通用 Costas 矩阵：迈向 Costas 阵列构造的通用框架

Fatih Gulec埃塞克斯大学计算机科学与电子工程学院，英国，*f.gulec@essex.ac.uk*

Vahid Abolghasemi埃塞克斯大学计算机科学与电子工程学院，英国，*v.abolghasemi@essex.ac.uk*

arXiv:2602.03407v1 [cs.IT] 3 Feb 2026

摘要——**Costas 阵列是一种特殊的置换矩阵，具有理想的自相关特性和较低的互相关特性，因此在雷达、无线通信以及通感一体化应用中具有重要价值。本文提出了一种用于分析和发现新 Costas 阵列的新型统一框架。我们引入了通用科斯塔斯矩阵（UCM）和统一科斯塔斯频率矩阵（UCFM），并研究了它们的结构特征。本文提出了一个整合 UCM 和 UCFM 的框架，为未来借助人工智能发现 Costas 阵列铺平道路。利用 UCM 和 UCFM 的结构性质，我们开发了一种基于重构的搜索方法，用于从 UCFM 生成 UCM。数值结果表明，所提方法显著加快了搜索过程，并加深了对 Costas 阵列生成的结构性理解。**

I. 引言

Costas 阵列是一种置换矩阵，其中任意一对 1 之间的向量各不相同。它们最初被提出用于雷达/声呐系统中的跳频码 [1]。它们具有理想的自相关性质，有助于低截获概率雷达减轻多普勒频移的影响 [2], [3]。这些阵列广泛应用于现代雷达波形设计研究 [4]–[6]。

另一方面，Costas 阵列已应用于多址扩频无线通信系统，例如正交频分复用系统 [7], [8]。此外，近期研究表明，Costas 阵列的改进版本可以具备低互相关和最优跳频特性，例如应用于正交图样分多址系统时 [3], [9], [10]。这些特性使 Costas 阵列成为通感一体化（ISAC）应用的理想候选方案 [6], ；在多用户系统中使用它们，有望解决 [11] 中讨论的感知性能提升难题。

尽管 Costas 阵列的应用领域十分广泛，但其生成技术却较为有限。传统上，可以利用伽罗瓦域 [12]–[14] 通过代数方法生成 Costas 阵列，其结构性质也已得到广泛研究 [15]–[18]。研究人员还采用穷举搜索技术来枚举 Costas 阵列 [19]–[23]。据我们所知，目前所有 Costas 阵列仅枚举到 29 [21] 阶。所有已知的 Costas 阵列，无论是通过代数方法获得的，还是通过穷举搜索获得的，都收录在一个公开可用的数据库中 [24]。此类数据库有望用于实现类似于矩阵补全问题中的基于人工智能（AI）的 Costas阵列生成

Fatih Gulec 获得欧盟“地平线欧洲”计划 Marie Skłodowska-CurieCOFUND 项目资助，项目编号为 101081327 YUFE4Postdocs。

基于 Costas 阵列生成，类似于矩阵补全问题 [25], [26] 中使用的方法。

尽管已有这些努力，迄今仍未发现适用于任意阶 Costas 阵列的通用构造方法。一方面，代数构造方法仍主要局限于素数阶或素数幂阶。另一方面，由于复杂度按阶乘级增长，穷举搜索很快便变得不可行。这些持续存在的挑战促使我们开发一个统一的分析框架，以便将人工智能辅助搜索和生成建模方法应用于广义 Costas 阵列的生成。此外，这种统一表示还可利用现有的已知阵列数据集，为未来基于人工智能生成新的 Costas 阵列提供便利。

本文提出一种用于分析和搜索新 Costas 阵列的统一方法。我们定义了通用科斯塔斯矩阵（UCM），其中每一行都包含一个规范形式下的不同 n 阶 Costas 阵列；并定义了通用科斯塔斯频率矩阵（UCFM），即 $n \times n$ 矩阵，用于紧凑地表示相应 UCM 中各元素出现的频率。本文的贡献总结如下：

- 本文将 UCM 及 UCFM 引入为用于分析和搜索 Costas 阵列的新型矩阵表示形式。
- 本文对 UCM 和 UCFM 的结构性质进行了理论分析。
- 本文提出了一种人工智能赋能的框架，使 UCM 和 UCFM 能够集成到未来基于生成式人工智能的 Costas 阵列发现搜索方法中。
- 本文提出了一种新型搜索方法，即从 UCFM 重建 UCM，该方法利用了 UCM 和 UCFM 的结构性质。

此外，本文将 UCFM 热力图可视化，以展示其结构对称性，并对所提出的重建方法进行了定量评估。结果表明，与基准方法相比，所提出的方法显著缩短了运行时间，同时为未来基于人工智能的 Costas阵列生成奠定了基础。

II. 通用 Costas 矩阵

本节将介绍通用科斯塔斯矩阵（UCM）及其结构性质。

A. 预备知识

定义 *1*：阶数为 n 的 Costas 阵列定义为一个$n \times n$ 置换矩阵，它满足以下条件：

连接任意两个 1 的向量各不相同。该置换矩阵的行索引构成 Costas 阵列。

定义 *2*：令 $C(n)$ 表示阶为 n 的所有可能不同 Costas 阵列的数量。阶为 n 的 UCM 记为U_n，是一个 $C(n) \times n$ 矩阵，其中每一行包含一个阶为 n 的不同 Costas 阵列。U_n 的各行按照规范方式给出，使得每行的第一个元素依次取从 1 到 n的整数，其余元素相应排列，以保持规范排序。该矩阵按行划分为 n 个连续块，其中第 j^{th} 块包含所有第一个元素为 j 的 Costas 阵列。因此，U_n 可表示为

$$U_n = \left[\begin{array}{cccc} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r_1,1} & c_{r_1,2} & \cdots & c_{r_1,n} \\ \hdashline c_{r_1+1,1} & c_{r_1+1,2} & \cdots & c_{r_1+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r_2,1} & c_{r_2,2} & \cdots & c_{r_2,n} \\ \hdashline \vdots & & & \\ \hdashline c_{r_{n-1}+1,1} & c_{r_{n-1}+1,2} & \cdots & c_{r_{n-1}+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{C(n),1} & c_{C(n),2} & \cdots & c_{C(n),n} \end{array}\right], \quad (1)$$

其中虚线分隔各个规范块，r_j 表示第 j^{th} 块的最后一行索引，该块对应于第一个元素等于 j的 Costas 阵列。形式上，UCM 可表示为 $U_n = \mathcal{U}(n)$，其中 $\mathcal{U}(\cdot)$ 是将阶为n 的所有不同 Costas 阵列集合映射为规范矩阵表示的*UCM*构造算子，

$$\mathcal{U}(n) : \{\text{All Costas arrays of order } n\} \to \mathbb{N}^{C(n)\times n}, \quad (2)$$

使得 $\mathcal{U}(n)$的各行按其首元素升序排列，即$U_n(r_1, 1) < U_n(r_2, 1)\ \forall r_1 < r_2$，以确保形成规范块结构。

例 *1*：U_4 可按规范顺序展示，其中有 4 个块，由水平虚线分隔，如下所示：

$$U_4 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ \hdashline 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hdashline 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hdashline 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]. \quad (3)$$

定义 *3*：基于定义 2，$S(n,\ k)$定义为 U_n 中元素为 $c_{m,\ k}$ 的 k^{th} 列之和，其中$k \in 1,\ 2,\ .....,\ n$，如 b 所示

$$S(n,k) = \sum_{m=1}^{C(n)} c_{m,k}. \quad (4)$$

此外，值得回顾一下基本恒等式：对于 $\pi = \{1,\ldots,n\}$ 的任意排列，我们有 $\sum_{k=1}^{n} \pi(k) = \frac{n(n+1)}{2}$。由于 Costas 阵列是一种排列，任意

表 I：Universal Costas 矩阵中 Costas 阵列的数量及行/列和

3–16 阶				17–29 阶			
n	**C(n)**	**D(n)**	**S(n)**	**n**	**C(n)**	**D(n)**	**S(n)**
3	4	6	8	17	18276	153	164484
4	12	10	30	18	15096	171	143412
5	40	15	120	19	10240	190	102400
6	116	21	406	20	6464	210	67872
7	200	28	800	21	3536	231	38896
8	444	36	1998	22	2052	253	23598
9	760	45	3800	23	872	276	10464
10	2160	55	11880	24	200	300	2500
11	4368	66	26208	25	88	325	1144
12	7852	78	51038	26	56	351	756
13	12828	91	89796	27	204	378	2856
14	17252	105	129390	28	712	406	10324
15	19612	120	156896	29	164	435	2460
16	21104	136	179384	–	–	–	–

阶为 n 的 Costas 阵列，或 U_n 中任意一行的元素之和 $D(n)$，等于

$$D(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5)$$

B. 结构性质与理论结果

定理 *1*：在通用科斯塔斯矩阵 U_n 中，所有列的和都相等，即

$$S(n,k) = S(n), \qquad \forall k \in \{1,\ldots,n\}. \quad (6)$$

证明：每个 Costas 阵列都以四个或八个为一组，因为它们属于由八种反射和旋转 [13] 生成的多态变体等价类。根据对角对称性，每组多态变体，即轨道，包含四个或八个成员，它们通过对 Costas 阵列排列 π 及其逆排列 π^{-1} 进行 90° 旋转或反射得到。对于固定列 k，四个旋转多态变体可表示为

$$\begin{array}{ll} \pi^{(1)}(k) = \pi(k), & \pi^{(2)}(k) = n{+}1{-}\pi(k), \\ \pi^{(3)}(k) = \pi(n{+}1{-}k), & \pi^{(4)}(k) = n{+}1{-}\pi(n{+}1{-}k), \end{array} \quad (7)$$

其中，另外四个反射多态通过将 $\pi(k)$ 替换为 $\pi^{-1}(k)$ 得到。轨道中的每一对都互补：

$$\pi^{(i)}(k) + \pi^{(i+1)}(k) = n+1, \qquad i \in \{1,3,5,7\}. \quad (8)$$

因此，一组多态变体的列和为

$$\sum_{t \in O(\pi)} \pi^{(t)}(k) = \frac{|O(\pi)|}{2}(n+1), \quad (9)$$

其中，$|O(\pi)| \in \{4,8\}$ 是取决于对角对称性的轨道大小。该值只取决于 n，而不取决于 k。因此，将所有多态变体堆叠起来形成 U_n，可得

$$S(n,k) = S(n), \quad \forall k. \quad (10)$$

推论 *1*：n 阶统一科斯塔斯矩阵中某一列之和与 n 阶 Costas 阵列数目之比由下式给出

$$\frac{S(n)}{C(n)} = \frac{n+1}{2}. \quad (11)$$

证明：按行对 U_n 的所有项求和，得到 $C(n)D(n)$；按列求和则得到 $nS(n)$。令两者相等并使用

$D(n) = {}^{n}_{(n+1)\ 2}$ 代入式（5），即可得到结果：

$$C(n)\frac{n(n+1)}{2} = nS(n) \tag{12}$$

$$\frac{S(n)}{C(n)} = \frac{n+1}{2}. \tag{13}$$

III. 通用科斯塔斯频率矩阵

本节介绍通用科斯塔斯频率矩阵（UCFM）及其对称性质。

定义 4：设 U_n 为 n 阶统一科斯塔斯矩阵。n 阶 UCFM 记为 F_n，它是一个 $n \times n$ 矩阵，用于表示从 1 到 n 的每个数在 U_n 的每一列中出现的频次。F_n 的第（i，k）th 个元素，即 $f_{i,\ k}$，统计整数 i 在第 k^{th} 列U_n中出现的次数。形式上，UCFM 定义为 $F_n = \mathcal{F}(U_n)$，其中 $\mathcal{F}(\cdot)$ 是*UCFM* 变换算子，它将 U_n 映射为对应的频率矩阵 F_n，其逐元素定义如下

$$[\mathcal{F}(U_n)]_{i,k} = f_{i,k} = \#\{\, r \mid U_n(r,k) = i \,\}, \tag{14}$$

其中，$\#\{\cdot\}$ 表示集合的基数，即满足给定条件的元素个数。为便于理解，下面给出偶数阶和奇数阶 UCFM 的两个示例。

示例 *2*：F_6 如下所示

$$F_6 = \begin{bmatrix} 19 & 17 & 22 & 22 & 17 & 19 \\ 17 & 24 & 17 & 17 & 24 & 17 \\ 22 & 17 & 19 & 19 & 17 & 22 \\ 22 & 17 & 19 & 19 & 17 & 22 \\ 17 & 24 & 17 & 17 & 24 & 17 \\ 19 & 17 & 22 & 22 & 17 & 19 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中，第一行显示 U_6 各列中 1 的数量，第二行显示 U_6 各列中 2 的数量，依此类推。类似地，F_5 也如下所示。

$$F_5 = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 8 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 8 & 6 & 10 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 10 & 6 & 8 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

例如，$f_{2,\ 2} = 6$显示 U_5 第 2 列中 2 的数量。示例 2 中的 F_6 和 F_5 也展示了下文概括的两种不同对称性。

定理 *2*：设 F_n 为阶数为 n 的统一科斯塔斯频率矩阵。F_n 具有水平、垂直和对角反射对称性。对于奇数 n，对称轴穿过中间行和中间列；对于偶数 n，对称轴则位于它们之间。

证明：如定理 1 所示，每个 Costas 阵列（U_n 的每一行）都属于一个由多态变体（旋转和反射）构成的等价类，其大小为 4 或 8，具体取决于是否具有对角对称性[21]。设每个阵列 $\pi^{(r)}$ 由其二维二进制形式 $B^{(r)} = [b_{i,k}^{(r)}]$ 表示，其中 $b_{i}^{(r)}$.$_{k} = 1$ 若 $\pi^{(r)}(i) = k$，否则为 0。F_n 可定义为所有此类矩阵的叠加，如下所示：

$$F_n = \sum_r B^{(r)}, \qquad f_{i,k} = \sum_r b_{i,k}^{(r)}. \tag{17}$$

对于每个 $B^{(r)}$，其旋转和反射多态变体会将值为 1 的元素重新放置到由以下形式的索引变换关联的位置：$(i,\ k) \mapsto (n{+}1{-}i,\ k)$，$(i,\ n{+}1{-}k)$，$(n{+}1{-}i,\ n{+}1{-}k)$，$(k,\ i)$，以及它们关于两条对角线的互补反射。因此，$F_n$ 中的每个值 $(i,\ k)$ 都与其对称对应项具有相同的贡献：

$$\begin{aligned} f_{i,k} &= f_{n+1-i,\,k} = f_{i,\,n+1-k} = f_{n+1-i,\,n+1-k} = f_{k,\,i} \\ &= f_{n+1-k,\,i} = f_{k,\,n+1-i} = f_{n+1-k,\,n+1-i}, \quad \forall i,k. \end{aligned} \tag{18}$$

如果 Costas 阵列沿某条对角线对称（四种多态形式），其中一些位置会重合，从而减少不同等式的数量。因此，所有多态形式的总贡献仍然平衡，F_n 中对称位置处的元素数量也相等。

推论 *2*：F_n 的一行或一列中所有元素之和给出阶为 n的全部 Costas 阵列的数目，即

$$C(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} f_{k,m}, \forall m \\ \sum_{m=1}^{n} f_{k,m}, \forall k. \end{cases} \tag{19}$$

证明：鉴于 F_n 统计每个数字在每一列中出现的频率，且其有 $C(n)$行，因此 F_n 中每一列之和为 $C(n)$，因为从 1 到 n 的每个数字在阶为 n的 Costas 阵列中仅出现一次。此外，定理 2 所给出的 F_n 的反射对称性表明，每一列之和等于 F_n中每一行之和，该值同样等于 $C(n)$。

推论 *3*：利用 F_n的元素，U_n每一列之和，即 $S(n)$，可由下式给出

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k f_{k,m},\ \forall m \tag{20}$$

其中$f_{k,m}$ 是 F_n 位于第 k 行、第 m列的元素。

证明：每个$f_{k,m}$ 统计 k 在 U_n的第 m 列中出现的次数。将每个计数乘以 k 并对所有行求和，便得到列和 $S(n)$，且该值对所有 m 均相同（定理 1）。

第 II 节和第 III 节给出的理论基础构成了下一节所提框架的基础。

IV. Costas 阵列发现的一般框架：从 UCFM 重建 UCM

本节介绍一种用于 Costas 阵列发现的一般框架，该框架整合了 UCM、UCFM 和基于人工智能的生成模型。本文提出了一种基于从 UCFM 重建 UCM 的新颖搜索方法，并将在下文详细介绍。

A. 研究动机

如第 III 节所述，UCFM 提供了一种紧凑的表示方式，可表示给定阶数的所有 Costas 阵列，并形成二维 $n \times n$唯一矩阵。它们呈现出高度结构化的对称模式，可用于重建底层的 Costas 阵列。此外，还可以通过热力图将其表示为图像（如第 V 节所示）。

随着人工智能技术的发展，图像中的细微模式可以被识别。尤其是，生成对抗网络等生成模型 [25]，[27] 已展现出

合成或外推结构化数据分布的强大能力 [26]。然而，由于缺乏能将 Costas 阵列与数据驱动学习联系起来的明确定义表示，人工智能尚未应用于 Costas 阵列发现。鉴于 UCFM 的紧凑表示，利用基于人工智能的生成建模来预测更高阶的 UCFM，从而促进发现新的 Costas 阵列，具有巨大潜力。为此，我们提出了一个整合 UCM、UCFM 和人工智能方法的通用框架，如图 1 所示。如图 1 上方分支所示，通过穷举搜索枚举出的所有 Costas 阵列都可以转换为 UCFM（F_n）；这些 UCFM 是完备的，因为所有阶数为 $n \leq 29$ 的 Costas 阵列均已为人所知。此外，如图 1 下方分支所示，利用截至阶数 $n \leq 1030$ [24] 可获得的大型 Costas 阵列数据库，也可以通过代数方法生成不完备的 UCFM（F_n^*）。因此，这些完备和不完备的 UCFM 可作为潜在生成式人工智能模型的结构化训练数据。

预测得到的UCFM可作为此类ˆ ˆ模型的输出而获得，如图1中 F_n 所示。随后，这些 F_n可ˆ通过逆运算 $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$用于重建相应的统一科斯塔斯矩阵（U_n），该运算表示由UCFM重建统一科斯塔斯矩阵。这一重建视角为发现新的Costas阵列提供了一种更整体且在计算上更易处理的方法，因为它利用频率约束，而非直接进行组合枚举。我们将使用生成式人工智能模型预测任意阶 n 的UCFM留作未来工作，因为该问题并非平凡，且超出本文范围。不过，在本文中，我们聚焦于图1的最后一个块 $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$，并给出重建过程的详细算法。

B. 重构算法

由完备通用科斯塔斯频率矩阵重建统一科斯塔斯矩阵的重建算法伪代码由图1中蓝色框所示的运算 $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$表示，并在算法1中给出。在该算法中，我们首先利用推论2由 F_n 确定给定阶 n的Costas阵列数量。此外， U_n的块大小与索引——其中每个块表示以不同元素起始的Costas阵列规范群（见定义2与例1）——由 F_n的第一列确定。随后，采用Russo等人 [23] 提出、并由$RUSSO\ \ SEARCH(n, a0)$在算法1中实现的基准Costas阵列搜索方法，启动规范穷举搜索。Russo方法采用对称性约简、位掩码、前向检查（或前瞻）以及回溯来加速搜索。在

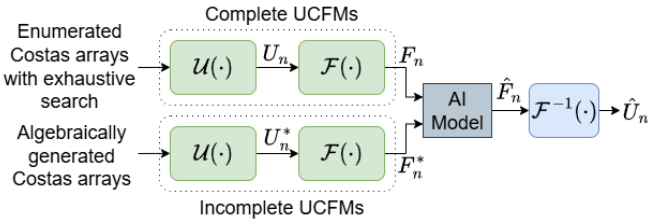


图 1：利用 UCM/UCFM 和人工智能发现新 Costas 阵列的一般框架。

算法 1 通用科斯塔斯矩阵重构
U_n 通用科斯塔斯频率矩阵 F_n

要求： n：阶； F_n：大小为 $n \times n$ 的完备通用科斯塔斯频率矩阵

确保： U_n：阶为 n 的标准通用科斯塔斯矩阵

$C(n) \leftarrow \sum_{v=0}^{n-1} F_n[v,0]$ ▷ $C(n)$ 来自 (19)
初始化空矩阵 $U_n[C(n)][n]$
初始化块大小 $B[v] \leftarrow F_n[v,0]$ for $v = 0 \ldots n-1$
计算块起始下标 start$[v]$和计数器 next$[v] \leftarrow$ start$[v]$，初始化已放置行 $\leftarrow \emptyset$
对于 $a_0 = 0$ **到** $n-1$ **执行**
  如果 $B[a_0] = 0$ **则**
    继续 ▷ 块已填充
  结束如果
  $G \leftarrow$ RUSSO_搜索(n, a_0) ▷ 搜索 Costas 阵列阶数为 n、首个元素为 a_0，使用 Russo 方法 [23]
  对于每个规范排列 p **在** G**执行**
    如果 $p \in$ 已放置行 **则**
      继续
    结束如果
    $\mathcal{O}(p) \leftarrow$ 多态变体(p) ▷ 生成多态变体
    对于每个 q **在** $\mathcal{O}(p)$ **中**
      如果 $q \notin$ 已放置行 **且** $B[q[0]] > 0$ **则**
        将 q 放入位置 next$[q[0]]$处的块中
        next$[q[0]] \leftarrow$ next$[q[0]] + 1$
        $B[q[0]] \leftarrow B[q[0]] - 1$
        已放置行 $\leftarrow$已放置行 $\cup\{q\}$
      结束条件判断
    结束循环
    如果 $B[a_0] = 0$ **则**
      跳出 ▷ 块已填满；移至下一个块
    结束条件判断
  结束循环
结束循环
返回 U_n

具体而言，它使用位掩码对排列的差分三角形进行编码，而前瞻过程确保至少有一个有效的未来列位置仍然可用，且不违反差分三角形的唯一性。这使得能够在搜索早期剪除不可行分支。

每个 Costas 阵列最多生成 8 个多态变体，根据对角对称性 [13]，会产生 3 个或 7 个额外阵列。按照 Russo 方法中的应用方式，我们从每个已找到的 Costas 阵列生成多态变体。不过，我们对它们的处理方式有所不同。每个生成的多态变体都作为一行放入 U_n 中对应的块。当 U_n 中对应的块被完全填满时，我们停止对该块的搜索并转到下一个块。当所有块都根据 F_n 中的块大小被填满时，重建即告完成。接下来，将展示该重建方法的性能，并验证理论结果。

V. 结果

在本节中，数值 ical resul

现展示实验结果，以说明理论发现以及第四节中详述的所提出重建方法的性能结果。

图 3 中通过热力图图像展示了 $5 \leq n \leq 29$ 的完备 UCFM，位于图的前 5 行。这些

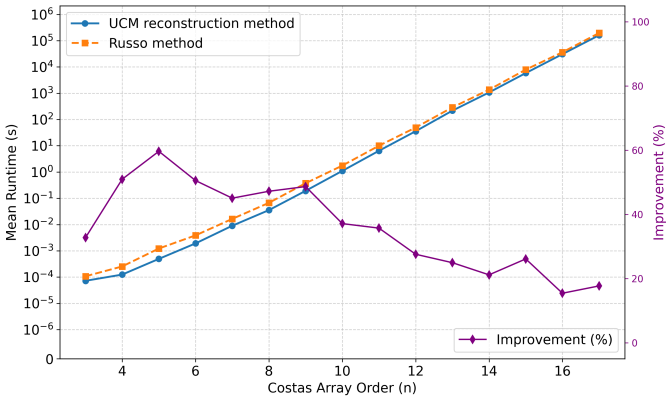


图 2：所提出的 UCM 重构方法与 Russo 方法的基准比较结果。

图像是将式 (14) 应用于 [20]，[21]，[24]中枚举出的 Costas 阵列生成的。此外，图 3 第 6 行展示了利用 Beard 数据库中代数生成的 Costas 阵列 [24]生成的不完备 UCFM。图 3 中的色标根据每幅图像中的 UCFM 最大值进行归一化，较亮和较暗的区域分别表示较高和较低的频率。图中的 $1-5$ 行验证了定理 2 给出的 UCFM 的水平、垂直和对角反射对称性。不完备 UCFM 仍呈现相同的对称性，因为该数据库包含代数构造的 Costas 阵列的多态变体。

在图 2 中，描绘了所提出的重建方法与 Russo 方法在 [23]中针对 $4 \le n \le 17$的平均运行时间（左轴，对数刻度）。该图的每个数据点是在一台配备双路 Intel Xeon Gold 2.1 GHz 处理器和 128 GB 随机存取存储器的 Dell PowerEdge T640 服务器上，对 $n < 13$ 运行 10 次以及对 $n \ge 13$运行 3 次所得的平均值。代码采用 Python 3.12 实现，且未采用并行处理。图 2（右轴）展示了所提出方法平均运行时间的改进，计算方式为 $100 \times \big(1 - E\{t_{U/F}\}/E\{t_{\text{Russo}}\}\big)$，其中 $E\{\cdot\}$ 为期望算子，$t_{U/F}$ 与 t_{Russo} 分别为所提出方法与 Russo 方法的运行时间。

对于小阶数（$4 \le n \le 9$），相较于 Russo 方法，性能显著提升，在 $n = 5$处达到 59% 的峰值提升。达到峰值后，性能增益有所下降，但在 $n \ge 13$附近稳定在 15%。即使仅利用 F_n 的第一列和 U_n的块结构，性能也能得到显著改善。虽然并行处理可以提升性能，但通过充分利用 F_n 中的残余频率结构来重构 U_n，还可以实现显著的算法改进。

VI. 讨论与结论

本文提出一种整体方法，利用 UCM 和 UCFM 分析并发现新的 Costas 阵列。本文考察了它们的结构性质和理论基础，并提出一种基于重构的搜索方法，以从 UCFM 中获取 UCM。数值结果表明，性能显著优于基准 Russo 方法，凸显了所提方法的高效性。此外，通过所提方法获得的 Costas 阵列仍适用于通感一体化应用，因为它们具有理想的自相关性质，适合感知，并具有较低的互相关，适合多用户通信。

我们的观察和结果表明，任意一个 n 阶的 Costas 阵列可能作为同阶 UCM 中的一行存在，而不是独立存在。这一发现表明，相较于将 Costas 阵列分类为代数型或零星型，采用统一的矩阵视角可能更为有效。因此，这为通过逐列搜索方法重构 UCM 提供了可能。

所提出的框架还为人工智能驱动的 Costas 阵列发现奠定了基础。通过将 UCM/UCFM 与生成式人工智能模型相结合，可以进一步加速新阵列的搜索。尽管数据稀缺是一项挑战，但数据增强、用于组合问题或矩阵补全问题的预训练模型，以及生成建模，都为 Costas 阵列发现提供了有前景的策略。

参考文献

[1] J. P. Costas，“一类具有近乎理想的距离—多普勒模糊特性的检测波形研究”，*IEEE*会刊，第72卷，第8期，第996–1009页，1984年。[2] F. G¨ulec、和 E. Afacan，“低截获概率雷达中科斯塔斯阵列的应用”，载于*2015*年第*23*届信号处理与通信应用会议（*SIU*）。IEEE，2015年，第347–350页。[3] J. Yao、R. Jiang、Z. Liu 和 X. Wang，“利用二维循环移位在戈洛姆科斯塔斯阵列上构造最优跳频图样”，*IEEE*航空航天与电子系统汇刊，2024年。[4] N. Touati、C. Tatkeu、A. Rivenq、C. Thierry 和 Y. El Hillali，“基于双重编码科斯塔斯信号的多用户雷达波形”，*IET*雷达、声呐与导航，第11卷，第2期，第277–284页，2017年。[5] B. Correll Jr、J. K. Beard 和 C. N. Swanson，“用于近距离目标检测的科斯塔斯阵列波形”，*IEEE*航空航天与电子系统汇刊，第56卷，第2期，第1045–1076页，2019年。[6] D. Xing、C. Zhang 和 Y. Zhang，“面向海上搜救的基于相位编码FMCW的通感一体化系统设计”，传感器，第25卷，第17期，第5403页，2025年。[7] S. V. Maric 和 E. L. Titlebaum，“一类具有近乎理想特性的跳频码，用于多址扩频通信以及雷达与声呐系统”，*IEEE*通信汇刊，第40卷，第9期，第1442–1447页，1992年。[8] S. V. Maric 和 O. Moreno，“利用科斯塔斯阵列为OFDM无线系统构造跳频图样”，载于*2006*年第*40*届信息科学与系统年度会议。IEEE，2006年，第505–507页。[9] J. Yao、R. Jiang、X. Wang 和 Z. Liu，“利用基于韦尔奇科斯塔斯阵列构造的最优跳频图样实现正交图样分多址”，*IEEE*绿色通信与网络汇刊，2024年。[10] J. Yao、R. Jiang 和 W. Heng，“基于韦尔奇科斯塔斯阵列的最优跳频图样代数构造”，*IEEE Trans- actions on Vehicular Technology*，第69卷，第2期，第1841–1854页，2019年。[11] S. Lu 等，“通感一体化：最新进展与十项开放挑战”，*IEEE*物联网期刊，第11卷，第11期，第19 094–19 120页，2024年。[12] S. W. Golomb 和 H. Taylor，“科斯塔斯阵列的构造与性质”，*IEEE*会刊，第72卷，第9期，第1143–1163页，1984年。[13] K. Drakakis，“科斯塔斯阵列综述”，应用数学杂志，第2006卷，第1期，第026385页，2006年。[14] S. W. Golomb 和 G. Gong，“科斯塔斯阵列的研究现状”，*IEEE*信息论汇刊，第53卷，第11期，第4260–4265页，2007年。[15] J. K. Beard，“科斯塔斯阵列选择中科斯塔斯条件矩阵表示的奇异值分解”，*IEEE*航空航天与电子系统汇刊，第57卷，第2期，第1139–1161页，2020年。[16] J. Jedwab 和 L. Yen，“科斯塔斯立方体”，*IEEE*信息论汇刊，第64卷，第4期，第3144–3149页，2017年。

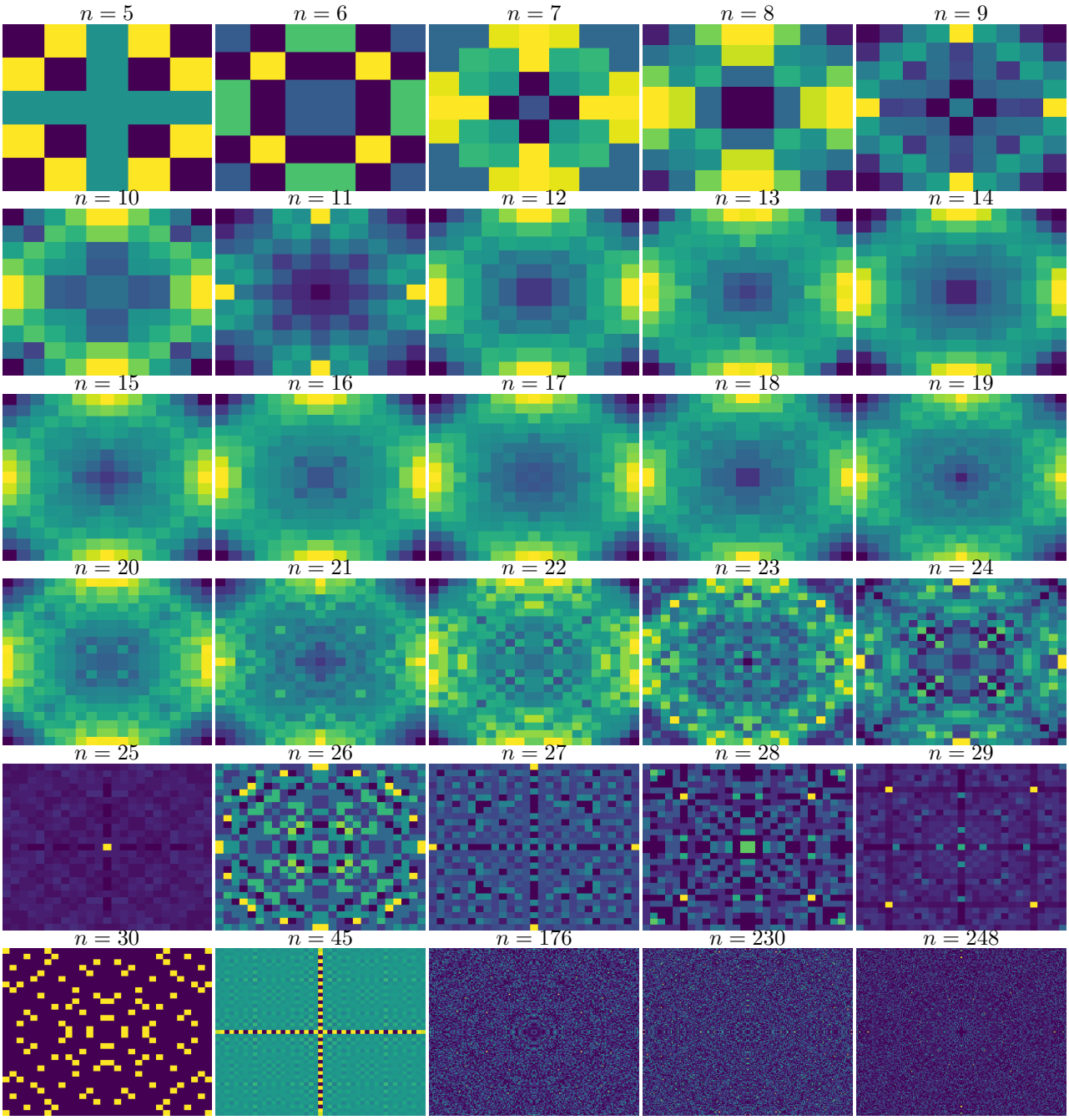


图 3：完备 UCFM（F_n）　　r $5 \leq n \leq 29$（第 1–5 行）以及 $n = 3045$、176、230、248 的不完备 UCFM（仅第 6 行）.

[17] L. Warnke、B. Correll 和 C. N. Swanson，“科斯塔斯阵列的密度呈指数衰减”，*IEEE*信息论汇刊，第69卷，第1期，第575–581页，2022年。[18] J. Torres 和 I. Rubio，“多维科斯塔斯阵列及其周期性”，*IEEE*信息论汇刊，第69卷，第8期，第5032–5040页，2023年。[19] K. Drakakis 等，“阶为27的科斯塔斯阵列枚举结果”，*IEEE*信息论汇刊，第54卷，第10期，第4684–4687页，2008年。[20] K. Drakakis、F. Iorio 和 S. Rickard，“阶为28的科斯塔斯阵列枚举及其影响。”*Adv. Math. Commun.*，第5卷，第1期，第69–86页，2011年。[21] K. Drakakis、F. Iorio、S. Rickard 和 J. Walsh，“阶为29的科斯塔斯阵列枚举结果。”*Adv. Math. Commun.*，第5卷，第3期，第547–553页，2011年。[22] J. K. Beard、J. C. Russo、K. G. Erickson、M. C. Monteleone 和 M. T. Wright，“科斯塔斯阵列生成与搜索方法”，*IEEETrans.* 航空电子与电气系统，第 43 卷，第 2 期，第 522–538 页，2007 年。[23] J. C. Russo、K. G. Erickson 和 J. K. Beard，《最大化回溯和对称性利用的 Costas 阵列搜索技术》，发表于 *2010* 年第 *44* 届2010 年，第 1 届第 8届信息科学与系统年会（*CISS*）。IEEE，第 – 页。[24] J. Beard，《Costas 阵列与枚举至阶 1030》，*IEEEDataport*，　　2017［　　］　　10 21227　21　42 。在线。[25] 可访问：https://dx.doi.org/。/H P J. Yoon、J. Jordon 和 M. Schaar，《GAIN：使用生成对抗网络进行缺失数据插补》，发表于国际机器学习会议。PMLR，2018 年，第 5689–5698 页。[26] S. Wang等，《基于多源数据融合的生成对抗矩阵补全网络，用于预测 miRNA-疾病关联》，生物信息学简报，第 24 卷，第 5 期，文章编号 bbad270，2023 年。[27] I. J. Goodfellow等，《生成对抗网络》，神经信息处理系统进展，第 27 卷，2014 年。