arXiv:2602.03440v1 [math.NT] 3 Feb 2026

伯努利数的新表达式及其应用

Levent Kargın 和 Merve Mutluer*数学系，阿克代尼兹大学，07058-安塔利亚，T¨urkiye lkargin@akdeniz.edu.tr 和 mervemutluer34@gmail.com

摘要

本文表明，涉及两类斯特林数和调和数的有限离散卷积可以用伯努利数表示。作为这一表达式的应用，重新证明了 Agoh 给出的伯努利数线性递推关系，并得到伯努利数的一个新的递推关系。此外，本文还表明，伯努利数的累加和可以用伯努利数和双伯努利数表示。最后，建立了伯努利数和欧拉数之和的同余式。

关键词： 伯努利数、双伯努利数、欧拉数、调和数、斯特林数、同余式。

数学学科分类： 11A07, 11B68, 11B73.

1 引言

伯努利数记作 B_n，最初出现在以闭式计算正整数幂和这一问题中；这一课题自古以来便受到研究。它们可以通过生成函数定义为

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!},\qquad |t|<2\pi.$$

很容易求出对所有 $n\geq 1$ 而言的值 $B_0=1$、$B_1=-1/2$、$B_2=1/6$、$B_3=0$、$B_4=-1/30$ 和 $B_{2n+1}=0$。它们还出现在正切函数和双曲正切函数的泰勒级数展开、欧拉–麦克劳林求和公式，以及黎曼ζ函数的某些表示中。因此，伯努利数已成为数学科学的基石之一；目前已有许多引入它们的方法，包括生成函数、递推关系、积分表示，

*通讯作者

以及显式公式。在众多已知的显式公式中，最著名的公式之一是 Worpitzky 恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\left\{ {n \atop k}\right\}\frac{k!}{k+1}=B_{n}, \tag{1}$$

后来推广为

$$\sum_{k=j}^{n}\frac{(-1)^{k-j}}{k}\left\{ {n \atop k}\right\}\left[{k \atop j}\right]=\binom{n-1}{j}\frac{B_{n-j}}{n-j}, \tag{2}$$

其中 $1\leq j\leq n$ （参见 [14, 第217]页）。这里 $\left[{n \atop k}\right]$ 和 $\left\{ {n \atop k}\right\}$ 分别表示第一类和第二类斯特林数，定义如下：

$$(x)^{\bar{n}}=x\left(x+1\right)\cdots\left(x+n-1\right)=\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]x^{k} \tag{3}$$

and

$$x^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k}\right\}(x)^{\bar{k}},$$

分别（例如，参见第 [14, 章和第 12]章），而 $\binom{n}{j}$ 是二项式系数。

2010年，Mez″o [10] 推广了恒等式（2），并利用 r-惠特尼数推导出了伯努利多项式的一个公式。受此方法启发，Merca进一步证明，涉及两类斯特林数的不同推广的有限离散卷积可以用伯努利多项式表示 [12, 13]。在一篇近期论文中 [3], ，引入了伯努利数的新显式表达式，即

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left\{ {n \atop k}\right\}(k-1)!H_{k}=B_{n-1}, \tag{4}$$

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}\left\{ {n \atop k}\right\}(k-1)!H_{k-1}H_{k}=\frac{n+1}{2}B_{n-2}, \tag{5}$$

。这里

$$H_{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

是第 n个调和数。这些恒等式

$$(k-1)!=\left[{k \atop 1}\right]\text{ and }(k-1)!H_{k-1}=\left[{k \atop 2}\right] \tag{6}$$

促使我们考察该和的闭式

$$\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}\left\{{n \atop k}\right\}\left[{k \atop j}\right]H_k.$$

如下面的定理所述，这个和给出了伯努利数的一个新公式。

定理 1（主定理）对于满足 $0 \le j \le n$ 的整数 n 和 j，我们有

$$\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}\left\{{n \atop k}\right\}\left[{k \atop j}\right]H_k=\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_{n-j}}{n-j}. \tag{7}$$

注意，对于 $j=1$ 和 $j=2$，公式（7）分别化简为（4）和（5）。此外，利用以下已知关系

$$\left[{k \atop 3}\right]=\frac{1}{2!}(k-1)!\left[(H_{k-1})^2-H_{k-1}^{(2)}\right],$$

其中

$$H_n^{(m)}=1+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{n^m}$$

是广义调和数，由此得到（7）的以下特殊情形：

$$\sum_{k=3}^{n}(-1)^{k-1}\left\{{n \atop k}\right\}(k-1)!\left[(H_{k-1})^2-H_{k-1}^{(2)}\right]H_k=\frac{n^2+2}{3}B_{n-3}.$$

作为主定理的应用，我们重新证明了 Agoh 给出的伯努利数线性递推关系 [1]，并推导出伯努利数的一个新递推关系。此外，我们还给出了伯努利数累加和的一个闭式。借助该公式，我们推导出伯努利数和欧拉数的和模奇素数及其平方的若干同余式。这些结果将在下一节中介绍。定理 1 的证明将在最后一节给出。

2 主定理的应用

将（7）两边乘以 x^j，并对 j 从 1 到 n求和，再利用（3），可得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}x^{n-j}={}_Hw_n^{(x)}-H_nx^n, \tag{1}$$

其中 n 为正整数，x 为非零复变量，且

$${}_Hw_n^{(x)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}\binom{x}{k}k!H_k. \tag{2}$$

在本节中，我们列出（1）的若干特例。首先，我们有如下线性恒等式，它也曾用另一种方法在 [1]中得到证明。

推论 1 对于任意正整数 n和 m，有

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}m^{n-j}=m^n\left(H_m-H_n\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-j)^n}{j}. \tag{3}$$

证明。 $x=m\geq 1$ 在（1）中得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}m^{n-j}={}_Hw_n^{(m)}-H_nm^n. \tag{4}$$

为考察 ${}_Hw_n^{(m)}$，我们首先使用第二类斯特林数的生成函数

$$\sum_{n=k}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}\frac{t^n}{n!}=\frac{\left(e^t-1\right)^k}{k!}, \tag{5}$$

并得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_Hw_n^{(m)}\frac{t^n}{n!}=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}H_k\left(e^t-1\right)^k.$$

等式

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}H_k\left(z-1\right)^k=H_mz^m-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^k}{m-k} \tag{6}$$

（[2,式（2.4，iii）]）得

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_Hw_n^{(m)}\frac{t^n}{n!}=H_m\sum_{n=0}^{\infty}m^n\frac{t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k^n}{m-k}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

比较 $t^n/n!$ 的系数可得

$${}_Hw_n^{(m)}=H_mm^n-\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-j)^n}{j}.$$

将此方程代入（4）即可完成（3）的证明。 ■

注意，（3）也可以写成

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}m^{n-j}=m^n\left(H_m-H_n+\frac{(n-1)}{m}\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-j)^n}{j},$$

因为 $(-1)^n B_n=B_n$ 对于 $n\geq 2$。特别地，我们有

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}=n-H_n.$$

此外，若设 $m=1$ 和 $m=2$ 代入（3）并合并所得公式，可得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}\left(1-2^{-j}\right)=\frac{1-2^{n-1}}{2^n}.$$

上述方程稍作改写后，可作为伯努利数的递推关系。

推论 2 对于正整数 n，我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}+1\right)\frac{B_j}{j}\left(1-2^{j}\right)=1. \tag{7}$$

证明。我们先令 $x=-1/2$ 在（1）中，得到

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}2^j=(-1)^n\,2^n\;{}_Hw_n^{(-1/2)}-H_n.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k}{k}H_kt^k=\frac{2}{\sqrt{1-4t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4t}}{2\sqrt{1-4t}}\right),$$

（[5,定理 1，式（4）]）并且

$$\binom{-1/2}{k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k},$$

我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_Hw_n^{(-1/2)}\frac{(-2t)^n}{n!}=2e^t\ln\left(\frac{e^t+1}{2}\right).$$

由欧拉多项式的生成函数 [14, 第 15 节。3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n\left(x\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{2}{e^t+1}e^{xt},$$

我们推导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}E_{n-1}\left(1\right)\frac{t^n}{n!}=2\ln\left(\frac{e^t+1}{2}\right).$$

因此，我们得到

$$(-1)^n\,2^n\;{}_Hw_n^{(-1/2)}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}E_k\left(1\right).$$

然后我们利用

$$E_k\left(1\right)=-E_k\left(0\right)=2\left(2^{k+1}-1\right)\frac{B_{k+1}}{k+1} \tag{8}$$

([14,第 15 节。3]) 得到

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}2^{j}-2\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{B_j}{j}\left(2^{j}-1\right)=2n-H_n.$$

由于 $(-1)^{n}B_n=B_n$ 对于 $n\geq 2$，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{B_j}{j}\left(2^{j-1}-1\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j}{j}2^{j-1}=\frac{1}{2}H_n-1.$$

(7经过一些初等变换即可得到。 ■

在给出下一个结果之前，我们先回顾多重伯努利多项式。多重伯努利多项式通过生成函数定义为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{B}_n^{(p)}(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{\mathrm{Li}_p\left(1-e^{-t}\right)}{1-e^{-t}}e^{xt}, \tag{9}$$

([4])，其中 $\mathrm{Li}_p(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n/n^p$，是多重对数函数。特别地，$\mathbb{B}_n^{(p)}(0)=\mathbb{B}_n^{(p)}$是第 n 个多重伯努利数，而当 $p=2$，$\mathbb{B}_n^{(2)}$称为二重伯努利数（[9]）。

现在我们用伯努利数、双伯努利数以及二重伯努利多项式在 $x=1$ 处的值来表述伯努利数的累加和。

推论 3 对于整数 $n\geq 2$，有

$$\sum_{j=0}^{n}B_j=\mathbb{B}_n^{(2)}(1)+B_n-\mathbb{B}_n^{(2)}-1.$$

证明。 对 (1) 关于 x 求导得

$$\begin{aligned}n\sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}x^{n-j-1}-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n}{j}-1\right)B_jx^{n-j-1}&\\ =\frac{d}{dx}\,{}_Hw_n^{(x)}-nH_nx^{n-1}.&\end{aligned} \tag{10}$$

由 (1)，可得

$$n\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}x^{n-j-1}=\frac{n}{x}\left({}_Hw_n^{(x)}-H_nx^{n}\right). \tag{11}$$

伯努利多项式 $B_n(x)$ 定义为

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_jx^{n-j}=B_n(x).$$

因此，我们有

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n}{j}-1\right)B_j x^{n-j-1}=\frac{1}{x}B_n\left(x\right)-\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n-1}B_j x^{n-j}. \tag{12}$$

现在，利用显然的关系

$$\frac{d}{dx}\binom{x}{k}=\binom{x}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{x-j}$$

在（2）中，我们得到

$$\frac{d}{dx}\,{}_H w_n^{(x)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}\binom{x}{k}k!H_k\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{x-j}. \tag{13}$$

将（11）、（12）和（13）代入（10），得

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}B_j x^{n-j}=x\sum_{k=1}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}\binom{x}{k}k!H_k\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{x-j}-nH_n x^n\\ -n\sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n}{j}-1\right)\frac{B_j}{j}x^{n-j}+B_n\left(x\right).\end{aligned}$$

令 $x=-1$ 并利用关系式 $(-1)^n B_n\left(-x\right)=B_n\left(x\right)+nx^{n-1}$，代入上式可得

$$\sum_{j=0}^{n}B_j=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{n-k}\left\{{n\atop k}\right\}k!\left(H_k\right)^2+B_n\left(1\right)+n-n^2-1. \tag{14}$$

为计算（14）右端的第一项求和，我们利用（5），得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{n-k}\left\{{n\atop k}\right\}k!\left(H_k\right)^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(H_k\right)^2\left(1-e^{-t}\right)^k. \tag{15}$$

利用调和数的生成函数

$$\sum_{k=1}^{\infty}H_k t^k=-\frac{\ln\left(1-x\right)}{1-x},$$

可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(H_k\right)^2 t^k=\frac{\mathrm{Li}_2\left(x\right)}{1-x}+\frac{\ln^2\left(1-x\right)}{1-x}.$$

将此关系与（9）代入（15），即可得到

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{n-k}\left\{{n\atop k}\right\}k!\left(H_k\right)^2=\mathbb{B}_n^{(2)}\left(1\right)-\mathbb{B}_n^{(2)}+n\left(n-1\right).$$

将这些结果代入（14），即可得到所需公式。 ■

我们以关于伯努利数和欧拉数累加和的一些同余式结束本节。这里我们称 $E_n(0) = E_n$ 为第 n 个欧拉数。

推论 4 对于奇素数 p，有

$$\sum_{j=0}^{p} pB_j \equiv -1 \pmod{p}, \tag{16}$$

$$\sum_{j=0}^{p-3} B_j \equiv -1 \pmod{p}, \quad (p \geq 5), \tag{17}$$

$$\sum_{j=0}^{p} E_j \equiv \frac{3}{2} \pmod{p}, \tag{18}$$

$$p\sum_{j=0}^{p} \frac{B_j}{(p-j+1)} \equiv -1 \pmod{p}. \tag{19}$$

证明。设 $n = p$ 是区间 (14) 内的奇素数。由于 $p \geq 3$，我们有 $B_p(1) = B_p = 0$。因此

$$\sum_{j=0}^{p} B_j = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \left\{ {p \atop k} \right\} k! \left(H_k\right)^2 + B_p(1) + p - p^2 - 1$$

$$= p - p^2 - 1 + \left\{ {p \atop 1} \right\} \left(H_1\right)^2 + \left\{ {p \atop p} \right\} p! \left(H_p\right)^2 + \sum_{k=2}^{p-1} (-1)^{p-k} \left\{ {p \atop k} \right\} k! \left(H_k\right)^2.$$

现在，$\left\{ {p \atop 1} \right\} = \left\{ {p \atop p} \right\} = 1$、$H_1 = 1$,

以及

$$p! \left(H_p\right)^2 = p! \left(H_{p-1}\right)^2 + 2(p-1)! H_{p-1} + \frac{(p-1)!}{p},$$

so

$$\sum_{j=0}^{p} B_j = p - p^2 + p! \left(H_{p-1}\right)^2 + 2(p-1)! H_{p-1} + \frac{(p-1)!}{p} + \sum_{k=2}^{p-1} (-1)^{p-k} \left\{ {p \atop k} \right\} k! \left(H_k\right)^2,$$

或者等价地

$$\sum_{j=0}^{p} pB_j = p^2 - p^3 + p(p!) \left(H_{p-1}\right)^2 + 2p! H_{p-1} + (p-1)!$$

$$+ p\sum_{k=2}^{p-1} (-1)^{p-k} \left\{ {p \atop k} \right\} k! \left(H_k\right)^2. \tag{20}$$

由于对于 $k=2,3,\cdots,p-1,$ $\left\{ {p \atop k} \right\} \equiv 0$（模 p），因此我们得出

$$\sum_{j=0}^{p} pB_j \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

这就是（16）中给出的同余。

现在，巴贝奇定理指出 $H_{p-1} \equiv 0$（模 p），因此（20）可写为

$$\sum_{j=0}^{p} pB_j \equiv (p-1)! \pmod{p^2}.$$

Glaisher 给出的一个著名同余 [7] 为

$$(p-1)! \equiv -p + pB_{p-1} \pmod{p^2}.$$

Thus

$$\begin{aligned} -p + pB_{p-1} \equiv \sum_{j=0}^{p} pB_j &= pB_0 + pB_1 + pB_p + pB_{p-1} + pB_{p-2} + \sum_{j=2}^{p-3} pB_j \\ &= p - \frac{p}{2} + pB_{p-1} + \sum_{j=2}^{p-3} pB_j \pmod{p^2} \end{aligned}$$

这意味着

$$\sum_{j=2}^{p-3} pB_j \equiv -\frac{3p}{2} \pmod{p^2}$$

对于 $p \geq 3,$ 或者等价地

$$\sum_{j=2}^{p-3} B_j \equiv -\frac{3}{2} \pmod{p}$$

若 $p \geq 5.$（17）现在可通过使用以下值推出 B_0 和 B_1。

将（8）代入（7）可得

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + 1 \right) \frac{E_{j-1}}{2} = 1,$$

or

$$\sum_{j=0}^{n-1} E_j = 2 - nE_n - E_{n-1} - \sum_{j=2}^{n-1} \binom{n}{j} E_{j-1}.$$

令 $n = p$ 为奇素数。则有

$$\sum_{j=0}^{p} E_j = 2 + E_p - p - \sum_{j=2}^{p-1} \binom{p}{j} E_{j-1},$$

因为 $E_0 = 1$ 且 $E_{2m} = 0$ 对于 $m \geq 1$. 此外， $2^m E_m \in \mathbb{Z}$，这意味着当 $p > 2$. 时，E_m 的分母中不含素数 p。因此

$$\binom{p}{j} E_{j-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

对于 $j = 1$，2，$\cdots$，$p-1$. 因此，我们有

$$\sum_{j=0}^{p} E_j \equiv 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \pmod{p} \tag{21}$$

对于 $p \geq 5$. 注意到

$$\sum_{j=0}^{3} E_j = E_0 + E_1 + E_2 + E_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

因此，(21) 在 $p = 3$时也成立，即我们有 (18)。

为证明 (19，我们首先对 (1) 两边关于 x 从 0 积分到 1，并使用 (3) 以及众所周知的公式

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{B_j}{n-j+1} = \int_0^1 B_n(x)\, dx = 0, \ n \geq 2.$$

于是我们得到

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{B_j}{(n-j+1)} = 1 - (n+1) \int_0^1 {}_H w_n^{(x)} dx.$$

根据第一类柯西数的定义 c_n (参见 [11])

$$\frac{c_n}{n!} = \int_0^1 \binom{x}{n} dx$$

我们得到

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{B_j}{(n-j+1)} = 1 - (n+1) \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} c_k H_k.$$

我们将上式中的 $n = p$，记作，其中 p 是奇素数，从而得到

$$\sum_{j=0}^{p} \frac{B_j}{(p-j+1)} = 1 - (p+1) \sum_{k=1}^{p} \left\{ {p \atop k} \right\} c_k H_k. \tag{22}$$

利用 $\left\{ {p \atop 1} \right\} = \left\{ {p \atop p} \right\} = 1$ 和 $\left\{ {p \atop p-1} \right\} = \binom{p}{2}$ 以及第一类柯西数的显式表达式（[11])

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} \left[{k \atop j} \right] \frac{(-1)^{k-j}}{j+1}, \tag{23}$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{p}\left\{ {p \atop k}\right\}c_k H_k = \frac{1}{2} + c_p H_{p-1} + \frac{c_p}{p} + \frac{p\,(p-1)}{2}c_{p-1}H_{p-1} + \sum_{k=2}^{p-2}\sum_{j=1}^{k}\left\{ {p \atop k}\right\}\left[{k \atop j}\right]\frac{(-1)^{k-j}}{j+1}H_k,$$

或者等价地

$$p\sum_{k=1}^{p}\left\{ {p \atop k}\right\}c_k H_k = \frac{p}{2} + pc_p H_{p-1} + c_p + \frac{p\,(p-1)}{2}pc_{p-1}H_{p-1} + p\sum_{k=2}^{p-2}\sum_{j=1}^{k}\left\{ {p \atop k}\right\}\left[{k \atop j}\right]\frac{(-1)^{k-j}}{j+1}H_{k.} \tag{24}$$

Let

$$A\,(p) = \sum_{k=2}^{p-2}\sum_{j=1}^{k}\left\{ {p \atop k}\right\}\left[{k \atop j}\right]\frac{(-1)^{k-j}}{j+1}H_{k.}.$$

乘积 $\frac{1}{j+1}H_k$ 分母中不含 p，因此 $A\,(p) \equiv 0$ (模 p)，因为 $\left\{ {p \atop k}\right\} \equiv 0$ (模 p) 对于 $k = 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2$. 因此，由（22）和（24），我们得出

$$p\sum_{j=0}^{p}\frac{B_j}{(p-j+1)} = p - \frac{p^2}{2} - \frac{p}{2} - p^2 c_p H_{p-1} - pc_p H_{p-1} - pc_p - c_p - \frac{p^2\,(p-1)}{2}pc_{p-1}H_{p-1} - \frac{p\,(p-1)}{2}pc_{p-1}H_{p-1} - p^2 A\,(p) - pA\,(p)\,. \tag{25}$$

现在，在 [6], 的推论 5.2 中已记录，若 $\lambda \equiv 0$ (模 p)，则

$$c_p\,(\lambda) \equiv 1 - \lambda + (1-\lambda)\,(-\lambda)\cdots(2-\lambda-p) \pmod{p}$$

and

$$pc_{p-1}\,(\lambda) \equiv 1 \pmod{p}\,,$$

其中 $c_k(\lambda)$ 是退化柯西数。由于 $\lim_{\lambda\to 0} c_k(\lambda) = c_k$，我们得出

$$c_p \equiv 1 \pmod{p} \text{ and } pc_{p-1} = \lim_{\lambda\to 0} pc_{p-1}\,(\lambda) \equiv 1 \pmod{p}$$

因此，(25) 推出同余式 (19)。 ■

注 5 *(16)* 也可由伯努利数的冯·施陶特-克劳森定理推出：

$$pB_{2j} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & if\ (p-1) \nmid 2j, \\ -1 \pmod{p}, & if\ (p-1) \mid 2j. \end{cases}$$

事实上，我们首先写出

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p} pB_j &= pB_0 + pB_1 + pB_p + pB_{p-1} + pB_{p-2} + \sum_{j=1}^{\frac{p-3}{2}} pB_{2j} \\ &= p - \frac{p}{2} + pB_{p-1} + \sum_{j=1}^{\frac{p-3}{2}} pB_{2j}. \end{aligned}$$

当 j 从 1 取到 $\frac{p-3}{2}$ 时，$(p-1)$ 不整除 $2j$. 因此，对$j = 1$、2、$\cdots$、$\frac{p-3}{2}$.，有 $pB_{2j} \equiv 0$(模 p)此外，$pB_{p-1} \equiv -1$(模 p)，于是我们得到

$$\sum_{j=0}^{p} pB_j \equiv -1 \pmod{p}$$

对奇素数 p.

我们还注意到，由（*25*）可知，同余式（*19*）等价于

$$p\sum_{j=0}^{p} \frac{B_j}{(p-j+1)} = -\frac{p}{2} - c_p \pmod{p^2}.$$

3 主定理的证明

Let

$$\sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right] H_k = \mathcal{B}_{n,j}.$$

利用第二类斯特林数众所周知的递推关系 [14, 式（9.1）]

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k} \right\} k + \left\{ {n \atop k-1} \right\},$$

我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n+1,j} = &\sum_{k=j}^{n+1} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right] kH_k \\ &+ \sum_{k=j}^{n+1} (-1)^{k-j} \left\{ {n \atop k-1} \right\} \left[{k \atop j} \right] H_k. \end{aligned} \tag{1}$$

应用第一类斯特林数众所周知的递推关系 [14, 式 (12.3)]

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix},$$

以及 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = 0$ 当 $k > n$时，（1）变为

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n+1,j} = &\sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} H_k - \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix} H_k \\ &- \sum_{k=j-1}^{n} (-1)^{k-j} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} H_k - \sum_{k=j-1}^{n} (-1)^{k-j} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

将恒等式（2）写成以下形式

$$\sum_{k=j-1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1-j}}{k+1} \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} = \binom{n-1}{j} \frac{B_{n-j}}{n-j} \quad (1 \le j \le n),$$

我们得到

$$\mathcal{B}_{n+1,j} = \mathcal{B}_{n,j-1} + \binom{n}{j} \frac{B_{n+1-j}}{n+1-j}.$$

由此约化公式可见

$$\mathcal{B}_{n+1,j} = \mathcal{B}_{n-1,j-2} + \left(\binom{n}{j} + \binom{n-1}{j-1} \right) \frac{B_{n+1-j}}{n+1-j}.$$

连续应用 $j-2$ 次可得

$$\mathcal{B}_{n+1,j} = \mathcal{B}_{n-j,0} + \frac{B_{n+1-j}}{n+1-j} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n-k}{j-k}. \tag{2}$$

这里有

$$\sum_{k=0}^{j-1} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n+1}{j} - 1, \tag{3}$$

利用 [8, 第 7 页，式 (1.49)]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}.$$

将（3）代入（2），利用 $\mathcal{B}_{n-j,\,0} = 0$，得到

$$\mathcal{B}_{n+1,j} = \left(\binom{n+1}{j} - 1 \right) \frac{B_{n+1-j}}{n+1-j},$$

这就是所需的结果。

参考文献

[1] T. Agoh，关于伯努利数的 Miki恒等式，Integers 16 (2016) #A73。[2] T. Agoh，涉及不同类型求和的伯努利多项式线性递推关系，Integers 21 (2021) #A73。[3]P. Akkanat，L. Kargın，通过几何多项式构造调和几何多项式及其应用，arXiv:2512.07416。[4] A. Bayad，Y. Hamahata，多重对数与多重伯努利多项式，九州数学杂志 65 (2011) 15–24。[5] K.N. Boyadzhiev，含中心二项式系数、卡特兰数和调和数的级数，整数数列杂志 15 (2012) 第 12.1.7 号文章。[6] M. Cenkci，T. Komatsu，退化柯西多项式与数的算术性质。哈切特数学与统计学杂志 54 (2) (2025) 457–469。[7] J.W.L. Glaisher，关于前 $p-1$ 个数及其幂的乘积和对模数 p^2 or p^3 的余数，数学季刊 31 (1899/1900) 321–353。[8] H.W. Gould，《组合恒等式：列出 500 个二项式系数求和的标准化表集》，修订版。作者自版，摩根敦，西弗吉尼亚州，1972。[9] M. Kaneko，多重伯努利数，J. Th ˜A©or. Nr. Bordx. 9 (1997) 221–228。[10] I. Mez″o，伯努利多项式的一个新公式，Results Math. 58 (2010) 329–335。[11] M. Donatella，R. Sprugnoli，M.C. Verri，柯西数，离散数学 306 (2006) 1906–1920。[12] M. Merca，r-Whitney 数与伯努利多项式之间的一种新联系，积分变换与特殊函数 25 (2014) 937–942。[13] M. Merca，雅可比-斯特林数与伯努利多项式之间的一种联系，数论杂志 151 (2015) 223–229。[14] J. Quaintance，H.W. Gould。《斯特林数组合恒等式：H. W. Gould 未发表的笔记》。世界科学出版社，2015。