arXiv:2602.03399v1 [math.NT] 3 Feb 2026

¨圆上的扭积与海森堡幂零流形的莫比乌斯不相交性猜想

Yuk-Kam Lau 和 Jing Ma

Abstract. 我们证明了萨纳克猜想，即关于圆上的扭积与三维海森堡幂零流形上的动力系统的莫比乌斯不相交性猜想。该动力系统最初由 Wen Huang、Jianya Liu 和 Ke Wang 研究。我们将 Huang、Liu、Wang 及其后继者的工作推广到更广泛的情形，去除了此前施加的限制性对称性条件。

1. Introduction

设 X 是一个紧致度量空间，且 $T : X \to X$ 是一个连续映射。沿用 [S12],的说法，我们称二元组 (X, T) 为一个流，也称为拓扑动力系统[1]。Sarnak [S19] 提出了莫比乌斯随机性原理，猜想莫比乌斯函数 ¨obius 随机性原理，猜想莫比乌斯函数 ¨函数 $\mu(n)$ 与任意确定性流线性不相交[2] F。这一猜想现称为萨纳克猜想，也可表述为

M¨obius 不相交猜想:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \mu(n) f(T^n x) = 0, \forall\ f \in C(X), \forall\ x \in X.$$

Here $C(X)$ 表示 X 上所有连续函数组成的空间。

Sarnak 的这一猜想已在某些情形下得到证明，例如见 Bourgain [B13], Bourgain-Sarnak-Ziegler [BSZ13], Green-Tao [GT12], Liu-Sarnak [LS15, LS17], Wang [W17], Peckner [P18], Huang-Wang-Ye [HWY19], Litman-Wang [LW19], 以及 Huang-Liu-Wang [HLW21]。感兴趣的读者可参阅综述论文 [FKL18]。作为进一步佐证的一种尝试，可以先研究 μ 与远端流之间的线性不相交性，因为远端流的熵为零，见 [P67]。若对任意 $x \neq y$都有 $\inf_{n\geqslant 0} d(T^n x, T^n y) > 0$，则称流（$X, T$）为远端流，其中 d 是 X上的一个度量。关于极小远端流的 Furstenberg结构定理 [F63] 指出，扭积是构成远端流的基本单元。因此，进一步可将研究归结为由扭积给出的远端流这一情形。

通讯作者：Jing Ma。*Date*：2026 年 2 月 4 日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 11N37, 11L03，37A44。*Key words and phrases.* M¨obius 不相交性、萨纳克猜想、测度复杂度、刚性多项式速率。

[1]一些作者要求 T 是一个同胚，并将其描述为可逆拓扑动力系统。[2]如果一个流的拓扑熵为零，则称其是确定性的。

扭积由两个空间的直积及一个作用构成。一个例子是二维环面 $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$ 上的扭积 $T = T_{\alpha,\ h}$，其定义如下：

$$T_{\alpha,h} : (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + h(x)),$$

其中 $\alpha \in [0, 1)$ 且 h： $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 是一个连续函数。流（$\mathbb{T}^2$，$T_{\alpha,\ h}$）是远端的，其 Möbius 不相交性最早由 Liu 和 Sarnak 在 [LS15、LS17]中研究。他们在 [LS15] 中证明，M¨obius 不相交猜想对（$\mathbf{T}^2$，$T_{\alpha,\ h}$）成立，其中任意 α以及任意傅里叶系数满足某些条件的解析 h均适用。

他们结果的一个显著特点，尤其是在 KAM 理论研究中，是其对所有 α都具有普遍性。对 h 的条件是一个主要关注点，随后人们对此进行了深入研究。Wang [W17] 证明了解析 h 的充分性（对傅里叶系数没有额外条件）。Huang-Wang-Ye [HWY19], Kanigowski-Lema´nczyk-Radziwill[KLR21] 以及 de Faveri [F22] 进一步将 h的条件从解析性放宽为C^∞-光滑、 $C^{2+\varepsilon}$-光滑和 $C^{1+\varepsilon}$-光滑。[3]

这些近期研究引入了动力系统学者提出的一些概念，用以证明许多情形下的莫比乌斯不相交性，而不局限于圆 $\mathbf{T}^2$ 上的扭积。设 T 是紧空间 X 上的一个同胚。令 $M(X, T)$ 表示 X 上所有 T- 不变博雷尔概率测度的集合。文献 [KLR21] 提出了一种方法，利用 (X, T, ν) 对所有 $\nu \in M(X, T)$ 的刚性多项式速率，推出莫比乌斯不相交性。几年前，文献 [HWY19]，指出，若 X 配备了度量，则 (X, T, ν, d) 对所有 $\nu \in M(X, T)$ 具有次多项式测度复杂度，便意味着 (X, T) 具有莫比乌斯不相交性。我们将在第 2 节给出更多细节。

最近，Huang-Liu-Wang [HLW21] 考察了$\mathbb{T} \times \Gamma\backslash G$ 上的扭积情形，其中 $\Gamma\backslash G$ 是三维海森堡幂零流形。具体而言，$\mathbb{T}$ 仍表示单位圆，并令

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ & 1 & \mathbb{R} \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ & 1 & \mathbb{Z} \\ & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

$\mathbf{T} \times \Gamma\backslash G$ 上的扭积 $S_\alpha : \mathbf{T} \times \Gamma\backslash G \to \mathbf{T} \times \Gamma\backslash G$ 给出，

$$S_\alpha : (t, \Gamma g) \mapsto \left(t + \alpha, \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & \varphi(t) & \psi(t) \\ 0 & 1 & \eta(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \tag{1.2}$$

其中 φ、 η 和 ψ 是周期为 1 的周期函数，且 $\alpha \in [0, 1)$。为简便起见，我们在记号 S_α 中省略这些函数对变量的依赖。假设

(i) φ, η and ψ are C^∞-smooth.

流 $(\mathbf{T} \times \Gamma\backslash G,\ S_\alpha)$，简记为 $(\mathbf{X}\ S_\alpha)$，被证明是远端的。进一步假设满足以下条件

(ii) $\varphi = \eta$,
(iii) φ and hence η have zero mean, i.e. $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \eta(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Huang等人证明，对于有理数 α，$(\mathbf{X}\ S_\alpha)$的M¨obius不交性猜想成立；而对于无理数 α，流 $(\mathbf{X}\ S_\alpha)$具有次多项式测度复杂度，相对于

[3]对于实数 $r > 0$，$\mathbf{R}$ 上的 C^r 次光滑周期实值函数 f 可由其傅里叶系数的估计刻画： $\widehat{f}(n) \ll_r n^{-r}$ 对所有 $|n| \geqslant 1$ 均成立。

某个自然度量以及任意测度，在 $M(\mathrm{X}\ S_\alpha$中)。因此，在条件(i)-(iii)下，M¨obius不交性猜想关于(X S_α)对所有 α均成立。参见附录 II和定理 1.1，出自 [HLW21]。

在这三个条件中，条件 (ii) 的限制最强，如下所示：

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c & \\ & 1 & d \\ & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+c & ad \\ & 1 & b+d \\ & & 1 \end{pmatrix}\ \text{while}\ \begin{pmatrix} 1 & c & \\ & 1 & d \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+c & bc \\ & 1 & b+d \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

对中心的影响， ad 和 bc，通常并不相同。施加条件 $a=b$和 $c=d$ 可以恢复对称性，并在一定程度上缓解海森堡群固有的非交换性。受$\mathbb{T}^2$ 情形的启发，自然会问：是否只需比 (i) 更弱的光滑性条件？He 和 Wang [HW23], 、Ma 和 Wu [MW24]探讨了这些问题。

在 [HW23], 中，保留 $\eta=\varphi$，但将 $\varphi(=\eta)$ 和 ψ 放宽为 $C^{2+2\varepsilon}$-光滑和 $C^{1+\varepsilon}$-光滑，建立了 (X S_α) 的刚性多项式速率，从而得到莫比乌斯不相交性。这项工作结合了 Huang-Liu-Wang [HLW21], 、Kanigowski-Lema´nczyk- Radziwill [KLR21] 以及 de Faveri [F22] 的思想。Ma 和 Wu [MW24] 沿着 [HLW21] 的思路进一步推进，放宽了条件 (ii)，但保留了光滑性假设 (i)。在 [MW24 中，定理 1.1 和 1.2], 推导出了有理 α 情形下的莫比乌斯不相交性，且无需约束 $\eta=\varphi$；而对于无理 α，若以条件 $\eta=k\varphi$ 取代 (ii)，则可建立次多项式测度复杂度，其中 k 是一个（固定的）非零实数。

本文的主要目标是在放宽条件 *(i)* 的前提下，对于 M¨obius 不相交性（对应于 ($\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha$）移除条件 (ii)。这就是下文的定理 1.2 （无理数 α的情形），它是定理1.1的推论，因为由命题 2.1可知，刚性多项式速率（PR 刚性）是 M¨obius 不相交性的充分条件。除了 PR 刚性之外，我们还可以在不假设条件 (ii) 的情况下证明次多项式测度复杂度。具体而言，我们得到以下定理。

定理 1.1。 设 $\mathbb{T}$ 为单位圆，$\Gamma\backslash G$ 为 3 维海森堡幂零流形。设 $\alpha\in[0,1)$ 和 S_α 为 $\mathbb{T}$ *{v26'>*上的扭积，（1.2）中定义如下，其中 φ、η、ψ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的周期为 1 的周期函数，并且 φ和 η 均为零均值。

令 $0<\varepsilon<10^{-2}$。假设 ψ 是 $C^{1+\varepsilon}$-光滑的，且 φ、η 是 $C^{2+2\varepsilon}$-光滑的。那么，对于所有 $\nu\in M(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha)$ 以及无理数 α，$(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha, \nu)$ 具有 *PR* 刚性。

定理 1.2。 在与定理 *1.1*相同的情形和假设下，*M¨öbius* 函数 μ 与 $(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha)$ 线性不相交 α，即 *Sarnak* 的 *M¨öbius* 不相交猜想成立。

定理 1.3。 在与定理 *1.1*相同的情形下，但现在假设 φ、η、ψ均为 C^∞-光滑的，则 ($\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha, \rho$) 的测度复杂度对于任意$\rho\in M(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha)$ 和无理数 α，均为次多项式。

注1.4. 对于无理数 $\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha$， α 萨纳克猜想1.1 和1.3 两个定理均可推出该猜想，但所需的光滑性条件不同。所需光滑性可能已达到论证所能承受的极限，而在我们采用的方法中，零均值条件 (iii) 似乎不可避免。我们也证明了定理 1.3，尽管它在更强的光滑性条件下蕴含萨纳克猜想，因为目前尚无证据表明次多项式测度复杂度可由 PR 刚性推出。

我们的证明建立在 Huang-Liu-Wang [HWY19]和 de Faveri [F22]（以及 He 和 Wang [HW23]的改编工作）之上。这些论文中提出或运用的许多工具都将在本文中使用。本文的关键创新在于有效利用海森堡群的中心，并细致处理由扭积产生的双重指数和。本节最后简要介绍记号和文章结构。

记号。这里列出一些常用记号。我们写作 $e(x) := e^{2\pi ix}$ 和$\|x\| := \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$. 对于正的 A，记号 $B = O(A)$ 或 $B \ll A$ 表示存在一个正常数 c，使得 $|B| \leqslant cA$。若常数 c 依赖于参数 b，则记作 $B = O_b(A)$ 或 $B \ll_b A$。记号 $A \asymp B$ 表示 $A \ll B$且 $B \ll A$。对于拓扑空间 X，我们用 $C(X)$ 表示其上所有连续复值函数的集合。我们用 §§ 2.1 表示第 2.1 小节，等等。

组织结构。下文共分九节。第 2 节概述多项式速率刚性（PR 刚性）和测度复杂度的基本思想。第 3 节介绍一些预备工具，包括三维海森堡幂零流形上的度量以及与连分数有关的重要结果。第 4 至第 6 节完成定理 1.1 的证明。定理 1.2由定理 1.1 以及 Green-Tao 关于无理数与有理数 α的结果推得。这将在第 7 节完成。第 8 至第 10 节致力于证明定理1.3。

2. Rigidity and Measure complexity

本节收集了 [KLR21] 和 [HWY19] 中的一些概念和事实，恕不证明。

设 X为紧空间，$T\colon X \to X$为同胚，并设 $M(X,T)$ 为 X上所有 T-不变博雷尔概率测度的集合。

2.1. **PR 刚性**。对于任意 $\nu \in M(X,T)$，若对任意 $g \in L^2(X,\nu)$，都存在一个严格递增序列 $\{r_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{N}$，使得

$$\|g \circ T^{r_n} - g\|^2_{L^2(\nu)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

此外，若存在一个线性稠密的[4] 子集 $\mathcal{F} \subset C(X)$，使得对每个 $f \in \mathcal{F}$，都存在 $\delta > 0$ 以及一个严格递增序列 $\{r_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{N}$，使得则称 (X,T,ν) 具有刚性多项式速率（PR 刚性）。

$$\sum_{|j|\leqslant r_n^\delta} \|f \circ T^{jr_n} - f\|^2_{L^2(\nu)} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2.1}$$

下面的命题由 [KLR21]中的定理 1.1 推出。

命题 2.1。如果$(X、T、\nu)$对所有 $\nu \in M(X、T)$都具有 *PR* 刚性，则$(X、T)$满足 *Möbius* 不相交性。

[4]如果空间的子集 $\mathcal{F}$ 中元素的线性组合构成稠密子集，则称该子集为线性稠密。

2.2. **测度复杂度**。 假设 X 的拓扑由度量 d诱导。对于$n \in$N，我们定义

$$\bar{d}_n(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} d(T^j x, T^j y) \tag{2.2}$$

对于 x， $y \in X$。对于 $\nu \in M(X,\ T)$，$(X,\ T)$ 相对于 ν(或¯$(X,\ T,\ \nu)$) 的测度复杂度，关注的是在度量 d_n 下，半径为 ε 的球中覆盖整个空间 X 所需的球数，允许遗漏一个在 ν 下测度小于 ε 的子集，其中 $\varepsilon > 0$ 任意。下面给出我们所需的定义。

设 $\nu \in M(X,\ T)$ 且 $\varepsilon > 0$。定义

$$\begin{aligned} &s_n(X,T,d,\nu,\varepsilon) \\ &:= \min\left\{ m \in \mathbb{N} : \nu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} B_{\bar{d}_n}(x_j,\varepsilon)\Big) > 1-\varepsilon \ \text{ for some } x_1,\cdots,x_m \in X \right\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

¯其中 $B_{\bar{d}_n}(x,\ \varepsilon) = \{y \in X :\ d_n(x,\ y) < \varepsilon\}$。注意， $\nu(X) = 1$。如果对于任意 $\tau > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n(X,T,d,\nu,\varepsilon)}{n^\tau} = 0 \quad \text{holds for any } \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

以下引用的判据（尽管我们在此处不使用它）为研究测度复杂度提供了动机。命题 2.3 关于同构流的判据将在后文应用。

命题 2.2. *(*[HWY19，定理 1.1]*)* 若 (X,T,ρ) 的测度复杂度对任意 $\rho \in M(X,T)$ 均为次多项式，则 ***M¨obius*** 不交性猜想对(X,T)成立。

称流 $(Y,$T $\nu)$ 测度同构于 (X,T,ρ)，如果存在 Borel 可测子集 $X' \subset X$ 与 $Y' \subset Y$，满足 $\rho(X') = \nu(Y') = 1, TX' \subset X'$，$\mathrm{T}(Y') \subset Y'$，使得 $\phi \circ T = \mathrm{T} \circ \phi$ 对某个可逆保测映射 $\phi :\ X' \to Y'$。

命题 2.3. *(*[HWY19，命题 2.2]*)* 设 $(Y,$T $\nu)$ 测度同构于 (X,T,ρ)。若 $(Y,$T $\nu)$ 的测度复杂度是次多项式，则 (X,T,ρ) 亦然，反之亦然。

3. Some preparation

3.1. **三维海森堡幂零流形**。海森堡群 G定义同（1.1）中所述，包含所有 3×3 对角线元素均为 1 的上三角实矩阵。众所周知，其换位子群 $G_1 = [G,G]$ 等于 Z（G）这一 G的中心，并且

$$Z(G) = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbb{R} \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，任何 $g = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ & 1 & x \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G$ 都可以分解为

$$g = \begin{pmatrix} 1 & y & \\ & 1 & x \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & z \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

其逆 g^{-1} 可以表示为

$$g^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & xy-z\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -y & \\ & 1 & -x\\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -y & \\ & 1 & -x\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & xy-z\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

As in [HLW21], 我们赋予 G 一个度量 d_G，该度量是左不变的，并且满足

$$d_G(g,g')\leqslant\|\kappa(g^{-1}g')\|_\infty \qquad \text{for any } g,g'\in G,$$

其中 $\kappa\begin{pmatrix}1 & y & z\\ & 1 & x\\ & & 1\end{pmatrix}=(x,\ y,\ z-xy)$ 和 $\|(x_1,\ x_2,\ x_3)\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant 3}|x_i|$ 是 ℓ^∞-范数。

设 $\Gamma\subset G$ 为（1.1）中定义的格。则 $\Gamma\backslash G$ 是三维海森堡幂零流形。有时我们将 $\bar g$ 记作 $\Gamma g\in\Gamma\backslash G$。度量 d_G 诱导出一个度量$d_{\Gamma\backslash G}$于 $\Gamma\backslash G$上，定义为 $d_{\Gamma\backslash G}(\bar g,\ \bar g')=\inf_{\gamma\in\Gamma}d_G(g,\ \gamma g')$，它在 $Z(G)$ 下双不变（由 d_G的左不变性可知）。

令 $\langle z\rangle:=z-n_z$，其中 n_z是最接近 z的整数，且对于整数n，$\langle n+1/2\rangle:=1/2$。特别地，

$$|\langle z\rangle|=\|z\|:=\min_{n\in\mathbb{Z}}|z-n|.$$

与阿贝尔情形（$\mathbf{T}^2$）不同，陪集 $\begin{pmatrix}1 & b & c\\ & 1 & a\\ & & 1\end{pmatrix}$ 可能没有 $\begin{pmatrix}1 & \langle b\rangle & \langle c\rangle\\ & 1 & \langle a\rangle\\ & & 1\end{pmatrix}$ 作为代表元。尽管如此，由于 $\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z}1 & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\subset Z(G)\cap\Gamma$，对于任意 $\bar g\in\Gamma\backslash G$，我们有

$$\bar g\begin{pmatrix}1 & y & z\\ & 1 & x\\ & & 1\end{pmatrix}=\bar g\begin{pmatrix}1 & y & \langle z\rangle\\ & 1 & x\\ & & 1\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

3.2. $\mathbf{T}$ 上的度量$\mathbf{T}\times\Gamma\backslash G$。令 $d_{\mathbb{T}}(t,\ t'):=\|t-t'\|$ 为 $\mathbf{T}$ 上的度量，并定义 $\mathbf{T}\times\Gamma\backslash G$ 上的度量 $d=d_{\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G}$ 为

$$d((t,\bar g),(t',\overline{g'}))^2\ :=\ \|t-t'\|^2+d_{\Gamma\backslash G}(\bar g,\overline{g'})^2. \tag{3.2}$$

我们推导出一些用于计算度量 d 的公式，显然只需处理 $d_{\Gamma\backslash G}$。

(1) Suppose $g'=gY$ where $g,g',Y=\begin{pmatrix}1 & b & c\\ & 1 & a\\ & & 1\end{pmatrix}\in G$. Let $Y'=\begin{pmatrix}1 & b & \langle c\rangle\\ & 1 & a\\ & & 1\end{pmatrix}\in G$. Then,

$$\begin{aligned}&d_{\Gamma\backslash G}(\bar g,\overline{gY})=d_{\Gamma\backslash G}(\bar g,\overline{gY'})\leqslant d_G(g,gY')\\ \leqslant\ &\left\|\kappa\begin{pmatrix}1 & b & \langle c\rangle\\ & 1 & a\\ & & 1\end{pmatrix}\right\|_\infty\leqslant|a|+|b|+\|c\|.\end{aligned} \tag{3.3}$$

（2）更一般地，对于

$$g=\begin{pmatrix}1 & y & z\\ & 1 & x\\ & & 1\end{pmatrix},g^*=\begin{pmatrix}1 & y^* & z^*\\ & 1 & x^*\\ & & 1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}1 & b & c\\ & 1 & a\\ & & 1\end{pmatrix},Y^*=\begin{pmatrix}1 & b^* & c^*\\ & 1 & a^*\\ & & 1\end{pmatrix}\in G,$$

对于任意 $\mathfrak{z},\ \mathfrak{z}^*\in\Gamma\cap Z(G)$，

$$\begin{aligned}&d_{\Gamma\backslash G}(\overline{gY},\overline{g^*Y^*})\leqslant d_{\Gamma\backslash G}(\overline{gY},\overline{g^*Y})+d_{\Gamma\backslash G}(\overline{g^*Y},\overline{g^*Y^*})\\ \leqslant\ &d_G(gY,g^*Y\mathfrak{z})+d_G(g^*Y,g^*Y^*\mathfrak{z}^*)\\ \leqslant\ &\left\|\kappa\left(Y^{-1}g^{-1}g^*Y\mathfrak{z}\right)\right\|_\infty+\left\|\kappa\left(Y^{-1}Y^*\mathfrak{z}^*\right)\right\|_\infty.\end{aligned} \tag{3.4}$$

直接计算可得

$$g^{-1}g^* = \begin{pmatrix} 1 & y^*-y & \\ & 1 & x^*-x \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & y(x-x^*)+z^*-z \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b & \\ & 1 & -a \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & ab-c \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad Y^* = \begin{pmatrix} 1 & b^* & \\ & 1 & a^* \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & c^* \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $w = ab + y(x - x^*) + z^* - z$, 则

$$\begin{aligned} & Y^{-1}g^{-1}g^*Y \\ = & \begin{pmatrix} 1 & -b & \\ & 1 & -a \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y^*-y & \\ & 1 & x^*-x \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & \\ & 1 & a \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & w \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & y^*-y & \\ & 1 & x^*-x \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & W \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} W &= w + a(y^* - y) - b(x^* - x) - ab \\ &= (-y - b)(x^* - x) + a(y^* - y) + (z^* - z). \end{aligned}$$

因此，对于适当的 $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^* \in \Gamma \cap Z(G)$，我们有

$$Y^{-1}g^{-1}g^*Y\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} 1 & y^*-y & \\ & 1 & x^*-x \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & W \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} 1 & y^*-y & \\ & 1 & x^*-x \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \langle W \rangle \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} Y^{-1}Y^*\mathfrak{z}^* &= \begin{pmatrix} 1 & b^*-b & \\ & 1 & a^*-a \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & c^*-c-b(a^*-a) \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{z}^* \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b^*-b & \\ & 1 & a^*-a \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \langle c^*-c-b(a^*-a) \rangle \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此，由 (3.3) 和 (3.4),

$$\begin{aligned} & d_{\Gamma\backslash G}(\overline{gY}, \overline{g^*Y^*}) \\ \leqslant\ & |x^* - x| + |y^* - y| + (|y| + |b|)|x^* - x| + |a||y^* - y| + |z^* - z| \\ & + |b - b^*| + |a - a^*| + |b||a - a^*| + \|c^* - c\| \\ =\ & (1 + |y| + |b|)|x^* - x| + (1 + |a|)|y^* - y| + |z^* - z| \\ & + (1 + |b|)|a - a^*| + |b - b^*| + \|c^* - c\|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3. **连分数与渐近分数。** 设 $\alpha \in [0, 1)$ 和 l_k/q_k 是 k 的连分数展开中的第 α 个连分数渐近分数。特别地， $q_0 = 1$ 且 $q_1 = [1/\alpha]$。假设 α 是无理数。连分数展开是无限的，且 $\mathcal{Q} = \{q_k\}_{k\geqslant 0}$生成一个无限递增序列。以下性质是已知的（参见 [HLW21，引理 4。1] 以及 [F22，第 3 节和 (13)]）。

- 若 $|\alpha - l/q| < 1/(2q^2)$，其中 $l \in \mathbf{Z}$ 且 $q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$，则存在某个 $k \geqslant 1$,

$$l/q = l_k/q_k. \tag{3.6}$$

- 设 $k \geqslant 1$ 为任意整数。则

$$\frac{1}{2q_{k+1}} < \|q_k\alpha\| < \frac{1}{q_{k+1}}, \quad \text{and} \quad \|q_k\alpha\| \leqslant \|q\alpha\|, \ \forall\ 1 \leqslant q < q_{k+1}. \tag{3.7}$$

• 对于 $k \geqslant 0$ 和 $1 \leqslant c \leqslant q_k$,

$$\sum_{q_k \leqslant |q| < q_{k+1}} \frac{1}{q^2} \min\left(\frac{1}{\|q\alpha\|^2}, c^2\right) \ll \frac{c}{q_k}. \tag{3.8}$$

• 对于 $k \geqslant 1$,

$$\sum_{0<|q|<q_k} \|q\alpha\|^{-1} \asymp q_k \log(q_k+1) \quad \text{and} \quad \sum_{0<|q|<q_{k+1}} \|q\alpha\|^{-2} \asymp q_{k+1}^2. \tag{3.9}$$

其中的隐含常数 $\ll$ 和 $\asymp$（3.8）及（3.9）均为绝对常数。

4. Initial steps for the proof of Theorem 1.1

我们考虑定义在 X 上的利普希茨连续函数族 $\mathcal{F}\ g: = \mathbf{T} \times \Gamma\backslash G$。对于任意满足 $S = S_\alpha$、$n \in \mathbf{N}$ 和 $g \in \mathcal{F}$ 的 $\nu \in M(\mathbf{X}\ S)$，我们有

$$\|g \circ S^n - g\|_{L^2(\nu)}^2 \ll_g \int_{\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G} d\big((t,\overline{g}), S^n((t,\overline{g}))\big)^2 \mathrm{d}\nu(t,\overline{g}).$$

Sup假设存在 $\varepsilon > \delta > 0$ 以及一个无界序列 $\{r_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbf{N}$，使得

$$\int_{\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G} d\big((t,\overline{g}), S^{jr_n}((t,\overline{g}))\big)^2 \mathrm{d}\nu(t,\overline{g}) \ll_\varepsilon r_n^{-\varepsilon}, \qquad \forall\ |j| \leqslant r_n^\delta. \tag{4.1}$$

显然，4.1）蕴含（2.1），从而得到 PR 刚性。

我们将应用 §§ 3.2 来计算（4.1）的左端；在此之前，我们需要给出 S^n 的显式公式。

4.1. S **的迭代公式**。令 l_α 为平移 $l_\alpha(t) = t + \alpha$。根据§§ 3.1，我们将（1.2）表示为 $S(t, g) = (l_\alpha(t)\ gh_0(t)w_0(t))$，其中

$$h_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(t) & \\ & 1 & \eta(t) \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad w_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \psi(t) \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

显然，n 重复复合 S^n 可表示为

$$S^n(t,\overline{g}) = \big(l_\alpha^n(t), \overline{g}(h_0 h_1 \cdots h_{n-1}) \cdot (w_0 w_1 \cdots w_{n-1})(t)\big),$$

其中 $h_r(t) := h_0 \circ l_\alpha^r(t) = h_0(t + r\alpha)$ 且 $w_r := w_0 \circ l_\alpha^r$。对 $n \geqslant 1$ 定义，

$$\begin{cases} \Phi_n(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \varphi \circ l_\alpha^r(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \varphi(t + r\alpha), \\ \xi_n(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \eta \circ l_\alpha^r(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \eta(t + r\alpha), \\ \Psi_n(t) = \Omega_n(t) + H_n(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \psi(t + r\alpha) + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1} \varphi(t + r\alpha) \cdot \eta(t + j\alpha). \end{cases} \tag{4.2}$$

约定空求和为 0，这种情况出现在 $n = 1$、$\Omega_n(t)$ 和 $H_n(t)$ 分别由对 r 求和以及对 j，r 双重求和定义时。我们注意到

项 $(w_0w_1\cdots w_{n-1})(t)$ 是一个中心元，其最右上方的元素为 $\Omega_n(t)$，并且

$$(h_0h_1\cdots h_{n-1})(t)=\begin{pmatrix}1 & \Phi_n(t) & \\ & 1 & \xi_n(t)\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & H_n(t)\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

由此可推出

$$S^n(t,\overline{g})=\left(l_\alpha^n(t),\overline{g}\begin{pmatrix}1 & \Phi_n(t) & \Psi_n(t)\\ & 1 & \xi_n(t)\\ & & 1\end{pmatrix}\right). \tag{4.3}$$

4.2. **对 $\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G$ 上的度量进行估计。** 利用 (3.2)、(4.3)、(3.1) 和 (3.5)，可得

$$\begin{aligned} d\big((t,\overline{g}),S^n((t,\overline{g}))\big)^2 &= \|n\alpha\|^2+d_{\Gamma\backslash G}\left(\overline{g},\overline{g}\begin{pmatrix}1 & \Phi_n(t) & \langle\Psi_n(t)\rangle\\ & 1 & \xi_n(t)\\ & & 1\end{pmatrix}\right)^2\\ &\ll \|n\alpha\|^2+|\Phi_n(t)|^2+|\xi_n(t)|^2+\|\Omega_n(t)\|^2+\|H_n(t)\|^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

作为 $|\langle\Psi_n(t)\rangle|=\|\Psi_n(t)\|$ 且 $\|\cdot\|$ 是一个范数。由 (4.4)，得到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G} d\big((t,\overline{g}),S^n((t,\overline{g}))\big)^2\mathrm{d}\nu(t,\overline{g})\\ \ll\ &\|n\alpha\|^2+\int_{\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G}\big(|\Phi_n(t)|^2+|\xi_n(t)|^2+\|\Omega_n(t)\|^2+\|H_n(t)\|^2\big)\mathrm{d}\nu(t,\overline{g}). \end{aligned}$$

投影映射 $\pi(t,g)=t$ 的推前测度 $\pi_*\nu$ 是环面 T 上的博雷尔概率测度。当 α 为无理数时，该测度是旋转不变的，因此等于 T 上的归一化 Haar 测度（也就是勒贝格测度）。由于被积函数仅依赖于 t （而不依赖于 g），我们得到

$$\int_{\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G} d\big((t,\overline{g}),S^n((t,\overline{g}))\big)^2\mathrm{d}\nu(t,\overline{g})\leqslant\|n\alpha\|^2+I_\Phi(n)+I_\xi(n)+I_\Omega(n)+I_H(n), \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned} I_\Phi(n)&=\int_{\mathbb{T}}|\Phi_n(t)|^2\mathrm{d}t, & I_\xi(n)&=\int_{\mathbb{T}}|\xi_n(t)|^2\mathrm{d}t,\\ I_\Omega(n)&=\int_{\mathbb{T}}\|\Omega_n(t)\|^2\mathrm{d}t, & I_H(n)&=\int_{\mathbb{T}}\|H_n(t)\|^2\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

鉴于（4.2）以及 [HW23], 中的工作，我们将只详细处理 I_H（n）。关于 I_Φ（n） I_ξ（n）和 I_Ω（n）的处理思路与 [F22]相同。

4.3. **对 $H_n(t)$ 的处理。**我们用傅里叶展开将 $H_n(t)$分解

$$\varphi(t)=\sum_{u\neq0}\widehat{\varphi}(u)e(ut),\qquad \eta(t)=\sum_{v\neq0}\widehat{\eta}(v)e(vt)$$

φ 和 η。显然，我们有

$$H_n(t)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1}\varphi(t+r\alpha)\eta(t+j\alpha)$$

$$= \sum_{0\neq u,v\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)e((u+v)t)\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1} e((ur+vj)\alpha)$$

$$= \sum_{u+v=0} + \sum_{u+v\neq 0} =: \Sigma_{n,0} + \Sigma_n(t), \text{ say.} \tag{4.6}$$

显然，对 j 和 r 在 $\Sigma_{n,0}$ 上的双重求和为

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1} e(u(r-j)\alpha) &= \sum_{j=1}^{n-1} e(-uj\alpha)\frac{1-e(uj\alpha)}{1-e(u\alpha)}\\ &= \frac{1}{1-e(u\alpha)}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} e(-uj\alpha) - \sum_{j=0}^{n-1} 1\Big)\\ &= \frac{1}{1-e(u\alpha)}\Big\{\frac{1-e(-nu\alpha)}{1-e(-u\alpha)} - n\Big\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

并且，$\Sigma_n(t)$ 中的双重求和可以用两种方式表示：

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1} e((ur+vj)\alpha) &= \sum_{j=1}^{n-1} e(vj\alpha)\frac{1-e(uj\alpha)}{1-e(u\alpha)}\\ &= \frac{1}{1-e(u\alpha)}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} e(vj\alpha) - \sum_{j=0}^{n-1} e((u+v)j\alpha)\Big)\\ &= \frac{1}{1-e(u\alpha)}\Big\{\frac{1-e(nv\alpha)}{1-e(v\alpha)} - \frac{1-e(n(u+v)\alpha)}{1-e((u+v)\alpha)}\Big\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

or

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1} e((ur+vj)\alpha) = \sum_{r=0}^{n-2}\sum_{j=r+1}^{n-1} e((ur+vj)\alpha)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-2} e(ur\alpha)e(v(r+1)\alpha)\frac{1-e(v(n-r-1)\alpha)}{1-e(v\alpha)}$$

$$= \frac{1}{1-e(v\alpha)}\Big(e(v\alpha)\sum_{r=0}^{n-2} e((u+v)r\alpha) - e(nv\alpha)\sum_{r=0}^{n-2} e(ur\alpha)\Big)$$

$$= \frac{1}{1-e(v\alpha)}\Big\{\frac{1-e(n(u+v)\alpha)}{1-e((u+v)\alpha)}e(v\alpha) - \frac{1-e(nu\alpha)}{1-e(u\alpha)}e(nv\alpha)\Big\}. \tag{4.9}$$

这里我们在 $e(v\alpha)e((u+v)(n-1)\alpha) - e(nv\alpha)e(u(n-1)\alpha)$ 中插入了该项，其值为零。这样便得到了式（4.9）。

5. Proof of Theorem 1.1

我们需要构造一个自然数的无界序列 $\{r_n\}$，使得（4.1）成立。令 $\mathcal{Q}:=\{q_m\}_{m\geqslant 0}$ 为由连分数渐近分数的分母组成的集合，该连分数展开取自

§§ 3.3中所述的 α 的连分数展开。和的光滑性意味着，对于任意(0，1 100)，

(5.1) $$\widehat{\varphi}(u), \widehat{\eta}(u) \ll |u|^{-B} \quad \text{and} \quad \widehat{\psi}(u) \ll |u|^{-B/2}$$

对于 $u \neq 0$，其中 $B = 2 + 2\varepsilon > 2$。设 $\theta = \frac{1}{8}\varepsilon$，于是

(5.2) $$B = 2 + 16\theta \quad \text{and} \quad 0 < \theta < \frac{1}{12}(B-2) = \frac{1}{6}\varepsilon.$$

我们将构造一个无界子集 $\mathcal{Q}'' \subset \mathcal{Q}$ 以及一个整数 $v_m \in [1, q_m^{\theta/2}]$ 对每个$q_m \in \mathcal{Q}''$，使得（4.5）右端为 $\ll r_m^{-\varepsilon/120}$当 $n = jr_m$时，其中$r_m := v_m q_m$ 且 $|j| < r_m^{\theta/10}$。该构造取决于q_m在 $\mathcal{Q}$中相邻项的分离程度，因此也取决于 α。

令 $\mathcal{Q}' := \{q_m \in \mathcal{Q} : q_{m+1} \geqslant q_m^{2+2\theta}\}$。若 $\mathcal{Q}'$ 是有限的，则对所有 $m \geqslant m_0$，都有 $q_m^{2+2\theta} > q_{m+1}$，其中某个 m_0。定义

$$\mathcal{Q}'' = \begin{cases} \mathcal{Q}' & \text{if } \mathcal{Q}' \text{ is infinite,} \\ \{q_l \in \mathcal{Q} : l \geqslant m_0\} & \text{if } \mathcal{Q}' \text{ is finite.} \end{cases}$$

若设 $s_m := jv_m$，其中 $|j| < r_m^{\theta/10}$，则 $s_m \leqslant q_m^{\theta}$ 且 $jr_m = s_m q_m$。因此，我们将估计 $n \in \{s_m q_m$ 时 (4.5) 中的积分： $s_m \in [1, q_m^{\theta}]$， $q_m \in \mathcal{Q}''\}$。如 (4.5) 后所述，我们引用 [HW23] 来估计 I_Φ、I_ξ、I_Ω。积分 $I_H(n)$ 将利用以下引理求得，该引理将在下一节借助 [KLR21], [F22] 和 [HW23] 中的工具证明。

引理 5.1. 令 $q_m \in \mathcal{Q}''$ 并设

$$\lambda(q_m) := \sum_{0<|u|<q_m} \frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1 - e(-u\alpha)}.$$

对于 $n = s_m q_m$，其中 $s_m \in [1, q_m^{\theta}]$ 是任意整数，有

$$\int_{\mathbb{T}} \|H_n(t)\|^2 \, \mathrm{d}t \ll \|s_m q_m \lambda(q_m)\|^2 + q_m^{-\theta}.$$

对 $\int_{\mathbb{T}} |\Phi(n, t)|^2 \, \mathrm{d}t$ 中的 [HW23，第 479 页480], 所用的论证，可推出对于 $q_m \in \mathcal{Q}''$ 和 $n = s_m q_m$,

$$\int_{\mathbb{T}} |\Phi_n(t)|^2 \, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{T}} |\xi_n(t)|^2 \, \mathrm{d}t \ll q_m^{-\varepsilon/2},$$

并结合对第 0 个傅里叶系数的分离,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \|\Omega_n(t)\|^2 \, \mathrm{d}t &\ll \|s_m q_m \widehat{\psi}(0)\|^2 + \int_{\mathbb{T}} |\Omega_n(t) - n\widehat{\psi}(0)|^2 \, \mathrm{d}t \\ &\ll \|s_m q_m \widehat{\psi}(0)\|^2 + q_m^{-\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

根据狄利克雷逼近定理，我们可以选择 $1 \leqslant v_m \leqslant q_m^{\theta/2}$ 使得

$$\|v_m q_m \alpha\|^2, \|v_m q_m \widehat{\psi}(0)\|^2, \|v_m q_m \lambda(q_m)\|^2 \leqslant q_m^{-\theta/3}.$$

因此，$\|s_m q_m \alpha\|^2$，$\|s_m q_m \widehat{\psi}(0)\|^2$，$\|s_m q_m \lambda(q_m)\|^2$ 是 $\leqslant q_m^{-\theta/12}$对于 $s_m = j v_m$ 满足 $|j| < r_m^{\theta/10}$($\leqslant q_m^{\theta/8}$当 $r_m = v_m q_m \leqslant q_m^{5/4}$时)。因此，(4.5)右侧为 $\ll q_m^{-\varepsilon/2} + q_m^{-\theta/12} \leqslant r_m^{-\varepsilon/120}$，回顾 $\theta = \frac{1}{8}\varepsilon$。取4.1)中的 $\delta = \frac{1}{10}\theta$并将 ε替换为 120ε。定理1.1 立即可得。

6. Proof of Lemma 5.1

由（4.6）和（4.7），我们得到

$$\int_{\mathbb{T}} \|H_n(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \ll \|\Sigma_{n,0}\|^2 + \int_{\mathbb{T}} |\Sigma_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t, \tag{6.1}$$

其中

$$\Sigma_{n,0} = \sum_{0\neq u\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1-e(u\alpha)} \Big\{ \frac{1-e(-nu\alpha)}{1-e(-u\alpha)} - n \Big\},$$

$$\Sigma_n(t) = \sum_{\substack{0\neq u,v\in\mathbb{Z}\\ u+v\neq 0}} \widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v) e((u+v)t) \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1} e((ur+vj)\alpha). \tag{6.2}$$

回忆一下 $n = s_m q_m$。我们的任务是证明

$$\Sigma_{n,0} = -n\Sigma_{q_m,0}^{<,2} + O(q_m^{-\theta}) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{T}} |\Sigma_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t \ll q_m^{-\theta}, \tag{6.3}$$

其中 $\Sigma^{<,2}_{q_m,0}$，在下文（6.6）中定义，是一个与 s_m无关的实数。

我们将根据6.1是否成立分为两种情形，以处理（ $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}'$ ），分别对应 (i) $\#\mathcal{Q}' = \infty$ 和 (ii) $\#\mathcal{Q}' < \infty$。§§ 6.1-6.2 和§§ 6.3-6.4以下内容分别用于讨论情形 (i) 和 (ii)。有限 $\mathcal{Q}'$ 这一情形（后者）需要更精细的分析。由（5.2）可知，指数 B 满足 $B = 2 + 2\varepsilon > 2 + 12\theta$，因此 $\sum_{q_m\in S} q_m^{1+\Delta-B} < \infty$ 对任意 $\Delta < 12\theta$ 以及任意（无限）子集 $S \subset \mathbb{N}$均成立。

情形 (i)： $\#\mathcal{Q}' = \infty$。在此情形下，$n = s_m q_m$，其中 $q_m \in \mathcal{Q}'$ 且 $s_m \in [1, q_m^{\theta}]$，因此 $q_{m+1} \geqslant q_m^{2+2\theta}$。

6.1. **情形 (i)：$\Sigma_{n,0}$ 的求值。**我们拆分

$$\Sigma_{n,0} = \sum_{0\neq u\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1-e(u\alpha)} \Big\{ \frac{1-e(-nu\alpha)}{1-e(-u\alpha)} - n \Big\}$$

$$= \sum_{0<|u|<q_m} + \sum_{|u|\geqslant q_m} =: \Sigma_{n,0}^{<} + \Sigma_{n,0}^{\geqslant}, \text{ say.} \tag{6.4}$$

显然，用（4.7）、（5.1）和（5.2）作平凡估计可得

$$\Sigma_{n,0}^{\geqslant} \ll n^2 \sum_{u\geqslant q_m} u^{-2B} \ll q_m^{3+2\theta-2B} \ll q_m^{-\theta}. \tag{6.5}$$

写

$$\Sigma_{n,0}^{<} = \Sigma_{n,0}^{<,1} - n\Sigma_{q_m,0}^{<,2},$$

其中

$$\Sigma_{n,0}^{<,1} := \sum_{0<|u|<q_m} \frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1-e(u\alpha)} \frac{1-e(-nu\alpha)}{1-e(-u\alpha)}$$

and

$$\Sigma_{q_m,0}^{<,2} := \sum_{0<|u|<q_m} \frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1-e(u\alpha)}. \tag{6.6}$$

这里注意到 $\Sigma^{<,\ q_m^{\ 2},\ 0}$ 与 s_m无关。

利用 $1-e(nu\alpha) \ll \|us_mq_m\alpha\| < |us_m|\|q_m\alpha\| \leqslant |u|q_m^{\theta}q_{m+1}^{-1}$ 以及 $\|u\alpha\| > \|q_{m-1}\alpha\| \gg q_m^{-1}$对于 $0<|u|<q_m$ 由 (3.7)，结合 (5.1)，我们推得

$$\Sigma_{n,0}^{<,1} \ll \frac{q_m^{\theta}}{q_{m+1}} \sum_{0<u<q_m} u^{1-2B}\|u\alpha\|^{-2} \ll \frac{q_m^{2+\theta}}{q_{m+1}} \sum_{0<u<q_m} u^{1-2B} \ll \frac{q_m^{2+\theta}}{q_{m+1}}.$$

因此，由 $q_{m+1} \geqslant q_m^{2+2\theta}$可得

$$\Sigma_{n,0} = -n\Sigma_{q_m,0}^{<,2} + O(q_m^{-\theta} + q_m^{2+\theta}q_{m+1}^{-1}) = -n\Sigma_{q_m,0}^{<,2} + O(q_m^{-\theta}).$$

6.2. 情形 (i)：求 $\Sigma_n(t)$。我们根据$|u| \leqslant q_m/4$ 或 $|v| \leqslant q_m/4$ 是否成立，将 $\Sigma_n(t)$ 拆分为四个子和，

$$\Sigma_n(t) := \Sigma_n^{>,>}(t) + \Sigma_n^{\leqslant,>}(t) + \Sigma_n^{>,\leqslant}(t) + \Sigma_n^{\leqslant,\leqslant}(t),$$

这就得到

$$\int_{\mathbb{T}} |\Sigma_n(t)|^2\,\mathrm{d}t \ll \sum_{a,b\in\{>,\leqslant\}} I^{a,b},$$

其中 $I^{a,\ b} := \int_{\mathbb{T}} |\Sigma^{a,\ n\ b}(t)|^2\mathrm{d}t$。

6.2.1. 二者 $|u|$ 和 $|v| > q_m/4$。在（6.2）中，我们对 j,r 上的双重求和进行平凡估计（与（6.5）中的方法相同），得到

$$\begin{aligned} I^{>,>} &\leqslant n^4 \sum_{\substack{|u_1|,|u_2|,|v_1|,|v_2|>q_m/4 \\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |\widehat{\varphi}(u_1)\widehat{\eta}(v_1)\widehat{\varphi}(u_2)\widehat{\eta}(v_2)| \\ &\ll q_m^{4+4\theta} \sum_{\substack{|u_1|,|u_2|,|v_1|,|v_2|>q_m/4 \\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |u_1u_2v_1v_2|^{-B} \\ &\ll q_m^{4+4\theta-B} \sum_{|u_1|,|u_2|,|v_1|>q_m/4} |u_1u_2v_1|^{-B} \ll q_m^{7+4\theta-4B} \ll q_m^{-1-4\theta}. \end{aligned}$$

6.2.2. $0<|u|\leqslant q_m/4$ 和 $|v|>q_m/4$。设

$$f(u,v):=\frac{1}{1-e(u\alpha)}\Big\{\frac{1-e(nv\alpha)}{1-e(v\alpha)}-\frac{1-e(n(u+v)\alpha)}{1-e((u+v)\alpha)}\Big\}.$$

由（4.8）和（6.2），我们得到

$$I^{\leqslant,>} \quad = \sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ |v_1|,|v_2|>q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}} \widehat{\varphi}(u_1)\widehat{\eta}(v_1)f(u_1,v_1)\overline{\widehat{\varphi}(u_2)\widehat{\eta}(v_2)f(u_2,v_2)}.$$

由于 $|ab|\leqslant|a|^2+|b|^2$ 和 $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+2|b|^2$，我们推得

$$I^{\leqslant,>}\ll S_1+S_2, \tag{6.7}$$

其中

$$\begin{aligned} S_1 \quad &:= \sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ |v_1|,|v_2|>q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}} \frac{|u_1v_1u_2v_2|^{-B}}{|1-e(u_1\alpha)||1-e(u_2\alpha)|}\Big|\frac{1-e(n(u_1+v_1)\alpha)}{1-e((u_1+v_1)\alpha)}\Big|^2,\\ S_2 \quad &:= \sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ |v_1|,|v_2|>q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}} \frac{|u_1v_1u_2v_2|^{-B}}{|1-e(u_1\alpha)||1-e(u_2\alpha)|}\Big|\frac{1-e(nv_1\alpha)}{1-e(v_1\alpha)}\Big|^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

设 $l=|u_1+v_1|$ 并注意，对于 $0<|u|<q_m$，$\|u\alpha\|>\|q_{m-1}\alpha\|\gg q_m^{-1}$由（3.7）以及

$$\frac{1-e(nl\alpha)}{1-e(l\alpha)}\ll\min\Big(\frac{s_m lq_{m+1}^{-1}}{\|l\alpha\|},n\Big)\leqslant\min\Big(\frac{q_m^{\theta}l}{q_{m+1}\|l\alpha\|},n\Big).$$

我们根据 $l<q_{m+1}$ 是否成立将求和拆分为两部分，并（再次利用（3.7））对 $|1-e(u_1\alpha)|^{-1}|1-e(u_2\alpha)|^{-1}$ 进行估计，得到 q_m^2，因此

$$\begin{aligned} S_1 \quad &\ll \frac{q_m^{2+2\theta}}{q_{m+1}^2}\sum_{1\leqslant l<q_{m+1}}\frac{1}{\|l\alpha\|^2}\sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ |v_1|,|v_2|>q_m/4\\ |u_1+v_1|=l=|u_2+v_2|}}|u_1v_1u_2v_2|^{-B}|u_1+v_1|^2\\ &\quad +n^2q_m^2\sum_{l\geqslant q_{m+1}}\sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ |v_1|,|v_2|>q_m/4\\ |u_1+v_1|=l=|u_2+v_2|}}|u_1v_1u_2v_2|^{-B}\\ &=: S_{1,1}+S_{1,2},\ \text{say}. \end{aligned}$$

对于固定的 l 和 u_1，v_1有两个解，而 v_2 也以同样的方式决定。注意 $|v_1|^{-B}|v_2|^{-B}|u_1+v_1|^2\ll|v_1|^{2-B}|v_2|^{-B}\ll q_m^{2-B}q_m^{-B}$（参见（5.2）中关于 B的讨论）。因此，

$$S_{1,1}\ll\frac{q_m^{4+2\theta-2B}}{q_{m+1}^2}\sum_{1\leqslant l<q_{m+1}}\frac{1}{\|l\alpha\|^2}\sum_{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4}|u_1u_2|^{-B}\ll q_m^{4+2\theta-2B},$$

通过观察（3.9）以及对 O上双重求和的界 u_1（*1*），u_2。类似地，对于$n^2q_m^2 \leqslant q_m^{4+2\theta}$，我们有

$$S_{1,2} \ll q_m^{4+2\theta} \sum_{l \geqslant q_{m+1}} l^{-2B} \sum_{0<|u_1|,|u_2| \leqslant q_m/4} |u_1u_2|^{-B} \ll q_m^{4+2\theta} q_{m+1}^{1-2B}.$$

按照对$S_{1、1}$ 和 $S_{1、2}$采用的相同处理方式，我们得到

$$\begin{aligned} S_2 \ll & \frac{q_m^{2+2\theta}}{q_{m+1}^2} \sum_{q_m/4<|v_1|<q_{m+1}} \frac{1}{\|v_1\alpha\|^2} \sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2| \leqslant q_m/4 \\ |v_2|>q_m/4 \\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |u_1v_1u_2v_2|^{-B}|v_1|^2 \\ & + n^2q_m^2 \sum_{|v_1| \geqslant q_{m+1}} \sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2| \leqslant q_m/4 \\ |v_2|>q_m/4 \\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |u_1v_1u_2v_2|^{-B}. \end{aligned}$$

当固定 v_1、u_1、u_2时，v_2的值就确定了。因此，内层求和

$$\sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2| \leqslant q_m/4 \\ |v_2|>q_m/4 \\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |u_1v_1u_2v_2|^{-B}|v_1|^2 \ll |v_1|^{2-B}q_m^{-B} \sum_{0<|u_1|,|u_2| \leqslant q_m/4} |u_1u_2|^{-B} \ll q_m^{2-2B}.$$

因此，

$$S_2 \ll q_m^{4+2\theta-2B} + q_m^{4+2\theta}q_{m+1}^{1-2B}.$$

综上，利用 $q_m^{2+2\theta} \leqslant q_{m+1}$，我们得到

$$I^{\leqslant,>} \ll q_m^{4+2\theta-2B} + q_m^{4+2\theta}q_{m+1}^{1-2B} \ll q_m^{-2\theta}.$$

6.2.3. $|u| > q_m/4$ 和 $|v| \leqslant q_m/4$。令

$$g(u,v) := \frac{1}{1-e(v\alpha)} \Big\{ \frac{1-e(n(u+v)\alpha)}{1-e((u+v)\alpha)} e(v\alpha) - \frac{1-e(nu\alpha)}{1-e(u\alpha)} e(nv\alpha) \Big\}. \tag{6.9}$$

由（6.2）和（4.9），我们得到

$$I^{>,\leqslant} = \sum_{\substack{|u_1|,|u_2|>q_m/4 \\ 0<|v_1|,|v_2| \leqslant q_m/4 \\ u_1+v_1=u_2+v_2}} \widehat{\varphi}(u_1)\widehat{\eta}(v_1)g(u_1,v_1)\overline{\widehat{\varphi}(u_2)\widehat{\eta}(v_2)g(u_2,v_2)}$$

因此，通过将 u_1 重新标记为 v_1，并将 v_1 重新标记为 u_1，可推得

$$I^{>,\leqslant} \ll S_1 + S_2,$$

其中 S_1 和 S_2 定义同（6.8）中所述。因此，结合 $q_m^{2+2\theta} \leqslant q_{m+1}$，

$$I^{>,\leqslant} \ll q_m^{4+2\theta-2B} + q_m^{4+2\theta}q_{m+1}^{1-2B} \ll q_m^{-2\theta}.$$

6.2.4. $0<|u|\leqslant q_m/4$ 和 $0<|v|\leqslant q_m/4$。仿照对（6.7）的求值，我们得到

$$I^{\leqslant,\leqslant} \ll \sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ 0<|v_1|,|v_2|\leqslant q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |u_1v_1u_2v_2|^{-B}\frac{|1-e(nv_1\alpha)|^2}{\|u_1\alpha\|\|u_2\alpha\|\|v_1\alpha\|^2} + \sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ 0<|v_1|,|v_2|\leqslant q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |u_1v_1u_2v_2|^{-B}\frac{|1-e(n(u_1+v_1)\alpha)|^2}{\|u_1\alpha\|\|u_2\alpha\|\|(u_1+v_1)\alpha\|^2}.$$

如前所述，利用 $\|u\alpha\|\gg q_m^{-1}$对于 $0<|u|<q_m$ 和 $1-e(n(u+v)\alpha)\ll$最大值$(|u|,\ |v|)q_m^{\theta}/q_{m+1}$，我们有

$$I^{\leqslant,\leqslant} \ll \frac{q_m^{4+2\theta}}{q_{m+1}^2}\sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ 0<|v_1|\leqslant|u_1|,|v_2|\leqslant q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}} |u_1|^{2-B}|v_1u_2v_2|^{-B} \ll \frac{q_m^{4+2\theta}}{q_{m+1}^2}\ll q_m^{-2\theta}.$$

这就完成了情形 (i) 的任务（6.3）。

情形（ii）： $\#\mathcal{Q}'<\infty$。我们有 $q_m^{2+2\theta}>q_{m+1}$ 对所有 $m\geqslant m_0$均成立，对某个 m_0成立。因此，对所有 $l\geqslant 0$,

$$q_{l+1}\ll_{m_0} q_l^{2+2\theta}.$$

考虑 $q_m\in\mathcal{Q}''=\{q_l\in\mathcal{Q}:\ l\geqslant m_0\}$。

6.3. 情形（ii）：对 $\Sigma_{n,\,0}$ 的求值。 由（6.4）和（6.5），我们有 $\Sigma_{n,\,0}=\Sigma_{n,\,0}^{<}+O(q_m^{-\theta})$，然后我们表示为

$$\Sigma_{n,0}^{<}=\Sigma_{n,0}^{<,1}-n\Sigma_{q_m,0}^{<,2},$$

其中

$$\Sigma_{n,0}^{<,1}=\sum_{0<|u|<q_m}\frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1-e(u\alpha)}\frac{1-e(-nu\alpha)}{1-e(-u\alpha)} \quad\text{and}\quad \Sigma_{q_m,0}^{<,2}:=\sum_{0<|u|<q_m}\frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1-e(u\alpha)}.$$

我们将 $\Sigma_{n\,0}^{<,\,1}$，结合（5.1）和（3.9）作如下处理:

$$\Sigma_{n,0}^{<,1} = \sum_{0<|u|<q_m}\frac{\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(-u)}{1-e(u\alpha)}\frac{1-e(-nu\alpha)}{1-e(-u\alpha)} \ll \frac{q_m^{\theta}}{q_{m+1}}\sum_{0<u<q_{m-1}}u^{1-2B}\|u\alpha\|^{-2}$$
$$\ll \frac{q_m^{\theta}}{q_{m+1}}\sum_{0\leqslant l<m}q_l^{1-2B}\sum_{q_l\leqslant u<q_{l+1}}\|u\alpha\|^{-2}\ll\frac{q_m^{\theta}}{q_{m+1}}\sum_{0\leqslant l<m}q_l^{1-2B}q_{l+1}^2.$$

我们将 $q_{l+1}^2=q_{l+1}^{1-2\theta}q_{l+1}^{1+2\theta}$ 拆分，并应用 $q_{l+1}\leqslant q_m$ 和 $q_{l+1}\ll q_l^{2+2\theta}$。由此可得

$$\Sigma_{n,0}^{<,1} \ll q_m^{\theta-1}\cdot q_m^{1-2\theta}\sum_{0\leqslant l<m}q_l^{1-2B+(2+2\theta)(1+2\theta)}$$
$$= q_m^{-\theta}\sum_{0\leqslant l<m}q_l^{4+6\theta+4\theta^2-2B-1}\ll q_m^{-\theta},$$

因为 $4+6\theta+4\theta^2<4+10\theta<2B$。因此，我们得到（6.3）中的第一个等式：

$$\Sigma_{n,0}=-n\Sigma_{q_m,0}^{<,2}+O(q_m^{-\theta}).$$

6.4. 情形（ii）。求值 $\Sigma_n(t)$。我们再次进行求值 f

$$\int_{\mathbb{T}}|\Sigma_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\ll\sum_{a,b\in\{>,\leqslant\}}I^{a,b},$$

其中 $I^{a,\ b}:=\int_{\mathbb{T}}|\Sigma^{a}_{\ ,\ n}{}^{b}(t)|^2\mathrm{d}t$，如 §§ 6.2 所示。

6.4.1. 两者 $|u|$ 和 $|v|>q_m/4$。该估计

$$I^{>,>}\ll q_m^{-1-4\theta}$$

仍然成立。

6.4.2. $0<|u|\leqslant q_m/4$ 和 $|v|>q_m/4$。由（6.7）和（6.8）可得

$$I^{\leqslant,>}\ll n^2\sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ |v_1|,|v_2|>q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}}\frac{|u_1v_1u_2v_2|^{-B}}{|1-e(u_1\alpha)||1-e(u_2\alpha)|}.$$

现在，我们更仔细地处理 $\|u_1\alpha\|$ 和 $\|u_2\alpha\|$ 中由分母造成的贡献，而不再给出平凡上界 q_m^{-1}。注意，v_2 给定 u_1、u_2、v_1 和 $|v_2|\asymp|v_1|$后，v_2 便确定了（有两种可能）。因此，由（3.9），

$$\begin{aligned}
I^{\leqslant,>}&\ll n^2\sum_{\substack{0<|u_1|,|u_2|\leqslant q_m/4\\ |v_1|,|v_2|>q_m/4\\ u_1+v_1=u_2+v_2}}|u_1v_1u_2v_2|^{-B}\|u_1\alpha\|^{-1}\|u_2\alpha\|^{-1}\\
&\ll q_m^{2+2\theta}\Big(\sum_{0<|u|\leqslant q_m/4}|u|^{-B}\|u\alpha\|^{-1}\Big)^2\sum_{|v_1|>q_m/4}|v_1|^{-2B}\\
&\ll q_m^{3+2\theta-2B}\Big(\sum_{0\leqslant l<m}q_l^{-B}\sum_{q_l\leqslant u<q_{l+1}}\|u\alpha\|^{-1}\Big)^2\\
&\ll q_m^{3+2\theta-2B}\Big(\sum_{0\leqslant l<m}q_l^{-B}q_{l+1}\log q_{l+1}\Big)^2.
\end{aligned}$$

由 $q_{l+1}=q_{l+1}^{\frac12(1-\theta)}q_{l+1}^{\frac12(1+\theta)}\ll q_l^{\frac12(1-\theta^2)}q_{l+1}^{\frac12(1+\theta)}<q_lq_{l+1}^{\frac12(1+\theta)}<q_lq_m^{\frac12(1+\theta)}$，根据 $q_{l+1}\ll q_l^{2+2\theta}$ 和 $q_{l+1}\leqslant q_m$，我们从最后一行得到：

$$I^{\leqslant,>}\ll q_m^{3+2\theta-2B+1+\theta}\Big(\sum_{0\leqslant l<m}q_l^{1-B}\log q_{l+1}\Big)^2.$$

由于 $B>2$ 由（5.2），我们有 $\sum_{q\geqslant1}q^{1-B}$ 对数 $q\ll_B1$ 因此，

$$I^{\leqslant,>}\ll q_m^{4+3\theta-2B}\ll q_m^{-\theta}.$$

6.4.3. $|u|>q_m/4$ 以及 $0<|v|\leqslant q_m/4$。根据 $I^{\leqslant\text{的结果},>}$ 我们有

$$I^{>,\leqslant}\ll q_m^{-\theta}.$$

6.4.4. $0<|u|\leqslant q_m/4$ 和 $0<|v|\leqslant q_m/4$。设 g 如（6.9）中所定义。由于 $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+2|b|^2$，我们有

$$\begin{aligned} I^{\leqslant,\leqslant} &= \int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{\substack{0\neq|u|,|v|\leqslant q_m/4\\ u+v\neq 0}}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1}e((ur+vj)\alpha)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant 8\int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{0\neq|v|<|u|\leqslant q_m/4}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)g(u,v)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &\quad+2\int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{\substack{0\neq|v|=|u|\leqslant q_m/4\\ u+v\neq 0}}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(u)g(u,u)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

根据 g（u，v）（见（6.9））的表达式，第一个积分为

$$\begin{aligned} &\ll \int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{0\neq|v|<|u|\leqslant q_m/4}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)\frac{1-e(nu\alpha)}{(1-e(v\alpha))(1-e(u\alpha))}e(nv\alpha)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{0\neq|v|<|u|\leqslant q_m/4}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)\frac{1-e(n(u+v)\alpha)}{(1-e(v\alpha))(1-e((u+v)\alpha))}e(v\alpha)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &=: I_{1,1}+I_{1,2}, \end{aligned}$$

类似地，第二个积分为

$$\begin{aligned} &\ll \int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{\substack{0<|v|=|u|\leqslant q_m/4\\ u+v\neq 0}}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)\frac{1-e(nv\alpha)}{(1-e(v\alpha))(1-e(u\alpha))}e(nv\alpha)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{\substack{0<|v|=|u|\leqslant q_m/4\\ u+v\neq 0}}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)\frac{1-e(n(u+v)\alpha)}{(1-e(v\alpha))(1-e((u+v)\alpha))}e(v\alpha)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &=: I_{2,1}+I_{2,2}. \end{aligned}$$

因此，

$$I^{\leqslant,\leqslant}\ll(I_{1,1}+I_{2,1})+(I_{1,2}+I_{2,2}).$$

我们将在以下两个小节中证明这两个括号内的表达式均为 $\ll q_m^{-\theta}$，从而完成引理5.1的证明。

6.4.4 (I)：处理 $I_{1,1}+I_{2,1}$。为处理 $I_{1,1}$，我们将关于 u and$v$ 的双重求和转换为

$$\sum_{0\leqslant a\leqslant b<m}\ \sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<\min(q_{a+1},q_m/4)\\ q_b\leqslant|u|<\min(q_{b+1},q_m/4)\\ |v|<|u|}}.$$

我们也可以用相同的方法处理 $I_{2,1}$。将被积函数平方并对 t 积分后，由 $1-e(u\alpha)\asymp\|u\alpha\|$, $1-e(v\alpha)\asymp\|v\alpha\|$ 和 $1-e(nu\alpha)\ll|u|q_m^\theta/q_{m+1}$ 可推得

$$I_{1,1}+I_{2,1}\ll\frac{q_m^{2\theta}}{q_{m+1}^2}\sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<m\\0\leqslant c\leqslant d<m}}\sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}\\q_d\leqslant|u'|<q_{d+1}\\|v|\leqslant|u|,|v'|\leqslant|u'|\\0\neq u+v=u'+v'}}|uu'vv'|^{-B}|uu'|\|u\alpha\|^{-1}\|u'\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}.$$

由对称性，不妨设 $b\leqslant d$ 并多次使用（3.9）和（3.7），得到

- $\sum_{0<|u|<q_k}\|u\alpha\|^{-1}\ll q_k\log(q_k+1)\ll q_k\log q_m$ for $k<m$,
- $\|q\alpha\|^{-1}\leqslant\|q_k\alpha\|^{-1}\ll q_{k+1}$ for $0<q<q_{k+1}$.

为分析这些多重和，我们分以下情形讨论：

(i) $b<d$：多重和计算如下：

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<d<m\\0\leqslant c\leqslant d}}\sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}\\q_d\leqslant|u'|<q_{d+1}\\|v|\leqslant|u|,|v'|\leqslant|u'|\\0\neq u+v=u'+v'}}|uu'vv'|^{-B}|uu'|\|u\alpha\|^{-1}\|u'\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}\\ \ll&\sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<d<m\\0\leqslant c\leqslant d}}\sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}\\q_d\leqslant|u'|<q_{d+1}\\|v|\leqslant|u|,|v'|\leqslant|u'|\\0\neq u+v=u'+v'}}|uvv'|^{-B}|u|\|u\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}q_{a+1}^{-1/2}q_{b+1}^{-1}q_{c+1}^{-1/2}\\ &\times q_d^{3/2+10\theta}q_{d+1}^{1/2-4\theta}|u'|^{1-B}\|u'\alpha\|^{-1}\end{aligned}$$

因为 q_{a+1}, $q_{b+1}\leqslant q_d$, $q_{c+1}\leqslant q_{d+1}$ 和 $q_{d+1}^{4\theta}\ll q_d^{10\theta}$（由 $q_{l+1}\ll q_l^{2+2\theta}$）。

由于 $u+v=u'+v'$，给定 u, v, v' 后，u'（从而 q_d）的值便确定了。由于 $|u'|^{1-B}\|u'\alpha\|^{-1}\ll q_d^{1-B}q_{d+1}$ 和

$$q_d^{3/2+10\theta}q_{d+1}^{1/2-4\theta}q_d^{1-B}q_{d+1}=q_d^{5/2+10\theta-B}q_{d+1}^{3/2-4\theta}\leqslant q_d^{1/2}q_{d+1}^{3/2-4\theta}\leqslant q_m^{1/2}q_m^{3/2-4\theta}$$

对于 $B>2+10\theta$ (参见（5.2）) 以及 $d<m$，我们看到多重和为

$$\begin{aligned}\ll&\ q_m^{2-4\theta}\sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<m\\0\leqslant c<m}}\sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}}}|uvv'|^{-B}|u|\|u\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}q_{a+1}^{-1/2}q_{b+1}^{-1}q_{c+1}^{-1/2}\\ \ll&\ q_m^{2-4\theta}\sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<m\\0\leqslant c<m}}q_b^{1-B}q_a^{-B}q_c^{-B}\sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}}}\|u\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}q_{a+1}^{-1/2}q_{b+1}^{-1}q_{c+1}^{-1/2}\end{aligned}$$

$$\ll q_m^{2-4\theta}\log^3 q_m \sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<m\\ 0\leqslant c<m}} q_b^{1-B}q_a^{-B}q_{a+1}^{1/2}q_c^{-B}q_{c+1}^{1/2}$$

$$\ll q_m^{2-4\theta}\log^3 q_m \sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<m\\ 0\leqslant c<m}} q_b^{1-B}q_a^{1+\theta-B}q_c^{1+\theta-B} \ll q_m^{2-4\theta}\log^3 q_m,$$

由 $q_{l+1}\ll q_l^{2+2\theta}$ 和 $1+\theta-B<-1$ 给出。

(ii) $b=d$：我们将多重和分成三部分：

$$\sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant b<m\\ 0\leqslant c\leqslant b}} \sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\ q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\ q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}\\ q_b\leqslant|u'|<q_{b+1}\\ |v|\leqslant|u|,|v'|\leqslant|u'|\\ 0\neq u+v=u'+v'}} |uu'vv'|^{-B}|uu'|\|u\alpha\|^{-1}\|u'\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}$$

$$= \sum_{b<m}\sum_{a,c<b} + \sum_{a=b<m}\sum_{c\leqslant b} + \sum_{c=b<m}\sum_{a<b}.$$

对于前两部分，我们改变 u,v,v'，并通过 $u+v=u'+v'$ 确定 u'。因此，

$$\sum_{b<m}\sum_{a,c<b}\cdots \ll \sum_{b<m}\sum_{a,c<b}\sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\ q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\ q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}}} |uvv'|^{-B}|u|\|u\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}q_b^{1-B}q_{b+1}$$

$$\ll \sum_{b<m}\sum_{a,c<b} q_b^{1-B}q_{b+1}q_a^{-B}q_c^{-B}q_b^{1-B}\sum_{\substack{q_a\leqslant|v|<q_{a+1}\\ q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\ q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}}} \|u\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}$$

$$\ll \log^3 q_m \sum_{b<m}\sum_{a,c<b} q_b^{1-B}q_{b+1}q_a^{-B}q_{a+1}q_c^{-B}q_{c+1}q_b^{1-B}q_{b+1}$$

$$\ll q_m^{\theta}\sum_{b<m} q_b^{2-2B}q_{b+1}^2\left(\sum_{a<b} q_a^{-B}q_{a+1}\right)^2$$

$$\ll q_m^{\theta}\sum_{b<m} q_b^{3-2B}q_{b+1}^2 \ll q_m^{\theta}\sum_{b<m} q_b^{3+10\theta-2B}q_m^{2-4\theta}$$

$$\ll q_m^{2-3\theta},$$

因为 $\sum_{a<b} q_a^{-B}q_{a+1}\leqslant q_b^{1/2}\sum_{a<b} q_a^{-B}q_{a+1}^{1/2}\ll q_b^{1/2}\sum_{a<b} q_a^{-B+(2+2\theta)/2}\ll q_b^{1/2}$，并且

$$\sum_{a=b<m}\sum_{c\leqslant b}\cdots \ll \sum_{b<m}\sum_{c\leqslant b}\sum_{\substack{q_b\leqslant|v|<q_{b+1}\\ q_b\leqslant|u|<q_{b+1}\\ q_c\leqslant|v'|<q_{c+1}}} |uvv'|^{-B}|u|\|u\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}q_b^{1-B}q_{b+1}$$

$$\ll \log^3 q_m \sum_{b<m}\sum_{c\leqslant b} q_b^{1-B}q_{b+1}q_b^{-B}q_{b+1}q_c^{-B}q_{c+1}q_b^{1-B}q_{b+1}$$

$$\ll q_m^{\theta}\sum_{b<m} q_b^{2-3B}q_{b+1}^3\sum_{c\leqslant b} q_c^{1+\theta-B}q_{c+1}^{1/2}$$

$$\ll \quad q_m^{\theta}\sum_{b<m} q_b^{5+13\theta-3B} q_{b+1}^{2-4\theta}\sum_{c\leqslant b} q_c^{1+\theta-B} \ll q_m^{2-3\theta},$$

因为 $q_{c+1}^{1/2}\leqslant q_c^{1+\theta}$，$q_{c+1}^{1/2}\leqslant q_{b+1}^{1/2}\leqslant q_b^{1+\theta}$ 和 $q_{b+1}^{1+4\theta}\ll q_b^{(2+2\theta)(1+4\theta)}\leqslant q_b^{2+12\theta}$。

对于第三部分，我们改变 v，u'，v'，并通过 $u+v=u'+v'$ 确定 u。交换 u 与 u' 以及 a 与 c 的角色后，此情形归入第二部分的求值。

我们得出

$$I_{1,1}+I_{2,1}\ll \frac{q_m^{2\theta}}{q_{m+1}^2}\big(q_m^{2-4\theta}\log^3 q_m + q_m^{2-3\theta}\big)\ll q_m^{-\theta}.$$

6.4.4 (II)：对 $I_{1,\ 2}+I_{2,\ 2}$ 的处理。接下来，我们处理 $I_{1,\ 2}$ 和 $I_{2,\ 2}$：

$$\begin{aligned} I_{1,2} &\ll \int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{0\neq|v|<|u|\leqslant q_m/4}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)\frac{1-e(n(u+v)\alpha)}{(1-e(v\alpha))(1-e((u+v)\alpha))}e(v\alpha)e((u+v)t)\Big|^2\,\mathrm{d}t\\ &\ll \int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{\substack{0\neq|v|<|u|\leqslant q_m/4\\ uv>0}}\cdots\Big|^2\,\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{T}}\Big|\sum_{\substack{0\neq|v|<|u|\leqslant q_m/4\\ uv<0}}\cdots\Big|^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

以类似方式处理 $I_{2,\ 2}$。应用 $1-e(n(u+v)\alpha)\ll q_m^{\theta}(|u+v|)/q_{m+1}$，我们推得

$$I_{1,2}+I_{2,2}\ll \frac{q_m^{2\theta}}{q_{m+1}^2}\big(J_+ + J_-\big),$$

其中，将 $|u|=\pm u$ 替换为 $u\in\mathbb{N}$ 等之后，

$$J_+ := \sum_{\substack{0<v\leqslant u\leqslant q_m/4\\ 0<v'\leqslant u'\leqslant q_m/4\\ u+v=u'+v'}}(uu'vv')^{-B}(u+v)(u'+v')\|(u+v)\alpha\|^{-1}\|(u'+v')\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1},$$

$$J_- := \sum_{\substack{0<v<u\leqslant q_m/4\\ 0<v'<u'\leqslant q_m/4\\ u-v=u'-v'}}(uu'vv')^{-B}(u-v)(u'-v')\|(u-v)\alpha\|^{-1}\|(u'-v')\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}.$$

（注意，$I_{2,2}$ 不会对 J_- 产生贡献。）只需证明以下命题，我们的证明便告完成

$$J_+ + J_- \ll q_m^{2-3\theta}. \tag{6.10}$$

为此，我们令

$$K := \sum_{\substack{0<w<q_m\\ 0<v\leqslant v'\leqslant q_m/4}}\|w\alpha\|^{-2}w^{2-2B}(vv')^{-B}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}.$$

令 $w=u+v\,(=u'+v')\asymp u$ 当 $0<v\leqslant u\,(0<v'\leqslant u')$。重新排列后，我们得到

$$J_+ \ll \sum_{0<w\leqslant q_m/2}\|w\alpha\|^{-2}w^{2-2B}\sum_{0<v,v'\leqslant q_m/4}(vv')^{-B}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1}\ll K.$$

由对称性，不妨设 $v \leqslant v'$ 属于 J_-，并写作 $w = u - v\,(= u' - v')$。于是我们有

$$\begin{aligned} J_- &= \sum_{\substack{0<v<u\leqslant q_m/4\\ 0<v'<u'\leqslant q_m/4\\ u-v=u'-v'}} |uu'vv'|^{-B}|u-v||u'-v'|\|(u-v)\alpha\|^{-1}\|(u'-v')\alpha\|^{-1}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1} \\ &\ll \sum_{\substack{0<w<q_m\\ 0<v<v'\leqslant q_m/4}} \|w\alpha\|^{-2}w^2((w+v)(w+v')vv')^{-B}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1} \\ &\ll \sum_{\substack{0<w<q_m\\ 0<v<v'\leqslant q_m/4}} \|w\alpha\|^{-2}w^{2-2B}(vv')^{-B}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1} \\ &\ll K. \end{aligned}$$

还需证明 $K \ll q_m^{2-3\theta}$。我们有

$$\begin{aligned} K &\ll \sum_{\substack{a\leqslant b<m\\ c<m}} \sum_{\substack{q_a\leqslant v<q_{a+1}\\ q_b\leqslant v'<q_{b+1}\\ q_c\leqslant w<q_{c+1}}} \|w\alpha\|^{-2}w^{2-2B}(vv')^{-B}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1} \\ &\ll \sum_{\substack{a\leqslant b<m\\ c<m}} q_c^{2-2B}(q_aq_b)^{-B} \sum_{\substack{q_a\leqslant v<q_{a+1}\\ q_b\leqslant v'<q_{b+1}\\ q_c\leqslant w<q_{c+1}}} \|w\alpha\|^{-2}\|v\alpha\|^{-1}\|v'\alpha\|^{-1} \\ &\ll \log^2 q_m \sum_{\substack{a\leqslant b<m\\ c<m}} q_c^{2-2B}q_{c+1}^2q_a^{-B}q_{a+1}q_b^{-B}q_{b+1} \\ &\ll q_m^{\theta}(K_1+K_2), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{\substack{a\leqslant b<m\\ c\leqslant b}} q_c^{2-2B}q_{c+1}^2q_a^{-B}q_{a+1}q_b^{-B}q_{b+1}, \\ K_2 &= \sum_{a\leqslant b<c<m} q_c^{2-2B}q_{c+1}^2q_a^{-B}q_{a+1}q_b^{-B}q_{b+1}. \end{aligned}$$

应用 $q_{l+1} \ll q_l^{2+2\theta} < q_l^B$并由式（5.2）注意到 $1+\theta-B < 1+4\theta-B < -1$, $3+\theta-2B<-1$ 以及 $9/2+12\theta-3B<-1$，可知

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{\substack{a\leqslant b<m\\ c\leqslant b}} q_c^{2-2B}q_{c+1}^2q_a^{-B}q_{a+1}q_b^{-B}q_{b+1} \\ &\ll \sum_{b<m} q_b^{-B}q_{b+1}\Big(\sum_{a<b} q_a^{1+\theta-B}q_{a+1}^{1/2}+q_b^{-B}q_{b+1}\Big)\Big(\sum_{c<b} q_c^{3+\theta-2B}q_{c+1}^{3/2}+q_b^{2-2B}q_{b+1}^2\Big) \\ &\ll \sum_{b<m} q_b^{-B}q_{b+1}\big(q_b^{1/2}+q_b^{-B}q_{b+1}\big)\big(q_b^{3/2}+q_b^{2-2B}q_{b+1}^2\big) \\ &\ll \sum_{b<m} q_b^{-B}q_{b+1}q_b^{1/2}\big(q_b^{3/2}+q_b^{2-2B}q_{b+1}^2\big) \ll \sum_{b<m} q_b^{2-B}q_{b+1}+\sum_{b<m} q_b^{5/2-3B}q_{b+1}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ll q_m \sum_{b<m} q_b^{1+4\theta-B} q_b^{1-4\theta} + q_m^{2-4\theta} \sum_{b<m} q_b^{5/2-3B} q_{b+1}^{1+4\theta} \\
&\ll q_m^{2-4\theta} \sum_{b<m} q_b^{1+4\theta-B} + q_m^{2-4\theta} \sum_{b<m} q_b^{5/2-3B} q_b^{2+12\theta} \\
&\ll q_m^{2-4\theta}.
\end{aligned}$$

接下来，回想起 $1+\theta-B<-1$ 并注意到 $3+10\theta-2B<-1$，我们得到

$$\begin{aligned}
K_2 &= \sum_{a\leqslant b<c<m} q_c^{2-2B} q_{c+1}^2 q_a^{-B} q_{a+1} q_b^{-B} q_{b+1} \\
&\ll \sum_{c<m} q_c^{2-2B} q_{c+1}^2 \Big(\sum_{a<c} q_a^{-B} q_{a+1} \Big)^2 \ll \sum_{c<m} q_c^{2-2B} q_{c+1}^2 \Big(\sum_{a<c} q_a^{1+\theta-B} q_{a+1}^{1/2} \Big)^2 \\
&\ll \sum_{c<m} q_c^{3-2B} q_{c+1}^2 \Big(\sum_{a<c} q_a^{1+\theta-B} \Big)^2 \ll \sum_{c<m} q_c^{3-2B} q_{c+1}^2 \\
&\ll \sum_{c<m} q_c^{3+10\theta-2B} q_{c+1}^{2-4\theta} \ll q_m^{2-4\theta} \sum_{c<m} q_c^{3+10\theta-2B} \\
&\ll q_m^{2-4\theta}.
\end{aligned}$$

我们得出 $K \ll q_m^{2-3\theta}$从而 J_+， $J_- \ll q_m^{2-3\theta}$，即（6.10）成立。引理 5.1 的证明完成。

7. Proof of Theorem 1.2

对于无理数 α，M¨obius 不相交性由定理 1.1 和命题2.1推出。剩下需要考虑的情形是 $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ 。Ma 和 Wu 已在 [MW24，定理 11] 中处理了这一情形，其假设是 φ， η， ψ均为 C^∞。光滑性条件可以放宽，例如 He 和 Wang [HW23] 考虑了 $C^{1+\varepsilon}$ 函数，但也假设 $\varphi=\eta$。

下面我们按照 [MW24] 稍作修改，给出简要验证。由[MW24，引理 21]，(其内容为 [HLW21，命题 1],) ，只需证明

$$\sum_{n\leqslant N} \mu(n) f(S_\alpha^n(t_0,\overline{g_0})) = o(N) \tag{7.1}$$

对于 $f \in \mathcal{A}\cup\mathcal{B}$。族 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的定义与 [HLW21] 或 [MW24],第 2 节中的定义相同，由此可见 $\mathcal{A}$ 由 $\mathcal{A}'$ 中的函数的标量倍数组成，而函数$f \in \mathcal{A}'$ 的形式为

$$f(t,\overline{g}) = e(m_0 t + m_1 x + m_2 y + mz) \sum_{b\in r+\mathbb{Z}} e^{-\pi(y+b)^2 - \pi\delta(y+b)} e(bmx) \quad \text{if} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ & 1 & x \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $m_0, m_1, m_2, m \in \mathsf{Z}$， $r \in \mathsf{Q}$ 且 $\delta = 0$ 或 $1 \pm i$。此外，根据$\mathcal{B}$ 的定义（或由 [HLW21，命题 2] 的证明），族 $\mathcal{B}$ 可以与$C(\mathsf{T}) \otimes C(\mathsf{T}^2)$等同。由于特征在线性稠密于 $C(\mathsf{T}^k)$ 中， $k=1$， 2，我们可以将 $\mathcal{B}$ 约化为其子族 $\mathcal{B}'$，该子族由形如 $f(t,g) = e(m_0 t)e(m_1 x)e(m_2 y)$ 的 $f \in \mathcal{B}$ 组成，其中$m_0, m_1, m_2 \in \mathsf{Z}$。

由（4.3），可知对于 $g_0=\begin{pmatrix}1 & y_0 & z_0\\ & 1 & x_0\\ & & 1\end{pmatrix}$，

$$S_\alpha^n(t_0,\overline{g_0})=\left(t_0+n\alpha,\Gamma\begin{pmatrix}1 & y_0+\Phi_n(t) & z_0+y_0\xi_n(t)+\Omega_n(t)+H_n(t)\\ & 1 & x_0+\xi_n(t)\\ & & 1\end{pmatrix}\right).$$

对于任意有理数 $\alpha=a/q\in[0,1)$（其中 $(a,q)=1$）以及周期为 1 的函数 h，我们有

$$C_h(n,t):=\sum_{r=0}^{n-1}h(t+r\alpha)=q^{-1}C_h(q,t)\cdot(n-b)+C_h(b,t)$$

若 $n=b'q+b$，其中 $b'\geqslant 0$ 且 $0\leqslant b<q$（或参见 [MW24，第 305] 页）。$C_h(n,t)$ 是关于 n 的（线性）多项式，这正是关键结论。我们将其应用于 $\xi_n(t)=C_\eta(n,t)$、$\Phi_n(t)=C_\varphi(n,t)$ 以及 $\Omega_n(t)=C_\psi(n,t)$。$H_n(t)$ 的情形更为复杂，我们有

$$\begin{aligned}
&H_n(t)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1}\varphi(t+r\alpha)\eta(t+j\alpha)\\
=&\left(\sum_{s=0}^{b'-1}\sum_{j=sq+1}^{sq+q}+\sum_{j=b'q+1}^{b'q+b-1}\right)\eta(t+j\alpha)\sum_{r=0}^{j-1}\varphi(t+r\alpha)\\
=&\sum_{s=0}^{b'-1}\sum_{j=1}^{q}\eta(t+j\alpha)\sum_{r=0}^{sq+j-1}\varphi(t+r\alpha)+\sum_{j=1}^{b-1}\eta(t+j\alpha)\sum_{r=0}^{b'q+j-1}\varphi(t+r\alpha)\\
=&\sum_{s=0}^{b'-1}\sum_{j=1}^{q}\eta(t+j\alpha)\Big(sC_\varphi(q,t)+C_\varphi(j,t)\Big)+\sum_{j=1}^{b-1}\eta(t+j\alpha)\Big(b'C_\varphi(q,t)+C_\varphi(j,t)\Big)\\
=&C_\eta(q,t+\alpha)C_\varphi(q,t)\sum_{s=0}^{b'-1}s\\
&+b'\sum_{j=1}^{q}\eta(t+j\alpha)C_\varphi(j,t)+b'\Big(C_\eta(b,t)-\eta(t)\Big)C_\varphi(q,t)+\sum_{j=1}^{b-1}\eta(t+j\alpha)C_\varphi(j,t)\\
=&\frac{1}{2}q^{-2}C_\eta(q,t+\alpha)C_\varphi(q,t)\cdot\big(n^2-(q+2b)n+(q+b)b\big)\\
&+q^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{q-1}\eta(t+j\alpha)C_\varphi(j,t)+C_\eta(b,t)C_\varphi(q,t)\Big)\cdot(n-b)+\sum_{j=1}^{b-1}\eta(t+j\alpha)C_\varphi(j,t).
\end{aligned}$$

因此，$H_n(t)$ 是关于 n 的二次多项式。因此，对于 $f\in\mathcal{A}'$，我们可以表示为

$$\begin{aligned}
&f(S_\alpha^n(t_0,\overline{g_0}))=e(P_2(n))\sum_{b\in r+\mathbb{Z}}e^{-\pi(b+An+B)^2-\pi\delta(b+An+B)}e(b(Cn+D))\\
=&\ e(\{P_2(n)\}-\lfloor An+B\rfloor(Cn+D))\sum_{b\in r+\mathbb{Z}}e^{-\pi(b+\{An+B\})^2-\pi\delta(b+\{An+B\})}e(\{b(Cn+D)\})
\end{aligned}$$

且对于 $f\in\mathcal{B}'$，$f(S_\alpha^n(t_0,g_0))=e(\{P_1(n)\})$，其中 A, B, C和 D是与 n 和 b 无关的实数，而 $P_j(n)$ 是关于 n、次数为 j 的实系数多项式，其中 $j=1,2$。

注意到情形 $f \in \mathcal{B}'$ 比情形 $f \in \mathcal{A}'$更简单，下面我们只讨论情形 $f \in \mathcal{A}'$ 。

显然，对于任意小的 $\varepsilon \in (0,\ 1)$，$|b-r| \geqslant \sqrt{|\log \varepsilon|}$的尾部 is

$$\ll \sum_{|b| \geqslant \sqrt{|\log \varepsilon|}} e^{-\pi b^2/2} \ll \varepsilon.$$

将总和拆分并应用公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2} e(kw) dw = e^{-\pi k^2}$，我们得到

$$f(S_\alpha^n(t_0, \overline{g_0})) = e^{\delta^2 \pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2} \sum_{|b| < \sqrt{|\log \varepsilon|}} e\big((b + Q_1(n) + \tfrac{\delta}{2})w + Q_2(n)\big)\, dw + O(\varepsilon),$$

其中 $Q_1(n) = \{An + B\}$ 且 $Q_2(n) = \{P_2(n)\} - \lfloor An + B \rfloor (Cn + D) + \{b(Cn + D)\}$。利用 $e^{-\pi w^2}$ 的快速衰减，我们根据是否满足 $|w| \leqslant |\log \varepsilon|$ 将积分拆成两部分。我们对后者作平凡估计，并利用积分中值定理处理前者。因此，我们需要处理

$$f(S_\alpha^n(t_0, \overline{g_0})) = 2|\log \varepsilon| e^{\delta^2 \pi/4} e^{-\pi w_0^2} \sum_{|b| < \sqrt{|\log \varepsilon|}} e\big((b + Q_1(n) + \tfrac{\delta}{2})w_0 + Q_2(n)\big) + O(\varepsilon)$$

对于某些 $w_0 \in [-|\log \varepsilon|,\ |\log \varepsilon|]$。这些 Q_j 是按 Green-Tao [GT12, §5] 中定义的括号多项式。将 [GT12, p.559] 中的估计应用于 $F(\{x\}) = e(\{x\}) = e(x)$ 以及 $p(n) = w_0 Q_1(n) + Q_2(n)$，我们推得

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \mu(n) e(p(n)) = \mathbb{E}_{n \in [N]} \mu(n) F(\{p(n)\}) \ll_{A,\varepsilon} \log^{-A} N, \quad \forall\ A > 1.$$

这意味着 (7.1) 的左侧在 $\ll \varepsilon N$ 对所有充分大的 N都成立，因此 (7.1) 得证。

8. Initial steps for the proof of Theorem 1.3

按照 [HLW21], 中的论证，我们如下验证测度复杂度的次多项式性质（见 (2.4)）：任取 $\varepsilon > 0$ 为任意小的量， $L > \varepsilon^{-1}$ 取足够大的数，并仍将 $\mathcal{Q} = \{q_k\}_{k \geqslant 0}$ 记作§§ 3.3中的形式。我们用以下网格点族剖分$\mathbb{T} \times \Gamma \backslash G$ [5],

$$F_\varepsilon(k) = \Big\{ \Big(\frac{j\varepsilon}{q_k^2 L}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & \frac{j_2}{q_k L} & \frac{j_3}{q_k L} \\ & 1 & \frac{j_1}{q_k L} \\ & & 1 \end{pmatrix}} \Big) : 0 \leqslant j \leqslant \frac{q_k^2 L}{\varepsilon} - 1, 0 \leqslant j_1, j_2, j_3 \leqslant q_k L - 1 \Big\}.$$

稍后我们将选取一个合适的 n的无限集合，其中 n 可显式地用 q_k表示，使得

每个网格盒都包含在一个 d_n-开球中，其直径为 ε。（关于2.2），参见 d_n。）由于这些网格盒覆盖整个空间，它们的总（概率）测度为 1。由 (2.3)，

$$s_n(\mathrm{X}, S_\alpha, d, \nu, \varepsilon) \leqslant \#F_\varepsilon(k) \leqslant \frac{q_k^2 L}{\varepsilon} (q_k L)^3 = \varepsilon^{-1} q_k^5 L^4. \tag{8.1}$$

将选取这些 n，使得 $\varepsilon^{-1} q_k^5 L^4 \ll n^\tau, \forall\ \tau > 0$。

[5]这里的选择不同于 [HLW21]和 [MW24]。

我们按如下条件分为两种情形

$$\mathcal{Q}_B := \{q_\ell^{B-1} : q_\ell \in \mathcal{Q} \text{ satisfies } q_\ell^B < q_{\ell+1}\} \tag{8.2}$$

是否为无穷大。 B 的值将在稍后说明。

与 [HLW21] 和 [MW24], 类似，我们将构造一个映射 $R : (\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha) \to (\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G, S_\alpha)$，并证明用 $R^{-1}\circ S_\alpha \circ R$代替 S_α所关联的流具有次多项式测度复杂度。

8.1. **构造** R。 我们从将定义在 ϕ 上的$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 光滑函数分解为共振部分 ϕ^+ 和非共振部分 ϕ^- 开始，这与 [HLW21]中的做法相同。具体而言，任取 $B > 2$ 并令

$$\begin{aligned} M_1(B) &= \bigcup_{\substack{q_k\in\mathcal{Q}\\ 1<q_k<q_{k+1}^{1/B}}} \{m\in\mathbb{Z} : q_k \leqslant |m| < q_{k+1},\ q_k \big| m\} \cup \{0\}, \\ M_2(B) &= \mathbb{Z}\setminus M_1(B) \\ &= \bigcup_{\substack{q_k\in\mathcal{Q}\\ 1<q_k<q_{k+1}^{1/B}}} \{m\in\mathbb{Z} : q_k \leqslant |m| < q_{k+1}, q_k \nmid m\} \\ &\quad \cup \left(\{m\in\mathbb{Z} : 1\leqslant |m| < q_1\} \cup \bigcup_{\substack{q_k\in\mathcal{Q}\\ q_k\geqslant q_{k+1}^{1/B}}} \{m\in\mathbb{Z} : q_k \leqslant |m| < q_{k+1}\}\right). \end{aligned}$$

于是 ϕ^+ 和 ϕ^- 定义为

$$\phi^+(t) = \sum_{m\in M_1(B)} \widehat{\phi}(m)e(mt) \quad \text{and} \quad \phi^-(t) = \sum_{m\in M_2(B)} \widehat{\phi}(m)e(mt). \tag{8.3}$$

一个关键点是， ϕ^- 可以表示为另一个定义在 R/Z 上的光滑函数 g_ϕ 的差 $\Delta_\alpha g_\phi(t) := g_\phi(t+\alpha) - g_\phi(t)$。事实上，

$$g_\phi(t) = \sum_{m\in M_2(B)} \widehat{\phi}(m)\frac{e(mt)}{e(m\alpha)-1},$$

其中右侧的级数由 [HLW21 的引理 42]以及以下事实 $\widehat{\phi}(m) \ll_A (1+|m|)^{-A}$ 对任意 $A > 0$均绝对收敛。沿用该引理证明中的论证思路，显然可得 $g_\phi(t)$ 是光滑的。

现在我们通过如下设置来构造映射 R

$$R : (t,\overline{g}) \mapsto \left(t, \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & g_\varphi(t) & \\ & 1 & g_\eta(t) \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & c(t) \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right),$$

其中 $c(t)$ 将在后文确定。根据 §§ 3.1， R^{-1} 将 $(l_\alpha(t), g)$ 映射为

$$\left(l_\alpha(t), \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & -g_\varphi(l_\alpha(t)) & \\ & 1 & -g_\eta(l_\alpha(t)) \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & g_\varphi(l_\alpha(t))g_\eta(l_\alpha(t))-c(l_\alpha(t)) \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right),$$

其中 l_α 是平移 $l_\alpha(t) = t+\alpha$。因此，令 $S = S_\alpha$ 并应用（1.2），映射 $R^{-1}SR$ 将（t, g）映射为

$$\begin{aligned} & R^{-1}S\left(t, \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & g_\varphi(t) & \\ & 1 & g_\eta(t) \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & c(t) \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) \\ = \; & R^{-1}\left(l_\alpha(t), \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & \varphi(t)+g_\varphi(t) & \\ & 1 & \eta(t)+g_\eta(t) \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \psi(t)+g_\varphi(t)\eta(t)+c(t) \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) \\ = \; & \left(l_\alpha(t), \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & \varphi^+(t) & \\ & 1 & \eta^+(t) \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \omega(t)-\big(c(l_\alpha(t))-c(t)\big) \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

其中我们使用了 $\phi^+(t) = \phi(t) - \Delta_\alpha g_\phi(t) = \phi(t) - (g_\phi \circ l_\alpha(t) - g_\phi(t))$，并记

$$\begin{aligned} \omega(t) &:= \psi(t) + (g_\varphi\eta)(t) - (\varphi(t)+g_\varphi(t))\cdot g_\eta \circ l_\alpha(t) + (g_\varphi g_\eta)\circ l_\alpha(t) \\ &= \psi(t) + g_\varphi(t)\eta(t) - \varphi^+(t)g_\eta(t+\alpha). \end{aligned}$$

注意，ψ，φ，g_φ，g_η 是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的光滑函数，因此 ω 也是。取 $c = g_\omega$，则 $\Delta_\alpha c(t) = c\circ l_\alpha(t) - c(t) = \omega^-(t)$，其中 $\omega^-(t)$ 是函数 $\omega(t)$ 的非共振部分。因此，$T_1 := R^{-1}SR$ 满足

$$\begin{aligned} T_1(t,\overline{g}) &= \left(l_\alpha(t), \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & \varphi^+(t) & \\ & 1 & \eta^+(t) \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \omega^+(t) & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (l_\alpha(t), \overline{g}h_0(t)w_0(t)), \text{ say.} \end{aligned} \tag{8.4}$$

总之，映射 R 构造如下：

$$R : (t,\overline{g}) \mapsto \left(t, \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & g_\varphi(t) & g_\omega(t) \\ & 1 & g_\eta(t) \\ & & 1 \end{pmatrix}\right).$$

8.2. **的迭代公式**。与§§ 4.1中一样，由（8.4）可得，m 重复复合 T_1^m由下式给出

$$\begin{aligned} T_1^m(t,\overline{g}) &= \big(l_\alpha^m(t), \overline{g}(h_0h_1\cdots h_{m-1})\cdot(w_0w_1\cdots w_{m-1})(t)\big) \\ &= \left(l_\alpha^m(t), \overline{g}\begin{pmatrix} 1 & \Phi_m(t) & \Psi_m(t) \\ & 1 & \xi_m(t) \\ & & 1 \end{pmatrix}\right), \end{aligned} \tag{8.5}$$

其中，在这种情况下，

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) &= \sum_{r=0}^{m-1}\varphi^+\circ l_\alpha^r(t) = \sum_{r=0}^{m-1}\varphi^+(t+r\alpha), \\ \xi_m(t) &= \sum_{r=0}^{m-1}\eta^+\circ l_\alpha^r(t) = \sum_{r=0}^{m-1}\eta^+(t+r\alpha), \\ \Psi_m(t) &= \Omega_m(t) + H_m(t) = \sum_{r=0}^{m-1}\omega^+(t+r\alpha) + \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{j-1}\varphi^+(t+r\alpha)\cdot\eta^+(t+j\alpha). \end{aligned}$$

9. Proof of Theorem 1.3

给定任意小的 $\varepsilon>0$ 和足够大的 $L>\varepsilon^{-1}$。令 $\tau\in$ 为 (0,1) 中任意小的数，并定义 $B=6\tau^{-1}+1$。

为完成定理 1.3 的证明，我们将在 §§ 9.1 和 §§9.2 中证明，$(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,\ S_\alpha,\ \rho)$ 的测度复杂度满足 (2.4)，其中 $\mathcal{Q}_B$ 是 (8.2) 中定义的无穷或有限量。

9.1. $\#\mathcal{Q}_B=\infty$ 的情形。根据第 8 节中的说明，我们的任务是证明如下结论：对于所有充分大的 $n_k=q_k^{B-1}\in\mathcal{Q}_B$，对于任意相邻对 $(t,h),(t^*,h^*)\in F_\varepsilon(k)$，使得 $|t-t^*|\leqslant\varepsilon/(q_k^2L)$ 且 $\max(|x-x^*|,|y-y^*|,|z-z^*|)\leqslant 1/(q_kL)$，若 $h=\begin{pmatrix}1&y&z\\&1&x\\&&1\end{pmatrix}$ and $h^*=\begin{pmatrix}1&y^*&z^*\\&1&x^*\\&&1\end{pmatrix}$，则有

$$\bar{d}_{n_k}((t,h),(t^*,h^*))<\varepsilon, \tag{9.1}$$

其中 T_1 定义如式（8.4）所示，

$$\bar{d}_{n_k}((t,h),(t^*,h^*)):=\frac{1}{n_k}\sum_{m=0}^{n_k-1}d(T_1^m(t,h),T_1^m(t^*,h^*)). \tag{9.2}$$

由式（8.1）可得式（2.4），因为对于任意 $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\#F_\varepsilon(k)}{n_k^\tau}\leqslant\liminf_{k\to\infty}\frac{\varepsilon^{-1}q_k^5L^4}{q_k^{(B-1)\tau}}=\liminf_{k\to\infty}\frac{\varepsilon^{-1}L^4}{q_k}=0,\quad\forall\,\tau>0.$$

为验证式（9.1），我们首先利用 §§ 3.2 计算 $d(T_1^m(t,h)\ T_1^m(t^*,h^*))$，其中

$$g=h,\ g^*=h^*,\ Y=\begin{pmatrix}1&\Phi_m(t)&\Psi_m(t)\\&1&\xi_m(t)\\&&1\end{pmatrix},\ Y^*=\begin{pmatrix}1&\Phi_m(t^*)&\Psi_m(t^*)\\&1&\xi_m(t^*)\\&&1\end{pmatrix}.$$

确实,

$$\begin{aligned}
&d(T_1^m(t,\overline{h}),T_1^m(t^*,\overline{h^*}))\\
\leqslant\ &\|t-t^*\|+d_{\Gamma\backslash G}(\overline{hY},\overline{h^*Y^*})\\
\leqslant\ &\|t-t^*\|+(1+|\Phi_m(t)|+|y|)|x-x^*|+(1+|\xi_m(t)|)|y-y^*|+|z-z^*|\\
&+\big(1+|\Phi_m(t)|\big)|\xi_m(t)-\xi_m(t^*)|+|\Phi_m(t)-\Phi_m(t^*)|+\|\Psi_m(t)-\Psi_m(t^*)\|\\
\leqslant\ &\frac{\varepsilon}{q_k^2L}+\frac{1}{q_kL}(4+|\xi_m(t)|+|\Phi_m(t)|)\\
&+\big(1+|\Phi_m(t)|\big)|\xi_m(t)-\xi_m(t^*)|+|\Phi_m(t)-\Phi_m(t^*)|+\|\Psi_m(t)-\Psi_m(t^*)\|.
\end{aligned}\tag{9.3}$$

根据（ [HLW21，引理 4.3], 中的论证），可知对于定义在 ϕ 上的任意光滑函数，存在常数 $c_B>0$，使得对于任意 $q\in\mathcal{Q}$ 满足 $q^{B-1}\in\mathcal{Q}_B$,

$$\Big|\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q}\phi\circ l_\alpha^j(t)-\widehat{\phi}(0)\Big|\leqslant c_Bq^{-B}. \tag{9.4}$$

因此，由于 $\varphi^+(0)=\widehat{\varphi}(0)=0$ 且 $\eta^+(0)=\widehat{\eta}(0)=0$，对于 $0\leqslant m<n_k$，我们有

$$|\Phi_m(t)|+|\xi_m(t)|\ \leqslant\ m(|\widehat{\varphi^+}(0)|+|\widehat{\eta^+}(0)|)+2c_B\frac{n_k}{q_k}q_k^{1-B}+q_k(|\varphi^+|_\infty+|\eta^+|_\infty)$$

$$\ll \frac{1}{q_k} + q_k(|\varphi^+|_\infty + |\eta^+|_\infty) \tag{9.5}$$

并且根据（9.3），

$$\begin{aligned} d(T_1^m(t,\overline{h}), T_1^m(t^*,\overline{h^*})) \ &\ll \ \frac{1}{L}(1+|\varphi^+|_\infty+|\eta^+|_\infty) + \big(1+|\Phi_m(t)|\big)|\xi_m(t)-\xi_m(t^*)| \\ &\quad +|\Phi_m(t)-\Phi_m(t^*)| + |\Psi_m(t)-\Psi_m(t^*)|. \end{aligned} \tag{9.6}$$

当选取充分大的 $< \varepsilon$时，右侧的第一项为 L 。接下来需要计算（9.6）中的其余三项。

由（9.4），我们看到

$$\Big|\sum_{j=0}^{m-1}\phi\circ l_\alpha^j(t) - \sum_{j=0}^{m-1}\phi\circ l_\alpha^j(t^*)\Big| \leqslant 2c_B q_k^{-1} + q_k|\phi'|_\infty|t-t^*|, \tag{9.7}$$

这将应用于 $\Phi_m(t)-\Phi_m(t^*)$ 和 $\Omega_m(t)-\Omega_m(t^*)$。（回忆 $\Psi_m=\Omega_m+H_m$。）然而，就我们的目的而言，根据（9.5），（9.7）中关于 $\xi_m(t)-\xi_m(t^*)$ 的估计还不够；同样，它也不适用于 $H_m(t)-H_m(t^*)$。因此，我们还需要另一个辅助结果，即最后一节中的引理 10.1。将引理 10.1 与 $B=6\tau^{-1}+1$ 应用于 H_m，并将（9.7）应用于 Ω_m，可得，当 $\Psi_m=\Omega_m+H_m$ 时，

$$\Psi_m(t)-\Psi_m(t^*) \ll \frac{1}{q_k} + (q_k^2+q_k|\omega^{+\prime}|_\infty)|t-t^*| \ll q_k^{-1} + q_k^2|t-t^*|.$$

根据引理 $\big(1+|\Phi_m(t)|\big)|\xi_m(t)-\xi_m(t^*)|$，同样的上界适用于 10.1。将它们以及式（9.7）在 $\phi=\varphi^+$ 和 η^+ 条件下得到的估计代入式（9.6），可得

$$d(T_1^m(t,\overline{h}), T_1^m(t^*,\overline{h^*})) \ \ll \ \frac{1}{L}(1+|\varphi^+|_\infty+|\eta^+|_\infty) + q_k^{-1} + q_k^2|t-t^*| \ll \varepsilon.$$

鉴于式（9.3）和式（9.2），我们完成了式（9.1）的证明。

9.2. **有限 $\#\mathcal{Q}_B$ 的情形**。若 $\#\mathcal{Q}_B$ 有限，则 $\mathbb{Z}\setminus M_2(B) = M_1(B$也有限，因此由 [HLW21，引理 4.2]，

$$\widetilde{g}_\varphi(t) = \sum_{m\neq 0}\widehat{\varphi}(m)\frac{e(mt)}{e(m\alpha)-1}, \qquad \widetilde{g}_\eta(t) = \sum_{m\neq 0}\widehat{\eta}(m)\frac{e(mt)}{e(m\alpha)-1}$$

绝对收敛，并且作为 t 中的函数，$\widetilde{g}_\varphi(t)$ 和 $\widetilde{g}_\eta(t)$ 连续且具有周期 1。在条件 $\widehat{\varphi}(0)=\widehat{\eta}(0)=0$下，§§ 8.1 和§§ 8.2 中的过程将把该流变换为一个易于处理的可测同构流。

事实上，现在我们有

$$\varphi(t) = \widetilde{g}_\varphi\circ l_\alpha(t) - \widetilde{g}_\varphi(t), \qquad \eta(t) = \widetilde{g}_\eta\circ l_\alpha(t) - \widetilde{g}_\eta(t),$$

其中应用了 $\widehat{\varphi}(0)=\widehat{\eta}(0)=0$。令

$$\varpi(t) := \psi(t) + (\widetilde{g}_\varphi\eta)(t) - (\varphi(t)+\widetilde{g}_\varphi(t))\cdot\widetilde{g}_\eta\circ l_\alpha(t) + (\widetilde{g}_\varphi\widetilde{g}_\eta)\circ l_\alpha(t),$$

它是光滑函数且周期为 1，因为 ψ、φ、$\widetilde{g}_\varphi$、$\widetilde{g}_\eta$ 都是 R/Z 上的光滑函数。于是，

$$\varpi(t) = \widehat{\varpi}(0) + \widetilde{g}_\varpi\circ l_\alpha(t) - \widetilde{g}_\varpi(t)$$

以及映射的逆映射

$$\widetilde{R}:(t,\overline{g})\mapsto\left(t,\overline{g}\begin{pmatrix}1&\widetilde{g}_\varphi(t)&\\&1&\widetilde{g}_\eta(t)\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\widetilde{g}_\varpi(t)\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right)$$

将 (t,g) 映射到

$$\left(t,\overline{g}\begin{pmatrix}1&-\widetilde{g}_\varphi(t)&\\&1&-\widetilde{g}_\eta(t)\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\widetilde{g}_\varphi(t)\widetilde{g}_\eta(t)-\widetilde{g}_\varpi(t)\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right).$$

因此，$\tilde{T}_1:=\widetilde{R}^{-1}S\widetilde{R}$ 将 (t,g) 映射到

$$\begin{aligned}&\widetilde{R}^{-1}S\left(t,\overline{g}\begin{pmatrix}1&\widetilde{g}_\varphi(t)&\\&1&\widetilde{g}_\eta(t)\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\widetilde{g}_\varpi(t)\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right)\\ =\;&\widetilde{R}^{-1}\left(l_\alpha(t),\overline{g}\begin{pmatrix}1&\varphi(t)+\widetilde{g}_\varphi(t)&\\&1&\eta(t)+\widetilde{g}_\eta(t)\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\psi(t)+\widetilde{g}_\varphi(t)\eta(t)+\widetilde{g}_\varpi(t)\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right)\\ =\;&\left(l_\alpha(t),\overline{g}\begin{pmatrix}1&&\varpi(t)-\big(\widetilde{g}_\varpi\circ l_\alpha(t)-\widetilde{g}_\varpi(t)\big)\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right)\\ =\;&\left(l_\alpha(t),\overline{g}\begin{pmatrix}1&\widehat{\varpi}(0)&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

其中 $S=S_{\alpha\circ}$ 根据命题 2.3，$(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,S,\rho)$ 的测度复杂度是次˜多项式的，即满足 (2.4)，当且仅当 $(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,T_1,v)$˜在 $v=\rho\circ R$ 下的测度复杂度是次多项式。从 §§ 3.2可知，度量 d 在 $\tilde{T}_1$下是不变的，因此对于任意 $n\geqslant 1$ 和 $\varepsilon>0$,

$$s_n(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,\tilde{T}_1,d,v,\varepsilon)=s_1(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,\tilde{T}_1,d,v,\varepsilon).$$

Sin ˜由于 $\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G$ 是紧的，我们有 $s_1(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,T_1,d,v,\varepsilon)<\infty$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,\tilde{T}_1,d,v,\varepsilon)}{n^\tau}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1(\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G,\tilde{T}_1,d,v,\varepsilon)}{n^\tau}=0.$$

因此 （$\mathbb{T}\times\Gamma\backslash G$、$S$、$\rho$）的测度复杂度满足（2.4），对于有限 $\#\mathcal{Q}_B$ 也同样成立 l.

10. A technical lemma

引理 10.1。设 $B>2$。存在与 q_k 无关的常数 c'_B、$c''_B>0$，使得

$$\begin{aligned}|H_m(t^*)-H_m(t)|&\leqslant c'_B\big(\frac{1}{q_k^2}+q_k^2|t-t^*|\big),\\ |\xi_m(t^*)-\xi_m(t)|&\leqslant c''_B\big(\frac{1}{q_k^2}+q_k|t-t^*|\big)\end{aligned}$$

对于所有 $1\leqslant m\leqslant n_k$ $(=q_k^{B-1}\in\mathcal{Q}_B)$。

证明。根据 $H_m(t)$（下文中的（8.5））以及共振部分（8.3），我们有

$$H_m(t)=\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{l-1}\varphi^+(t+r\alpha)\cdot\eta^+(t+l\alpha)$$

$$= \sum_{\substack{q_a,q_c\in\mathcal{Q}\\ 1<q_a<q_{a+1}^{1/B}\\ 1<q_c<q_{c+1}^{1/B}}} \sum_{\substack{q_a\leqslant|u|<q_{a+1},\,q_a|u\\ q_c\leqslant|v|<q_{c+1},\,q_c|v}} \widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{l-1} e((ur+vl)\alpha)e((u+v)t)$$

在条件 $\widehat{\varphi}(0)=\widehat{\eta}(0)=0$ 下。$H_m(t)$ 的常数项（即与 t 无关的项）来自满足 $u+v=0$ 的求和项，并且由于抵消，它不会出现在 $H_m(t^*)-H_m(t)$ 中。因此，在估计多重和时，我们可以加入约束 $u+v\neq 0$。由于 $m\leqslant n_k=q_k^{B-1}$，我们将 $m=a_kq_k+\mathsf{b}$ 表示为，其中 $0\leqslant \mathsf{b}<q_k$，并利用快速衰减 $\widehat{\varphi}(u)\ll(1+|u|)^{-2B-2}$ 和 $\widehat{\eta}(v)\ll(1+|v|)^{-2B-2}$，从而推出

$$\begin{aligned}(10.1)\quad \sum_{\substack{q_a,q_c\in\mathcal{Q}\\ a\text{ or }c\geqslant k}} + \sum_{\substack{q_a,q_c\in\mathcal{Q}\\ a,c<k}}\sum_{|u+v|\geqslant q_k} &\ll \sum_{\substack{q\in\mathcal{Q}\\ q\geqslant q_k}}\sum_{u\geqslant q}|u|^{-2B-2}m^2+\sum_{q\in\mathcal{Q}}\sum_{u\gg\max(q_k,q)}|u|^{-2B-2}m^2\\ &\ll q_k^{-2},\end{aligned}$$

其中的 m^2 来自对 l，r 上二重求和的平凡界。我们将非恒定余项记为

$$H_m^{\circ}(t):=\sum_{\substack{1<q_a,q_c\in\mathcal{Q}\\ q_a<q_{a+1}^{1/B}\leqslant q_k^{1/B}\\ q_c<q_{c+1}^{1/B}\leqslant q_k^{1/B}}}\sum_{\substack{q_a\leqslant|u|<q_{a+1},\,q_a|u\\ q_c\leqslant|v|<q_{c+1},\,q_c|v\\ 0<|u+v|<q_k}}\widehat{\varphi}(u)\widehat{\eta}(v)e((u+v)t)\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{l-1}e((ur+vl)\alpha).$$

现在，我们将 $H_m^{\circ}(t)$ 中关于 $(l,\ r)$ 的二重求和拆分为

$$\sum_{\mathrm{a}=0}^{a_k-1}\sum_{l=\mathrm{a}q_k+1}^{(\mathrm{a}+1)q_k}\sum_{r=0}^{l-1}+\sum_{l=a_kq_k+1}^{a_kq_k+\mathrm{b}}\sum_{r=0}^{l-1}=:\sum_{\mathrm{a}=0}^{a_k-1}\sum\nolimits_{\mathrm{a}}+\sum\nolimits_{\mathrm{b}},\ \text{say.}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{\mathrm{a}} &= \sum_{l=\mathrm{a}q_k+1}^{(\mathrm{a}+1)q_k}\sum_{r=0}^{l-1}e((ur+vl)\alpha)\\ &= \frac{e((\mathrm{a}q_k+1)(u+v)\alpha)\big(e(q_k(u+v)\alpha)-1\big)}{\big(e(u\alpha)-1\big)\big(e((u+v)\alpha)-1\big)}-\frac{e((\mathrm{a}q_k+1)v\alpha)\big(e(q_kv\alpha)-1\big)}{\big(e(u\alpha)-1\big)\big(e(v\alpha)-1\big)},\end{aligned}$$

so

$$\big|\sum\nolimits_{\mathrm{a}}\big|\leqslant\frac{\big|e(q_k(u+v)\alpha)-1\big|}{\big|e(u\alpha)-1\big|\cdot\big|e((u+v)\alpha)-1\big|}+\frac{\big|e(q_kv\alpha)-1\big|}{\big|e(u\alpha)-1\big|\cdot\big|e(v\alpha)-1\big|}.$$

我们借鉴 [HLW21] 中的思想和论证：若 $1<q_a\leqslant|u|<q_{a+1}$ 且$q_a||u|$，那么令 $|u|=dq_a\ (<q_{a+1})$，由（3.7），$(2q_{a+1})^{-1}<\|q_a\alpha\|\leqslant\|u\alpha\|=\|dq_a\alpha\|\leqslant d\|q_a\alpha\|<d/q_{a+1}<1/q_a\leqslant\frac{1}{2}$，可得 $\|dq_a\alpha\|=d\|q_a\alpha\|$（由 $d\|q_a\alpha\|<\frac{1}{2}$）且

$$(10.2)\qquad \frac{1}{\big|e(u\alpha)-1\big|}\ \ll\ \|u\alpha\|^{-1}=(d\|q_a\alpha\|)^{-1}\leqslant\frac{2q_{a+1}}{d}=\frac{2q_aq_{a+1}}{|u|}$$

$$\ll \frac{q_k^2}{|u|} \quad \text{when } a<k.$$

利用（3.7），显然可得:

$$\big|e(q_k(u+v)\alpha)-1\big| \ll |u+v|\|q_k\alpha\| < \frac{|u+v|}{q_{k+1}}.$$

考虑到 $|e((u+v)\alpha)-1|^{-1}$，我们分为两种情况:

- 若 $\|(u+v)\alpha\| \geqslant 1/(2|u+v|)$，则立即得到
$$\frac{\big|e(q_k(u+v)\alpha)-1\big|}{\big|e(u\alpha)-1\big|\cdot\big|e((u+v)\alpha)-1\big|} \ll \frac{q_k^2|u+v|^2}{|u|}\frac{1}{q_{k+1}} < \frac{q_k^4}{|u|}\frac{1}{q_{k+1}}.$$
- 若 $0<\|(u+v)\alpha\|<1/(2|u+v|)$，则 $u+v\neq 0$ 且 $l/(u+v)=l_i/q_i$ 是某个 l（因此 $q_i\in\mathcal{Q}$），由（3.6）。特别地，$q_i|u+v$ 且 $i<k$ 当 $|u+v|<q_k$ 时。根据（10.2）中的相同论证，我们有 $|e((u+v)\alpha)-1|^{-1} \ll q_k^2/|u+v|$。因此，
$$\frac{\big|e(q_k(u+v)\alpha)-1\big|}{\big|e(u\alpha)-1\big|\cdot\big|e((u+v))\alpha)-1\big|} \ll \frac{q_k^4}{|u|}\frac{1}{q_{k+1}}.$$

此外，$|e(v\alpha)-1|^{-1}\ll q_k^2/|v|$（如（10.2））以及 $|e(vq_k\alpha)-1|\ll |v|/q_{k+1}$。我们由此推得

$$\big|\textstyle\sum_{\mathrm{a}}\big| \ll \frac{q_k^4}{|u|}\frac{1}{q_{k+1}}.$$

类似地,

$$\begin{aligned}\big|\textstyle\sum_{\mathrm{b}}\big| &= \Big|\Big(\sum_{l=a_kq_k+1}^{a_kq_k+\mathrm{b}}\sum_{r=0}^{a_kq_k-1}+\sum_{l=a_kq_k+1}^{a_kq_k+\mathrm{b}}\sum_{r=a_kq_k}^{l-1}\Big)e((ur+vl)\alpha)\Big| \\ &\leqslant \frac{\big|e(a_kq_ku\alpha)-1\big|}{\big|e(u\alpha)-1\big|}\mathrm{b}+q_k^2 \ll \frac{q_k^2}{|u|}\frac{a_k|u|}{q_{k+1}}q_k+q_k^2 \ll q_k^2,\end{aligned}$$

对 $a_kq_k\leqslant n_k=q_k^{B-1}$ 与 $q_{k+1}>q_k^B$，鉴于（8.2）。

由上述估计以及事实 $e((u+v)t)-e((u+v)t^*)\ll|u+v||t-t^*|$，我们得出

$$\begin{aligned}H_m^\circ(t)-H_m^\circ(t^*) &\ll \sum_{1<|u|,|v|\leqslant q_k}(|u||v|)^{-2B-2}|u+v||t-t^*|\Big(\frac{a_kq_k^4}{|u|q_{k+1}}+q_k^2\Big) \\ &\ll q_k^2|t-t^*|.\end{aligned}$$

结合（10.1），H_m 的情形即告完成。

关于 ξ_m 的证明也遵循同样的思路。由（8.3），我们有

$$\begin{aligned}\xi_m(t) &= \sum_{r=0}^{m-1}\eta^+(t+r\alpha)=\sum_{\substack{q_c\in\mathcal{Q}\\1<q_c<q_{c+1}^{1/B}}}\sum_{\substack{q_c\leqslant|v|<q_{c+1}\\q_c|v}}\widehat{\eta}(v)e(vt)\sum_{r=0}^{m-1}e(vr\alpha) \\ &=: \xi_{m,1}(t)+\xi_{m,2}(t),\ \text{say},\end{aligned}$$

将关于 q_c 的求和分别拆分为 $c<k$ 或 $c\geqslant k$。因此

$$\xi_{m,2}(t) \ll \sum_{\substack{q_c\in\mathcal{Q}\\ q_k\leqslant q_c<q_{c+1}^{1/B}}}\sum_{\substack{q_c\leqslant|v|<q_{c+1}\\ q_c|v}}|v|^{-2B-2}m\ll\sum_{v\geqslant q_k}v^{-2B-2}q_k^{B-1}\ll q_k^{-2},$$

并利用以下事实：$|e(q_kv\alpha)-1|/|e(v\alpha)-1|\ll q_k^2/q_{k+1}$ 对 $q_c\leqslant|v|<q_{c+1}$、$q_c|v$ 和 $c<k$成立，

$$\begin{aligned}\xi_{m,1}(t)-\xi_{m,1}(t^*) &= \sum_{\substack{1<q_c\in\mathcal{Q}\\ q_c<q_{c+1}^{1/B}\leqslant q_k^{1/B}}}\sum_{\substack{q_c\leqslant|v|<q_{c+1}\\ q_c|v}}\widehat{\eta}(v)\big(e(vt)-e(vt^*)\big)\sum_{r=0}^{m-1}e(vr\alpha)\\ &\ll \sum_{\substack{1<q_c\in\mathcal{Q}\\ q_c<q_{c+1}^{1/B}\leqslant q_k^{1/B}}}\sum_{\substack{q_c\leqslant|v|<q_{c+1}\\ q_c|v}}|v|^{-2B-1}|t-t^*|\Big(\frac{n_k}{q_k}\frac{|e(q_kv\alpha)-1|}{|e(v\alpha)-1|}+q_k\Big)\\ &\ll |t-t^*|q_k\sum_{v\geqslant1}v^{-2B-1}\ll q_k|t-t^*|.\end{aligned}$$

证明完毕。 □

资助。 Lau 获得香港研究资助局 GRF（编号：17317822）和中国国家自然科学基金（NSFC，编号：12271458）的资助。

References

[B13] J. Bourgain, *On the correlation of the Möbius function with rank-one systems*, 《数学分析杂志》, 120 (2013), 105-130. [BSZ13] J. Bourgain, P. Sarnak, T. Ziegler,
Disjointness of Möbius from horocycle flows, 载于：《从傅里叶分析与数论到拉东变换与几何》，载于：《数学发展》，第28卷，施普林格，纽约，2013，67-83. [F22] A. de Faveri,
Möbius disjointness for $C^{1+\varepsilon}$ skew products, 《国际数学研究通知》（IMRN），4 (2022), 2513-2531.[FKL18] S. Ferenczi, J. Kulaga-Przymus, M. Lemanczyk, *Sarnak's conjecture: What's new*, 载于：《遍历理论与动力系统及其与算术和组合数学的交互》，《数学讲义》，第2213卷，施普林格，沙姆，2018, 163-235. [F63] H. Furstenberg, *The structure of distal flows*, 《美国数学杂志》，85 (1963), 477-515. [GT12] B. Green, T. Tao, *The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences*, 《数学年刊》, 175 (2012), 541-566. [HW23] X. He, K. Wang,
A note on Möbius disjointness for skew products on a circle and a nilmanifold, 《澳大利亚数学会公报》, 3 (2023), 471-482. [HLW21] W. Huang, J. Liu, K. Wang,
Möbius disjointness for skew products on a circle and a nilmanifold, 《离散与连续动力系统》，41 (2021), 3531-3553. [HWY19] W. Huang, Z. Wang, X. Ye, *Measure complexity and Möbius disjointness*, 《数学进展》，347 (2019), 827-858. [KLR21] A. Kanigowski, M. Lema´nczyk, M. Radziwill,
Rigidity in dynamics and Möbius disjointness, 《基础数学》，3 (2021), 309-336. [LW19] M. Litman, Z. Wang, *Möbius disjointness for skew products on the Heisenberg nilmanifold*, 《美国数学会会刊》, 147 (2019), 2033-2043. [LS15] J. Liu, P. Sarnak, *The Möbius function and distal flows*, 《杜克数学杂志》, 164 (2015), 1353-1399. [LS17] J. Liu and P. Sarnak, *The Möbius disjointness conjecture for distal flows*, 载于《第六届国际华人数学家大会论文集》，第I卷，《高等数学讲义》（ALM）36，国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2017，327-335.

[MW24] J. Ma, R. Wu, *Möbius disjointness conjecture on the product of a circle and the Heisenberg nilmanifold.* **257** 2024 300 319 《数论杂志》，( ), - . [

P67] W. Parry, *Zero entropy of distal and related transformations*, 《拓扑动力学》（研讨会，科罗拉多州立大学，柯林斯堡，科罗拉多州，1967），383-389. [P18] R. Peckner, *Möbius disjointness for homogeneous dynamics*, 《杜克数学杂志》，**167** (2018), 2745-2792.[S19] P. Sarnak, *Three lectures on the Möbius function*, 《随机性与动力系统》，高等研究院讲义，2009；http://publications.ias.edu. [S12] P. Sarnak, *Möbius randomness and dynamics*, 《南非数学学会通讯》，**43** (2012), 89-97. [W17] Z. Wang, *Möbius disjointness for analytic skew products*, 《数学发明》，**209** (2017), 175-196.

Weihai Institute for Interdisciplinary Research, Shandong University, China和 Department of Mathematics, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong

Email address: yklau@maths.hku.hk

School of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, PR China

Email address: jma@jlu.edu.cn