arXiv:2602.03408v1 [math.NT] 3 Feb 2026

探寻交错ζ函数各阶导数之间的近似多项式依赖关系

Yuri Matiyasevich

（发表于*J. Exper. Math.*，1(2):239–256，2025）

摘要： 众所周知，黎曼ζ函数不满足任何精确的 多项式微分方程。本文给出了数值证据，表明交错ζ函数的值与其初始阶导数之间存在近似的 多项式依赖关系。

文中提出了若干猜想。

关键词和短语： 狄利克雷η函数，导数之间的近似多项式关系

1 引言

该黎曼ζ函数可通过如下狄利克雷级数定义：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{1.1}$$

该级数在 $\Re(s) > 1$ 时收敛，但 ζ函数可以解析延拓至整个复平面，除了在 $s = 1$ 处有一个简单极点。

ζ函数是最神秘的数学对象之一。著名的 黎曼猜想 一个半多世纪以来始终未获证明。

如果能找到一个合适的微分方程，使ζ函数满足该方程，那么研究ζ函数或许会更容易。然而，这是不可能的。D. Hilbert [4] 断言，ζ函数不满足任何代数微分方程。后来，V. E. E. Stadigh [11] 给出了证明；在更一般的情形下，D. D. Mordukhai-Boltovskoi [12] 也给出了证明（另见 [10,9]）。这些“否定性”结果后来被推广到了更广泛的微分方程类别（例如，参见近期发表的文献 [2]及其中的参考文献）。

早在L. Euler时代，人们就已研究实数自变量下的ζ函数。同样，他还研究了交错ζ函数（亦称狄利克雷η函数）

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s}. \tag{1.2}$$

这两个函数（1.1）和（1.2）相互关联：

$$\eta(s) = (1 - 2 \times 2^{-s})\zeta(s). \tag{1.3}$$

因子 $1 - 2 \times 2^{-s}$ 在 $s = 1$处为零，因此 η（s）是一个整函数。因此，通常研究 η（s）会更容易。此外，级数（1.2）在更大的半平面 $\Re$（s） > 0内收敛。

上述关于ζ函数的“否定”结果可以转移到埃塔函数。具体而言，埃塔函数不满足任何精确的多项式微分方程。本文展示了交错ζ函数及其导数取值之间的近似的多项式关系。这种关系是通过实验发现的，迄今尚未对这些现象给出任何“解释”。

更确切地说，我们定义了几组由整数系数多项式构成的序列对

$$\langle V_N(y_0, \ldots, y_k, \ldots, y_N),\ W_N(y_0, \ldots, y_k, \ldots, y_{N-1}) \rangle,\ N = 1, 2, \ldots\ . \tag{1.4}$$

对于每个这样的级数，我们提出一个猜想：

$$\frac{V_N(\eta(a), \ldots, \eta^{\langle n \rangle}(a), \ldots, \eta^{\langle N-1 \rangle}(a))}{W_N(\eta(a), \ldots, \eta^{\langle n \rangle}(a), \ldots, \eta^{\langle N-1 \rangle}(a))} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 1 \tag{1.5}$$

除去可数多个 a值。为支持这些猜想，我们展示了一些数值数据。这些数据表明，即使 N 的值相对较小，式（1.5）的左侧也可以非常接近 1。

本文分为两部分。在第一部分中，我们展示原始数值数据并讨论其特性。根据我们的观察，在第二部分中，我们构造具有预期性质1.4的多项式1.5。在总结性说明中，我们简要讨论将我们的观察和猜想推广到黎曼ζ函数的可能性。

本文的初步版本 [7] 和 [8]包含更多数值数据和猜想。

第一部分

数值观察

2 一个无法实现的目标

让我们先考虑一个非常宏大、因而无法实现的目标：对于某个正整数 N，求出一个线性多项式

$$P(y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_{N-1} y_{N-1} - b \tag{2.1}$$

具有数值系数

$$b, c_1, \dots, c_{N-1} \tag{2.2}$$

使得对于所有 a

$$P\big(\eta(a), \eta'(a), \dots, \eta^{\langle N-1\rangle}(a)\big) = 0. \tag{2.3}$$

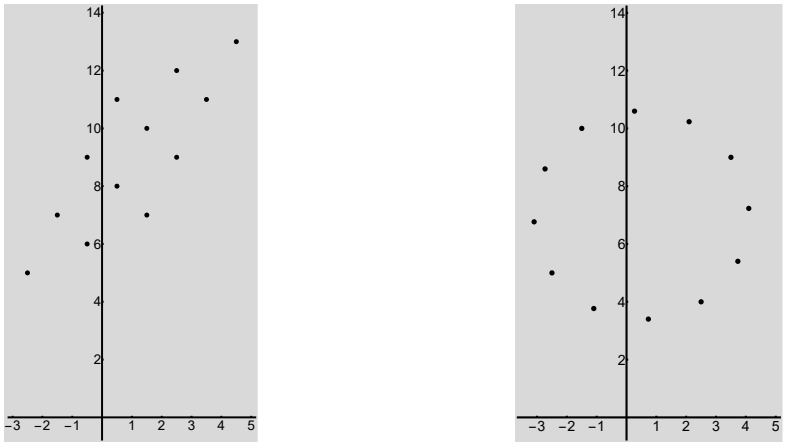
如果这样的多项式 P 存在，我们就可以按以下方式求出它的系数 (2.2)。首先，我们选取一个由 $\mathfrak{A} = \{a_0, \dots, a_{N-1}\}$ 个 N复数组成的一般位置集合。然后，求解线性方程组

$$\eta(a_j) + c_1(\mathfrak{A})\eta'(a_j) + \cdots + c_{N-1}(\mathfrak{A})\eta^{\langle N-1\rangle}(a_j) = b(\mathfrak{A}), \qquad j = 0, \dots, N-1 \tag{2.4}$$

关于未知数

$$b(\mathfrak{A}),\ c_1(\mathfrak{A}),\ \dots,\ c_{N-1}(\mathfrak{A}). \tag{2.5}$$

如果所有 2.5 数字对所有 $\mathfrak{A}$ 都相同，我们的目标就实现了。正如引言中所解释的，事实并非如此。



$\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_2$

图2.1：网格 $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_{\mathrm{G}}$（$-2.5 + 5\mathrm{i}$ $2 + \mathrm{i}$ $1 + 2\mathrm{i}$，2，3）和离散圆$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_{\mathrm{C}}$（$0.5 + 7\mathrm{i}$ $3 + 2\mathrm{i}$，12）分别由（2.6）和（2.7）定义。

让我们考察图 2.1 所示的两个特定集合的数值数据。这些集合是网格 和离散圆的实例，一般情况下，它们定义如下。对于复数 a， δ_1， δ_2 以及非负整数 N_1，N_2

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{G}}(a, \delta_1, \delta_2, N_1, N_2) = \{a + k\delta_1 + l\delta_2 \,|\, k = 0, \ldots, N_1, l = 0, \ldots, N_2\}, \quad (2.6)$$

对于复数 c、 r 和正整数 N

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(c, r, N) = \{c + \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/N} r \mid k = 0, \ldots, N-1\}. \quad (2.7)$$

表 2.1给出了 c-系数在方程组（2.4）的解中的值，这些解对应于图2.1中的两个集合。我们注意到，尽管这两个集合相当不同，但数字 c_k（$\mathfrak{A}_1$）和 c_k（$\mathfrak{A}_2$）之间存在某种相似性。至于 b-系数， b（$\mathfrak{A}_1$）和 b（$\mathfrak{A}_2$）几乎相等：

$$b(\mathfrak{A}_1) = 0.99999999999999430995... + 0.00000000000000951329...\mathrm{i}, \quad (2.8)$$
$$b(\mathfrak{A}_2) = 1.00000000000000637109... + 0.00000000000003070321...\mathrm{i}. \quad (2.9)$$

此外，表2.2–2.3 显示， $b(\mathfrak{A})$ 由方程组（2.4）的解得到的结果与1 惊人地接近，适用于若干差异颇大的网格和离散圆：

$$b(\mathfrak{A}) \approx 1. \quad (2.10)$$

	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2$
$c_1(\mathfrak{A})$	$7。30910\ldots - 0.26348\ldots\mathrm{i}$	$7.35147\ldots - 0.23197\ldots\mathrm{i}$
$c_2(\mathfrak{A})$	$23.85173\ldots - 1.81924\ldots\mathrm{i}$	$24.15410\ldots - 1.61238\ldots\mathrm{i}$
$c_3(\mathfrak{A})$	$45。96860。。。 - 5.55318\ldots\mathrm{i}$	$46。92441。。。 - 4.95964\ldots\mathrm{i}$
$c_4(\mathfrak{A})$	$58。22426。。。 - 9.89546\ldots\mathrm{i}$	$59。99059。。。 - 8.91557\ldots\mathrm{i}$
$c_5(\mathfrak{A})$	$50。94334\ldots - 11.42336\ldots\mathrm{i}$	$53.05986\ldots - 10.39502\ldots\mathrm{i}$
$c_6(\mathfrak{A})$	$31。43810\ldots - 8.94113\ldots\mathrm{i}$	$33。15830\ldots - 8.22831\ldots\mathrm{i}$
$c_7(\mathfrak{A})$	$13.68711\ldots - 4.81140\ldots\mathrm{i}$	$14。64820..... - 4.48445\ldots\mathrm{i}$
$c_8(\mathfrak{A})$	$4.11913\ldots - 1.75935\ldots\mathrm{i}$	$4。48375\ldots - 1.66349\ldots\mathrm{i}$
$c_9(\mathfrak{A})$	$0.81560\ldots - 0.41866\ldots\mathrm{i}$	$0。90549。。。 - 0.40230\ldots\mathrm{i}$
$c_{10}(\mathfrak{A})$	$0。09551。。。 - 0.05857\ldots\mathrm{i}$	$0.10851\ldots - 0.05731\ldots\mathrm{i}$
$c_{11}(\mathfrak{A})$	$0.00500\ldots - 0.00365\ldots\mathrm{i}$	$0.00583\ldots - 0.00365\ldots\mathrm{i}$

表 2.1：图 c（2.4）中的系数值，适用于图 2.1 所示的集合 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 。2.1。

（针对网格、离散圆和“随机”集合的）更多相关数值数据见 [7, 表 36–38]。在引入一些记号后，我们会再讨论这一现象。

3 矩阵记法

我们将方程组（2.4）改写为矩阵记法，并用克拉默法则求解。为此，我们引入以下记号。

令 D_N 表示“规范” $N \times N$ 矩阵的行列式：

$$D_N = \begin{vmatrix} x_{0,0} & \cdots & x_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1,0} & \cdots & x_{N-1,N-1} \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

如果 E 是某个表达式，且 m 和 n 是满足$0 \le m < N$和 $0 \le n < N$的特定整数，那么

$$D_N(x_{m,n} \to E) \tag{3.2}$$

表示在 D_N 中将 $x_{m,n}$ 替换为 E 的结果。

可以进行多次替换，例如

$$D_N(x_{1,1} \to E_1, x_{2,2} \to E_2) \tag{3.3}$$

a	δ_1	δ_2	N_1	N_2	N	$\lvert b\ (\mathfrak{A})\ - 1\rvert$
$-200+15\mathrm{i}$	50	50i	5	5	36	$1.0523\ldots\cdot 10^{-57}$
$-5+15\mathrm{i}$	5	5i	5	5	36	$5.7251\ldots\cdot 10^{-64}$
$30\mathrm{i}$	0.0001	0.0001i	5	5	36	$1.1424\ldots\cdot 10^{-53}$
$0.25+30\mathrm{i}$	0.0001	0	59	0	60	$5.3809\ldots\cdot 10^{-98}$
$0.5+30\mathrm{i}$	0	3i	0	59	60	$2.0739\ldots\cdot 10^{-56}$
$-200+10000\mathrm{i}$	50	50i	5	5	36	$3.8883\ldots\cdot 10^{-51}$

表 2.2：(2.10) 在网格上的准确度实例；$N=(N_1+1)(N_2+1)$ 是集合 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{\mathrm{G}}(a,\ \delta_1,\ \delta_2,\ N_1,\ N_2)$。

c	r	N	$\lvert b(\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(a,\ r,\ N))\ - 1\rvert$
$10\mathrm{i}$	10^{-5}	24	$1.2861\ldots\cdot 10^{-32}$
$-1+20\mathrm{i}$	10^{-3}	36	$6.2669\ldots\cdot 10^{-52}$
$0.25+30\mathrm{i}$	10^{-1}	60	$5.4442\ldots\cdot 10^{-98}$
$0.6+40\mathrm{i}$	1	72	$1.1660\ldots\cdot 10^{-121}$
$1+50\mathrm{i}$	10	80	$4.6580\ldots\cdot 10^{-138}$
$2+60\mathrm{i}$	10^2	96	$4.5686\ldots\cdot 10^{-225}$
$70\mathrm{i}$	10^3	120	$3.9966\ldots\cdot 10^{-1623}$

表 2.3：离散圆上（2.10）的准确度实例。

且含义自然。

可以通过带参数 j 和 k 的规则定义若干类似的替换。例如，$D_N(x_{1,\ k}\to E_k)$ 是以下内容的简写：

$$D_N(x_{1,0}\to E_0,\ \ldots,\ x_{1,N-1}\to E_{N-1}), \tag{3.4}$$

而 $D_N(x_{j,\ k}\to E_{j,\ k})$ 是以下内容的简写：

$$\begin{aligned} D_N(x_{0,0}\to E_{0,0},\ \ldots,\ x_{0,N-1}\to E_{0,N-1},\ldots,\\ x_{N-1,0}\to E_{N-1,0},\ \ldots,\ x_{N-1,N-1}\to E_{N-1,N-1}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

替换规则从左到右依次应用，例如，在

$$D_N(x_{0,k}\to E_k,\ x_{j,0}\to F_j) \tag{3.6}$$

$x_{0,\ 0}$ 被替换为 E_0。

替换规则可以是有条件的，例如：

$$C_N = D_N(j = k \Rightarrow x_{j,k} \to x_{j,k} - \lambda) \tag{3.7}$$

是（3.1）中的“典范”矩阵的特征多项式。

与（3.2）–（3.5）类似，替换规则可应用于多项式 C_N。

在上述记号中，方程组（2.4）的解中的 $b(\mathfrak{A})$ 可表示为

$$b(\mathfrak{A}) = Q(\mathfrak{A}) \tag{3.8}$$

其中

$$Q(\{a_0, \dots, a_{N-1}\}) = \frac{D_N\left(x_{j,k} \to \eta^{\langle k \rangle}(a_j)\right)}{D_N\left(x_{j,0} \to 1, x_{j,k} \to \eta^{\langle k \rangle}(a_j)\right)}. \tag{3.9}$$

对于图 2.1 和表 2.2–2.3 中的集合，有

$$Q(\mathfrak{A}) \approx 1. \tag{3.10}$$

当然，这对任意集合 $\mathfrak{A}$ 未必成立。为此，例如，令 $\mathfrak{A}_N(a) = \{a, 2a, \dots, (N-1)a\}$。那么 $Q(\mathfrak{A}_N(a))$ 是一个亚纯函数，且非常数（否则，我们就会得到关于 $\eta(s)$ 的微分方程）。因此，根据皮卡定理，所有复数（至多可能有一个例外）都是 $Q(\mathfrak{A}_N(a))$ 的值。

目前尚不清楚可以用什么条件来描述满足以下条件的集合类 $\mathfrak{A}$

$$|Q(\mathfrak{A}) - 1| < \varepsilon \tag{3.11}$$

对于给定的正数 ε。一个更可行的目标是，针对具有特定结构的集合情形求出界，例如，建立如下形式的不等式

$$|Q(\mathfrak{A}_{\mathrm{G}}(a, \delta_1, \delta_2, N_1, N_2)) - 1| < B_{\mathrm{G}}(a, \delta_1, \delta_2, N_1, N_2) \tag{3.12}$$

and

$$|Q(\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(c, r, N) - 1| < B_{\mathrm{C}}(c, r, N) \tag{3.13}$$

其中 $B_{\mathrm{G}}(a,\ \delta_1,\ \delta_2,\ N_1,\ N_2)$ 和 $B_{\mathrm{C}}(c,\ r,\ N)$ 是某些函数。

4 两种推广

近似不等式（3.10）可以从多个方向加以推广。

n	$V_n(\mathfrak{A}_1)$	$\lvert Q_n(\mathfrak{A}_1) - 1\rvert$
0	$-2.8932\ldots\cdot10^{-48} - 5.1873\ldots\cdot10^{-49}\mathbf{i}$	$1.1085\ldots\cdot10^{-14}$
1	$1.1853\ldots\cdot10^{-33} + 2.1097\ldots\cdot10^{-34}\mathbf{i}$	$8.6263\ldots\cdot10^{-13}$
2	$-2.2690\ldots\cdot10^{-22} - 1.6178\ldots\cdot10^{-22}\mathbf{i}$	$5.1025\ldots\cdot10^{-11}$
3	$4.0262\ldots\cdot10^{-14} + 8.4755\ldots\cdot10^{-14}\mathbf{i}$	$3.6813\ldots\cdot10^{-9}$
4	$-3.7956\ldots\cdot10^{-8} + 2.0698\ldots\cdot10^{-7}\mathbf{i}$	$1.7175\ldots\cdot10^{-7}$
5	$1.5216\ldots\cdot10^{-3} + 8.8240\ldots\cdot10^{-3}\mathbf{i}$	$8.2908\ldots\cdot10^{-6}$
6	$3.7984\ldots\cdot10^{0} - 4.2877\ldots\cdot10^{0}\mathbf{i}$	$1.0541\ldots\cdot10^{-4}$
7	$-3.0090\ldots\cdot10^{2} + 4.8652\ldots\cdot10^{2}\mathbf{i}$	$2.3986\ldots\cdot10^{-3}$
8	$-1.8858\ldots\cdot10^{3} + 4.2625\ldots\cdot10^{2}\mathbf{i}$	$1.8282\ldots\cdot10^{-2}$
9	$-1.1127\ldots\cdot10^{3} + 9.0420\ldots\cdot10^{2}\mathbf{i}$	$5.7323\ldots\cdot10^{-2}$
10	$-5.2122\ldots\cdot10^{1} + 2.1236\ldots\cdot10^{1}\mathbf{i}$	$1.0387\ldots\cdot10^{0}$
11	$1.0390\ldots\cdot10^{1} - 7.6856\ldots\cdot10^{0}\mathbf{i}$	$5.2691\ldots\cdot10^{-1}$

表 4.1：（3.10）在网格 $\mathfrak{A}_1$（见图 2.1）的推广。

4.1 特征多项式

矩阵的行列式就是其特征多项式的常数项；用我们的记号

$$D_N = C_N(\lambda \to 0). \tag{4.1}$$

特别地，（3.9）中的分子和分母分别是以下多项式的常数项：

$$C_N\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle k\rangle}(a_j)\big) = V_N(\mathfrak{A})\lambda^N + \cdots + V_n(\mathfrak{A})\lambda^n + \cdots + V_0(\mathfrak{A}), \tag{4.2}$$

$$C_N\big(x_{j,0} \to 1,\ x_{j,k} \to \eta^{\langle k\rangle}(a_j)\big) = W_N(\mathfrak{A})\lambda^N + \cdots + W_n(\mathfrak{A})\lambda^n + \cdots + W_0(\mathfrak{A}). \tag{4.3}$$

考虑比值

$$Q_n(\mathfrak{A}) = \frac{V_n(\mathfrak{A})}{W_n(\mathfrak{A})}, \quad n = 0, \ldots N. \tag{4.4}$$

显然，$Q_0(\mathfrak{A}) = Q(\mathfrak{A})$，我们已经看到，对于表2.2–2.3中的集合以及图2.1中的集合 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$，该比值接近1。表4.1表明，当 $Q_n(\mathfrak{A}_1)$ 较小时，其他比值1 也与 n 相差不远。

4.2 缺失导数

在寻找（不可能存在的）关系（2.3）时，我们可以预先排除某些导数。更确切地说，设 $\mathfrak{D} = d_0,\ d_1,\ \ldots\ldots$为一列严格递增的非负整数，并且

$$d_0 = 0. \tag{4.5}$$

现在我们考虑（2.4）的以下推广：

$$\eta(a_j) + c_{d_1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})\eta^{\langle d_1 \rangle}(a_j) + \cdots + c_{d_{N-1}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})\eta^{\langle d_{N-1} \rangle}(a_j) = b(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}). \tag{4.6}$$

在这个方程组的解中（其中 $j = 0,\ \ldots\ldots,\ N-1$）

$$b(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = Q(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = \frac{D_N\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle d_k \rangle}(a_j)\big)}{D_N\big(x_{j,0} \to 1, x_{j,k} \to \eta^{\langle d_k \rangle}(a_j)\big)}. \tag{4.7}$$

序列 $\mathfrak{D}$ 可以由 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$ 中缺失的非负整数集合定义 $\mathfrak{D}$。表 4.2 展示了，随着缺失的导数越来越多，$Q(\mathfrak{A}, \mathfrak{D})$ 与1 之间的距离如何增大；这里取一个特定集合 $\mathfrak{A}$ 以及若干个缺失导数集合 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$ 。

5 舍弃 $\eta(a)$

寻找一个多项式

$$P(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) = c_0 y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_{N-1} y_{N-1} - b \tag{5.1}$$

使得

$$P\big(\eta(a), \eta'(a), \ldots, \eta^{\langle N-1 \rangle}(a)\big) = 0 \tag{5.2}$$

我们应当排除多项式恒等于0的退化情形。在（2.1）中，这是通过固定 $c_0 = 1$实现的，但现在我们去掉这一约束。设 l 为使得 $c_l \neq 0$的最小指标；不失一般性，我们令$c_l = 1$。

更正式地，对于给定的集合 $\mathfrak{A} = \{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ 和非负整数 l ，我们将（2.4）推广为线性方程组

$$\eta^{\langle l \rangle}(a_j) + c_{l+1}(\mathfrak{A})\eta^{\langle l+1 \rangle}(a_j) + \ldots + c_{l+N-1}(\mathfrak{A})\eta^{\langle l+N-1 \rangle}(a_j) = b(\mathfrak{A}) \tag{5.3}$$

$\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$	$\lvert Q(\mathfrak{A},\mathfrak{D})\ -1\rvert$
$\{\}$	$1.4487\ldots\cdot 10^{-26}$
$\{1\}$	$4.5365\ldots\cdot 10^{-25}$
$\{2\}$	$2.1994\ldots\cdot 10^{-25}$
$\{5\}$	$8.0930\ldots\cdot 10^{-26}$
$\{10\}$	$3.5842\ldots\cdot 10^{-26}$
$\{15\}$	$2.1416\ldots\cdot 10^{-26}$
$\{1,2\}$	$7.5493\ldots\cdot 10^{-24}$
$\{2,3\}$	$2.3575\ldots\cdot 10^{-24}$
$\{2,5\}$	$1.3344\ldots\cdot 10^{-24}$
$\{3,7\}$	$5.8436\ldots\cdot 10^{-25}$
$\{2,4,6\}$	$9.1420\ldots\cdot 10^{-24}$
$\{5,11,14\}$	$3.5669\ldots\cdot 10^{-25}$
$\{1,3,5,7\}$	$1.5529\ldots\cdot 10^{-22}$
$\{2,4,6,8\}$	$3.7291\ldots\cdot 10^{-23}$
$\{3,4,5,6,7\}$	$2.1682\ldots\cdot 10^{-22}$
$\{3,6,9,12,15\}$	$1.0883\ldots\cdot 10^{-23}$
$\{9,10,11,12,13\}$	$1.5617\ldots\cdot 10^{-24}$
$\{2,4,6,8,10,12\}$	$3.4899\ldots\cdot 10^{-22}$
$\{1,3,5,7,9,11\}$	$1.8820\ldots\cdot 10^{-21}$
$\{2,4,6,8,10,12,14\}$	$8.5487\ldots\cdot 10^{-22}$
$\{2,3,4,6,8,10,12\}$	$5.6029\ldots\cdot 10^{-21}$

Ta表 4.2：当 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(0.6+14\mathrm{i},\ 10,\ 20)$ 时，$Q(\mathfrak{A},\ \mathfrak{D})$ 与 1 之间的距离。

其中 $j=0,\ \ldots\ldots,\ N-1$。我们发现，情形 $l\geq 1$ 与先前考察的情形 $l=0$ 有显著不同。具体而言，$b(\mathfrak{A})$ 往往接近 0。用我们的记号可将其写为

$$D_N\big(x_{j,k}\to\eta^{\langle l+k\rangle}(a_j)\big)\approx 0. \tag{5.4}$$

然而，这个近似等式并无信息量。也就是说，多项式D_N 没有常数项，因此（5.4）左侧的值可能仅仅因为埃塔导数的值很小而很小。

尽管如此，近似等式（5.4）仍能提供关于埃塔函数导数之间关系的非平凡信息。为了说明这一点，我们选取两个整数 m 和 n，使得 $0\leq m<N$ 且

$0 \le n < N$ 并定义 y 为线性方程的解

$$D_N\big(x_{m,n} \to y,\ x_{j,k} \to \eta^{\langle l+k\rangle}(a_j)\big) = 0. \tag{5.5}$$

按我们的记号，

$$y = R(l,m,n,\mathfrak{A}) = \frac{D_N\big(x_{m,n} \to 0,\ x_{j,k} \to \eta^{\langle l+k\rangle}(a_j)\big)}{D_N\big(x_{m,n} \to -1,\ x_{m,k} \to 0,\ x_{j,n} \to 0,\ x_{j,k} \to \eta^{\langle l+k\rangle}(a_j)\big)}. \tag{5.6}$$

根据（5.4）–（5.5），我们可以预期 $y \approx \eta^{\langle l+n\rangle}(a_m)$。

数值例 5.1. 设 $\mathfrak{A} = \{a_0, \dots, a_{11}\}$ 为图 2.1 中两个集合中的任意一个。我们有：对于 $l = 1, \dots, 11$，$m = 0, \dots, 11$，$n = 0, \dots, 11$

$$\left| \frac{R(l,m,n,\mathfrak{A})}{\eta^{\langle l+n\rangle}(a_m)} - 1 \right| < 10^{-7}. \tag{5.7}$$

注 5.1. 如同第 4.1 小节，我们可以考虑特征多项式

$$C_N\big(x_{m,n} \to 0,\ x_{j,k} \to \eta^{\langle l+k\rangle}(a_j)\big) \tag{5.8}$$

and

$$C_N\big(x_{m,n} \to -1,\ x_{m,k} \to 0,\ x_{j,n} \to 0,\ x_{j,k} \to \eta^{\langle l+k\rangle}(a_j)\big) \tag{5.9}$$

and 用这些多项式的低阶系数之比逼近 $\eta^{\langle l+n\rangle}(a)$。

注 5.2. 如同第 4.2 小节，我们不仅可以舍弃若干初始导数，也可以舍弃一些高阶导数。

注 5.3. 类似于（5.8）–（5.9），我们可以将（3.9）–（3.10）转化为线性方程

$$D_N\big(x_{m,n} \to y, x_{j,k} \to \eta^{\langle k\rangle}(a_j)\big) = D_N\big(x_{m,n} \to y, x_{j,0} \to 1, x_{j,k} \to \eta^{\langle k\rangle}(a_j)\big) \tag{5.10}$$

并且预计其解接近于 $\eta^{\langle n\rangle}(a_m)$。

a	$\lvert S_N(a)\ -1\rvert$		
	$N=20$	$N=70$	$N=200$
-6	$3.9870\ldots\cdot10^{-18}$	$1.7014\ldots\cdot10^{-105}$	$3.7560\ldots\cdot10^{-368}$
-3	$4.7492\ldots\cdot10^{-22}$	$6.5289\ldots\cdot10^{-111}$	$6.8468\ldots\cdot10^{-375}$
-1	$1.2054\ldots\cdot10^{-24}$	$1.6130\ldots\cdot10^{-114}$	$2.2057\ldots\cdot10^{-379}$
$-1+300\mathrm{i}$	$2.8175\ldots\cdot10^{-16}$	$1.5955\ldots\cdot10^{-98}$	$1.0048\ldots\cdot10^{-378}$
-0.8	$6.6429\ldots\cdot10^{-25}$	$7.0318\ldots\cdot10^{-115}$	$7.8416\ldots\cdot10^{-380}$
$-0.8+50\mathrm{i}$	$4.9124\ldots\cdot10^{-24}$	$1.6522\ldots\cdot10^{-115}$	$4.8600\ldots\cdot10^{-380}$
0	$6.1439\ldots\cdot10^{-26}$	$2.5409\ldots\cdot10^{-116}$	$1.2527\ldots\cdot10^{-381}$
$50\mathrm{i}$	$5.1433\ldots\cdot10^{-25}$	$6.3145\ldots\cdot10^{-117}$	$7.8169\ldots\cdot10^{-382}$
$300\mathrm{i}$	$1.4208\ldots\cdot10^{-17}$	$2.4131\ldots\cdot10^{-100}$	$6.6292\ldots\cdot10^{-381}$
$1500\mathrm{i}$	$3.5498\ldots\cdot10^{-14}$	$3.8431\ldots\cdot10^{-80}$	$3.1958\ldots\cdot10^{-307}$
$0.2+10\mathrm{i}$	$2.4939\ldots\cdot10^{-26}$	$1.0349\ldots\cdot10^{-116}$	$4.3685\ldots\cdot10^{-382}$
$0.2+100\mathrm{i}$	$1.6846\ldots\cdot10^{-21}$	$3.3113\ldots\cdot10^{-117}$	$8.0859\ldots\cdot10^{-383}$
0.5	$1.3906\ldots\cdot10^{-26}$	$3.1908\ldots\cdot10^{-117}$	$9.4420\ldots\cdot10^{-383}$
$0.5+50\mathrm{i}$	$1.2520\ldots\cdot10^{-25}$	$8.2073\ldots\cdot10^{-118}$	$5.9166\ldots\cdot10^{-383}$
$0.5+1500\mathrm{i}$	$6.7418\ldots\cdot10^{-15}$	$1.0285\ldots\cdot10^{-80}$	$4.0432\ldots\cdot10^{-308}$
0.8	$5.7069\ldots\cdot10^{-27}$	$9.1900\ldots\cdot10^{-118}$	$2.0017\ldots\cdot10^{-383}$
$0.8+300\mathrm{i}$	$1.1103\ldots\cdot10^{-18}$	$7.2488\ldots\cdot10^{-102}$	$1.1928\ldots\cdot10^{-382}$
$0.8+1500\mathrm{i}$	$2.7648\ldots\cdot10^{-15}$	$4.2959\ldots\cdot10^{-81}$	$1.0755\ldots\cdot10^{-308}$
$1+10\mathrm{i}$	$2.3862\ldots\cdot10^{-27}$	$3.7524\ldots\cdot10^{-118}$	$6.9829\ldots\cdot10^{-384}$
$1+50\mathrm{i}$	$3.0417\ldots\cdot10^{-26}$	$1.0666\ldots\cdot10^{-118}$	$4.4787\ldots\cdot10^{-384}$
$1+300\mathrm{i}$	$5.7549\ldots\cdot10^{-19}$	$2.9804\ldots\cdot10^{-102}$	$4.3682\ldots\cdot10^{-383}$
$2+10\mathrm{i}$	$1.2736\ldots\cdot10^{-28}$	$5.9438\ldots\cdot10^{-120}$	$3.9701\ldots\cdot10^{-386}$
$2+1500\mathrm{i}$	$1.3975\ldots\cdot10^{-16}$	$7.2077\ldots\cdot10^{-83}$	$1.7403\ldots\cdot10^{-311}$

表 6.1：支持猜想的数值数据6.1。

第二部分猜想

6 第一极限情形

当点 a_0、……、a_{N-1} 彼此间隔较大时，近似等式 (3.10) 可以达到很高的准确度（见表 2.2 中 δ_1 或 δ_2 较大的情形，以及表 36], 和表 36], 中 r 较大的情形）。但是，当点 a_0、……、a_{N-1}彼此接近时，(3.10) 的准确度也可能很高（见同样的表中 r 较小，或 δ_1 和 δ_2 均较小的情形）。因此，当集合 $\mathfrak{A}$ 中的某些点趋近于相同的极限值时，我们可以考察 $Q(\mathfrak{A})$ 的极限。

本文仅讨论所有点趋于同一个数的极端情形。令 $a_j = a + j\varepsilon$，其中 ε 趋于 0。我们有：

$$D_N\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle k\rangle}(a_j)\big) = D_N(x_{j,k} \to \eta^{\langle j+k\rangle}(a))\varepsilon^{\frac{N(N-1)}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{N(N-1)}{2}+1}), \quad (6.1)$$

$$D_N\big(x_{j,0}\to 1, x_{j,k}\to \eta^{\langle k\rangle}(a_j)\big) = D_{N-1}\big(x_{j,k}\to \eta^{\langle j+k+2\rangle}(a)\big)\varepsilon^{\frac{N(N-1)}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{N(N-1)}{2}+1}). \quad (6.2)$$

Let

$$S_N(a) = \frac{D_N\big(x_{j,k}\to \eta^{\langle j+k\rangle}(a)\big)}{D_{N-1}\big(x_{j,k}\to \eta^{\langle j+k+2\rangle}(a)\big)} \quad (6.3)$$

由（6.1）和（6.2）

$$S_N(a) = Q\big(\{a_0,\dots,a_{N-1}\}\big) + O(\varepsilon), \quad (6.4)$$

并且根据（3.10），我们可以预期 $S_N(a)$ 接近 1。

猜想 6.1。 除去可数多个 a 值，

$$S_N(a) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (6.5)$$

其中 S 由以下公式定义：(6.3)。

表6.1 中的数值数据支持这一猜想（其他相关数据见 [7, 表 1]）。

注 6.1。 与（5.5）类似，我们可以考虑关于未知数 y的线性方程

$$D_N\big(x_{0,0}\to y,\ x_{j,k}\to \eta^{\langle j+k\rangle}(a)\big) = D_{N-1}\big(x_{j,k}\to \eta^{\langle j+k+2\rangle}(a)\big). \quad (6.6)$$

猜想 6.1 表明，该方程的解应接近 $\eta(a)$。通过 $\eta(s)$ 的导数，在 $s=a$ 处计算 $\eta(a)$ 的其他方法见 [6, 第 6] 节（另见 [5, 第 8 节]）。

7 第二极限情形

现在我们考察（5.4）的极限行为。与（6.1）类似，我们有：

$$D_N\big(x_{j,k}\to \eta^{\langle l+k\rangle}(a+j\varepsilon)\big) = D_N\big(x_{j,k}\to \eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big)\varepsilon^{\frac{N(N-1)}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{N(N-1)}{2}+1}). \quad (7.1)$$

我们可以猜测

$$D_N\big(x_{j,k}\to \eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big) \approx 0. \quad (7.2)$$

m	最大值$_{1\le n\le m+1}\left\lvert \frac{n-m-2}{n\,\eta^{\langle l+m\rangle}(a)}\cdot\frac{E_{l,m,N,n-1}(a)}{E_{l,m,N,n}(a)}-1\right\rvert$		
	$l=2$	$l=5$	$l=8$
1	$8.336\ldots\cdot10^{-75}$	$9.685\ldots\cdot10^{-74}$	$1.023\ldots\cdot10^{-72}$
2	$6.211\ldots\cdot10^{-71}$	$6.871\ldots\cdot10^{-70}$	$6.949\ldots\cdot10^{-69}$
3	$3.266\ldots\cdot10^{-67}$	$3.455\ldots\cdot10^{-66}$	$3.342\ldots\cdot10^{-65}$
4	$1.296\ldots\cdot10^{-63}$	$1.312\ldots\cdot10^{-62}$	$1.213\ldots\cdot10^{-61}$
5	$4.044\ldots\cdot10^{-60}$	$3.914\ldots\cdot10^{-59}$	$3.461\ldots\cdot10^{-58}$
6	$1.019\ldots\cdot10^{-56}$	$9.426\ldots\cdot10^{-56}$	$7.968\ldots\cdot10^{-55}$
7	$2.114\ldots\cdot10^{-53}$	$1.868\ldots\cdot10^{-52}$	$1.510\ldots\cdot10^{-51}$
8	$3.664\ldots\cdot10^{-50}$	$3.093\ldots\cdot10^{-49}$	$2.391\ldots\cdot10^{-48}$

表 7.1：支持猜想的数值数据 7.2； $N=50$， $a=0.4+17\mathrm{i}$。

与（5.4）类似，单凭这一点，它只是埃塔函数导数之间一个没有信息量的近似关系。为证明其非平凡性，我们可以考虑（5.5）的对应形式，即方程

$$D_N\big(j+k=m\Rightarrow x_{j,k}\to y, x_{j,k}\to\eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big)=0 \tag{7.3}$$

对于 $m=0$，……，$2N-2$。然而，这里有一个本质区别：（5.4）是关于 y 的线性方程，但（7.3）仅在两个极端情形下才是线性的，即当 $m=0$ 以及当 $m=2N-2$时。对于这些 m 值，解为

$$y=\frac{D_N\big(x_{m',m'}\to 0,\ x_{j,k}\to\eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big)}{D_N\big(x_{m',m'}\to -1,\ x_{m',k}\to 0,\ x_{j,m'}\to 0,\ x_{j,k}\to\eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big)} \tag{7.4}$$

其中 $m'=m/2$。

一般情况下，方程（7.3）的次数等于

$$d=\min(m+1,2N-m-1). \tag{7.5}$$

Let

$$\begin{aligned}E_{l,m,N}(a,y)&=D_N\big(j+k=m\Rightarrow x_{j,k}\to y,\ x_{j,k}\to\eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big)\\&=E_{l,m,N,d}(a)y^d+\cdots+E_{l,m,N,n}(a)y^n+\cdots+E_{l,m,N,0}(a).\end{aligned} \tag{7.6}$$

假设 7.2，我们可以预期至少有一个方程（7.3）的根接近于 $\eta^{\langle l+m\rangle}(a)$。计算表明，当 d 相对于 N较小时，方程（7.3）的所有根都接近于 $\eta^{\langle l+m\rangle}(a)$。

这里我们仅考虑 d 较小的情形，这是由于 m较小（当 m 接近 $2N-2$ 时的情形见 [7, 第 3 小节4]）。

猜想 7.1。 除去 a的可数多个值外，对于每个正整数 l 和非负整数 m，多项式 $E_{l,\,m,\,N}(a,\ y)$ （由 （7.6）定义）与 $\eta^{\langle l+m\rangle}(a)$ 的根之间的最大距离当 $N\to\infty$时趋于零。

这个猜想并非采用“典型”的形式（1.5），这里也不提供支持该猜想的数值例子（相关数据见 [7,表 11-16]。我们转而推导出若干具有（1.5）形式的推论。综合来看，它们实质上等价于猜想7.1。

也就是说，猜想7.1 意味着，如果 m 相对于 N较小，那么多项式 $E_{l,\,m,\,N}(a,\ y)$ 应具有特殊结构，即

$$E_{l,m,N}(a,y)\approx A(y-\eta^{\langle l+m\rangle}(a))^d \tag{7.7}$$

对于某个非零常数 A。这为通过其他导数的取值计算（近似） $\eta^{\langle m\rangle}(a)$ 提供了几种途径。

猜想 7.2。 除可数多个 a 的取值外，对于每个正整数 l、非负整数 m 以及一个 n，使得 $0<n\le m+1$

$$\frac{n-m-2}{n}\cdot\frac{E_{l,m,N,n-1}(a)}{E_{l,m,N,n}(a)}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\eta^{\langle l+m\rangle}(a) \tag{7.8}$$

其中$E_{l,\,m,\,N,\,n}$ 由(7.6)定义。

支持猜想7.2的数值数据见表 7.1和 [7, 表 17–19]。

注 7.1. 假设猜想 6.1成立，我们可以考虑方程

$$D_N\big(j+k=m\Rightarrow x_{j,k}\to y,\ x_{j,k}\to\eta^{\langle j+k\rangle}(a)\big)= D_{N-1}\big(j+k+2=m\Rightarrow x_{j,k}\to y,\ x_{j,k}\to\eta^{\langle j+k+2\rangle}(a)\big) \tag{7.9}$$

并给出它们的类似猜想 7.1 和 7.2 （数值数据见[7, 表 7-10]。

8 修改

除了（6.5）和（7.8）（以及注释中指出的相应推广）之外，还可以针对许多其他多项式之比，提出形式如（1.5）的类似猜想。下面列出一些可能的修改方向。

a	$\lvert S_{!\,N}(a)\ -1\rvert$		
	$N=70$	$N=200$	$N=700$
-2	$6.6474\ldots\cdot 10^{-3}$	$4.2041\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.0842\ldots\cdot 10^{-13}$
-1	$9.9362\ldots\cdot 10^{-3}$	$8.6712\ldots\cdot 10^{-6}$	$1.8735\ldots\cdot 10^{-14}$
-0.8	$1.1821\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.0637\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.2612\ldots\cdot 10^{-14}$
0	$1.2694\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.5834\ldots\cdot 10^{-6}$	$2.3561\ldots\cdot 10^{-15}$
$50\mathrm{i}$	$9.9046\ldots\cdot 10^{-2}$	$5.6900\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.0808\ldots\cdot 10^{-14}$
0.2	$3.9934\ldots\cdot 10^{-3}$	$8.0428\ldots\cdot 10^{-7}$	$3.7177\ldots\cdot 10^{-14}$
$0.2+10\mathrm{i}$	$9.6420\ldots\cdot 10^{-4}$	$1.1453\ldots\cdot 10^{-6}$	$4.8160\ldots\cdot 10^{-15}$
0.5	$1.2866\ldots\cdot 10^{-3}$	$3.1413\ldots\cdot 10^{-7}$	$8.2725\ldots\cdot 10^{-16}$
0.8	$4.8940\ldots\cdot 10^{-4}$	$1.6870\ldots\cdot 10^{-7}$	$3.1938\ldots\cdot 10^{-16}$
$0.8+10\mathrm{i}$	$2.5509\ldots\cdot 10^{-4}$	$2.6686\ldots\cdot 10^{-7}$	$7.1105\ldots\cdot 10^{-16}$
$1+10\mathrm{i}$	$3.4554\ldots\cdot 10^{-4}$	$2.3766\ldots\cdot 10^{-7}$	$4.4841\ldots\cdot 10^{-16}$
$1+50\mathrm{i}$	$8.7300\ldots\cdot 10^{-2}$	$4.6678\ldots\cdot 10^{-6}$	$4.5817\ldots\cdot 10^{-16}$
$2+10\mathrm{i}$	$2.4417\ldots\cdot 10^{-4}$	$1.4395\ldots\cdot 10^{-7}$	$2.5638\ldots\cdot 10^{-17}$

表 8.1：支持猜想8.1。

a	$\lvert S^{!}_{N}(a)\ -1\rvert$		
	$N=70$	$N=200$	$N=700$
-2	$2.2873\ldots\cdot 10^{-1}$	$2.9563\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.0597\ldots\cdot 10^{-2}$
-1	$4.0733\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.8496\ldots\cdot 10^{-2}$	$6.7039\ldots\cdot 10^{-3}$
-0.8	$3.6069\ldots\cdot 10^{-2}$	$2.0192\ldots\cdot 10^{-2}$	$5.9950\ldots\cdot 10^{-3}$
0	$2.3313\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.1531\ldots\cdot 10^{-2}$	$4.1362\ldots\cdot 10^{-3}$
$50\mathrm{i}$	$7.2888\ldots\cdot 10^{-2}$	$2.7648\ldots\cdot 10^{-2}$	$9.1542\ldots\cdot 10^{-3}$
0.2	$2.0458\ldots\cdot 10^{-2}$	$6.6277\ldots\cdot 10^{-3}$	$3.7877\ldots\cdot 10^{-3}$
$0.2+10\mathrm{i}$	$6.8470\ldots\cdot 10^{-2}$	$3.0200\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.1262\ldots\cdot 10^{-2}$
0.5	$1.5076\ldots\cdot 10^{-2}$	$7.6916\ldots\cdot 10^{-3}$	$3.0248\ldots\cdot 10^{-3}$
0.8	$1.3358\ldots\cdot 10^{-2}$	$6.7687\ldots\cdot 10^{-3}$	$6.9181\ldots\cdot 10^{-4}$
$0.8+10\mathrm{i}$	$3.8167\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.7013\ldots\cdot 10^{-2}$	$6.3566\ldots\cdot 10^{-3}$
$1+50\mathrm{i}$	$2.1107\ldots\cdot 10^{-2}$	$8.5441\ldots\cdot 10^{-3}$	$2.9618\ldots\cdot 10^{-3}$
$2+10\mathrm{i}$	$1.2910\ldots\cdot 10^{-2}$	$5.7831\ldots\cdot 10^{-3}$	$2.1859\ldots\cdot 10^{-3}$

表 8.2：支持猜想的数值数据8.2。

8.1 泰勒系数

Let

$$D_{!\,N} = D_N(x_{j,k} \to x_{j,k}/k!). \tag{8.1}$$

类比（6.3），我们定义

$$S_{!\,N}(a) \;=\; \frac{D_{!\,N}\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle j+k\rangle}(a)\big)}{D_{!\,N-1}\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle j+k+2\rangle}(a)\big)} \tag{8.2}$$

并提出与猜想 6.1对应的命题。

猜想 8.1。 除可数多个 a 值外，

$$S_{!\,N}(a) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{8.3}$$

比较表 $S_{!\,N}(a)$ 中的数值（另见 [7, 表 27]）与表 $S_N(a)$ 中的数值6.1（对于相同的 N 和 a）时，我们应注意到，（8.3）中的收敛速度远慢于（6.5）。

8.2 “反泰勒”系数

类似于（8.1）和（8.2），令

$$D_N^! = D_N(x_{j,k} \to k! x_{j,k}) \tag{8.4}$$

and

$$S_N^!(a) \quad = \quad \frac{D_N^!\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle j+k\rangle}(a)\big)}{D_{N-1}^!\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle j+k+2\rangle}(a)\big)}. \tag{8.5}$$

猜想 8.2。 除了可数多个 a 值之外，

$$S_N^!(a) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{8.6}$$

比较表 $S_N^!(a)$ 中的数值（另见 [7, 表 29]）与表 $S_{!\,N}(a)$ 中的数值8.1（对于相同的 N和 a）时，我们应察觉到，（8.6）中的收敛速度甚至慢于（8.3）。

8.3 子式

在本小节中，我们推广猜想 6.1。设

$$\mathfrak{D} = d_0, d_1, \dots \tag{8.7}$$

and

$$\mathfrak{F} = f_0, f_1 \dots \tag{8.8}$$

为两个由非负整数组成的严格递增序列。我们将（3.1）推广为

$$D_{N,\mathfrak{D},\mathfrak{F}} = \begin{vmatrix} x_{f_0,d_0} & \dots & x_{f_0,d_{N-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{f_{N-1},d_0} & \dots & x_{f_{N-1},d_{N-1}} \end{vmatrix}. \tag{8.9}$$

与第4.2小节中一样， $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$ 和 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ 分别表示 $\mathfrak{D}$ 与 $\mathfrak{F}$ 中缺失的非负整数集合。

$\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$	$\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$	$S_{N,\mathfrak{D},\mathfrak{F}}(a)$	
		$N = 40$	$N = 150$
$\{1\}$	$\{1\}$	$1.5705\ldots\cdot 10^{-57}$	$4.1503\ldots\cdot 10^{-273}$
	$\{2,3\}$	$1.5883\ldots\cdot 10^{-56}$	$1.4302\ldots\cdot 10^{-271}$
	$\{1,2,3\}$	$1.0588\ldots\cdot 10^{-54}$	$3.0229\ldots\cdot 10^{-269}$
	$\{4,5\}$	$4.4938\ldots\cdot 10^{-57}$	$4.2342\ldots\cdot 10^{-272}$
	$\{2,3,5\}$	$1.9855\ldots\cdot 10^{-55}$	$5.9628\ldots\cdot 10^{-270}$
	$\{1,3,4,5,7\}$	$6.3476\ldots\cdot 10^{-53}$	$1.9159\ldots\cdot 10^{-266}$
$\{2,3\}$	$\{1\}$	$1.5883\ldots\cdot 10^{-56}$	$1.4302\ldots\cdot 10^{-271}$
	$\{2,3\}$	$1.6076\ldots\cdot 10^{-55}$	$4.9296\ldots\cdot 10^{-270}$
	$\{1,2,3\}$	$1.0726\ldots\cdot 10^{-53}$	$1.0420\ldots\cdot 10^{-267}$
	$\{4,5\}$	$4.5482\ldots\cdot 10^{-56}$	$1.4593\ldots\cdot 10^{-270}$
	$\{2,3,5\}$	$2.0112\ldots\cdot 10^{-54}$	$2.0554\ldots\cdot 10^{-268}$
	$\{1,3,4,5,7\}$	$6.4409\ldots\cdot 10^{-52}$	$6.6060\ldots\cdot 10^{-265}$
$\{1,2,3\}$	$\{1\}$	$1.0588\ldots\cdot 10^{-54}$	$3.0229\ldots\cdot 10^{-269}$
	$\{2,3\}$	$1.0726\ldots\cdot 10^{-53}$	$1.0420\ldots\cdot 10^{-267}$
	$\{1,2,3\}$	$7.1626\ldots\cdot 10^{-52}$	$2.2028\ldots\cdot 10^{-265}$
	$\{4,5\}$	$3.0343\ldots\cdot 10^{-54}$	$3.0848\ldots\cdot 10^{-268}$
	$\{2,3,5\}$	$1.3430\ldots\cdot 10^{-52}$	$4.3452\ldots\cdot 10^{-266}$
	$\{1,3,4,5,7\}$	$4.3085\ldots\cdot 10^{-50}$	$1.3968\ldots\cdot 10^{-262}$
$\{4,5\}$	$\{1\}$	$4.4938\ldots\cdot 10^{-57}$	$4.2342\ldots\cdot 10^{-272}$
	$\{2,3\}$	$4.5482\ldots\cdot 10^{-56}$	$1.4593\ldots\cdot 10^{-270}$
	$\{1,2,3\}$	$3.0343\ldots\cdot 10^{-54}$	$3.0848\ldots\cdot 10^{-268}$
	$\{4,5\}$	$1.2867\ldots\cdot 10^{-56}$	$4.3204\ldots\cdot 10^{-271}$
	$\{2,3,5\}$	$5.6898\ldots\cdot 10^{-55}$	$6.0849\ldots\cdot 10^{-269}$
	$\{1,3,4,5,7\}$	$1.8219\ldots\cdot 10^{-52}$	$1.9556\ldots\cdot 10^{-265}$
$\{2,3,5\}$	$\{1\}$	$1.9855\ldots\cdot 10^{-55}$	$5.9628\ldots\cdot 10^{-270}$
	$\{2,3\}$	$2.0112\ldots\cdot 10^{-54}$	$2.0554\ldots\cdot 10^{-268}$
	$\{1,2,3\}$	$1.3430\ldots\cdot 10^{-52}$	$4.3452\ldots\cdot 10^{-266}$
	$\{4,5\}$	$5.6898\ldots\cdot 10^{-55}$	$6.0849\ldots\cdot 10^{-269}$
	$\{2,3,5\}$	$2.5183\ldots\cdot 10^{-53}$	$8.5712\ldots\cdot 10^{-267}$
	$\{1,3,4,5,7\}$	$8.0783\ldots\cdot 10^{-51}$	$2.7554\ldots\cdot 10^{-263}$
$\{1,3,4,5,7\}$	$\{1\}$	$6.3476\ldots\cdot 10^{-53}$	$1.9159\ldots\cdot 10^{-266}$
	$\{2,3\}$	$6.4409\ldots\cdot 10^{-52}$	$6.6060\ldots\cdot 10^{-265}$
	$\{1,2,3\}$	$4.3085\ldots\cdot 10^{-50}$	$1.3968\ldots\cdot 10^{-262}$
	$\{4,5\}$	$1.8219\ldots\cdot 10^{-52}$	$1.9556\ldots\cdot 10^{-265}$
	$\{2,3,5\}$	$8.0783\ldots\cdot 10^{-51}$	$2.7554\ldots\cdot 10^{-263}$
	$\{1,3,4,5,7\}$	$2.6003\ldots\cdot 10^{-48}$	$8.8624\ldots\cdot 10^{-260}$

表 8.3：支持猜想的数值数据 8.3；$a = 0.4 + 16\mathrm{i}$。

n	$\left\lvert \frac{V_{l,n,\alpha(a)}}{\eta^{\langle l\rangle}(a) W_{l,\ n,\ \alpha(a)}} - 1 \right\rvert$		
	$\alpha = \alpha_{17,3}$	$\alpha = \alpha_{19,3}$	$\alpha = \alpha_{23,3}$
0	$4.981\ldots \cdot 10^{-22}$	$3.585\ldots \cdot 10^{-25}$	$1.236\ldots \cdot 10^{-31}$
1	$2.100\ldots \cdot 10^{-19}$	$1.721\ldots \cdot 10^{-22}$	$7.387\ldots \cdot 10^{-29}$
2	$4.741\ldots \cdot 10^{-17}$	$4.302\ldots \cdot 10^{-20}$	$2.314\ldots \cdot 10^{-26}$
3	$2.157\ldots \cdot 10^{-14}$	$3.209\ldots \cdot 10^{-17}$	$2.695\ldots \cdot 10^{-23}$
4	$6.251\ldots \cdot 10^{-12}$	$2.914\ldots \cdot 10^{-14}$	$6.718\ldots \cdot 10^{-21}$
5	$1.049\ldots \cdot 10^{-9}$	$2.096\ldots \cdot 10^{-12}$	$8.715\ldots \cdot 10^{-19}$
6	$7.331\ldots \cdot 10^{-8}$	$5.602\ldots \cdot 10^{-11}$	$9.066\ldots \cdot 10^{-16}$
7	$6.999\ldots \cdot 10^{-7}$	$1.894\ldots \cdot 10^{-8}$	$2.404\ldots \cdot 10^{-13}$
8	$6.011\ldots \cdot 10^{-4}$	$1.650\ldots \cdot 10^{-6}$	$5.683\ldots \cdot 10^{-11}$

表 8.4：用多项式（ $\eta^{\langle l\rangle}(a)$ （8.13）和（8.14）的初始系数之比近似 $l = 2$, $a = 0.7 + 19\mathrm{i}$。

猜想 8.3。 设 $\mathfrak{D}_1 = d_1,\ d_2,\ \ldots\ldots$ 以及 $\mathfrak{F}_1 = f_1,\ f_2\ldots$ 分别为序列 （8.7）和（8.8）的尾项。若 $d_0 = f_0 = 0$ 且集合 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$ 和 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ 均为有限集，那么除可数多个 a值外，

$$S_{N,\mathfrak{D},\mathfrak{F}}(a) \ = \ \frac{D_{N,\mathfrak{D},\mathfrak{F}}\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle j+k\rangle}(a)\big)}{D_{N-1,\mathfrak{D}_1,\mathfrak{F}_1}\big(x_{j,k} \to \eta^{\langle j+k+2\rangle}(a)\big)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{8.10}$$

表 8.3 给出了支持猜想 8.3的数据（另见 [7, 表 32]）。

注 8.1。 集合 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}$和 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ 有限这一要求很可能过于苛刻。更有可能的是，可以用对序列（8.7）和（8.8）增长的某些限制来替代（参见 [7, 表 33–34]）。

8.4 广义特征多项式

Let

$$\alpha = \langle g_0, \ldots, g_{N-1}\rangle \tag{8.11}$$

为数字 $0, \ldots, N-1$的一个排列。我们将 (3.7) 推广为

$$C_\alpha = D_N(j = g_k \Rightarrow x_{j,k} \to x_{j,k} - \lambda). \tag{8.12}$$

类似于（4.1）， D_N 是 C_α 的常数项，至多相差一个符号（取决于 α的奇偶性）。相应地，对于 $m = 0$ ，比值（7.4）等于这些多项式的常数项之比

$$C_\alpha\big(x_{0,0} \to 0,\ x_{j,k} \to \eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big) = \\ V_{l,N,\alpha}(a)\lambda^N + \cdots + V_{l,n,\alpha}(a)\lambda^n + \cdots + V_{l,0,\alpha}(a), \tag{8.13}$$

$$C_\alpha\big(x_{0,0}\to -1,\ x_{0,k}\to 0,\ x_{j,0}\to 0,\ x_{j,k}\to \eta^{\langle l+j+k\rangle}(a)\big) = W_{l,N,\alpha}(a)\lambda^N + \cdots + W_{l,n,\alpha}(a)\lambda^n + \cdots + W_{l,0,\alpha}(a). \quad (8.14)$$

对于互素的正整数 q 与 r，令$\alpha_{q,\,r}$ 表示这样的置换（8.11），使得

$$g_k \equiv kr \pmod{q}. \quad (8.15)$$

与表 4.1类似，我们从表 8.4 中观察到，对于较小的 n 比值 $V_{l,\,n,\,\alpha}(a)/W_{l,\,n,\,\alpha}(a)$都接近 $\eta^{\langle l\rangle}(a)$。其他相关数据见 [7, 小节 4。6]。

总结性说明

我们的所有数值数据都针对埃塔函数。很可能，由狄利克雷级数定义的其他函数也具有类似性质。

当然，最有趣的情形是经典的黎曼ζ函数。计算表明，对于这个函数，我们可以观察到与第一部分 I中讨论的现象类似的现象。不过，当 $\mathfrak{A}$ 中的某些元素接近ζ函数的极点时，其准确度可能相当低。迄今为止所进行的计算尚不足以提出猜想 6.1–8.3 的对应版本（相关数值数据见 [7, 表 39–40]）。

致谢

表 1–11 的数值数据由使用 Julia 编程语言 [1] 和 Nemo 软件包 [3]编写的程序计算得出。

参考文献

[1] Jeff Bezanson 等人：《Julia：一种数值计算的新方法》。载于：*SIAM Review* 59.1（2017），第65–98页。DOI：10.1137/141000671。[2] Wei Chen和Qiong Wang：《Γ 与 ζ的微分独立性与差分独立性》。载于：*Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed.* 41.2（2021），第505–516页。ISSN：0252-9602。DOI：10.1007/s10473-021-0214-1。

[3] Claus Fieker 等人：《Nemo/Hecke：面向 Julia 编程语言的计算机代数与数论软件包》。载于《2017年 ACM 国际符号与代数计算研讨会论文集》。ISSAC '17。美国纽约：ACM，2017，第157–164页。doi：10.1145/3087604.3087611。[4] D. Hilbert：《数学问题：1900年在巴黎国际数学家大会上的报告》。载于《哥廷根皇家科学学会通报：数学与物理学部分》（1900）。后收入《文集》，Springer，柏林，第3卷（1935）；Chelsea，纽约（1965）。英文译本：Bull. Amer. Math. Soc.，8，437–479（1901–1902）；后收入 Browder（编）《希尔伯特问题引发的数学进展》，《纯数学专题讨论会论文集》第28卷，美国数学会，第1–34页（1976），第253–297页。网址：https://www.digizeitschriften.de/id/252457811_1900%7Clog1.[5] Y.V. Matiyasevich：《通过黎曼ζ函数在单点处的导数值计算其函数值》。载于《数学科学杂志》275（2023），第25–37页。doi：10.1007/s10958-023-06657-x。[6] Yu. V. Matiyasevich：《一种通过黎曼ζ函数的导数计算其函数值的可能方法》。载于《POMI预印本》（2023年1月）。doi：10.13140/RG.2.2.33579.31528。[7] Yu. V. Matiyasevich：《探寻交错ζ函数导数之间的近似多项式依赖关系》。载于《POMI预印本》（2024年1月）。doi：10.13140/RG.2.2.26591.23206。[8] Yuri Matiyasevich：《探寻交错ζ函数导数之间的近似多项式依赖关系》。2024。doi：10.13140/RG.2.2.30721.67686。[9] D. Morduchai-Boltowskoi：《关于函数 $\zeta(s,x)$ 超越性的定理 ¨及若干推广》。载于《东北数学杂志》（第一辑）35（1932年第2期），第19–34页。.[10] A. Ostrowski：《关于狄利克雷级数与代数微分方程》。载于《数学杂志》8（1920年第3–4期），第241–298页。doi：10.1007/BF01206530。

[11] V. E. E. Stadigh。“关于满足代数微分方程的函数，以及函数 $\zeta(s)$ 不满足任何此类方程的性质的定理”。赫尔辛基，Frenckellska Tryck. Aktiebol，urn:nbn:de:bvb:12-bsb00067906-4。1902。

[12] Д. Д. Мордухай-Болтовской。“关于函数$\zeta(s,\ x)$的超越性”。载于：尼古拉二世帝国华沙理工学院学报 (21914)，第1–13页。

作者

Yuri Matiyasevich 斯捷克洛夫数学研究所，圣彼得堡 Fontanka 街27号，圣彼得堡，191023 俄罗斯 yumat [at] pdmi [dot] ras [dot] ruhttp://logic.pdmi.ras.ru/~yumat