λ-环结构与微分 K 理论

BO LIU 和 XIAONAN MA

Abstract. 我们建立了微分 K 理论的分裂原理。微分 K 理论是拓扑 K 理论的一种精化，通过微分形式纳入几何数据。利用这一原理，我们证明，与闭光滑流形相关联的微分 K^0-环具有 λ-环结构。该结构使得能够具体构造 Bunke 引入的微分 K 理论中的 Adams 运算。最后，我们将所有这些结果推广到与紧李群作用相关的等变情形。

arXiv:2602.03450v1 [math.KT] 3 Feb 2026

0. Introduction

λ-环的概念最早由 Grothendieck [10] 于 1956 年引入，后来由 Atiyah 和 Tall [3] 进行了研究；另见 [4]。

对于带幺元的交换环 R， λ-结构由 R 上的一族可数映射 λ^n 组成： $R \to R$、$n \in \mathbb{N}$，并满足一些条件（见定义 1.2）。如果只满足其中一部分条件，则称其为预-λ-环结构（定义 1.1）。 λ-环结构与 Adams 运算密切相关：如果 R 是一个 λ-环，则可以自然地与之关联 Adams 运算。反之，对于带有相容 Adams 运算的预-λ-环 R，如果 R 是无挠的，则 R 的预-λ-环结构是一个 λ-环结构（定理 1.3）。

众所周知，尽管拓扑 K 环并非无挠，但它具有自然的λ-环结构 [3]。相应的 Adams 运算在证明 Adams 关于 Hopf 不变量的著名定理 [1]中发挥着关键作用。

在 [9], ，Gillet 和 Soul´e 在 Arakelov 几何中引入了算术 K 理论。该理论通过在复点上的全纯向量丛上添加共轭不变的厄米度量，以及添加类型为（p， p）¯模 Im∂ +Im∂ 的微分形式，扩展了 Grothendieck 的 K理论。算术 K 环上的一种预-λ-环结构在 [9],中得以构造，Roessler [15] 后来证明它是一种 λ-环结构。

微分 K 理论由 Freed-Hopkins [7] 引入，并由 Hopkins-Singer [11], Simons-Sullivan [18], Bunke-Schick [6], Freed-Lott [8], 等人进一步发展，为算术 K 理论提供了一种光滑类比。它通过在复向量丛上加入厄米度量与联络，以及模去恰当形式的微分形式，扩展了拓扑 K 理论。在[5], Bunke 以精巧的拓扑方法直接定义了微分 K-环上的 Adams 运算，并得到了相应的 Adams-Riemann-Roch 定理。在 [14], 作者明确构造了微分 K-环上的预-λ-环结构，该结构在他们关于 η-不变量的局部化公式的研究中发挥着重要作用。本文利用微分 K 理论的分裂原理（该原理在定理 2.2 中得到证明），在定理 2.4 中证明这一预 -λ- 环结构实际上是一个 λ- 环结构，并说明相应的 Adams 运算为 [5] 中定义的运算提供了一种构造性实现。

日期：2026年2月4日。

本文结构如下。第 1 节回顾关于 λ-环的基本事实。第 2 节证明微分 K-群的分裂原理，并陈述主要结果定理 2.4：任意微分 K-环都具有自然的 λ-环结构。第 3 节证明定理 2.4。第 4 节给出微分 K 理论中相应 Adams 运算的显式构造。第 5 节讨论微分 K 理论等变版本上的 λ-环结构。

致谢。BL 部分获得了国家自然科学基金委员会编号 12225105 项目、国家重点研发计划编号 2024YFA1013203 项目以及上海市科学技术委员会编号 22DZ2229014 项目的资助。XM 部分获得了南开至德基金会的资助，并得到德国卓越计划框架下科隆大学机构战略资金的支持。

1. λ-RING STRUCTURE

定义 1.1。 [4, §V 定义 2。1] 对于带有幺元的交换环 R，一个预-λ-环结构由一组可数的映射 λ^n 定义： $R \to R$，其中 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有$x,\ y \in R$,

$$\begin{aligned} \lambda^0(x) &= 1; \\ \lambda^1(x) &= x; \\ \lambda^n(x+y) &= \sum_{j=0}^{n} \lambda^j(x)\lambda^{n-j}(y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

如果 R 具有预-λ-环结构，则称其为预-λ-环。

请注意，在 [3, §I.1] 中，这里的预-λ-环称为 λ-环。

设 R 为一个预-λ-环。若 t 为未定元，则对 $x \in R$定义,

$$\lambda_t(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n(x) t^n. \tag{1.2}$$

于是，关系(1.1)表明 λ_t 是从 R 的加法群到乘法群 $1 + R[[t]]^+$的一个同态，其中 $1 + R[[t]]^+$由以 t 为变元、常数项为1的形式幂级数构成，即,

$$\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y) \quad \text{for any } x, y \in R. \tag{1.3}$$

由(1.1)和(1.2)，我们有

$$\lambda_t(0) = 1. \tag{1.4}$$

设 ξ_1、 $\cdots$、 ξ_q、 $\zeta_1 \cdots$、 ζ_r为未定元，并设 s_i与 σ_i分别为 ξ_1、 $\cdots$、 ξ_q以及 $\zeta_1 \cdots$、 ζ_r中的第 i个初等对称函数。设 $P_n(s_1, \cdots, s_n;\ \sigma_1, \cdots, \sigma_n)$为 $\prod_{ij}(1 + \xi_i\zeta_j t)$中 t^n 的系数。设$P_{n,m}(s_1, \cdots, s_{mn})$为

$$\prod_{i_1 < \cdots < i_m} (1 + \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m} t).$$

我们可以假设 $r,\ q \geq n$ 对 P_n 成立，而 $q \geq nm$ 对 $P_{n,\ m}$成立。容易看出， P_n 是关于 $\{s_i\}$ 的权重为 n 的多项式，同时也是关于 $\{\sigma_i\}$的权重为 n 的多项式； $P_{n,\ m}$ 是关于 $\{s_i\}$的权重为 nm 的多项式。 P_n 和 $P_{n,\ m}$ 的系数都是整数，因此可以在任意交换环中定义。

设 A 是任意一个带幺元的交换环。根据 [3, §I 引理 1.1]， $1+A[[t]]^+$ 是一个带有新运算 $(\widetilde{+},\ \widetilde{\times},\ \tilde{\lambda}^n)$ 的预-λ-环（其中 1 是“零”，而 $1+t$ 是“幺元”），定义如下：对于 $a_i,\ b_j \in A$,

$$\begin{aligned}\left(1+\sum_{n\geq 1}a_nt^n\right)\widetilde{+}\left(1+\sum_{n\geq 1}b_nt^n\right) &:= \left(1+\sum_{n\geq 1}a_nt^n\right)\cdot\left(1+\sum_{n\geq 1}b_nt^n\right),\\ \left(1+\sum_{n\geq 1}a_nt^n\right)\widetilde{\times}\left(1+\sum_{n\geq 1}b_nt^n\right) &:= 1+\sum_{n\geq 1}P_n(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n)\,t^n\end{aligned} \tag{1.5}$$

and

$$\tilde{\lambda}^m\left(1+\sum_{n\geq 1}a_nt^n\right)=1+\sum_{n\geq 1}P_{n,m}(a_1,\cdots,a_{nm})\,t^n. \tag{1.6}$$

特别地，对于任意 $I,\ J,\ K\in 1+A[[t]]^+$，我们有

$$I\widetilde{+}J=J\widetilde{+}I,\quad I\widetilde{\times}J=J\widetilde{\times}I,\quad (I\widetilde{+}J)\widetilde{\times}K=I\widetilde{\times}K\widetilde{+}J\widetilde{\times}K, \tag{1.7}$$

and

$$\tilde{\lambda}^0(I)=1+t,\quad \tilde{\lambda}^1(I)=I,\quad \tilde{\lambda}^n(I+J)=\widetilde{+}_{j=0}^{n}\left(\tilde{\lambda}^j(I)\widetilde{\times}\tilde{\lambda}^{n-j}(J)\right), \tag{1.8}$$

其中，$\widetilde{+}_{j=0}^{n}$ 表示从 0 到 n的、与新的“和”运算 $\widetilde{+}$相关联的 j 的“和”。

定义 1.2。 [3, §I 定义 1.2]如果 $\lambda_t\colon R\to 1+R[[t]]^+$ 是预-λ-环的同态，我们就称 R 上的预-λ-环结构为 λ-环结构，即对于任意 $x,\ y\in R$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\lambda_t(x+y)=\lambda_t(x)\widetilde{+}\lambda_t(y),\ \lambda_t(xy)=\lambda_t(x)\widetilde{\times}\lambda_t(y),\ \lambda_t(\lambda^n(x))=\widetilde{\lambda}^n(\lambda_t(x)), \tag{1.9}$$

这表示对于任意 $x,\ y\in R$,

$$\lambda^n(xy)=P_n(\lambda^1(x),\cdots,\lambda^n(x);\lambda^1(y),\cdots,\lambda^n(y)),\ \text{i.e., }\lambda_t(xy)=\lambda_t(x)\widetilde{\times}\lambda_t(y), \tag{1.10}$$

and

$$\lambda^m(\lambda^n(x))=P_{m,n}(\lambda^1(x),\cdots,\lambda^{mn}(x)),\ \text{i.e., }\lambda_t(\lambda^n(x))=\widetilde{\lambda}^n(\lambda_t(x)). \tag{1.11}$$

如果 R 具有 λ-环结构，我们就称其为 λ-环。

若 R 是一个 λ-环，由 $n=0$的 (1.1)、(1.8) 和 (1.11)，可得

$$\lambda_t(1)=1+t. \tag{1.12}$$

请注意，在 [3] 中，此处的 λ-环称为特殊的 λ-环。下面的定理（见[13, 第49] 页或 [4, §V 附录]）提供了一个简便的判据，用以验证一个预-λ-环是否确为 λ-环。

定理 1.3. 设 R 是一个预-λ-环。我们假设 R 是无挠的，也就是说，对于任意的$r\in R$、$r\neq 0$ 以及任意的 $n\in\mathbb{N}^*$、$nr=\underbrace{r+\cdots+r}_{n}\neq 0$。设 $\Psi^n\colon R\to R$、$n\in\mathbb{N}^*$ 是由以下方式定义的 *Adams*$_n$运算

$$\frac{d}{dt}\log\lambda_t(a)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Psi^{n+1}(a)t^n,\quad \textit{for all } a\in R. \tag{1.13}$$

假设对于任意的 n、$m \in \mathbb{N}^*$、a、$b \in R$，我们都有

$$\Psi^n(1) = 1, \quad \Psi^n(ab) = \Psi^n(a)\Psi^n(b), \quad \Psi^n(\Psi^m(a)) = \Psi^{nm}(a). \tag{1.14}$$

于是，R 的预-λ-环结构是一个 λ-环结构。

2. Differential K-theory

设 B 是一个闭流形。设 $E = (E, h^E, \nabla^E)$ 是一个三元组，由 B 上的复向量丛 E、E 上的厄米度量 h^E 以及作用于 (E, h^E) 上的埃尔米特联络 ∇^E 构成。与 [14], 中一样，我们称这样的 E 为 B 上的几何三元组。

对于 B 上的几何三元组 $\underline{E}$，记 $R^E := (\nabla^E)^2 \in \Omega^2(B, \mathrm{End}(E))$ 为 E 上的曲率。陈特征形式（参见例如 [19,(1.22)]）

$$\mathrm{ch}(\underline{E}) := \mathrm{Tr}\left[\exp\left(\frac{i}{2\pi}R^E\right)\right] \in \Omega^{\mathrm{even}}(B, \mathbb{R}). \tag{2.1}$$

对于两个具有相同底向量丛 E 的几何三元组 E_0 和 E_1，对于显然的投影 $\pi\colon B \times \mathbb{R} \to B$，存在 $B \times \mathbb{R}$ 上的几何三元组 $\pi^*\underline{E}$，使得

$$\pi^*\underline{E}|_{B\times\{j\}} = \underline{E_j}, \quad j = 0, 1. \tag{2.2}$$

对于 $\alpha = \alpha_0 + ds \wedge \alpha_1 \in \Lambda^\bullet(T^*(B \times \mathbb{R}))$，其中 α_0，$\alpha_1 \in \Lambda^\bullet(T^*B)$，我们记 $\{\alpha\}^{ds} := \alpha_1$。因此，陈-西蒙斯形式（参见例如 [16, 定义 B.5.3 和定理 B.5.4]）

$$\widetilde{\mathrm{ch}}\left(\underline{E_0}, \underline{E_1}\right) := \int_0^1 \{\mathrm{ch}(\underline{\pi^*E})\}^{ds} ds \in \Omega^{\mathrm{odd}}(B, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d. \tag{2.3}$$

它仅取决于 ∇^{E_j}、$j = 0$、1，并且满足

$$d\,\widetilde{\mathrm{ch}}\left(\underline{E_0}, \underline{E_1}\right) = \mathrm{ch}(\underline{E_1}) - \mathrm{ch}(\underline{E_0}). \tag{2.4}$$

定义 2.1。 [8, 定义 2.16] 对于 B 的微分 K-群，一个循环是一个对 (E, ϕ)，其中 $E = (E, h^E, \nabla^E)$ 是 B 上的几何三元组，而 ϕ 是 $\Omega^{\mathrm{odd}}(B, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\ d$ 中的一个元素。如果存在一个几何三元组 $E_3 = (E_3, h^{E_3}, \nabla^{E_3})$ 以及一个在 B 上的向量丛同构，我们称两个循环 (E_1, ϕ_1) 和 (E_2, ϕ_2) 等价

$$\Phi : E_1 \oplus E_3 \to E_2 \oplus E_3 \tag{2.5}$$

使得

$$\widetilde{\mathrm{ch}}\left(\underline{E_1} \oplus \underline{E_3}, \Phi^*\left(\underline{E_2} \oplus \underline{E_3}\right)\right) = \phi_2 - \phi_1. \tag{2.6}$$

我们以自然的方式定义这些循环的和，并用 $\widehat{K}^0(B)$ 表示循环等价类构成的格罗滕迪克群。

用 $[E, \phi]$ 表示循环 (E, ϕ) 的等价类。对于 $[E, \phi]$，$[F, \psi] \in \widehat{K}^0(B)$，

$$(\underline{E}, \phi) \cup (\underline{F}, \psi) := (\underline{E} \otimes \underline{F}, \mathrm{ch}(\underline{E}) \wedge \psi + \phi \wedge \mathrm{ch}(\underline{F}) - d\phi \wedge \psi) \tag{2.7}$$

在 $\widehat{K}^0(B)$ 上诱导出一个良定义的交换结合乘积（参见 [12, 命题 4.79], 以及引理 2.15]）。因此，$(\widehat{K}^0(B), +, \cup)$ 是一个含幺交换环，其单位元为 $\mathbf{1} := [\mathbb{C}, 0]$，其中 $\mathbb{C}$ 表示 B 上带有平凡度量和联络的平凡线丛。

由 [8,(2.21)],可得一个正合序列

$$K^1(B) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \Omega^{\mathrm{odd}}(B,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d \xrightarrow{a} \widehat{K}^0(B) \xrightarrow{I} K^0(B) \longrightarrow 0, \tag{2.8}$$

其中

$$\mathrm{ch} : K^1(B) \to H^{\mathrm{odd}}(B,\mathbb{R}) \subset \Omega^{\mathrm{odd}}(B,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d \tag{2.9}$$

是 K^1-群的典范陈特征映射（另见 [14, §3.1]），并且

$$a(\phi) := [\underline{0},\phi], \quad I([\underline{E},\phi]) := [E] \in K^0(B). \tag{2.10}$$

对于 B 上的复向量丛 E，令 $\mathbb{P}(E)$ 为与 E 相关联的、定义在 B 上的射影丛。它是将 $E\backslash B$ 按复数乘法作用取商得到的商空间。记自然投影为 $\sigma : \mathbb{P}(E) \to B$。于是它以自然的方式诱导一个拉回映射

$$\sigma^* : \widehat{K}^0(B) \to \widehat{K}^0(\mathbb{P}(E)) \tag{2.11}$$

根据 (2.7)，这是一个预-λ-环同态（参见 [14,引理 2.7]）。

分裂原理是通常 K理论中一个非常有用的工具。下面的结果保证分裂原理仍然可以应用于微分 K 理论。

定理 2.2. （*2.11*）中的同态 σ^* 是单射。

证明. 由 (2.8) 易见，拉回映射 σ^* 诱导一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} K^1(B) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & \Omega^{\mathrm{odd}}(B,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d & \xrightarrow{a} & \widehat{K}^0(B) & \xrightarrow{I} & K^0(B) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \\ K^1(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathbb{P}(E),\mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d & \xrightarrow{a} & \widehat{K}^0(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{I} & K^0(\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{2.12}$$

其中各行是正合序列。由 [2, 推论 2.7.9]，$\sigma^* : K^*(B) \to K^*(\mathbb{P}(E))$ 是单射。

对于 $\hat{x} \in \widehat{K}^0(B)$，若 $\sigma^*(\hat{x}) = 0$，则由 (2.12)，我们有

$$\sigma^* \circ I(\hat{x}) = I \circ \sigma^*(\hat{x}) = 0. \tag{2.13}$$

由于$\sigma^*|_{K^0(B)}$是单射，我们有 $I(\hat{x}) = 0$。因此由 (2.8)，存在 $\phi \in \Omega^{\mathrm{odd}}(B,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\ d$使得 $\hat{x} = a(\phi)$。再由 (2.12)，

$$a(\sigma^*(\phi)) = \sigma^*(a(\phi)) = \sigma^*(\hat{x}) = 0. \tag{2.14}$$

因此存在 $y \in K^1(\mathbb{P}(E))$ 使得

$$\mathrm{ch}(y) = \sigma^*\phi. \tag{2.15}$$

对于任意 $m \in \mathbb{P}(E)$，它表示 E 的纤维中的一个一维子空间。这些直线的并在 $\mathbb{P}(E)$ 上构成一个复线丛。我们用 H 表示该线丛的对偶丛。根据 [2, 推论 2.7.9]，$K^1(\mathbb{P}(E))$ 是一个以 1、$[H]$、$[H]^2$、$\cdots$、$[H]^{r-1}$ 为基的自由 $K^1(B)$-模，其关系为 $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i[H]^i[\sigma^*(\Lambda^i(E))] = 0$，其中 r 是 E 的秩。因此，存在 $F_i \in K^1(B)$ 使得

$$y = \sum_{i=0}^{r-1} \sigma^*(F_i) \cdot [H]^i. \tag{2.16}$$

这意味着

$$\sigma^*\phi = \mathrm{ch}(y) = \sum_{i=0}^{r-1} \sigma^* \mathrm{ch}(F_i)\, e^{ic_1(H)}. \tag{2.17}$$

特别地，我们得到 $\sigma^* d\phi = d\sigma^*\phi = 0 \in \Omega^\bullet(\mathbb{P}(E), \mathbb{R})$，因此 $d\phi = 0$，即 $\phi \in H^{\mathrm{odd}}(B, \mathbb{R})$。

注意，由 Leray–Hirsch 定理，$H^\bullet(\mathbb{P}(E), \mathbb{R})$ 是一个以 $1, c_1(H), \cdots, c_1(H)^{r-1}$ 为基的自由 $H^\bullet(B, \mathbb{R})$-模，其关系为

$$c_1(H)^r + \sum_{j=0}^{r-1} c_1(H)^j c_{r-j}(E) = 0, \tag{2.18}$$

其中 $c_j(E)$ 是 E 的第 j 个陈类。

我们声称，$H^\bullet(\mathbb{P}(E), \mathbb{R})$ 也是一个以 $1, e^{c_1(H)}, \cdots, e^{(r-1)c_1(H)}$ 为基的自由 $H^\bullet(B, \mathbb{R})$-模。事实上，根据 (2.18)，对于任意 $j \in \mathbb{N}^*$，$e^{jc_1(H)}$ 都是 $1, c_1(H), \cdots, c_1(H)^{r-1}$ 的线性组合，其系数属于 $H^\bullet(B, \mathbb{R})$，并且存在满足 $\deg b_{kj} > 0$ 的 $b_{kj} \in H^\bullet(B, \mathbb{R})$，使得 $e^{0c_1(H)} = 1$，且对于 $j \geq 1$，

$$e^{jc_1(H)} = \sum_{k=0}^{r-1} j^k \frac{c_1(H)^k}{k!} + \sum_{k \geq r} j^k \frac{c_1(H)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{r-1} \left(j^k + b_{kj}\right) \frac{c_1(H)^k}{k!}. \tag{2.19}$$

令 $\mathbf{A} = \mathbf{V} + \mathbf{B}$ 为满足 $\mathbf{V} = (j^k)_{k,j=0}^{r-1}$ 且 $\mathbf{B} = (b_{kj})_{k,j=0}^{r-1}$ 的矩阵。令

$$\mathbf{e} = \left(1, e^{c_1(H)}, \cdots, e^{(r-1)c_1(H)}\right), \quad \mathbf{f} = \left(1, \frac{c_1(H)}{1!}, \cdots, \frac{c_1(H)^{r-1}}{(r-1)!}\right). \tag{2.20}$$

于是由 (2.19)，我们有 $\mathbf{e} = \mathbf{f}\mathbf{A}$。由于 $\mathbf{V}$ 是可逆的范德蒙矩阵，且 $\mathbf{B}$ 是幂零矩阵，因此 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{M}_n(H^\bullet(B, \mathbb{R}))$ 中可逆，并且 $\mathbf{f} = \mathbf{e}\mathbf{A}^{-1}$。由此得到所需结论。

由 (2.17) 和上述结论可知，对于任意的 $i > 0$, $\sigma^*\mathrm{ch}(F_i) = 0$ 和 $\sigma^*\phi = \sigma^*\mathrm{ch}(F_0)$，都有此结论。这意味着 $\phi = \mathrm{ch}(F_0)$。因此，由 (2.8),

$$\hat{x} = a(\phi) = a \circ \mathrm{ch}(F_0) = 0. \tag{2.21}$$

所以，(2.11) 中的 σ^* 是单射。定理 2.2 的证明完毕。 □

我们用 $Z^{\mathrm{even}}(B, \mathbb{R})$ 表示 B 上偶数次闭微分形式构成的向量空间。考虑向量空间

$$\Gamma(B) := Z^{\mathrm{even}}(B, \mathbb{R}) \oplus (\Omega^{\mathrm{odd}}(B, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d). \tag{2.22}$$

我们给出从 $l \geq 0$ 到 $Z^{2l}(B, \mathbb{R}) \oplus \left(\Omega^{2l-1}(B, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d\right)$ 且 $\Omega^{-1}(\cdot) = \{0\}$ 的分次。我们通过公式定义 $\Gamma(B)$ 上的乘法

$$(\omega_1, \phi_1) * (\omega_2, \phi_2) := (\omega_1 \wedge \omega_2, \omega_1 \wedge \phi_2 + \phi_1 \wedge \omega_2 - d\phi_1 \wedge \phi_2), \tag{2.23}$$

该乘法是交换的且结合的。于是 $\Gamma(B)$ 是一个含幺环，其单位元为 (1,0)，并且无挠。我们定义 Adams 运算 $\Psi_\Gamma^k : \Gamma(B) \to \Gamma(B)$，对 $k \in \mathbb{N}$ 有：

$$\Psi_\Gamma^k(\alpha, \beta) = (k^l\alpha, k^l\beta) \quad \text{for} \quad (\alpha, \beta) \in Z^{2l}(B, \mathbb{R}) \oplus (\Omega^{2l-1}(B, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d). \tag{2.24}$$

那么关系

$$\lambda_t(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_\Gamma^n(x) t^n := \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \Psi_\Gamma^k(x) t^k}{k}\right) \tag{2.25}$$

在 $\Gamma(B)$ 上给出了一个 pre-λ-环结构（参见 [14, (2.4)]）。由 (2.23)-(2.25)，对于 $\omega \in Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R}),\phi \in \Omega^{\mathrm{odd}}(B,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d$，我们有

$$\left[\lambda_\Gamma^k(\omega,0)\right]_{\mathrm{odd}}=0,\quad \left[\lambda_\Gamma^k(0,\phi)\right]_{\mathrm{even}}=0, \tag{2.26}$$

其中 $[\cdot]_{\mathrm{odd}}$ (分别是 $\Gamma(B)$ 在 $\Omega^{\mathrm{odd}}(B,\mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d$（分别是 $Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$）中的分量。

对于 $\alpha \in Z^{2l}(B,\mathbb{R})$，映射 $\Psi_Z^k(\alpha) := k^l\alpha$ 也定义了 Adams 运算 $\Psi_Z^k\colon Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R}) \to Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$，其中 $k \in \mathbb{N}$。它在 $Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$ 上诱导出如 (2.25) 中的预-λ-环结构 λ_Z^n。由引理 2.3], ，限制映射 $p\colon \Gamma(B) \to Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$ 是预-λ-环的同态。

引理 2.3. $\Gamma(B)$ 和 $Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$ 上的预-λ-环结构是 λ-环结构。此外，限制映射 $p\colon \Gamma(B) \to Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$ 是 λ-环的同态。

证明。由于 $\Gamma(B)$（分别地，$Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$）无挠，且 Adams 运算 Ψ_Γ^k（分别地，Ψ_Z^k）满足 (1.14)，由定理 1.3 可知，$\Gamma(B)$（分别地，$Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$）上的预-λ-环结构是一个 λ-环结构。此外，由于 $p\circ\Psi_\Gamma^k = \Psi_Z^k\circ p$，根据 (2.25) 及 λ_Z^n 的相应定义，限制映射 $p\colon \Gamma(B) \to Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$ 是 λ-环的同态。引理 2.3 的证明完毕。□

设 $(\underline{E},\phi)$ 和 (F,ψ) 是 $\widehat{K}^0(B)$ 的循环。于是由 (2.7) 和 (2.23)，

$$(\underline{E},\phi)\cup(\underline{F},\psi)=\Big(\underline{E}\otimes\underline{F},\left[(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)*(\mathrm{ch}(\underline{F}),\psi)\right]_{\mathrm{odd}}\Big). \tag{2.27}$$

注意，由 [14,引理 2.3、(2.11)、(2.33) 和 (2.47)],可得

$$\left[\lambda_\Gamma^k(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)\right]_{\mathrm{even}}=\mathrm{ch}(\Lambda^k(\underline{E})), \tag{2.28}$$

这里，$\underline{\Lambda^k}(E)$ 表示 E 的第 k 个外代数丛，其度量和联络由 E 诱导。令

$$\lambda^k(\underline{E},\phi) := \left(\Lambda^k(\underline{E}),\left[\lambda_\Gamma^k(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)\right]_{\mathrm{odd}}\right). \tag{2.29}$$

由 (2.26) 和 (2.29)，

$$\lambda^k(\underline{0},\phi)=\left(\underline{0},\left[\lambda_\Gamma^k(0,\phi)\right]_{\mathrm{odd}}\right),\quad \lambda^k(\underline{E},0):=\left(\Lambda^k(\underline{E}),0\right). \tag{2.30}$$

由 [14, 定理 2.6]，的证明可知，(2.29) 中的映射 λ^k 诱导出一个定义良好的映射

$$\lambda^k:\widehat{K}^0(B)\to\widehat{K}^0(B), \tag{2.31}$$

也就是说，若 $[E,\phi]=[F,\psi]\in\widehat{K}^0(B)$，则有

$$\left[\lambda^k(\underline{E},\phi)\right]=\left[\lambda^k(\underline{F},\psi)\right]\in\widehat{K}^0(B). \tag{2.32}$$

此外，由 [14,定理 2.6], ，(2.29) 在 $\widehat{K}^0(B)$ 上诱导出一个 pre-λ-环结构。

本文的主要结果如下。

定理 2.4。在 *(2.29)* 中定义的 $\widehat{K}^0(B)$ 上的 *pre*-λ-环结构是一个 λ-环结构。

3. Proof of Theorem 2.4

回想一下， $1+\widehat{K}^0(B)[[t]]^+$ 是一个 pre-λ-环，其运算 $(\widetilde{+},\widetilde{\times},\tilde{\lambda}^n)$ 见 (1.5) 和 (1.6)。

引理 3.1. 对于循环 (E,ϕ) 和 (F,ψ)，以下关于循环的恒等式成立：

$$\lambda_t\big((\underline{E},0)\cup(\underline{0},\psi)\big)=\lambda_t(\underline{E},0)\,\widetilde{\times}\,\lambda_t(\underline{0},\psi), \tag{3.1}$$

$$\lambda_t\big((\underline{0},\phi)\cup(\underline{F},0)\big)=\lambda_t(\underline{0},\phi)\,\widetilde{\times}\,\lambda_t(\underline{F},0), \tag{3.2}$$

$$\lambda_t\big((\underline{0},\phi)\cup(\underline{0},\psi)\big)=\lambda_t(\underline{0},\phi)\,\widetilde{\times}\,\lambda_t(\underline{0},\psi), \tag{3.3}$$

$$\lambda_t\left(\lambda^m(\underline{0},\phi)\right)=\tilde{\lambda}^m\left(\lambda_t(\underline{0},\phi)\right). \tag{3.4}$$

证明. 由 (2.7)、(2.23) 和 (2.29),

$$\begin{aligned}\lambda^n\big((\underline{E},0)\cup(\underline{0},\psi)\big)&\overset{(2.7)}{=}\lambda^n\big(\underline{0},\mathrm{ch}(\underline{E})\psi\big)\overset{(2.29)}{=}\Big(\underline{0},\big[\lambda^n_\Gamma(0,\mathrm{ch}(\underline{E})\psi)\big]_{\mathrm{odd}}\Big)\\&\overset{(2.23)}{=}\Big(\underline{0},\big[\lambda^n_\Gamma((\mathrm{ch}(\underline{E}),0)*(0,\psi))\big]_{\mathrm{odd}}\Big).\end{aligned} \tag{3.5}$$

由 (2.26) 和 (2.28)，对于 $k\in\mathbb{N}$，有

$$\lambda^k_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),0)=(\mathrm{ch}(\Lambda^k(\underline{E})),0),\quad \lambda^k_\Gamma(0,\psi)=\big(0,[\lambda^k_\Gamma(0,\psi)]_{\mathrm{odd}}\big). \tag{3.6}$$

回忆一下， P_n 是 $\{\sigma_i\}$ 中权为 n 的多项式。由于 $\Gamma(B)$ 是一个 λ-环，由 (1.10)、(2.23) 和 (3.6)，对于 $n\geq 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda^n_\Gamma\big((\mathrm{ch}(\underline{E}),0)*(0,\psi)\big)&\overset{(1.10)}{=}P_n\big(\lambda^1_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),0),\cdots,\lambda^n_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),0);\lambda^1_\Gamma(0,\psi),\cdots,\lambda^n_\Gamma(0,\psi)\big)\\&\overset{(3.6)}{=}P_n\big((\mathrm{ch}(\Lambda^1(\underline{E})),0),\cdots,(\mathrm{ch}(\Lambda^n(\underline{E})),0);\big(0,\big[\lambda^1_\Gamma(0,\psi)\big]_{\mathrm{odd}}\big),\cdots,(0,[\lambda^n_\Gamma(0,\psi)]_{\mathrm{odd}})\big)\\&\overset{(2.23)}{=}\Big(0,\big[P_n\big((\mathrm{ch}(\Lambda^1(\underline{E})),0),\cdots,(\mathrm{ch}(\Lambda^n(\underline{E})),0);\\&\qquad\big(0,\big[\lambda^1_\Gamma(0,\psi)\big]_{\mathrm{odd}}\big),\cdots,(0,[\lambda^n_\Gamma(0,\psi)]_{\mathrm{odd}})\big)\big]_{\mathrm{odd}}\Big).\end{aligned} \tag{3.7}$$

由 (2.27)、(2.30) 和 (3.7)，对于 $n\geq 1$，

$$\begin{aligned}&P_n\big(\lambda^1(\underline{E},0),\cdots,\lambda^n(\underline{E},0);\lambda^1(\underline{0},\psi),\cdots,\lambda^n(\underline{0},\psi)\big)\\&\overset{(2.30)}{=}P_n\left((\Lambda^1(\underline{E}),0),\cdots,(\Lambda^n(\underline{E}),0);\big(\underline{0},\big[\lambda^1_\Gamma(0,\psi)\big]_{\mathrm{odd}}\big),\cdots,(\underline{0},[\lambda^n_\Gamma(0,\psi)]_{\mathrm{odd}})\right)\\&\overset{(2.27)}{=}\Big(\underline{0},\big[P_n\big((\mathrm{ch}(\Lambda^1(\underline{E})),0),\cdots,(\mathrm{ch}(\Lambda^n(\underline{E})),0);\\&\qquad\big(0,\big[\lambda^1_\Gamma(0,\psi)\big]_{\mathrm{odd}}\big),\cdots,(0,[\lambda^n_\Gamma(0,\psi)]_{\mathrm{odd}})\big)\big]_{\mathrm{odd}}\Big)\\&\overset{(3.7)}{=}\big(\underline{0},\big[\lambda^n_\Gamma\big((\mathrm{ch}(\underline{E}),0)*(0,\psi)\big)\big]_{\mathrm{odd}}\big).\end{aligned} \tag{3.8}$$

由 (3.5) 和 (3.8)，可得

$$\lambda^n\big((\underline{E},0)\cup(\underline{0},\psi)\big)=P_n\big(\lambda^1(\underline{E},0),\cdots,\lambda^n(\underline{E},0);\lambda^1(\underline{0},\psi),\cdots,\lambda^n(\underline{0},\psi)\big). \tag{3.9}$$

类似地，我们有

$$\lambda^n\big((\underline{0},\phi)\cup(\underline{0},\psi)\big)=P_n\big(\lambda^1(\underline{0},\phi),\cdots,\lambda^n(\underline{0},\phi);\lambda^1(\underline{0},\psi),\cdots,\lambda^n(\underline{0},\psi)\big). \tag{3.10}$$

因此，由（1.2）、（1.5）、（3.9）和（3.10），我们得到（3.1）和（3.3）。由于运算“$\cup$”和“$\widetilde{\times}$”是交换的，由（3.1）可得（3.2）。

另一方面，根据（2.27）—（2.29），我们有

$$\lambda^i\big(\underline{E},\phi\big)\cup\lambda^j\big(\underline{F},\psi\big)=\Big(\Lambda^i(\underline{E})\otimes\Lambda^j(\underline{F}),\big[\lambda^i_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)*\lambda^j_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{F}),\psi)\big]_{\mathrm{odd}}\Big). \tag{3.11}$$

由 (2.29),

$$\lambda^i\big(\underline{E},\phi\big)+\lambda^j\big(\underline{F},\psi\big)=\Big(\Lambda^i(\underline{E})\oplus\Lambda^j(\underline{F}),\big[\lambda^i_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)+\lambda^j_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{F}),\psi)\big]_{\mathrm{odd}}\Big). \tag{3.12}$$

由于$P_{n,m}$ 是一个多项式，由 (3.11) 和 (3.12)，我们有

$$\begin{aligned}&P_{n,m}\big(\lambda^1(\underline{E},\phi),\cdots,\lambda^{mn}(\underline{E},\phi)\big)\\&\quad=\Big(P_{n,m}\big(\Lambda^1(\underline{E}),\cdots,\Lambda^{mn}(\underline{E})\big),\Big[P_{n,m}\big(\lambda^1_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi),\cdots,\lambda^{mn}_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)\big)\Big]_{\mathrm{odd}}\Big).\end{aligned} \tag{3.13}$$

回顾 Γ(*B*)是一个 λ-环。由 (1.11) 和 (3.13)，我们看到

$$\begin{aligned}&P_{n,m}\big(\lambda^1(\underline{E},\phi),\cdots,\lambda^{mn}(\underline{E},\phi)\big)\\&\quad=\Big(P_{n,m}\big(\Lambda^1(\underline{E}),\cdots,\Lambda^{mn}(\underline{E})\big),\big[\lambda^n_\Gamma(\lambda^m_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi))\big]_{\mathrm{odd}}\Big).\end{aligned} \tag{3.14}$$

由 (1.2)、(1.6)、(2.28)、(2.29) 和 (3.14),

$$\begin{aligned}&\lambda_t\big(\lambda^m(\underline{0},\phi)\big)\overset{(2.29)}{=}\lambda_t\Big(\underline{0},\big[\lambda^m_\Gamma(0,\phi)\big]_{\mathrm{odd}}\Big)\\&\overset{(1.2)(2.29)}{=\!=\!=}1+\sum_{n\geq1}t^n\Big(\underline{0},\Big[\lambda^n_\Gamma\big(0,\big[\lambda^m_\Gamma(0,\phi)\big]_{\mathrm{odd}}\big)\Big]_{\mathrm{odd}}\Big)\overset{(2.28)}{=}1+\sum_{n\geq1}t^n\Big(\underline{0},\Big[\lambda^n_\Gamma\big(\lambda^m_\Gamma\big(0,\phi\big)\big)\Big]_{\mathrm{odd}}\Big)\\&\overset{(3.14)}{=}1+\sum_{n\geq1}t^nP_{n,m}\big(\lambda^1(\underline{0},\phi),\cdots,\lambda^{mn}(\underline{0},\phi)\big)\overset{(1.6)}{=}\tilde{\lambda}^m\big(\lambda_t(\underline{0},\phi)\big).\end{aligned} \tag{3.15}$$

我们得到 (3.4)。引理 3.1 的证明完成。 □

通过应用微分 K 理论中的分裂原理定理 2.2，我们确立定理 2.4 的以下关键部分。

引理 3.2. 对于循环$(E,0)$和$(F,0)$，有

$$\lambda_t\left([\underline{E},0]\cup[\underline{F},0]\right)=[\lambda_t(\underline{E},0)]\widetilde{\times}[\lambda_t(\underline{F},0)]\in\widehat{K}^0(B), \tag{3.16}$$

and

$$\lambda_t([\lambda^m(\underline{E},0)])=\widetilde{\lambda}^m\left[\lambda_t(\underline{E},0)\right]\in\widehat{K}^0(B). \tag{3.17}$$

证明。 我们将对向量丛 E 的秩进行归纳，证明此引理，其中该秩记为 $\mathbf{rk}E$。

若 $\mathbf{rk}E=1$，由 (1.1) 和 (2.30) 可得

$$\lambda^0([\underline{E},0])=1,\quad\lambda^1([\underline{E},0])=[\underline{E},0],\quad\lambda^m([\underline{E},0])=0\text{ for }m>1. \tag{3.18}$$

根据 P_n 的定义，我们可知

$$P_n(s_1,0\cdots,0;\sigma_1,\cdots,\sigma_n)=s_1^n\sigma_n. \tag{3.19}$$

因此，由 (2.7)、(2.30)、(3.18) 和 (3.19),

$$\begin{aligned}(3.20)\quad \lambda^m\left((\underline{E},0)\cup(\underline{F},0)\right) &\overset{(2.7)}{=} \lambda^m(\underline{E}\otimes\underline{F},0) \overset{(2.30)}{=} (\Lambda^m(\underline{E}\otimes\underline{F}),0) = (\underline{E^m}\otimes\Lambda^m(\underline{F}),0)\\ &\overset{(2.7)}{=} (\underline{E},0)^m\cup(\Lambda^m(\underline{F}),0) \overset{(3.18)(3.19)}{=\!=\!=} P_m\left((\underline{E},0),0,\cdots,0;(\Lambda^1(\underline{F}),0),\cdots,(\Lambda^m(\underline{F}),0)\right).\end{aligned}$$

于是，由 (1.2)、(1.5)、(3.18) 和 (3.20)，可得 $\mathrm{rk}E=1$ 时的 (3.16)。

我们假设对于任意满足 $\mathrm{rk}E\leq k$ 的闭流形 B，(3.16) 均成立。

对于 B 上满足 $\mathrm{rk}E=k+1$ 的几何三元组 E，我们考虑 E 的射影丛$\sigma:\mathbb{P}(E)\to B$。令 σ^*E 为 $\mathbb{P}(E)$ 上几何三元组 E 的拉回。那么，存在 $\mathbb{P}(E)$ 上的复向量丛 E_1，使得

$$(3.21)\qquad \sigma^*E=H^*\oplus E_1,$$

其中，H^* 是重言线丛，H 是定理 2.2 证明中的对偶丛。令 $\mathbb{P}(E)$ 上任意的几何三元组为 H^*（分别为 E_1），其底向量丛为 H^*（分别为 E_1）。由定义 2.1 可得

$$(3.22)\qquad [\sigma^*\underline{E},0]=\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\in\widehat{K}^0(\mathbb{P}(E)).$$

现在，在 $\mathbb{P}(E)$ 上,

$$\begin{aligned}(3.23)\quad [\sigma^*\underline{E},0]\cup[\sigma^*\underline{F},0] &= [\underline{H^*},0]\cup[\sigma^*\underline{F},0]+\left[\underline{E_1},0\right]\cup[\sigma^*\underline{F},0]\\ &\quad+\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\cup[\sigma^*\underline{F},0].\end{aligned}$$

根据归纳假设，由于 $\mathrm{rk}H^*=1$ 与 $\mathrm{rk}E_1=k$，我们有

$$(3.24)\qquad \begin{aligned}\lambda_t\left([\underline{H^*},0]\cup[\sigma^*\underline{F},0]\right)&=\lambda_t([\underline{H^*},0])\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0]),\\ \lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\cup[\sigma^*\underline{F},0]\right)&=\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0]).\end{aligned}$$

由 (1.3)、(1.5)、(1.7)、(2.11)、(3.2)、(3.22)、(3.23) 和 (3.24)，我们有

$$\begin{aligned}(3.25)\quad &\sigma^*\lambda_t\left([\underline{E},0]\cup[\underline{F},0]\right)\overset{(2.11)}{=}\lambda_t\left([\sigma^*\underline{E},0]\cup[\sigma^*\underline{F},0]\right)\\ &\overset{(1.3)(3.23)}{=\!=\!=}\lambda_t\left([\underline{H^*},0]\cup[\sigma^*\underline{F},0]\right)\cdot\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\cup[\sigma^*\underline{F},0]\right)\cdot\lambda_t\left(\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\cup[\sigma^*\underline{F},0]\right)\\ &\overset{(1.5)(3.2)(3.24)}{=\!=\!=\!=\!=}\lambda_t([\underline{H^*},0])\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0])\widetilde{+}\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0])\\ &\qquad\widetilde{+}\lambda_t\left(\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0])\\ &\overset{(1.7)}{=}\left(\lambda_t([\underline{H^*},0])\widetilde{+}\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\widetilde{+}\lambda_t\left(\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\right)\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0])\\ &\overset{(1.3)(1.5)}{=\!=\!=\!=}\lambda_t\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0])\\ &\overset{(3.22)}{=}\lambda_t([\sigma^*\underline{E},0])\widetilde{\times}\lambda_t([\sigma^*\underline{F},0])=\sigma^*\left(\lambda_t([\underline{E},0])\widetilde{\times}\lambda_t([\underline{F},0])\right)\in\widehat{K}^0(\mathbb{P}(E)).\end{aligned}$$

由定理 2.2，$\sigma^*:\ \widehat{K}^0(B)\to\widehat{K}^0(\mathbb{P}(E))$ 是单射。因此 (3.16) 对 $\mathrm{rk}E=k+1$ 成立。(3.16) 的归纳过程完成。

(3.17) 的证明类似。若 $\mathrm{rk}E=1$，由 (1.2)、(1.8) 和 (3.18)，可得

$$(3.26)\qquad \lambda_t([\lambda^0(\underline{E},0)])\overset{(3.18)}{=}\lambda_t(1)\overset{(3.18)}{=}1+t\overset{(1.8)}{=}\tilde{\lambda}^0(1+t[\underline{E},0])\overset{(3.18)}{=}\tilde{\lambda}^0(\lambda_t([\underline{E},0]))$$

and

$$\lambda_t([\lambda^1(\underline{E},0)]) \overset{(3.18)}{=} \lambda_t([\underline{E},0]) \overset{(1.2)(3.18)}{=\!=} 1+t[\underline{E},0] \overset{(1.8)}{=} \tilde{\lambda}^1(1+t[\underline{E},0]) \overset{(1.2)(3.18)}{=\!=} \tilde{\lambda}^1(\lambda_t([\underline{E},0])). \tag{3.27}$$

由 $P_{n,m}$ 的定义可知，对于 $m>1, n\geq 1$,

$$P_{n,m}(s_1,0,\cdots,0)=0. \tag{3.28}$$

对于 $m>1$，由 (1.4)、(1.6)、(3.18) 和 (3.28),

$$\tilde{\lambda}^m\left(\lambda_t([\underline{E},0])\right) \overset{(3.18)}{=} \tilde{\lambda}^m\left(1+t[\underline{E},0]\right) \overset{(1.6)}{=} 1+\sum_{n\geq 1} P_{n,m}([\underline{E},0],0,\cdots,0)t^n \overset{(3.28)}{=} 1 \overset{(1.4)}{=} \lambda_t(0) \overset{(3.18)}{=} \lambda_t\left([\lambda^m([\underline{E},0])]\right). \tag{3.29}$$

因此，(3.17) 对 $\mathbf{rk}E=1$ 成立。

我们假设 (3.17) 对任意满足 $\mathbf{rk}E\leq k$ 的闭流形 B 都成立。对于定义在 B 上且满足 $\mathbf{rk}\underline{E}=k+1$ 的几何三元组 E，由 (1.1) 和 (3.22),

$$\begin{aligned}\lambda^m([\sigma^*\underline{E},0]) &= \lambda^m\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1}, \widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E}, \underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\lambda^i\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\cup\lambda^{m-i}\left(\left[\underline{0}, \widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E}, \underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right).\end{aligned} \tag{3.30}$$

由 (1.3)、(1.5)、(2.11)、(2.30)、(3.1)、(3.4) 和 (3.30)，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma^*\lambda_t(\lambda^m([\underline{E},0])) &\overset{(2.11)}{=} \lambda_t(\lambda^m([\sigma^*\underline{E},0])) \\ &\overset{(1.3)(1.5)(2.30)(3.1)(3.30)}{=\!=\!=} \widetilde{+}_{i=0}^{m}\left(\lambda_t\left(\lambda^i\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\right)\widetilde{\times}\lambda_t\left(\lambda^{m-i}\left(\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\right)\right) \\ &\overset{(3.4)}{=} \widetilde{+}_{i=0}^{m}\left(\lambda_t\left(\lambda^i\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\right)\widetilde{\times}\tilde{\lambda}^{m-i}\left(\lambda_t\left(\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\right)\right).\end{aligned} \tag{3.31}$$

对于 $i=0$，由 (1.1)、(1.8) 和 (3.18)，我们有

$$\lambda_t\left(\lambda^0\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\right) \overset{(1.1)}{=} \lambda_t(1) \overset{(3.18)}{=} 1+t \overset{(1.8)}{=} \tilde{\lambda}^0\left(\lambda_t\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\right). \tag{3.32}$$

由于 $\mathbf{rk}E_1=k$，根据归纳假设，我们有

$$\lambda_t\left(\lambda^i\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right)=\tilde{\lambda}^i\left(\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right). \tag{3.33}$$

由于 H^* 是线丛，由 (1.1)、(1.3)、(1.5)、(1.8)、(2.30)、(3.16)、(3.18)、(3.29) 和 (3.33)，对于 $i\geq 1$,

$$\begin{aligned}\lambda_t\left(\lambda^i\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\right) &\overset{(1.1)(3.18)}{=\!=} \lambda_t\left(\lambda^i\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)+\left[\underline{H^*},0\right]\cup\lambda^{i-1}\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right) \\ &\overset{(1.3)}{=} \lambda_t\left(\lambda^i\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right)\cdot\lambda_t\left(\left[\underline{H^*},0\right]\cup\lambda^{i-1}\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right) \\ &\overset{(1.5)(2.30)(3.16)}{=\!=\!=} \lambda_t\left(\lambda^i\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right)\widetilde{+}\lambda_t([\underline{H^*},0])\widetilde{\times}\lambda_t\left(\lambda^{i-1}\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right) \\ &\overset{(1.8)(3.33)}{=\!=} \tilde{\lambda}^i\left(\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right)\widetilde{+}\tilde{\lambda}^1\left(\lambda_t([\underline{H^*},0])\right)\widetilde{\times}\tilde{\lambda}^{i-1}\left(\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right) \\ &\overset{(1.8)(3.29)}{=\!=} \tilde{\lambda}^i\left(\lambda_t([\underline{H^*},0])\widetilde{+}\lambda_t\left(\left[\underline{E_1},0\right]\right)\right) \overset{(1.3)(1.5)}{=\!=} \tilde{\lambda}^i\left(\lambda_t\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\right).\end{aligned} \tag{3.34}$$

因此，由 (1.3)、(1.5)、(1.8)、(2.11)、(3.22)、(3.31) 和 (3.34)，可得

(3.35) $\sigma^*\left(\lambda_t\left(\lambda^m([\underline{E},0])\right)\right)$

$$\overset{(3.31)(3.34)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \widetilde{+}_{i=0}^{m}\left(\tilde{\lambda}^i\left(\lambda_t\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\right)\widetilde{\times}\tilde{\lambda}^{m-i}\left(\lambda_t\left(\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\right)\right)$$

$$\overset{(1.8)}{=}\tilde{\lambda}^m\left(\lambda_t\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},0\right]\right)\widetilde{+}\lambda_t\left(\left[\underline{0},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\right)$$

$$\overset{(1.3)(1.5)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \tilde{\lambda}^m\left(\lambda_t\left(\left[\underline{H^*}\oplus\underline{E_1},\widetilde{\mathrm{ch}}(\sigma^*\underline{E},\underline{H^*}\oplus\underline{E_1})\right]\right)\right)$$

$$\overset{(3.22)}{=}\tilde{\lambda}^m(\lambda_t([\sigma^*\underline{E},0]))=\tilde{\lambda}^m(\sigma^*\lambda_t([\underline{E},0]))\overset{(2.11)}{=}\sigma^*\tilde{\lambda}^m(\lambda_t([\underline{E},0])).$$

由于 σ^* 是单射，(3.17) 对 $\mathrm{rk}E=k+1$ 成立。(3.17) 的归纳过程已完成。□

定理 *2.4* 的证明。 由引理 3.1 和 3.2、(1.1)、(1.3) 和 (1.5)，对于循环 (E,ϕ) 和 $(\underline{F},\psi)$，我们有

$$\begin{aligned}(3.36)\quad \lambda_t\big([\underline{E},\phi]\cup[\underline{F},\psi]\big)&\overset{(1.3)(1.5)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lambda_t\big([\underline{E},0]\cup[\underline{F},0]\big)\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{E},0]\cup[\underline{0},\psi]\big)\\&\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{0},\phi]\cup[\underline{F},0]\big)\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{0},\phi]\cup[\underline{0},\psi]\big)\\&=\lambda_t\big([\underline{E},0]\big)\widetilde{\times}\lambda_t\big([\underline{F},0]\big)\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{E},0]\big)\widetilde{\times}\lambda_t\big([\underline{0},\psi]\big)\\&\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{0},\phi]\big)\widetilde{\times}\lambda_t\big([\underline{F},0]\big)\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{0},\phi]\big)\widetilde{\times}\lambda_t\big([\underline{0},\psi]\big)\\&=\big(\lambda_t\big([\underline{E},0]\big)\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{0},\phi]\big)\big)\widetilde{\times}\big(\lambda_t\big([\underline{F},0]\big)\widetilde{+}\lambda_t\big([\underline{0},\psi]\big)\big)=\lambda_t\big([\underline{E},\phi]\big)\widetilde{\times}\lambda_t\big([\underline{F},\psi]\big),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(3.37)\quad \lambda_t(\lambda^m([\underline{E},\phi]))&\overset{(1.1)}{=}\lambda_t\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda^i([\underline{E},0])\cup\lambda^{m-i}([\underline{0},\phi])\right)\\&\overset{(1.3)(1.5)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\widetilde{+}_{i=0}^{m}\left(\lambda_t\left(\lambda^i([\underline{E},0])\right)\widetilde{\times}\lambda_t\left(\lambda^{m-i}([\underline{0},\phi])\right)\right)=\widetilde{+}_{i=0}^{m}\left(\tilde{\lambda}^i\left(\lambda_t([\underline{E},0])\right)\widetilde{\times}\tilde{\lambda}^{m-i}\left(\lambda_t([\underline{0},\phi])\right)\right)\\&=\tilde{\lambda}^m\left(\lambda_t([\underline{E},0])\widetilde{+}\lambda_t([\underline{0},\phi])\right)=\tilde{\lambda}^m\left(\lambda_t([\underline{E},\phi])\right).\end{aligned}$$

根据定义 1.2，$\widehat{K}^0(B)$ 上的 pre-λ-环结构是一个 λ-环结构。定理 2.4 的证明完成。□

4. Adams operations

若 R 是一个 λ-环，根据 [4, §V 命题 7.5 i)], ，对于 $k\in\mathbb{N}^*$，在 (1.13) 中定义的 Adams 运算 $\Psi^k:R\to R$ 满足 (1.14)。根据 [3, §I.5 (2)], ，对于 $x\in R$,

$$\Psi^k(x)=\nu_k(\lambda^1(x),\cdots,\lambda^k(x)),\tag{4.1}$$

其中 $\nu_k(s_1,\ \cdots,\ s_k)=\xi_1^k+\cdots+\xi_q^k$是第 k 个牛顿多项式，s_i 是 i 中的第 $\{\xi_j\}$ 个初等对称函数。根据 [3, §I 命题 5.1]，$\Psi^k:R\to R$ 是λ-环的同态。

对于几何三元组 E on B，我们记

$$\Psi^k(\underline{E}):=\nu_k(\Lambda^1(\underline{E}),\cdots,\Lambda^k(\underline{E})).\tag{4.2}$$

命题 4.1. 对于 $[E,\phi]\in\widehat{K}^0(B)$，$\phi=\sum_{l\geq1}\phi_l$，$\phi_l\in\Omega^{2l-1}(B,\ \mathbb{R})/\mathrm{Im}\,d$，$k\in\mathbb{N}^*$，我们有

$$\Psi^k([\underline{E},\phi])=\left[\Psi^k(\underline{E}),\sum_{l\geq1}k^l\phi_l\right]. \tag{4.3}$$

对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$, $\Psi^k:\ \widehat{K}^0(B)\to\widehat{K}^0(B)$ 都是 λ-环的同态。

证明。将 (4.1) 应用于 λ-环 $\Gamma(B)$，得到

$$\Psi^k_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)=\nu_k(\lambda^1_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi),\cdots,\lambda^k_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)). \tag{4.4}$$

由于 $\widehat{K}^0(B)$ 是一个 λ-环，且 ν_k 是一个整系数多项式，由 (3.11)、(3.12)、(4.1)、(4.2) 和 (4.4)，我们有

$$\begin{aligned}\Psi^k([\underline{E},\phi])&\overset{(4.1)}{=}\nu_k(\lambda^1([\underline{E},\phi]),\cdots,\lambda^k([\underline{E},\phi]))\\&\overset{(3.11)(3.12)}{=\!=\!=}\left[\nu_k(\Lambda^1(\underline{E}),\cdots,\Lambda^k(\underline{E})),\left[\nu_k\left(\lambda^1_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi),\cdots,\lambda^k_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)\right)\right]_{\mathrm{odd}}\right]\\&\overset{(4.2)(4.4)}{=\!=\!=}\left[\Psi^k(\underline{E}),\left[\Psi^k_\Gamma(\mathrm{ch}(\underline{E}),\phi)\right]_{\mathrm{odd}}\right].\end{aligned} \tag{4.5}$$

因此，该命题可直接由 (2.24) 得出。最后一部分如上所述，来自 [3, §I 命题 5.1]。□

设 $f:B\to B'$ 是两个闭流形之间的一个光滑映射。由命题 4.1，对于任意 $x\in\widehat{K}^0(B')$，我们有

$$\Psi^k(f^*x)=f^*\Psi^k(x). \tag{4.6}$$

由 (4.2)，若 $\underline{L}=(L,\ h^L,\ \nabla^L)$ 是 B 上带有线丛 L 的几何三元组，根据 ν_k 的定义，我们有

$$\Psi^k(\underline{L})=\underline{L^k}. \tag{4.7}$$

若 $\underline{E}=\oplus_{j=1}^r\underline{L_j}$，且 $\underline{L_j}=(L_j,\ h^{L_j},\ \nabla^{L_j})$ 带有线丛 L_j，则由定理 2.4、命题 4.1 和 (4.7)，

$$\begin{aligned}[\Psi^k(\underline{E}),0]=\Psi^k([\underline{E},0])&=\Psi^k\left(\sum_{j=1}^r\left[\underline{L_j},0\right]\right)=\sum_{j=1}^r\Psi^k\left(\left[\underline{L_j},0\right]\right)\\&=\sum_{j=1}^r\left[\Psi^k\left(\underline{L_j}\right),0\right]=\sum_{j=1}^r\left[\underline{L_j^k},0\right]=\left[\bigoplus_{j=1}^r\underline{L_j^k},0\right].\end{aligned} \tag{4.8}$$

由引理 2.3 和 (2.28)，

$$\lambda^k_Z\left(\mathrm{ch}(\underline{E})\right)=\mathrm{ch}\left(\Lambda^k(\underline{E})\right). \tag{4.9}$$

因此，由 (4.1)、(4.2)、(4.9) 以及 ν_k 是一个多项式，我们有

$$\begin{aligned}\Psi^k_Z\left(\mathrm{ch}(\underline{E})\right)=\nu_k\left(\lambda^1_Z\left(\mathrm{ch}(\underline{E})\right),\cdots,\lambda^k_Z\left(\mathrm{ch}(\underline{E})\right)\right)&=\nu_k\left(\mathrm{ch}\left(\Lambda^1(\underline{E})\right),\cdots,\mathrm{ch}\left(\Lambda^k(\underline{E})\right)\right)\\&=\mathrm{ch}\left(\nu_k\left(\Lambda^1(\underline{E}),\cdots,\Lambda^k(\underline{E})\right)\right)=\mathrm{ch}\left(\Psi^k(\underline{E})\right).\end{aligned} \tag{4.10}$$

设 $R:\widehat{K}^0(B)\to Z^{\mathrm{even}}(B,\mathbb{R})$ 为如下定义的曲率映射

$$R([\underline{E},\phi]):=\mathrm{ch}(\underline{E})-d\phi. \tag{4.11}$$

根据定义 2.1 和 (2.4)，它是良定义的。因此，由命题 4.1、(4.10) 和 (4.11)，我们得到

$$\begin{aligned} R\circ\Psi^k([\underline{E},\phi])=R\left(\left[\Psi^k(\underline{E}),\sum_{l\geq 1}k^l\phi_l\right]\right)&=\mathrm{ch}\left(\Psi^k(\underline{E})\right)-\sum_{l\geq 1}k^l d\phi_l\\ &=\Psi^k_Z(\mathrm{ch}(\underline{E}))-\Psi^k_Z(d\phi)=\Psi^k_Z\circ R([\underline{E},\phi]). \end{aligned} \tag{4.12}$$

此外，由命题 4.1 和 (2.10)，

$$I\circ\Psi^k([\underline{E},\phi])=\Psi^k\circ I([\underline{E},\phi]). \tag{4.13}$$

由 [5, 定理 3.1], 的证明可知，存在唯一的自然变换 $\Psi^k:\widehat{K}^0\to\widehat{K}^0$，满足 (4.12) 和 (4.13)。因此，(4.3) 中的 Adams 运算 Ψ^k 给出了 $\widehat{\Psi}^k$ 在 [5]中的一种构造性实现。

5. T_g-equivariant differential K-theory

设 B 是一个闭光滑流形，G 是一个在B上光滑作用的紧李群。本小节将讨论与 G的一个固定元素相关的、B 上的微分 K 理论某个等变版本的 λ-环结构。

固定 $g\in G$ 时，令 $T_g:=\overline{\{g\}}$ 为由 g生成的 G 的紧阿贝尔子群。与非等变情形相比，一个 G-等变几何三元组 $E=(E,\ h^E,\ \nabla^E)$由一个 G-等变厄米向量丛$(E,\ h^E)$和一个 G-不变的埃尔米特联络 ∇^E组成。我们用 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in I}$标记 T_g 的复不可约表示，其中每个 V_γ 都是一维复表示。因此，在

$$B^g:=\{x\in B;gx=x\}, \tag{5.1}$$

在 T_g作用的不动点集上，作为 B^g上的 T_g-等变几何三元组，我们有如下分解

$$(E,h^E,\nabla^E)|_{B^g}=\bigoplus_{\gamma\in I}(E_\gamma,h^{E_\gamma},\nabla^{E_\gamma})\otimes V_\gamma. \tag{5.2}$$

现在我们定义

$$\mathrm{ch}_{T_g}(\underline{E}):=\sum_{\gamma\in I}\mathrm{ch}\left(E_\gamma\right)\otimes\chi_{V_\gamma}\in\Omega^{\mathrm{even}}(B^g,\mathbb{R})\otimes R(T_g), \tag{5.3}$$

其中χ_{V_γ} 是表示 V_γ的特征。这里，$R(T_g)$表示 T_g的表示环。若在 $g\in T_g$处计算$\mathrm{ch}_{T_g}(E)$，则得到通常的$\mathrm{ch}_g(E)$。

与 (2.2) 比较，对于两个 G-等变几何三元组 E_0 和 E_1，它们具有相同的底层 G-等变向量丛 E，存在 G-等变投影π：$B\times\mathbb{R}\to B$，以及定义在 $B\times\mathbb{R}$上的 G-等变几何三元组 π^*E，使得 $\pi^*E|_{B\times\{j\}}=E_j$,$j=0,\ 1$。这里，$G$在 $B\times\mathbb{R}$ 上的作用自然地由 G在 B 上的作用以及 G在

$\mathbb{R}$上的平凡作用提升而来。于是，在 $B^g \times \mathbb{R}$上，对于 π^*E，我们有如 (5.2) 所示的分解。因此，等变陈-西蒙斯类 $\widetilde{\mathrm{ch}}_{T_g}\left(E_0,\ E_1\right) \in \left(\Omega^{\mathrm{odd}}(B^g,\ \mathbb{R})/\mathrm{Im}\ d\right) \otimes R(T_g)$ 定义为

$$\widetilde{\mathrm{ch}}_{T_g}\left(\underline{E_0}, \underline{E_1}\right) := \int_0^1 \left\{\mathrm{ch}_{T_g}\left(\underline{\pi^* E}\right)\right\}^{ds} ds. \tag{5.4}$$

此外，与（2.4）中一样，

$$d\,\widetilde{\mathrm{ch}}_{T_g}\left(\underline{E_0}, \underline{E_1}\right) = \mathrm{ch}_{T_g}(\underline{E_1}) - \mathrm{ch}_{T_g}(\underline{E_0}) \in \Omega^{\mathrm{even}}(B^g, \mathbb{R}) \otimes R(T_g) \tag{5.5}$$

并且陈-西蒙斯类仅取决于 ∇^{E_j} for $j = 0,\ 1$，这一点可直接由 [16, 定理 B.5.4] 的证明得到。

定义 5.1。对于 $g \in G,\ B$ 的 T_g-等变微分 K 理论中的一个循环是一个对（$E,\ \phi$），其中 E是定义在 B上的 G-等变几何三元组，并且 $\phi \in \left(\Omega^{\mathrm{odd}}(B^g,\ \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d\right) \otimes R(T_g)$。如果存在一个 G-等变向量丛同构 $\Phi : \underline{E_1 \oplus E_3} \to \underline{E_2 \oplus E_3}$ over B，使得两个循环 $\left(E_1,\ \phi_1\right)$ 和 $\left(E_2,\ \phi_2\right)$ 满足

$$\widetilde{\mathrm{ch}}_{T_g}\left(\underline{E_1} \oplus \underline{E_3}, \Phi^*\left(\underline{E_2} \oplus \underline{E_3}\right)\right) = \phi_2 - \phi_1. \tag{5.6}$$

我们将 T_g-等变微分 K-群 $\widehat{K}^0_{T_g}(B)$ 定义为循环的等价类所构成的格罗滕迪克群。

对于循环 (E, ϕ) 和 (F, ψ)，我们可以按照 (2.7) 定义 $[E, \phi] \cup [F, \psi]$，将 ch 替换为 ch^{T_g}，并将微分形式的楔积替换为如下定义的乘积 $(\phi \otimes \chi_V) \wedge (\psi \otimes \chi_W) = (\phi \wedge \psi) \otimes \chi_V \chi_W$，其中 $\phi \otimes \chi_V, \psi \otimes \chi_W \in \Omega^*(B^g, \mathbb{R}) \otimes R(T_g)$。注意，$\chi_V \chi_W = \chi_{V \otimes W}$。按照引理 2.15], 的相同证明，我们可知 $\widehat{K}^0_{T_g}(B)$ 也是含幺交换环，其中 $\mathbb{C}$ 是等变平凡。值得注意的是，在定义 2.14],中定义了另一个等变微分 K-环 $\widehat{K}^0_g(B)$。事实上，在 $g \in G$上取值可得到一个良定义的环同态

$$\mathrm{ev} : \widehat{K}^0_{T_g}(B) \to \widehat{K}^0_g(B). \tag{5.7}$$

由于 $R(T_g)$ 是一个 $R(G)$-模，$\widehat{K}^0_{T_g}(B)$ 也是一个 $R(G)$-模，并且该求值映射是 $R(G)$-模同态。

以下命题是 (2.8) 的等变扩展，也是 [14,命题 3.1]的类似结果。其证明与 [14, 命题 3.1] 中的证明相同。

命题 5.2。对于 $g \in G$，存在一个 $R(G)$-模的正合序列

$$K^1_G(B) \xrightarrow{\mathrm{ch}_{T_g}} \left(\Omega^{\mathrm{odd}}(B^g, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d\right) \otimes R(T_g) \xrightarrow{a} \widehat{K}^0_{T_g}(B) \xrightarrow{I} K^0_G(B) \longrightarrow 0, \tag{5.8}$$

其中，$K^*_G(B)$ 表示 B 的等变拓扑 K-群，$a(\phi) = [0, \phi]$，$I([E, \phi]) = [E]$，并且 $\mathrm{ch}_{\underline{T_g}}$ 在 $K^1_G(B)$ 上的定义方式与 [14,(3.7)] 相同，只需将在等变几何三元组上的 *(5.3)* 中的 ch_g 替换为 ch^{T_g}。

请注意，在 [14, 命题 3.1], 中，正合性是针对 S^1-作用证明的。但其证明显然适用于任意紧李群作用，因为根据 [17, 命题 2.4], ，对于任意紧李群 G 以及 B 上的 G-等变向量丛 E，存在一个 G-等变向量丛 $E^\perp$，使得 $E \oplus E^\perp$ 是一个 G-等变平凡向量丛。

对于 G-等变向量丛 E over B，根据 [17, 命题 3.9], $K^*_G(\mathbb{P}(E))$ 作为 $K^*_G(B)$-代数由 $\mathbb{P}(E)$ 上典范丛的对偶丛生成。因此

定理 2.2 的论证自然可以推广到等变情形。换言之，对于等变投影 $\sigma : \mathbb{P}(E) \to B$，拉回映射 $\sigma^* : \widehat{K}^0_{T_g}(B) \to \widehat{K}^0_{T_g}(\mathbb{P}(E))$ 是单射。因此，分裂原理对于 T_g-等变微分 K 理论同样成立。

下面，我们将在 $\widehat{K}^0_{T_g}(B)$ 上构造一个 λ-环结构。记

$$\Gamma_g(B) := \Gamma(B^g) \otimes R(T_g). \tag{5.9}$$

于是，(2.23) 对于 $\Gamma(B^g)$ 以及 $R(T_g)$ 中的乘法，诱导出 $\Gamma_g(B)$ 上的乘法。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们定义 Adams 运算

$$\Psi^k_{\Gamma_g} : \Gamma_g(B) \to \Gamma_g(B), \quad (\alpha \otimes \chi_{V_{\gamma_1}}, \beta \otimes \chi_{V_{\gamma_2}}) \mapsto (k^l \alpha \otimes \chi^k_{V_{\gamma_1}}, k^l \beta \otimes \chi^k_{V_{\gamma_2}}) \tag{5.10}$$

对于 $\alpha \in Z^{2l}(B^g, \mathbb{R})$, $\beta \in \Omega^{2l-1}(B^g, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d$ 和不可约表示 V_{γ_1}, V_{γ_2} 属于 T_g。注意，$\chi^k_{V_\gamma} = \chi_{V_\gamma^{\otimes k}}$ 和 $V_\gamma^{\otimes k}$ 仍是 T_g 的不可约表示，因此 (1.14) 对 $\Psi^k_{\Gamma_g}$ 成立。出于与引理 2.3 相同的原因，由定理 1.3，$\Gamma_g(B)$ 具有一个 λ-环结构 $\lambda^n_{\Gamma_g}$: $\Gamma_g(B) \to \Gamma_g(B)$, $n \in \mathbb{N}$，其构造方式如 (2.25) 所示。

对于 $\widehat{K}^0_{T_g}(B)$ 的一个循环 (E, ϕ)，与 (2.29) 相比较，对 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\lambda^n(\underline{E}, \phi) := \left(\Lambda^n(\underline{E}), \left[\lambda^n_{\Gamma_g}(\mathrm{ch}_{T_g}(\underline{E}), \phi)\right]_{\mathrm{odd}}\right). \tag{5.11}$$

其中 $[\cdot]_{\mathrm{odd}}$ 是 $\Gamma_g(B)$ 在 $\left(\Omega^{\mathrm{odd}}(B^g, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d\right) \otimes R(T_g)$ 中的分量。

下列定理的证明与 [14, 定理 2.6]以及定理 2.4 的证明几乎相同，只需将一切推广到上文所讨论的等变版本。

定理 5.3. *(5.11)* 中的映射 λ^n 诱导出一个定义良好的映射

$$\lambda^n : \widehat{K}^0_{T_g}(B) \to \widehat{K}^0_{T_g}(B) \tag{5.12}$$

并且映射 $\{\lambda^n; n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\widehat{K}^0_{T_g}(B)$ 上的一个 λ-环结构。

值得注意的是，构造 λ-环结构是困难的，甚至连 (5.7) 中 $\widehat{K}^0_g(B)$ 上的预-λ-结构也难以构造，尽管它是推导 [14] 中 eta 不变量局部化公式的最合适模型。

根据定理 5.3，对于 $k \in \mathbb{N}^*$，按 (1.13) 定义的 Adams 运算 Ψ^k: $\widehat{K}^0_{T_g}(B) \to \widehat{K}^0_{T_g}(B)$ 满足 (1.14)。如命题 4.1 所示，对于 $[E, \phi] \in \widehat{K}^0_{T_g}(\underline{B})$, $\phi = \sum_{l \geq 1,\ \gamma} \alpha_l \otimes \chi_{V_\gamma}$ 其中 $\alpha_l \in \Omega^{2l-1}(B^g, \mathbb{R})/\mathrm{Im}\, d$ 且 $\chi_{V_\gamma} \in R(T_g)$ 不可约，

$$\Psi^k([\underline{E}, \phi]) = \left[\Psi^k(\underline{E}), \sum_{l \geq 1, \gamma} k^l \alpha_l \otimes \chi^k_{V_\gamma}\right]. \tag{5.13}$$

此外，关于曲率映射 R: $\widehat{K}^0_{T_g}(B) \to Z^{\mathrm{even}}(B^g) \otimes R(T_g)$（由 $R([E, \phi]) = \mathrm{ch}_{T_g}(E) - d\phi$ 定义）以及 (5.8) 中的映射 I，性质 (4.12) 和 (4.13) 在此等变情形下也成立。 □

References

[1] J. F. Adams, 《球面上的向量场》, Ann. of Math. (2) 75 (1962), 603–632。[2] M. F. Atiyah, 《K理论》, D. W. Anderson 讲义, W. A. Benjamin, Inc., 纽约-阿姆斯特丹, 1967, v+166+xlix 页。[3] M. F. Atiyah 和 D. O. Tall, 《群表示、 λ-环与 J-同态》, Topology 8 (1969), 253–297。[4] P. Berthelot、A. Grothendieck 和 L. Illusie, 《交理论与黎曼-罗赫定理》（SGA6）, 数学讲义, 第 225 卷, Springer-Verlag, 柏林, 1971。[5] U. Bunke, 《光滑K理论中的 Adams 运算》, Geom. Topol. 14 (2010), no. 4, 2349–2381。[6] U. Bunke 和 T. Schick, 《光滑K理论》, Ast´erisque 328 (2009), 45–135。[7] D. S. Freed 和 M. Hopkins, 《关于 Ramond-Ramond场与 K理论》, J. High Energy Phys., (2000) no. 5, Paper 44, 14 pp。[8] D. S. Freed 和 J. Lott, 《微分 K理论中的指标定理》, Geom. Topol. 14 (2010), no. 2, 903–966。[9] H. Gillet 和 C. Soul´e, 《带厄米度量的代数向量丛的特征类 II》, Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 1, 205–238。[10] A. Grothendieck, 《陈类理论》, Bulletin de la Soci´et´e Math´ematique de France, 86 (1958), 137–154。[11] M. J. Hopkins 和 I. M. Singer, 《几何、拓扑与 M理论中的二次函数》, J. Differential Geom. 70 (2005), no. 3, 329–452。[12] K. R. Klonoff, 《微分 K 理论中的指标定理》, 博士论文, 德克萨斯大学奥斯汀分校, 2008, 119 页, ISBN: 978-0549-70973-2, ProQuest LLC。[13] D. Knutson, 《 λ-环与对称群的表示论》, 数学讲义, 第 308 卷。Springer-Verlag, 柏林-纽约, 1973。iv+203 页。[14] B. Liu 和 X. Ma, 《微分 K理论与 η不变量的局部化公式》, Invent. Math. 222 (2020), no. 2, 545–613。[15] D. Roessler, 《厄米向量丛 Grothendieck群上的 Lambda结构》, Israel J. Math. 122 (2001), 279–304。[16] X. Ma 和 G. Marinescu, 《全纯Morse不等式与Bergman核》, 数学进展, 第 254 卷, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2007。[17] G. Segal, 《等变 K理论》, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. (1968), no. 34, 129–151。[18] J. Simons 和 D. Sullivan, 《结构化向量丛定义微分 K 理论》, 载于《数学量子》, Clay数学会议论文集 11, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 2010, 579–599。[19] W. Zhang, 《Chern-Weil理论与Witten变形讲义》, 南开数学讲义, 第 4 卷, 世界科学出版社, 里弗埃奇, 新泽西州, 2001。

School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of MEA (Ministry of Education) & Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, Shanghai 200241, China电子邮箱地址：bliu@math.ecnu.edu.cn

Chern Institute of Mathematics & LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R. China电子邮箱地址：xiaonan.ma@nankai.edu.cn