arXiv:2602.03428v1 [math.NA] 3 Feb 2026

关于高频散射中三个模型的奇异Galerkin离散化

T. Chaumont-Frelet* S. Sauter†

2026年2月4日

摘要

我们研究三种常见的时谐高频散射数学模型：二维和三维空间中的亥姆霍兹方程、二维横向磁问题，以及具有耗散边界条件的三维麦克斯韦方程；这些边界条件使连续问题适定。本文为常用的（低阶）Galerkin有限元离散化构造网格，使离散系统矩阵变为奇异矩阵，从而离散问题不适定。这表明，条件“有限元空间必须足够丰富”（通常以 $resolutioncondition$ – 的形式提出，用于保证离散问题适定）并非紧扰动论证证明中的人为产物，而是保证Galerkin离散具有离散稳定性的必要条件。

美国数学学会学科分类：65N12、65N30、35J25、65F99 关键词：亥姆霍兹方程；麦克斯韦方程；高波数；渐近前稳定性； hp-有限元

1 引言

对描述时谐波传播的偏微分方程（PDE）进行有限元离散化，是数值分析中的一项具有挑战性的问题。由于这类偏微分方程模型的自然变分形式不具强制性，因此要获得最优的稳定性和收敛性结果尤其困难。尤其是，缺乏强制性会导致线性系统的矩阵不定，必须通过数值方法求解。众所周知，如果离散化空间足够“丰富”，那么只要原偏微分方程模型适定，离散化问题就有唯一解。然而，对于规模不够大的有限元空间，情况则不那么明朗。在这

*(theophile.chaumont@inria.fr)，Inria，里尔大学，法国国家科学研究中心，UMR 8524 - Paul Painlev´e 实验室，59000 里尔，法国

†(stas@math.uzh.ch)，苏黎世大学数学研究所，Winterthurerstr 190，CH-8057 苏黎世，瑞士

项工作中，我们构造了一些网格，使得有限元离散化得到的系统矩阵在某些波数下是奇异的，即使原偏微分方程模型适定也是如此。

给定一个直径为 ℓ 的多胞形区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ （$d = 2$ 或 3）、一个属于对偶能量空间 $f \in \mathcal{H}(\Omega)^\star$ 的右端项，以及一个波数 $k > 0$，我们考虑如下形式的时谐波传播问题：求 $u \in \mathcal{H}(\Omega)$，使得

$$-k^2(u,v)_\Omega - ik(\gamma_{\mathcal{D}}u, \gamma_{\mathcal{D}}v)_{\partial\Omega} + (\mathcal{D}u, \mathcal{D}v)_\Omega = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in \mathcal{H}(\Omega)。 \tag{1}$$

在 (1) 中，$\mathcal{D}$ 是德拉姆复形中的微分算子（即梯度、旋度或散度），$\gamma_{\mathcal{D}}$ 是与之自然关联的迹算子，$\mathcal{H}(\Omega)$ 是相应的索伯列夫空间。这些记号将在下文第 2 节中作严格介绍。

在边界上引入的耗散确保了对所有 $k > 0$，问题 (1) 都是适定的。此外，还可以用右端项 f 的范数显式控制解 u 的范数，控制所用的常数为 k，参见例如 [11, 16, 18, 23, 32]。为简洁起见，我们在本引言中聚焦于所谓的“罗宾”边界条件，但本文的结果适用于一般边界条件，包括由索末菲辐射条件 [8, 30] 导出的狄利克雷-诺伊曼算子。

我们关注基于有限维子空间 $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}(\Omega)$ 对 (1) 应用协调有限元方法（FEM）。在这种情况下，目标是求得一个离散近似 $u_h \in \mathcal{H}_h$，使得

$$-k^2(u_h, v_h)_\Omega - ik(\gamma_{\mathcal{D}}u_h, \gamma_{\mathcal{D}}v_h)_{\partial\Omega} + (\mathcal{D}u_h, \mathcal{D}v_h)_\Omega = \langle f, v_h\rangle \qquad \forall v_h \in \mathcal{H}_h. \tag{2}$$

这是一个有限维线性系统。给定 $\mathcal{H}_h$ 的一组基，(2) 的左端可以表示为系统矩阵 A。

有限元空间基于 Ω 的单纯形网格 $\mathcal{T}_h$，而 $\mathcal{H}_h$ 包含 $\mathcal{H}(\Omega)$ 中满足以下条件的所有元素：它们在每个单纯形上的限制都属于适当的多项式子空间 P。第 3 节将对此作详细说明。决定有限元空间设计的关键参数是 $\mathcal{T}_h$ 中最大单纯形的直径 h，以及 $\supset P$ 中元素的最大多项式次数 p。量 kh/p 与每个波长所对应的自由度数量成反比。

根据 [2, 9, 10, 15, 21, 23, 26, 22, 29], ，存在与 h 和 k 无关的常数 β、$c > 0$，使得若

$$\frac{kh}{p} \leq c(k\ell)^\beta \tag{3}$$

然后，已知矩阵 A 是正则的，并且对所有 k而言，u 的近似 u_h 都具有一致的高精度。β 的具体取值取决于 p 和 Ω 的几何形状，正如我们在第 3 节中所回顾的那样。一般而言，β 的取值会随着 p的增加而减小，这使得高阶方法更加适用。数值观察表明，要获得

精确的近似结果，必须满足式（3）中的分辨率条件。事实上，在适当的假设下， β 的最优值为 $1/(2p)$。

在本文中，我们关注矩阵 A 在未施加（3）中的分辨率条件时的性质。尽管这种离散化无法得到准确的近似，但在预条件 [1] 和自适应性 [5]的背景下，它仍值得研究。事实上，对于多重网格求解器的最粗层，或执行迭代细化的自适应算法的初始网格，并不期待其具有高精度。相反，我们希望矩阵A 具备基本的代数和解析性质，尤其是非奇异的。

在 [4, 定理3.1] 中，已经证明一维情形有一个积极结果：对于任意波数 $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和任意一维网格，采用有限元Galerkin方法对带罗宾边界条件的一维Helmholtz方程进行离散化，均有唯一解。

本文研究二维和三维时谐高频散射问题的Galerkin离散的适定性。我们给出的结果是否定性的。具体而言，我们$\widehat{\ }$构造了一个网格 $\mathcal{T}$，使得系统矩阵 A 在某些特定的 k取值下是奇异的。我们的工作受到 [4] 的启发，该文展示了一个网格，在该网格上，二维空间中的最低阶Lagrange有限元会变为奇异。本文在此基础上进一步拓展 [4] ，构造了更多使Galerkin离散变为奇异的网格。更确切地说，我们证明，对于这些网格上的Galerkin方法，在以下情形中，所形成的线性系统可能是奇异的：(a) 二维和三维情形；(b) Lagrange、Raviart–Thomas和N´ed´elec有限元；以及 (c) 更高的多项式次数。

我们的例子所涉及的各仅仅是这一特定网格 $\mathcal{T}$ 作为子网格的$\widehat{\ }$网格 $\mathcal{T}_h$ 都会受到影响。具体而言，我们实际上构造了具有局部支撑的有限元函数 $u_h \in \mathcal{H}_h \setminus \{0\}$，使得对所有 $v_h \in \mathcal{H}_h$，$(\mathcal{D}u_h, \mathcal{D}v_h)_\Omega = k^2(u_h, v_h)_\Omega$。这体现了所谓的“唯一延拓原理”在离散层面 [14]并不成立。相比之下，在连续层面，这一原理实际上被用于证明式（1）的适定性，参见例如 [7, 33]。

唯一延拓问题的数值离散化也具有独立的研究价值（参见例如 [6]），我们预计本文的结果在这一背景下也可能具有参考价值。

本文余下部分安排如下。第 2 节在连续层面介绍三个高频散射模型问题，并回顾文献中的适定性结果。第 3 节介绍采用常用有限元空间对这些模型进行的 Galerkin离散化，并阐述其适定性；这要求有限元空间满足一个以明确形式给出的分辨率条件。

在第4节中，我们介绍两种基本网格，一种用于二维，另一种用于三维，它们用于构造奇异离散化。这些网格的设计受到相关工作 [4] 的启发，我们将其称为 Bernkopf 网格。我们通过实现 [4] 有限元方法的符号数学软件（见）组装

系统矩阵。矩阵条目随后成为波数 k的二次函数。为了分析导致奇异系统矩阵的临界波数，我们计算了其行列式（ k中的一个多项式），并分析了其根。在此，我们通过明确刻画这些网格及不同示例对应的所有临界频率 k 来呈现结果。

在最后的第 5 节中，我们总结研究结果，并说明包含（经缩放和膨胀的）Bernkopf 网格作为子网格的一般网格，会在基本 Bernkopf 网格中临界波数 k 的缩放版本处导致系统矩阵奇异。

对于采用 N´ed´elec 元离散的麦克斯韦方程，系统矩阵行列式的分析涉及对一个系数依赖于参数的三次多项式的讨论。我们将这项繁琐的分析移至附录 A。

2 设置

本节介绍我们的模型散射问题及其离散化。假设物理域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ 有界且为 Lipschitz 区域。其边界记为 $\Gamma := \partial\Omega$，外法向量场记为 n。

设 $L^p(\Omega)$、 $p \in [1,\infty]$ 和 $H^1(\Omega)$ 为 Ω 上标准的勒贝格空间和 Sobolev 空间，并将其向量值类比空间分别记为 $\mathbf{L}^p(\Omega) := (L^p(\Omega))^d$、$\mathbf{H}^1(\Omega) := \left(H^1(\Omega)\right)^d$。我们还需要以下空间

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) &:= \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathrm{div}\,\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\right\},\\ \mathbf{H}(\mathrm{curl};\Omega) &:= \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathrm{curl}\,\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\right\}\end{aligned}$$

以及 $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ 中切向场的空间：

$$\mathbf{L}_T^2(\Gamma) := \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Gamma) \mid \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma\right\}.$$

对于空间 $H^1(\Omega)$、$\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ 和 $\mathbf{H}(\mathrm{curl};\Omega)$，我们引入相应的范数，其中 L^2 项按波数 $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 加权

$$\begin{aligned}\|u\|_{\nabla,k} &:= \left(\|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + k^2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} && \text{for } H^1(\Omega),\\ \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},k} &:= \left(\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + k^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)^{1/2} && \text{for } \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega),\\ \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{curl},k} &:= \left(\|\mathrm{curl}\,\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + k^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)^{1/2} && \text{for } \mathbf{H}(\mathrm{curl};\Omega).\end{aligned}$$

[1] MATHEMATICA 笔记本的源代码和数据文件可在线获取，链接：
https://drive.math.uzh.ch/index.php/s/daFi9g27CZ3eXmC

问题1（亥姆霍兹问题）带有罗宾边界条件的亥姆霍兹问题的弱形式为

$$find\ u \in H^1(\Omega)\ \ s.t.\quad a_k^{\mathrm{H}}(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{4}$$

对于某个给定的连续反线性形式 $F \in \left(H^1(\Omega)\right)'$ 和半双线性型 a_k^{H}: $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{C}$，其定义为

$$a_k^{\mathrm{H}}(u,v) := (\nabla u, \nabla v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - k^2 (u,v)_{L^2(\Omega)} - \mathrm{i}\, k (u,v)_{L^2(\Gamma)}.$$

接下来，我们考虑具有阻抗边界条件的二维横向磁问题。该问题的能量空间选为

$$\mathbf{V}_{\mathrm{imp}} := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) \mid \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \in L^2(\Gamma) \right\} \tag{5}$$

并配备范数

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},k,+} := \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div},k}^2 + |k| \, \|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}.$$

问题2（二维横向磁问题）二维横向磁问题的弱形式为

$$find\ \mathbf{u} \in \mathbf{V}_{\mathrm{imp}}\ \ s.t.\quad a_k^{\mathrm{M2D}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathrm{imp}}, \tag{6}$$

对于某个给定的连续反线性形式 $F \in \mathrm{V}'_{\mathrm{imp}}$ 和半双线性型 a_k^{M2D}: $\mathrm{V}_{\mathrm{imp}} \times \mathrm{V}_{\mathrm{imp}} \to \mathbb{C}$，其定义为

$$a_k^{\mathrm{M2D}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := (\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \mathrm{div}\,\mathbf{v})_{L^2(\Omega)} - k^2 (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \mathrm{i}\, k (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}.$$

最后，我们考虑具有阻抗边界条件的三维麦克斯韦方程。能量空间选为

$$\mathbf{X}_{\mathrm{imp}} := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{curl};\Omega) \mid \mathbf{u}_T \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma) \right\}, \tag{7}$$

其中 $\mathbf{u}_T := \mathbf{n} \times (\mathbf{u}|_\Gamma \times \mathbf{n})$；其范数定义为

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{curl},k,+} := \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{curl},k}^2 + |k| \, \|\mathbf{u}_T\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}.$$

问题 3（三维麦克斯韦方程）对于给定的连续反线性形式 $F \in \mathrm{X}'_{\mathrm{imp}}$，带阻抗边界条件的三维麦克斯韦方程的弱形式为

$$find\ \mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\mathrm{imp}}\ \ s.t.\quad a_k^{\mathrm{M3D}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\mathrm{imp}} \tag{8}$$

其半双线性型为 a_k^{M3D}: $\mathbf{X}_{\mathrm{imp}} \times \mathbf{X}_{\mathrm{imp}} \to \mathbb{C}$，定义如下

$$a_k^{\mathrm{M3D}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathrm{curl}\,\mathbf{u}, \mathrm{cul}\,\mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - k^2 (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \mathrm{i}\, k (\mathbf{u}_T, \mathbf{v}_T)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}.$$

这些问题的共同点是，对所有波数$k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 而言，它们都是适定的；下面列出相关定理。

注 4 对于这些问题的 Galerkin离散的适定性而言，一项逼近性质（见（14）、（15）、（16））至关重要。该性质涉及将连续解算子作用于一个紧嵌入对偶能量空间的空间中的函数。因此，下面我们为这些子空间定义解算子。

命题 5（[**23,** 命题 8.1.3]）设 Ω 是一个有界利普希茨区域。则，对于所有 $F \in \left(H^1(\Omega)\right)'$，方程（4）存在唯一解，且解连续依赖于数据。

由命题 5 可知，解算子 T_k^{H}: $L^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ 对于 $f \in L^2$ 定义良好，其定义为

$$a_k^{\mathrm{H}}\left(T_k^{\mathrm{H}} f, v\right) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{9}$$

命题 6（[**9,** 定理 3.1]）设 Ω 是一个有界利普希茨区域。则，对于所有 $F \in \mathrm{V}'_{\mathrm{imp}}$，方程（6）存在唯一解，且解连续依赖于数据[2]。

若命题 6 中的假设成立，则解算子 T_k^{M2D}: $\mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ 定义良好，其定义为

$$a_k^{\mathrm{M2D}}\left(T_k^{\mathrm{M2D}}\mathbf{f}, \mathbf{v}\right) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathrm{div};\Omega)$$

对所有 $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^2$ 均成立。

文献 [27, 定理 4.17] 证明了带阻抗条件的 Maxwell 问题的适定性。

命题 7 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是边界单连通且足够光滑的有界利普希茨区域。则对所有 $F \in \mathrm{X}'_{\mathrm{imp}}$，方程 (8) 都有唯一解，且解连续依赖于数据。

我们引入空间

$$\mathbf{V}_{k,0} := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\mathrm{imp}} \mid k^2 (\mathbf{v}, \nabla\varphi)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mathrm{i}\, k\, (\mathbf{v}_T, (\nabla\varphi)_T)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = 0 \quad \forall \varphi \in H^1_{\mathrm{imp}}(\Omega) \right\},$$

其中

$$H^1_{\mathrm{imp}}(\Omega) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_\Gamma \in H^1(\Gamma) \right\}.$$

命题 7 的假设意味着解算子 T_k^{M3D}: $\mathrm{V}_{k,\,0} \to \mathbf{X}_{\mathrm{imp}}$ 可由下式良好定义

$$a_k^{\mathrm{M3D}}\left(T_k^{\mathrm{M3D}}\mathbf{f}, \mathbf{v}\right) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\mathrm{imp}}$$

对所有 $\mathrm{f} \in \mathrm{V}_{k,\,0}$。

[2]请注意，该文中定理 3.1 的证明并不需要 Ω 是 [9] 中凸多边形区域这一一般性假设。

3 有限元空间

采用 Galerkin方法对这些方程进行离散化，所用方法基于 Ω 上满足以下条件的协调（无悬挂节点）单纯形网格上的常用有限元空间 $\mathcal{T}$

1. （闭）单元 $K \in \mathcal{T}$ 覆盖 Ω，即 $\Omega = \cup_{K\in\mathcal{T}} \overline{K}$。

2. 对每个单元 K，都对应一个单元映射，它是一个 C^1-微分同胚 $\widehat{\phi}_K : \widehat{K} \to K$。集合 $\widehat{K}$ 是参考单纯形

$$\widehat{K} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} \mid \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1 \right\}.$$

3. 记 $h_K = \operatorname{diam} K$，则存在某个形状正则性常数 $\gamma_{\mathcal{T}}$，使得

$$h_K^{-1} \left\| \phi_K' \right\|_{\mathbf{L}^\infty\left(\widehat{K}\right)} + h_K \left\| \left(\phi_K'\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{L}^\infty\left(\widehat{K}\right)} \leq \gamma_{\mathcal{T}}. \tag{10}$$

4. 两个单元的交集要么为空，要么是一个顶点、一条边、一个面（对于 $d = 3$），要么两个单元重合（这里，顶点、边和面是参考四面体 $\widehat{K}$ 上对应对象的像 $\widehat{\ }$）。

5. 公共内边（二维）和面（三维）的参数化是相容的：对于两个相邻单元 K、K'，它们经 ϕ_K^{-1} 和 $\phi_{K'}^{-1}$ 的拉回是仿射等价的。

注8 满足上述假设的单纯形有限元网格可基于分片结构化网格构造，例如参见 *[25,*例5*1]* 或 *[24,* 第3.3节*2]*。

接下来，我们回顾用于问题1–3离散化的协调有限元空间的定义。对于单纯形 $K \in \mathcal{T}$，令 $\mathbb{P}_p(K)$表示总次数为 $\leq p$的 d–元多项式空间。

定义9（协调hp有限元空间）设 $\mathcal{T}$为区域Ω上的协调有限元网格。则协调 hp 有限元空间 $S_p(\mathcal{T}) \subset H^1(\Omega)$定义为

$$S_p(\mathcal{T}) := \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T} \quad u|_K \circ \phi_K \in \mathbb{P}_p(K) \right\}.$$

我们将此空间用于问题1的离散化：

$$\text{find } u_S \in S_p(\mathcal{T}) \text{ s.t. } \quad a_k^{\mathrm{H}}(u_S, v) = F(v) \quad \forall v \in S_p(\mathcal{T}). \tag{11}$$

定义 10（Raviart–Thomas 元）在参考单元上，阶数为 p 的 Raviart–Thomas 元定义为

$$\mathbf{RT}_p(\widehat{K}) := \left\{ \mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} q(\mathbf{x}) \mid \mathbf{p} \in \left(\mathbb{P}_p\left(\widehat{K}\right) \right)^3, q \in \mathbb{P}_p\left(\widehat{K}\right) \right\}.$$

对于 Ω 的协调单纯形有限元网格 $\mathcal{T}$，阶数为 p 的 Raviart–Thomas 有限元是如下空间：

$$\mathbf{RT}_p(\mathcal{T}) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) \mid (\det \phi_K')(\phi_K')^{-1}\mathbf{u}|_K \circ \phi_K \in \mathbf{RT}_p\left(\widehat{K}\right) \right\}.$$

采用 Raviart-Thomas有限元对问题2进行离散化：

$$\text{find } \mathbf{u}_{\mathrm{RT}} \in \mathbf{RT}_p(\mathcal{T}) \text{ s.t. } \quad a_k^{\mathrm{M2D}}(\mathbf{u}_{\mathrm{RT}}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{RT}_p(\mathcal{T}). \tag{12}$$

定义 11（N´ed´elec 元）在参考单元 K 上，阶数为 p 的 N´ed´elec（I 型）元定义为

$$\mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}\left(\widehat{K}\right) := \left\{ \mathbf{p}(\mathbf{x}) + s\mathbf{x} \times \mathbf{q}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{p},\mathbf{q} \in \left(\mathbb{P}_p\left(\widehat{K}\right)\right)^3 \right\}.$$

对于 Ω 上的协调单纯形有限元网格 $\mathcal{T}$，阶数为 p 的 N´ed´elec（I 型）有限元空间为：

$$\mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T}) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{curl};\Omega) \mid (\phi_K')^T \mathbf{u}|_K \circ \phi_K \in \mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}\left(\widehat{K}\right) \right\}.$$

我们考虑基于 N´ed´elec 空间 $\mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T})$ 的 Galerkin方法对问题 3 进行离散化：

$$\text{find } \mathbf{u}_{\mathrm{N}} \in \mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T}) \text{ s.t. } \quad a_k^{\mathrm{M3D}}(\mathbf{u}_{\mathrm{N}}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T}). \tag{13}$$

由于原始变分问题（问题 1–3）并非强制的，因此 Galerkin离散的适定性并不能直接继承。离散化适定性的常用理论基于紧扰动论证，即所谓的“Schatz论证”（见 [29]）；对于麦克斯韦方程，该论证更为微妙，因为 H（旋度，Ω）并不能紧嵌入 $L^2(\Omega)$。无论如何，原始变分问题的协调Galerkin离散化的适定性定理通常表述为：如果有限元空间“足够丰富”，那么离散方程就是适定的。这里我们先引用相关定理，再引入一些记号。

命题 12（[**26,** 定理 3.2]）设单纯形有限元网格 $\mathcal{T}$与多项式次数的选取使得伴随逼近性质（参见 **(9)**）

$$\eta(S_p(\mathcal{T})) := \sup_{f \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \inf_{v \in S_p(\mathcal{T})} \frac{\left\| T_{-k}^{\mathrm{H}} f - v \right\|_{\mathcal{H}}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} \tag{14}$$

满足

$$C_{\mathrm{c}}\eta(S_p(\mathcal{T})) < \frac{1}{2}.$$

因此，问题1的 Galerkin 离散（11）是适定的。

对于具有阻抗边界条件的二维横向磁问题，我们引用 [9, 定理 4.1]中关于最低阶 Raviart–Thomas 元的一个结果。该结果还表明，对于此方程，若 $\mathrm{RT}_1(\mathcal{T})$ h的形状正则三角剖分 $\mathcal{T}$的最大网格宽度足够小，则 Galerkin 离散是适定的。

命题 13 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸有界多边形区域。如果

$$k^2 h \ \textit{is sufficiently small} \tag{15}$$

则问题2的 Galerkin离散 (12) 是适定的。

对于 Maxwell 问题，文献 [22, §9]研究了采用 N´ed´elec 元 (13) 进行 Galerkin离散的适定性。这里，我们以略有不同的方式表述这一结果。我们引入伴随逼近性质δ_k： $\mathrm{X}_{\mathrm{imp}} \to \mathbb{R}$ 由 $\delta_k(0) := 0$ 以及对于 $\mathrm{w} \in \mathrm{X}_{\mathrm{imp}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ 由

$$\delta_k(\mathbf{w}) := 2 \sup_{\mathbf{v}_{\mathrm{N}} \in \mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T}) \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\left| k^2 \left(\mathbf{w}, \mathbf{v}_{\mathrm{N}}\right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \mathrm{i}\, k \left(\mathbf{w}_T, \left(\mathbf{v}_{\mathrm{N}}\right)_T\right)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right|}{\|\mathbf{w}\|_{\mathrm{curl},k,+} \, \|\mathbf{v}_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{curl},k,+}}. \tag{16}$$

命题 14 设命题 7 中的假设成立，且 $\mathrm{u} \in \mathrm{X}_{\mathrm{imp}}$是精确解。假设对于任意给定的 $\alpha \in]0, 1[$，选择协调单纯形有限元网格 $\mathcal{T}$ 和多项式次数 p，使得对于任意满足下式的函数 $\mathrm{w} \in \mathrm{X}_{\mathrm{imp}}$

$$a_k^{\mathrm{M3D}}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T})$$

均有 $\delta_k(\mathrm{w}) \leq \alpha$。那么，离散问题 (13) 存在唯一解 $\mathrm{u}_{\mathrm{N}} \in \mathrm{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T})$，并满足拟最优误差估计

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{curl},k,+} \leq \frac{1 + \delta_k(\mathbf{e}_{\mathrm{N}})}{1 - \delta_k(\mathbf{e}_{\mathrm{N}})} \inf_{\mathbf{v}_{\mathrm{N}} \in \mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T})} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{curl},k,+} \quad \textit{for } \mathbf{e}_{\mathrm{N}} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{N}}.$$

该证明只是对 [22, 定理 9.7、命题 9.1] 的简单改述，其依据是 [20]。

注 15 在 *[22,* 引理 9.*6]* 中，解释了如何选择多项式次数 p 和网格，使得 $\delta_k(\mathrm{w}) \leq \alpha$ 成立。这一理论的关键要素是证明伴随逼近性质

$$\eta\left(\mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T})\right) := \sup_{\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}_{-k,0} \setminus \{0\}} \inf_{\mathbf{w}_{\mathrm{N}} \in \mathbf{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T})} \frac{\left\| T_{-k}^{\mathrm{M3D}} \mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_{\mathrm{N}} \right\|_{\mathrm{curl},k,+}}{\|\mathbf{v}_0\|_{\mathrm{curl},k,+}}$$

对于足够细的网格 $\mathcal{T}$ 以及多项式次数 p，其对 k呈对数依赖时，可以使其足够小。这样一来，“$\mathrm{N}_p^{\mathrm{I}}(\mathcal{T})$ 足够丰富”这一说法就成为一个定性条件。

总之，我们说明，对于某些在连续层面上适定的高频散射问题，只要有限元空间“足够丰富”，使伴随逼近性质足够小，协调伽辽金离散就是适定的。

因此，一个自然的问题是：如果不满足分辨率条件，协调伽辽金离散是否会出现奇异，还是这只是基于 Schatz 扰动论证的理论所导致的假象。有趣的是，对于一维区间 $\Omega = (a, b)$ 上带罗宾边界条件的亥姆霍兹方程，[4] 中已证明，协调伽辽金离散始终存在唯一解，且对网格和/或多项式次数没有任何限制。

分辨率条件足以保证离散问题适定，但仍未解答是否存在某些网格会使Galerkin离散变得奇异。这促使人们开发了各种对协调伽辽金离散的改进方法，以确保其始终适定；其中包括一阶系统最小二乘法（FOSLS）有限元方法（见 [13], [19], [3]）、稳定化方法 [17], [35], [12], 以及间断 Petrov-Galerkin 方法 [28]。这些方法的共同点是，所得离散问题始终存在唯一解。然而，其自由度可能远多于协调伽辽金有限元法，而且实现起来也更为复杂。这正是研究以下问题的动机之一：

协调伽辽金有限元法会导致问题1（11）、（12）、（13）的系统矩阵奇异吗?

4 Bernkopf 型网格

在 [4] 中，针对二维的亥姆霍兹问题1，给出了一个 Bernkopf 网格示例。对于该示例，最低阶元的协调伽辽金离散具有非平凡齐次解。本节将研究，对于更高的多项式次数、三维问题以及麦克斯韦方程，是否也存在这样的示例。

备注16 我们在符号数学程序 MATHEMATICA*TM*（参见 *[34]*）中完成了所有示例的计算，因此我们的计算中不会出现舍入误差。

首先，我们介绍区域和网格，并从二维 Bernkopf 网格开始。

定义 17（二维 Bernkopf 网格）（参见 *[4, §3.2]*）令 $\Omega = (-1, 1)^2$。三角剖分中的顶点为 $\mathrm{P}_1^\Gamma = (-1, -1)^T$、$\mathrm{P}_2^\Gamma = (1, -1)^T$、$\mathrm{P}_3^\Gamma = (1, 1)^T$、$\mathrm{P}_4^\Gamma = (-1, 1)^T$、$\mathrm{P}_1^\Omega = (-\alpha, 0)^T$、$\mathrm{P}_2^\Omega = (0, -\alpha)^T$、$\mathrm{P}_3^\Omega = (\alpha, 0)^T$、$\mathrm{P}_4^\Omega = (0, \alpha)^T$、$\mathrm{P}_5^\Omega = (0, 0)^T$，其中参数为 $\alpha \in]0, 1[$。该三角剖分 $\mathcal{T}_2$ 由 12 个三角形组成 T_j, $j \in \{1, 2, \ldots, 12\}$，如图 1 所示。

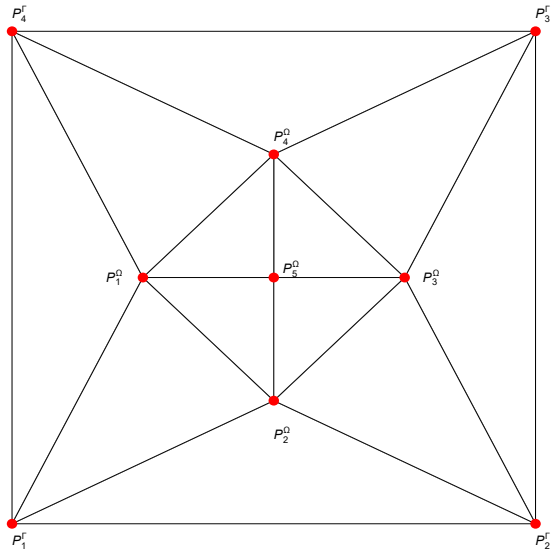

图1： $\alpha = 1/2$的二维 Bernkopf 网格。

定义 18（三维 Bernkopf 网格）令 $\mathrm{V}_i^\Gamma = \left(\mathrm{P}_i^\Gamma, 0\right)$，其中 $i \in \{1,2,3,4\}$。设 $\mathrm{V}_5^\Gamma := (0,0,1)^T$，且 $\mathrm{V}_6^\Gamma := (0,0,-1)^T$。区域 Ω 是 V_i^Γ, $i \in \{1,2,\ldots,6\}$ 的凸包，内部顶点为 $\mathrm{V}_i^\Omega = \left(\mathrm{P}_i^\Omega, 0\right)^T, i \in \{1,\ldots,5\}$。该网格 $\mathcal{T}_3$（见 2）由 24 个形如 $K_j = \mathrm{conv}\left(T_j, \mathrm{V}_5^\Gamma\right), 1 \le j \le 12$ 以及 $K_{12+j} = \mathrm{conv}\left(T_j, \mathrm{V}_6^\Gamma\right), 1 \le j \le 12$的四面体组成。

4.1 亥姆霍兹问题1, $d = 2$, $p = 1$, 2

我们阐述寻找临界波数 $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$的概念性方法，使得亥姆霍兹问题的系统矩阵为奇异，而问题2和问题3的处理过程则完全类似。系统矩阵为奇异，当且仅当存在非平凡的 $u \in S\backslash\{0\}$ 满足该方程

$$a^{\mathrm{H}}(u,v) = 0 \quad \forall v \in S. \tag{17}$$

通过选取 $v = u$ 并考虑 $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 的半双线性型的虚部，可得$\|u\|_{L^2(\Gamma)} = 0$，进而得到 $u|_\Gamma = 0$。对于这样的函数u，半双线性型的边界部分为零，并且我们有

$$a^{\mathrm{H}}(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - k^2 (u,v)_{L^2(\Omega)}.$$

设$(b_y)_{y\in\Sigma}$ 表示空间 S 的标准局部节点基，其自由度集合为Σ。内部节点的自由度定义了

$_\circ$子集 $\Sigma_\circ$。我们计算矩阵

$$A_\alpha(k) = \left(a_{y,z}(k)\right)_{\substack{y\in\Sigma \\ z\in\mathring{\Sigma}}} \quad \text{with} \quad a_{y,z} := (\nabla b_y, \nabla b_z)_{L^2(\Omega)} - k^2 (b_y, b_z)_{L^2(\Omega)} \tag{18}$$

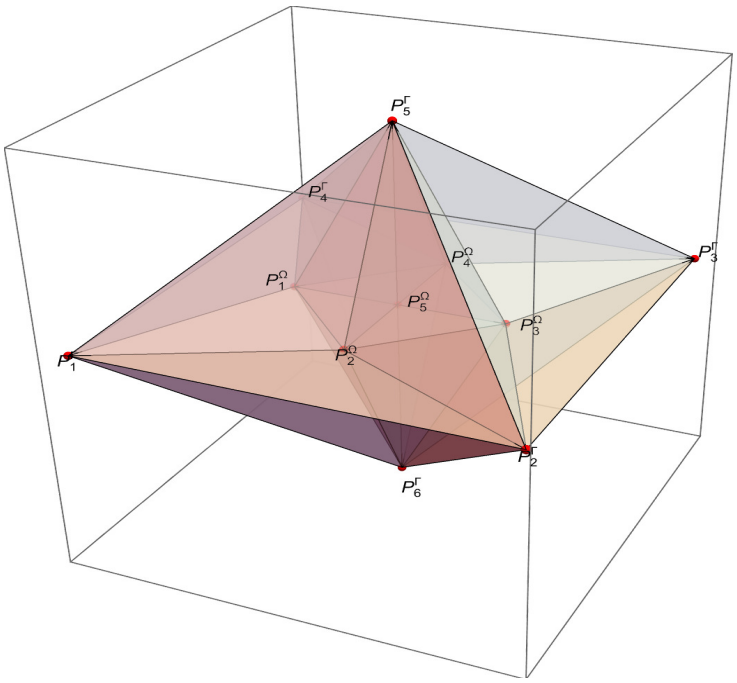

图 2：选择 $\alpha = 1/2$ 时的三维 Bernkopf 网格。

这是一个行数多于列数的矩形矩阵。由基本线性代数可知，问题 (17) 具有非平凡解 $u \in S\backslash\{0\}$ 当且仅当 $\ker A_\alpha(k)$ 非平凡。这等价于

$$\det B_\alpha(k) = 0 \quad \text{for } B_\alpha(k) := (A_\alpha(k))^T A_\alpha(k).$$

由 (18) 中的定义显然可见，$\det B_\alpha(k)$ 是关于 $\kappa = k^2$的多项式，因此 $Q_\alpha(\kappa) := \det B_\alpha(\sqrt{\kappa})$ 是关于 κ的多项式。为了求出临界频率$k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$，我们关注 $Q_\alpha(\kappa)$ 的正根。我们的 MATHEMAT-ICA 实现首先计算系统矩阵 $A_\alpha(k)$，然后计算矩阵$B_\alpha(k)$，最后计算其行列式 $\det B_\alpha(k)$ 以及多项式 Q_α。我们讨论 Q_α，并最终计算正根，这些正根即为临界波数 k的（平方）。由于 Q_α 是多项式，根的个数总是有限的。我们通过符号计算推导出，对任意 $\alpha \in]0, 1[$，至少存在一个正根 κ（属于 Q_α），因而至少存在两个伪频率。由于 Q_α 中依赖于 α的系数相当复杂，我们并不试图求出 Q_α 的全部根，而只求其中一部分。

对于任意 $\alpha \in]0, 1[$ 和 $p = 1$，我们的 MATHEMATICA 实现表明，$Q_\alpha(\kappa)$ 可以分解为三个多项式 $\eta_1 \in \mathbb{P}_1$、$\eta_2 \in \mathbb{P}_2$和 $\eta_3 \in \mathbb{P}_4$：$Q_\alpha(\kappa) = \frac{\eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3}{f_\alpha}$，其中 f_α 是关于 $\alpha \in]0, 1[$的正多项式。η_1的根为 $^6_{(2-\alpha)\,\alpha(1-\alpha)}$（对于 $\alpha \in]0, 1[$为正），而 η_2的两个根具有非零虚部，因此与临界波数 $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$无关。我们不再进一步分析多项式 η_3，而是根据对 η_1 的分析得出结论：对于任意 $\alpha \in]0, 1[$，存在两个临界波数[3]

$$k(\alpha)^2 = \frac{6(2-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}$$

且采用有限元空间 $S_1(\mathcal{T}_2)$的协调伽辽金离散存在一个伪模态，即存在一个元素 $u_p \in S_p(\mathcal{T}_2)\backslash\{0\}$，使得

$$a^{\mathrm{H}}_{k(\alpha)}(u_p, v) = 0 \quad \forall v \in S_p(\mathcal{T}_2).$$

对于任意的 $\alpha \in]0, 1[$ 和 $p = 2$，MATHEMATICA 实现表明 $Q_\alpha(\kappa)$可以分解为五个多项式 $\eta_1 \in \mathbb{P}_1$、$\eta_2 \in \mathbb{P}_4$、$\eta_3 \in \mathbb{P}_6$、η_4、$\eta_5 \in \mathbb{P}_{10}$：$Q_\alpha(\kappa) = f_\alpha \eta_1^2 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5^2$，其中 f_α 是关于 $\alpha \in]0, 1[$的正有理函数。η_1 的根由下式给出

$$k(\alpha)^2 = \frac{15\left(\alpha^2 + (2-\alpha)^2\right)}{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}$$

（对于 $\alpha \in]0, 1[$ 为正），而此处不讨论其他多项式的根。由此，我们证明了对于任意 $\alpha \in]0, 1[$，都存在两个临界波数。$p = 1$ 的伪模态 2 如图3所示。

[3]注意，$p = 1$ 的这一示例正是 [4, 引理3.2] 中所处理的情形，并且在不使用符号计算的情况下给出了一个初等证明。

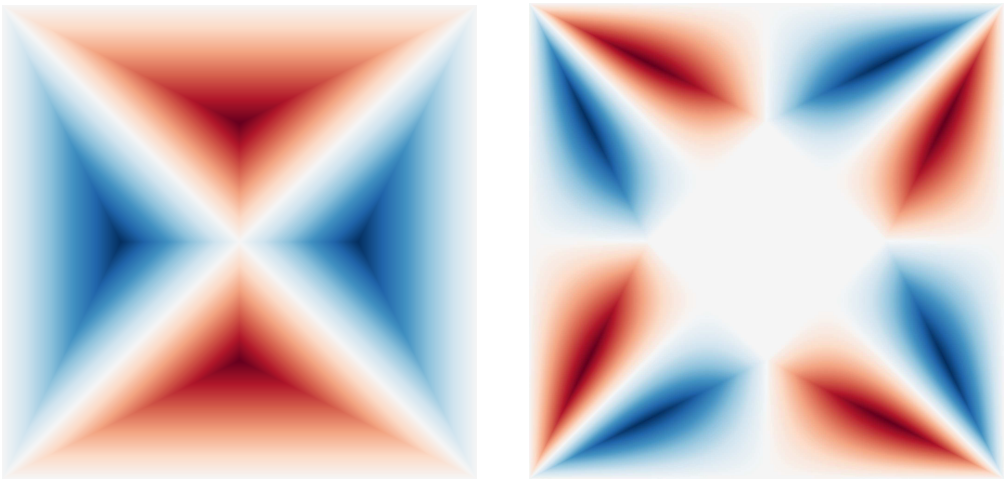

图3： $\alpha = 1/2$情形下二维亥姆霍兹方程的 $\mathbb{P}_1$ 与 $\mathbb{P}_2$ Galerkin离散的伪解。左： $p = 1$ 与 $k\,(\alpha)\ = \pm 6$，右： $p = 2$ 与 $k\,(\alpha)\ = \pm 10$。

4.2 亥姆霍兹问题1， $d = 3$

对于任意 $\alpha \in]0,1[$ 和 $p = 1$，通过 MATHEMATICA 实现进行符号运算可知，$Q_\alpha(\kappa)$ 可以分解为三个多项式 $\eta_1 \in \mathbb{P}_1$, $\eta_2 \in \mathbb{P}_2$, $\eta_3 \in \mathbb{P}_4$： $Q_\alpha(\kappa) = \frac{\eta_1^2\eta_2^2\eta_3}{f_\alpha}$，其中正多项式 f_α 对所有 $\alpha \in]0,1[$ 均成立。 η_1 的根为 $\kappa = \sqrt[20]{\alpha^{1-\alpha()}}$（对于 $\alpha \in]0,1[$ 为正），而此处不讨论其他多项式的根。由此，我们证明了对于任意 $\alpha \in]0,1[$，都存在两个临界波数

$$k\,(\alpha)^2 = \frac{20}{\alpha\,(1-\alpha)}.$$

对任意 $\alpha \in]0、1[$ 和 $p = 2$，符号运算表明 Q_α（κ）可分解为八个多项式 η_1、 $\eta_2 \in \mathbb{P}_1$、 $\eta_3 \in \mathbb{P}_2$、 η_4、 $\eta_5 \in \mathbb{P}_4$、 $\eta_6 \in \mathbb{P}_8$、$\eta_7 \in \mathbb{P}_{12}$、 $\eta_8 = \mathbb{P}_{14}$： $Q_\alpha\,(\kappa) = f_\alpha\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2\eta_4\eta_5\eta_6\eta_7^2\eta_8$，其中对所有 $\alpha \in]0、1[$，f_α 为正有理函数。 η_1 的根由$\kappa = \sqrt[42]{\alpha^{1-\alpha()}}$给出（对 $\alpha \in]0、1[$为正）， η_2 的根由 $\sqrt[21]{\alpha^{(\alpha+1)}\alpha^2+2\,(2-\alpha)\,(2-\alpha)\,(1-\alpha)\,\alpha}$ 给出（对 $\alpha \in]0、1[$为正）， η_3 的根对任意 $\alpha \in]0、1[$ 具有非零虚部，因而与临界频率 $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$无关。函数 η_4，....., η_8 不予讨论。由此，我们证明了对任意 $\alpha \in]0、1[$，存在四个临界波数

$$k\,(\alpha)^2 \in \left\{\frac{42}{\alpha\,(1-\alpha)}, \frac{21(\alpha+1)\alpha^2+2(2-\alpha)}{(2-\alpha)(1-\alpha)\alpha}\right\}.$$

$p = 1$ 的伪解如图 4 所示，而 $p = 2$ 的两种情况分别如图 5 所示。

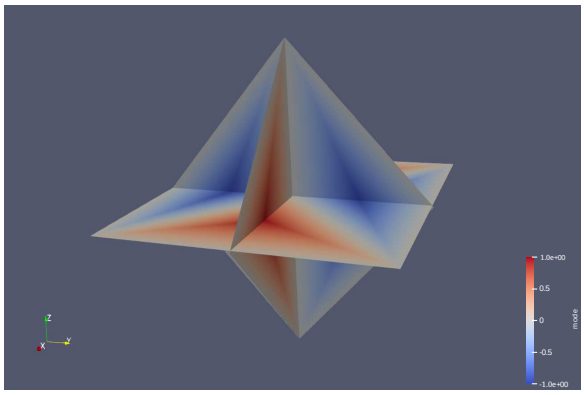

图 4：Bernkopf 网格上， $\alpha = 1/2$ 条件下，对三维亥姆霍兹问题采用 $\mathbb{P}_1$ Galerkin离散所得的伪解，临界波数为 $k_1(1/2) = \pm\sqrt{80}$。

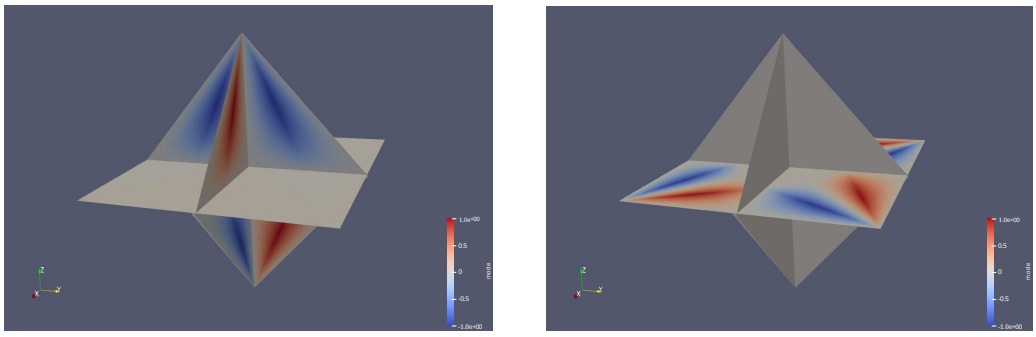

图 5： $\alpha = 1/2$ 时三维亥姆霍兹问题的 $\mathbb{P}_2$ Galerkin离散伪解。左： $k_2(1/2)^2 = 168$，右： $k_2(1/2)^2 = 189$。

4.3 二维 Maxwell，RT1：

对于任意 $\alpha \in]0、1[$ 和 $p=1$，MATHEMATICA 实现的符号运算表明，此问题中的 $Q_\alpha(\kappa)$ 可分解为五个多项式 $\eta_1(\kappa)=\kappa^{10}$、$\eta_2$、$\eta_3 \in \mathbb{P}_2$、$\eta_4 \in \mathbb{P}_4$、$\eta_5 \in \mathbb{P}_6$：$Q_\alpha(\kappa)=f_\alpha \eta_1 \eta_2^2 \eta_3 \eta_4 \eta_5^2$，并且对于所有 $\alpha \in]0、1[$，f_α 都是正有理函数。显然，η_1 的唯一根是 $\kappa=0$，它与临界波数 $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 无关；η_2 有两个正根 [4]

$$\kappa_\pm(\alpha)=\frac{12}{\alpha^2}\frac{2+7\alpha+3\alpha^2-3\alpha^3 \pm \sqrt{3\alpha^6+3(5-4\alpha)\alpha^4+(37-30\alpha)\alpha^2+28\alpha+4}}{2+6\alpha-\alpha^2-\alpha^3},$$

而对于 $\alpha \in]0、1[$，η_3 的根的虚部始终不为零。我们不研究 η_4 和 η_5 的根。因此，采用 Raviart-Thomas 有限元 $\mathrm{RT}_1(\mathcal{T}_2)$ 对二维横向磁问题进行协调伽辽金离散化时，对于任意 $\alpha \in]0、1[$ 和 $k^2=\kappa_\pm(\alpha)$，都会出现伪模态。

4.4 三维 Maxwell，$\mathrm{N}_p^{\mathrm{I}}$，p=1：

对于任意 $\alpha \in]0,\ 1[$ 和 $p=1$，通过 MATHEMATICA 实现进行的符号运算表明，该问题的 $Q_\alpha(\kappa)$ 可分解为九个多项式 $\eta_1(\kappa)=\kappa^{10}$、$\eta_2 \in \mathbb{P}_1$、$\eta_3$、$\eta_4 \in \mathbb{P}_2$、$\eta_5 \in \mathbb{P}_3$、$\eta_6$、$\eta_7$、$\eta_8 \in \mathbb{P}_4$、$\eta_9 \in \mathbb{P}_8$：$Q_\alpha(\kappa)=\frac{\eta_1\eta_2^2\eta_3\eta_4^2\eta_5^2\eta_6\eta_7\eta_8\eta_9^2}{f_\alpha}$，其中 f_α 是正多项式，对所有 $\alpha \in]0、1[$ 均成立。显然，η_1 的唯一根是 $\kappa=0$，它与临界波数无关$k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$；$\eta_2$ 有一个正根

$$\kappa(\alpha)=20\frac{2-\alpha}{1+\alpha(1-\alpha)},$$

而 η_3、η_4 的根的虚部对于 $\alpha \in]0、1[$ 总是不为零。我们不考察 η_6、……、η_9 的根。

多项式 η_5 需要更细致的分析。定义系数

$$\begin{aligned}
c_0(\alpha) &:= 1024000\left(2\alpha^2+\alpha+2\right), &(19)\\
c_1(\alpha) &:= -1600\left(\alpha^3(60-19\alpha)+47\alpha^2+136\alpha+36\right),\\
c_2(\alpha) &:= 20\left(\alpha^3\left(222-35\alpha^3\right)+\left(16-15\alpha^5\right)+12\alpha^4+188\alpha^2+112\alpha\right)\\
c_3(\alpha) &:= -\left(\alpha^4(26-21\alpha)+\alpha^2(41-31\alpha)+52\alpha+8\right)\alpha^2 &(20)
\end{aligned}$$

以及多项式

$$p_\alpha(x)=\sum_{\ell=0}^{3} c_\ell(\alpha)\,x^\ell. \tag{21}$$

[4] 显然，对于情形 $(\dot{(\,)}-\sqrt{\cdot})$ 除以 $(\dot{(\,)}+\sqrt{\cdot})$，展开分数后，分子为 $6\alpha^2\left(4+\alpha\left(10-8\alpha-\alpha^2+\alpha^3\right)\right)$，即对于任意 $\alpha \in]0,1[$ 均为正，而分母显然为正。对于情形 $(\dot{(\,)}+\sqrt{\cdot})$，其为正显而易见。

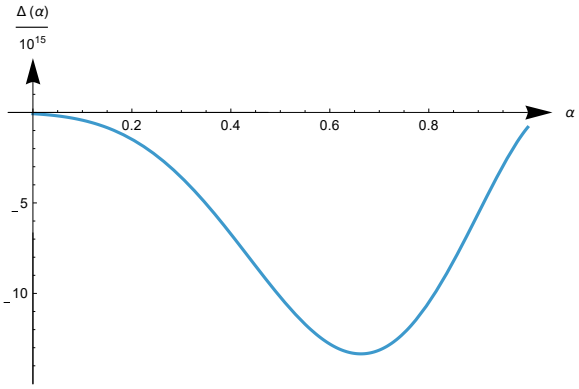

图6：三次多项式 η_5 的判别式 Δ 作为 $\alpha \in [0,1]$的函数。

多项式 p_α 的三个根均为实数、正数且互不相同。由于证明过程虽初等但略显繁琐，我们将其推迟至附录 A。这里我们绘出了判别式的图像：

$$\Delta := -18c_0c_1c_2c_3 + 4c_2^3c_0 - c_1^2c_2^2 + 4c_3c_1^3 + 27c_3^2c_0^2$$

其动机基于如下推理：成立（参见例如 [31, 第IX章，第122]页）

$$\Delta(\alpha) < 0 \iff \text{all three roots of } p_\alpha \text{ are distinct and real.}$$

注意， $p_\alpha(x)$中的系数 $c_\ell(\alpha)$满足符号性质，这些性质直接由其表示式(19)-(20)得出：对于 $\alpha \in [0,1]$ 成立：

$$c_0(\alpha) > 0, \quad c_1(\alpha) < 0, \quad c_2(\alpha) > 0, \quad c_3(\alpha) < 0$$

并且对所有 $x \le 0$ 有 $p_\alpha(x) > 0$ 成立。因此：若 $]0,1[$ 中的 $\Delta < 0$，则 p_α 的三个根互不相同，且均为实数和正根。 Δ 的图像如图6所示。

总之，由N´ed´elec空间$\mathrm{N}_1^1(\mathcal{T}_3)$给出的协调伽辽金离散具有八个伪波数

$$k(\alpha) \in \left\{ \pm\sqrt{20\frac{2-\alpha}{1+\alpha(1-\alpha)}}, \pm\sqrt{x_1(\alpha)}, \pm\sqrt{x_2(\alpha)}, \pm\sqrt{x_3(\alpha)} \right\},$$

其中 $x_m(\alpha)$、 $1 \le m \le 3$是该方程的三个互不相同的正根

$$p_\alpha(x) = 0. \tag{22}$$

5 结论

本文研究了高频散射问题中二维和三维空间维度下的三种常见模型，这些模型在连续层面上均适定

。对于这些变分问题中常用的低阶协调Galerkin有限元离散，我们构造了单纯形网格，使得当k取某些离散值时，离散系统是奇异的。这些网格具有高度对称性，并且在所有构造的例子中，区域边界上的自由度数量相对较少。

即使对于这些特意构造的网格，系统矩阵也只会在有限多个伪频率处奇异 $k > 0$，这表明此类情况极为罕见。

接下来，我们讨论应用于 Bernkopf 网格周期复制的分辨率条件。令 $N \in \mathbb{N}$ 和 $h = 1/(N+1)$。令 $\mathcal{T}_3^+$ 表示 $(-1,1)^3$ 的某个协调四面体网格，该网格满足：a）包含 $\mathcal{T}_3$ 作为子网格；b）将立方体 $(-1,1)^3$, 的每个面上的两条对角线插入后得到的四个全等三角形，都是 $\mathcal{T}_3^+$ 中某些四面体的面。为统一记号，我们设 $\mathcal{T}_2^+ := \mathcal{T}_2$。

将网格 $\mathcal{T}_d^+$, $d = 2, 3$ 按因子 $h/2$ 缩放，得到 $\Omega_h := \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)^d$ 的网格 $\mathcal{T}_{d,\,h}^+$，其中包含 $\mathcal{T}_d$ 的缩放版本 $\mathcal{T}_{d,\,h}$ 作为子网格。平移 $\Phi_{\boldsymbol{\mu}} : \Omega_h \to \Omega_h(\boldsymbol{\mu})$ 定义为

$$\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{J}_N := \left\{ \boldsymbol{\nu} = (\nu_j)_{j=1}^d \in \mathbb{N}_0^d \mid \|\boldsymbol{\mu}\|_{\max} \le N \right\} \quad \text{and} \quad \mathbf{1} = (1)_{i=1}^d$$

by

$$\Phi_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + h\left(\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{1}\right).$$

$\Omega_h(\boldsymbol{\mu})$ 中的单纯形 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{J}_N$ 为 $(0,1)^d$ 构成一个协调单纯形网格，其中每个单元 $\Omega_h(\boldsymbol{\mu})$ 都包含缩放后的结构化网格 $\mathcal{T}_{d,\,h}$ 的一个副本。通过缩放论证（详见 [4, 引理 3.3]），可以得到：如果

$$kh = k(\alpha)$$

对于在所构造网格上 Galerkin离散我们模型问题所定义的伪波数 $k(\alpha)$。另一方面，这一观察也可以反过来表述：由于 $k(\alpha)$ 与 h 无关，条件

$$kh < k(\alpha)$$

确保不存在局限于单个单元的非平凡离散齐次解。该条件远弱于典型条件“对于某个固定的 $\nu > 1$，乘积 $k^\nu h$ 必须足够小”，例如 $\nu = 2$ 中的 (15) 式所示。

A 对 (21) 中 p_α 的根的分析

在本附录中，我们证明以下引理。

引理19：对于任意 $\alpha \in [0,1]$，式（21）中的三次多项式 p_α 有三个互不相同的正根。

证明。 $c_m(\alpha)$ 中的系数 $p_\alpha(x) = \sum_{\ell=0}^{3} c_\ell(\alpha)\, x^\alpha$ 满足以下符号性质，这些性质可由其表示式 (19)–(20) 直接推出：对于$\alpha \in [0,1]$，有：

$$c_0(\alpha) > 0, \quad c_1(\alpha) < 0, \quad c_2(\alpha) > 0, \quad c_3(\alpha) < 0.$$

这意味着

$$\operatorname{sign} p_\alpha(0) = \operatorname{sign} c_0(\alpha) = 1, \tag{23}$$
$$\operatorname{sign} p_\alpha(+\infty) = \operatorname{sign} c_3(\alpha) = -1. \tag{24}$$

接下来我们证明

$$\operatorname{sign} p_\alpha(50) = -1. \tag{25}$$

情形1。$\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$，并令 $b = 1 - \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$。对于 $x = 50$，有 $p_\alpha(50) = -\frac{1000}{\alpha^7} w(b)$，其中

$$w(b) = 13375b^5(1-b) + 2625b^7 + b^2\tilde{w}_3(b) + 500b + 55 \tag{26}$$

with

$$\tilde{w}_3(b) := 14\,875b^3 - 29495b^2 + 10905b + 567.$$

接下来我们证明，在范围 $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$内，$\tilde{w}_3(b) \geq 0$，即 $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$。直接讨论 $\tilde{w}_3$ $\frac{347}{525} + \frac{2}{8925}\sqrt{3833\,194} >$ 可知，它在 1 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\tilde{w}_3$ 处取得局部最小值，也就是说，该点位于区间之外。因此，它在此区间内没有局部最小值，并且

$$\min_{0 \leq b \leq \frac{1}{2}} \tilde{w}_3(b) = \min\left\{\tilde{w}_3(0), \tilde{w}_3\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{4041}{8} > 0.$$

这直接意味着 $w(b) \geq 55$，进而对 $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$有 $p_\alpha(50) < 0$。

情形2。$\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$。我们将 $p_\alpha(50) = -\frac{1000}{\alpha^7} v(\alpha)$写成

$$v(\alpha) := 2625\alpha^6(1-\alpha) + \alpha^4 v_2(\alpha) + \alpha v_3(\alpha) + 32 \tag{27}$$

with

$$v_2(\alpha) := 2375\alpha^2 - 3125\alpha + 3005 \quad \text{and} \quad v_3(\alpha) := 200\alpha^2 - 6688\alpha + 4256.$$

再次，经过直接讨论可知， v_2在$25\,38$处取得局部最小值，函数值为 $\frac{150\,255}{76} > 0$，因此对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$均为正。函数 v_3在 $\frac{418}{25} > 1$处取得局部最小值。因此，在$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 中不存在局部最小值，且

$$\min_{\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} v_3(\alpha) = \min\left\{v_3(0), v_3\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 962.$$

我们利用（27）中的这些正性估计，得到

$$\min_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} v(\alpha) \geq 32.$$

进而我们证明了

$$\forall \alpha \in [0,1] \qquad p_\alpha(50) < 0.$$

最后我们证明

$$\forall \alpha \in [0,1] \quad \exists y_\alpha > 50 \quad \operatorname{sign} p_\alpha(y_\alpha) = 1 \tag{28}$$

并区分以下两种情形：

情形1. 对于 $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$，我们证明 $p_\alpha = \frac{1000}{\alpha^7} z_\alpha$ $p_\alpha(150) > 0$. 满足 (150) ( )，其中

$$z(\alpha) := \alpha^5 z_2(\alpha) + \alpha z_3(\alpha) + 608 \tag{29}$$

with

$$z_2(\alpha) := 70875\alpha^2 - 103500\alpha + 97875,$$
$$z_3(\alpha) := -128415\alpha^3 - 90000\alpha^2 + 48368\alpha + 18784.$$

直接分析可得，z_2 在 $\alpha = \frac{46}{63}$ 处取得局部最小值，且其值为正 $420\,625\,7$，因此对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，$z_2(\alpha) > 0$。对函数 z_3 进行直接讨论可知，它在 $\alpha = -\frac{2000}{8561} - \frac{4}{128\,415}\sqrt{185\,649\,515} < 0$ 处取得局部最小值。因此，如果在 $[0,\frac{1}{2}]$ 中没有局部最小值，并且

$$\min_{\alpha\in[0,1/2]} z_3(\alpha) = \min\left\{z_3(0), z_3\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{35\,329}{8} > 0.$$

由 (29) 可知，对于所有 $\alpha \in [0,1/2]$，$z(\alpha) \geq 608$，进而在此范围内 $p_\alpha(150) > 0$。

情形2。对于 $\alpha \in \left[\frac{1}{2},1\right]$，我们证明，对于 $y_\alpha = 105 - 50\alpha$，有 $p_\alpha(y_\alpha) > 0$。注意，在此范围内 $y_\alpha > 50$。我们得到，对于 $b = 1-\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$，有 $p_\alpha(105-50\alpha) = \frac{125}{\alpha^7}\zeta(b)$，并且

$$\zeta(b) = 100b^9\zeta_1(b) + b^5\zeta_3(b) + b\xi_3(b) + 95 \tag{30}$$

with

$$\zeta_1(b) := 517 - 210b,$$
$$\zeta_3(b) := 12\,494 + 165\,531b - 113\,321b^2 - 6930b^3,$$
$$\xi_3(b) := 4588 + 42\,097b + 14\,067b^2 - 153\,097b^3.$$

显然，当 $b \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时，第一个因子 ζ_1 为正。函数 $\zeta_3(b)$ 在 $\alpha = -\frac{1}{20\,790}\sqrt{16283\,038\,531} - \frac{113\,321}{20\,790} < 0$ 处有一个局部最小值。因此，在 $[0,\frac{1}{2}]$ 中不存在局部最小值，并且

$$\min_{b\in[0,1/2]} \zeta_3(b) = \min\left\{\zeta_3(0), \zeta_3\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 12\,494.$$

函数 ξ_3 在 $\frac{4689}{153\,097} - \frac{2}{459\,291}\sqrt{4883\,163\,429} < 0$ 处有一个局部最小值。同样，在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 中不存在局部最小值，并且

$$\min_{b\in[0,1/2]} \xi_3(b) = \min\left\{\xi_3(0), \xi_3\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 4588.$$

由（30）可知，$\min_{0\le b\le 1/2}\zeta(b) \ge 95$，进而对于任意 $\alpha \in [0,1/2]$，$p_\alpha(105 - 50\alpha) > 0$。

利用中值定理，p_α 的符号性质（23）、（24）、（25）、（28）表明，p_α 的三个根均为实数、正数且彼此不同。 ■

参考文献

[1] Y. E. A、C. Oosterlee 和 C. Vuik。用于非均匀亥姆霍兹问题的一种新型基于多重网格的预条件子。SIAM 科学计算杂志，27(4):1471– 1492，2006年。[2] M. Bernkopf、T. Chaumont-Frelet 和 J. Melenk。分片光滑介质中亥姆霍兹问题 hp-有限元离散的显式波数稳定性与收敛性分析。《数学计算》，94(351):73– 122，2025年。[3] M. Bernkopf 和 J. M. Melenk。用于亥姆霍兹方程的一阶系统最小二乘法 hp-版本的分析。载于《高级有限元方法及其应用》，计算机科学与工程讲义第128卷，第57–84页。施普林格，查姆，2019年。[4] M. Bernkopf、S. Sauter、C. Torres 和 A. Veit。离散亥姆霍兹方程的可解性。IMA 数值分析杂志，43(3):1802–1830，2023年。[5] A. Bespalov、A. Haberl 和 D. Praetorius。采用粗初始网格的自适应有限元法可保证紧扰动椭圆问题的最优收敛率。计算方法与应用力学工程，317:318–340，2017年。[6] E. Burman、G. Delay 和 A. Ern。用于亥姆霍兹方程约束下唯一延拓的混合高阶方法。SIAM 数值分析杂志，59(5):2368–2392，2021年。[7] N. Burq。外部问题中波动方程局部能量的衰减及实轴附近不存在共振。数学学报，180:1–29，1998年。[8] S. Chandler-Wilde 和 P. Monk。时谐散射中的显式波数界。SIAM 数学分析杂志，39(5):1428–1455，2008年。[9]T. Chaumont-Frelet。高波数声学亥姆霍兹问题的混合有限元离散。Calcolo，56:49，2019年。

[10] T. Chaumont-Frelet、J. Galkowski 和 E. Spence。高频麦克斯韦方程棱单元离散的尖锐误差界。arXiv:2408.04507，已获《数学计算》接收，2024年。[11] T. Chaumont-Frelet、A. Moiola 和 E. Spence。非均匀介质中高频时谐麦克斯韦方程的显式界。纯粹与应用数学杂志，179:183–218，2023年。[12] H. Chen、P. Lu 和 X. Xu。高波数亥姆霍兹方程的可杂交间断伽辽金方法。SIAM 数值分析杂志，51(4):2166–2188，2013年。[13] H. Chen 和 W. Qiu。用于亥姆霍兹方程的一阶系统最小二乘法。计算与应用数学杂志，309:145–162，2017年。[14] G. Cox、S. MacLachlan 和 L. Steeves。拉普拉斯算子有限元离散的唯一延拓原理。线性代数及其应用，2025年。[15] Y. Du 和 H. Wu。高波数亥姆霍兹方程高阶有限元法和连续内罚有限元方法的预渐近误差分析。SIAM 数值分析杂志，53(2):782–804，2015年。[16] S. Esterhazy 和 J. Melenk。论亥姆霍兹方程离散化的稳定性。载于《多尺度问题的数值分析》，第285–324页。施普林格，2011年。[17] X. Feng 和 H. Wu。大波数亥姆霍兹方程的间断伽辽金方法。SIAM 数值分析杂志，47(4):2872–2896，2009年。[18] R. Hiptmair、A. Moiola 和 I. Perugia。带阻抗边界条件的时谐麦克斯韦方程组的稳定性结果。应用科学中的数学方法，21(11):2263–2287，2010年。[19]B. Lee、T. A. Manteuffel、S. F. McCormick 和 J. Ruge。亥姆霍兹方程的一阶系统最小二乘法。SIAM 科学计算杂志，21(5):1927–1949，2000年。[20] M. L¨ohndorf 和 J. M. Melenk。高频散射的显式波数 hp-边界元法。SIAM 数值分析杂志，49(6):2340–2363，2011年。[21]S. Lu 和 H. Wu。大波数时谐麦克斯韦方程高阶棱单元法的预渐近误差估计。arXiv:2504.19481，2025年。[22]J. Melenk 和 S. Sauter。带阻抗边界条件的麦克斯韦方程 hp-有限元法显式波数分析。计算数学基础，24(6):1871–1939，2024年。

[23] J. M. Melenk.《广义有限元方法》。博士论文，马里兰大学帕克分校，1995年。[24]J. M. Melenk.《奇异摄动的hp有限元方法》。施普林格，柏林，2002年。[25] J. M. Melenk 和 S. A. Sauter.《采用狄利克雷到诺伊曼边界条件的亥姆霍兹方程有限元离散化的收敛性分析》。《数学计算》，79:1871–1914，2010年。[26] J. M. Melenk 和 S. A. Sauter.《亥姆霍兹方程Galerkin离散化的波数显式收敛性分析》。《SIAM 数值分析杂志》，49(3):1210–1243，2011年。[27] P. Monk.《麦克斯韦方程组的有限元方法》。牛津大学出版社，纽约，2003年。[28] S. Petrides 和 L. F. Demkowicz.《用于高频时谐波传播问题的自适应DPG方法》。《计算数学与应用》，74(8):1999–2017，2017年。[29] A. Schatz.《关于具有不定双线性形式的里兹-伽辽金方法的一点观察》。《数学计算》，28:959–962，1974年。[30] E. Spence.《时谐声散射中的波数显式界》。《SIAM 数学分析杂志》，46(4):2987–3024，2014年。[31] H. W. Turnbull.《方程论》。Oliver & Boyd，爱丁堡，1939年。[32] B. Verf¨ urth.《用于高对比度麦克斯韦方程的异质多尺度方法》。《ESAIM 数学建模与数值分析》，53:35–61，2019年。[33] T. Wolff.《 $\mathbb{R}^n$ 中测度的一个性质及其在唯一延拓中的应用》。《几何与泛函分析》，2(2):225–284，1992年。[34] Wolfram Research, Inc. Mathematica，14.3版。伊利诺伊州尚佩恩，2025年。[35] L. Zhu 和 H. Wu.《高波数亥姆霍兹方程的CIP有限元方法和有限元方法的预渐近误差分析。第二部分： hp 版本》。《SIAM 数值分析杂志》，51(3):1828–1852，2013年。