杂志，35(3):649–710，2022。[FTT24] E. Fatighenti、F. Tanturri 与 F. Tufo。若干箭图零点轨迹法诺四重体的几何（附 E. Kalashnikov 与 F. Tufo 的附录）*arXiv:2406.04389*，2024[Ful84] W.Fulton。交理论。施普林格，沙姆，数学及其边缘领域成果，第3辑，2，1984。

[KKLL17] Y. Kiem、I. Kim、H. Lee 与 K. Lee。所有完全交簇都是 Fano 访客。数学进展，311:649–661，2017。[KL15] Y. Kiem 与 K. Lee。Fano 访客、Fano 维数与轨形 Fano 宿主。双有理几何、*Kähler–Einstein* 度量与退化，517–544，施普林格数学与统计会议录，409；[Kuz07] A. Kuznetsov。同调射影对偶。高等科学研究所数学出版物，105:157–220，2007。[Kuz10] A. Kuznetsov。三次四维簇的导出范畴。有理性问题的上同调与几何方法。新视角，马萨诸塞州波士顿：比尔克霍伊泽：219–243，2010。[Kuz16] A. Kuznetsov。c5 型 Küchle 五维簇。数学杂志，284(3-4):1245–1278，2016。[Kuz18] A. Kuznetsov。将恩里克斯曲面的导出范畴嵌入 Fano 簇的导出范畴。消息报：数学。，83，2018。[OS20] J. Ottem 与 F. Suzuki。具有非代数整 Hodge 类的 Enriques 曲面铅笔。数学年刊，377(1.2):183–197，2020。[ST18] E. Segal 与 R.Thomas。五次三维簇与 Fano 十一维簇。纯粹与应用数学杂志，743:245– 259，2018。[Wey03] J. Weyman。向量丛上同调与合冲，剑桥数学丛书第149卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003。

博洛尼亚大学数学系，意大利博洛尼亚市圣多纳托门广场 5 号，邮编 40127电子邮件地址: federico.tufo96@gmail.com