arXiv:2602.03459v1 [cs.LG] 3 Feb 2026

网络中错误设定暴露映射下的因果推断：部分识别框架

Maresa Schr¨oder [1 2] **Miruna Oprescu** [3] **Stefan Feuerriegel** [1 2] **Nathan Kallus** [3 4]

摘要

在网络中估计处理效应颇具挑战，因为每个潜在结果都取决于网络中所有其他节点的处理。为克服这一困难，现有方法通常会设定一个暴露映射，将网络中的处理分配压缩为低维摘要。然而，如果该映射设定错误，直接效应和溢出效应的标准估计量可能会产生严重偏差。我们提出一种新颖的网络因果推断部分识别框架，用于评估暴露映射误设情况下处理效应的稳健性。具体而言，我们推导出此类误设情况下直接效应和溢出效应的紧上界与下界。因此，我们的框架将因果敏感性分析创新性地应用于暴露映射。我们针对实践中广泛使用的三种典型暴露设定构建了该框架：(i) 邻域处理的加权均值，(ii) 基于阈值的暴露映射，以及 (iii) 存在高阶溢出效应时的截断邻域干扰。此外，我们还为这些界限开发了正交估计量，并证明所得界限估计有效、紧且高效。实验结果表明，即使暴露映射设定错误，这些界限仍具有信息价值，并能提供可靠的结论。

1. 引言

在网络设定中估计处理效应，对于评估政策有效性和设计个性化干预至关重要（Viviano，2025年）。然而，经典因果推断方法假设不存在个体之间的干扰，也就是说，每个个体的结果都独立于其他个体所接受的处理，但这一假设在社交网络中往往不成立（Forastiere 等人，2021年；Matthay& Glymour，2022年；Ogburn 等人，2024年）。

示例：考虑一项公共卫生干预，旨在鼓励 *60* 岁及以上人群接种 *COVID-19* 疫苗（*Freedman* 等人，*2026*年）。干预针对的个体可能更有可能自行接种疫苗（直接效应），同时也会通过社会互动影响朋友的决策（溢出效应）。

网络设定下的因果推断从根本上说颇具挑战性，这是由于干扰（Anselin，1988；Forastiere 等人，2021年）。在此类设定中，结果不仅取决于个体自身接受的处理，也取决于与其相连的单位所接受的处理，从而产生溢出效应。更重要的是，这直接违背了稳定单元处理值假设（SUTVA），因此标准处理效应不再可识别。相反，网络因果推断必须考虑整个网络中的所有处理。

一种天¨真的处理干扰的方法是将网络中的所有处理分配纳入条件。然而，这会随着个体数量的增加呈指数增长 N，因此在实践中极不可行。一种常见的变通方法是简化问题，并施加一个暴露映射，将网络的处理分配压缩为低维汇总量（例如网络中已处理邻居的数量或比例）（Aronow & Samii，2017年）。这种方法在相关文献中得到了广泛应用（例如，Forastiere 等人，2021年；2022年；Og- burn 等人，2024年）（详见第2 节的详细概述）。然而，必须根据关于溢出效应如何在网络中传播的领域知识，事先指定暴露映射。在许多应用中，人们对这一机制的理解仅是部分的，因此暴露映射很可能存在错误设定，从而导致效应估计产生偏差。

作为一种补救方案，我们提出了一种新颖的**用于网络推断的部分识别框架**，通过敏感性分析评估在暴露映射误设时处理效应的稳健性（见图1）。具体而言，当暴露映射存在误设时，我们推导出（条件）潜在结果和处理效应的精确上下界。我们将该框架应用于实践中使用的三种典型暴露：（i）邻域处理的加权均值，

[1]LMUMunich [2]慕尼黑机器学习中心 [3]康奈尔大学 [4]Netflix。通信作者：Maresa Schr¨oder<maresa.schroeder@lmu.de>。

预印本。*2026*年*2*月*4*日。

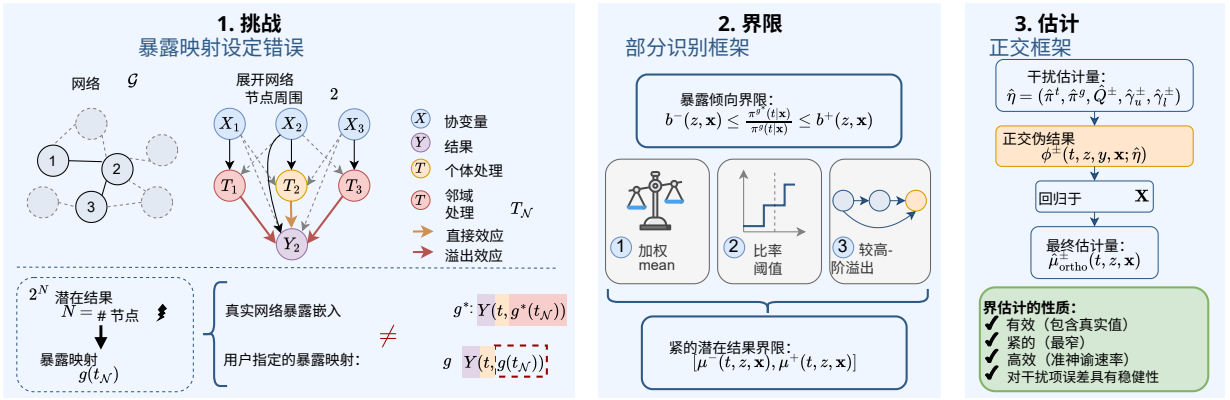


图*1.* **概述与贡献**。 **(1) 挑战**：每个个体的结果都取决于网络中的全部处理分配。现有方法通过暴露映射 g 将处理分配压缩为低维摘要。然而， g 可能与真实映射不同，从而导致效应估计产生偏差。**(2) 界限**：我们通过暴露-倾向得分界限对误设进行建模，并推导出3种常见暴露映射下的处理效应界限。**(3) 估计**：我们通过正交两阶段框架估计这些界限。我们估计的界限有效、紧、有效率，并且对干扰估计误差具有稳健性。

（ii）基于阈值的暴露映射，以及（iii）存在高阶溢出效应时的截断邻域干扰。我们的贡献如下：[1]

1 我们的界限满足若干理想的理论性质。具体而言，我们的界限是紧的且有效的，也就是说，在给定特定程度的暴露映射设定错误时，它们提供包含真实结果的最窄区间。2 我们提出一种与模型无关的正交界限估计量，能够达到准预言机收敛速率，并且对干扰项模型设定错误具有稳健性。3 我们为估计值界限提供了保证，使其仍然紧、有效且有效率。

我们的实验表明，这些界限具有信息价值，并能在暴露映射误设时促进可靠的决策。

2. 相关工作[2]

干扰： 允许不同个体之间存在干扰的文献，通常考虑两种截然不同的情形：(i)部分干扰或基于聚类的干扰，以及 (ii) 网络干扰。我们聚焦于后者，即网络干扰。相比之下，部分干扰假设干扰仅发生在组或聚类内部，而不会跨越不同组发生（例如，Bargagli-Stoffi 等人，2025年；Tchet-gen Tchetgen & VanderWeele，2012年；Qu 等，2024年；Fang &Forastiere，2025年；VanderWeele 等人，2014）。然而，在现实场景中，这种组层面的干扰不太可能成立，因此该假设限制性较强，且往往并不成立。

网络干扰的研究相对较少，现有方法大多仅适用于随机对照试验（RCTs），而非观察性数据（例如，Alzubaidi & Higgins，2024；Aronow & Samii，2017；Leung，2020；S¨avje 等人，2021）。针对网络干扰的方法通常假设能够准确认知一种用于概括网络处理的函数 g，称为暴露映射（例如，Chen 等，2024a；Forastiere 等，2021；2022；Liu 等人，2023；Ogburn 等人，2024；Sengupta 等人，2025）。文献中常用的暴露映射有三种：（i）邻域（加权）均值暴露；（ii）阈值函数；（iii）一步邻域暴露。我们在第3节给出形式化定义。然而，如果暴露映射设定错误，这些方法就无法正确估计处理效应。

网络推断中的误设： 只有少数研究考虑误设下的因果效应估计。其中，一条研究脉络关注网络结构未知时的因果效应估计，即对网络中某些边是否存在存在不确定性（例如，Egami，2021年；Bhattacharya等人，2020；S¨avje，2024年；Weinstein& Nevo，2023年；2025年；Zhang等人，2023年；2025年）。相比之下，我们的工作假设网络完全已知，但暴露映射存在误设。

我们了解到有两项研究允许暴露映射存在潜在误设，但研究设定较为简化（详情请参见补充材料B ）。Leung(2022年）考察了近似邻域干扰，允许分配给距离关注个体更远的个体的处理对该个体结果产生可能非零但逐渐减弱的影响。Belloni 等(2022年）研究了未知邻域半径下的因果效应估计。与我们的研究不同，这两种方法都局限于特定类型的误设，且仅适用于平均因果效应。相比之下，我们提出的框架不仅纳入了邻域半径的误设，也涵盖暴露

[1]代码可在 GitHub 获取：https://github.com/m-schroder/ExposureMisspecification [2]相关工作的扩展概述见补充材料 B。

映射中的其他类型误设，以及广泛的因果估计 *nds.*

研究缺口： 总之，目前尚无通用框架，能够针对实验数据和观察性数据，在各种暴露映射设定错误下界定潜在结果和处理效应。这正是我们的贡献。

3. 设定

符号说明： 我们用大写字母 X 表示随机变量，其实现值为 x （小写字母）。 X 的概率分布记为 $\mathbb{P}_X$，不过当上下文清楚时，我们会省略下标。对于离散变量，概率质量函数记为 $P(x) = P(X = x)$；对于连续变量，概率密度函数记为 $p(x)$。在我们的研究中，我们基于潜在结果框架（Rubin，2005）。我们在补充材料 A 中概述了相关符号。

3.1. 网络设定

我们采用网络因果推断的标准设定（Chen 等人，2024b；Forastiere 等，2021）。我们考虑一个结构已知的（无向）网络，其节点集合为 $\mathcal{N}_\mathcal{G}$，其中包含 $|\mathcal{G}| = N$，边集合为 $\mathcal{E}$，其中包含 $(i,j) = (j,i)$，适用于 $i,j \in \mathcal{G}$。对于每个节点 i，我们将网络划分为 $(i,\mathcal{N}_i,\mathcal{N}_{-i})$，其中 $\mathcal{N}_i$ 定义了节点 i 的邻域，即所有通过边 $(i,j) \in \mathcal{E}$ 与 i相连的节点 j； $\mathcal{N}_{-i}$ 则是 $\mathcal{G}$中 $\mathcal{N}_i$ 的补集。我们将 $|\mathcal{N}_i| = n_i$ 称为节点 i的度。上下文明确时，我们会省略下标。

每个个体 i 包含以下变量：处理 $T_i \in \{0,1\}$、混杂因素 $X_i \in \mathcal{X}^d$以及结果$Y_i \in \mathcal{Y}$。我们允许处理分配依赖于（i）该个体自身的协变量$\mathbf{X}_i = X_i$ [同质同伴影响]，，或（ii）个体 i及其邻居的协变量$\mathbf{X}_i = (X_i, X_{\mathcal{N}_i})$ [异质同伴影响]，，其中我们还假设每个节点具有相同的度n。在给定协变量$\mathbf{X}$的条件下，个体 i 的处理分配独立于其他个体的处理分配。我们将个体倾向得分 $P(t \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$ 记为 $\pi^t(\mathbf{x})$。

3.2. 暴露映射

正如网络上处理效应估计的标准做法（例如，Chen 等人，2024a；Forastiere 等人，2021年），我们假设存在一个暴露映射 g： $[0,1]^{n_i} \to \mathcal{Z}$ 其中$z_i := g(t_{\mathcal{N}_i})$，它是节点 i的邻居所分配处理的汇总函数。此处， z_i 被假定为一种充分表示，用以刻画邻居的处理如何影响结果 Y_i。因此，潜在结果完全表示为 $Y_i(t_i, z_i)$，并取决于二元处理 t_i 以及离散或连续的邻域处理 z_i。我们将网络倾向得分记为 $\pi^g(z \mid \mathbf{x}) := p(g(t_{\mathcal{N}_i}) = z \mid \mathbf{X_i} = \mathbf{x_i})$。

先前文献通常基于三种不同类型的暴露映射（参见第2节）：

1 邻域处理的加权均值：大量现有研究假定汇总函数 g表示邻居的处理的均值（例如，Belloni 等，2022年；Chen 等，2024a；2025年；Forastiere 等，2021；2022年；Jiang 和 Sun，2022年；Leung，2020；Ma 和 Tresp，2021年）。然而，在许多情形中，例如社交网络或空间干扰设定下，可以合理地假定邻居的效应会有所不同，例如随友谊亲密度或空间距离而变化（例如，Giffin 等，2023年）。因此，这促使我们将底层暴露映射 g^* 形式化为处理的加权均值。

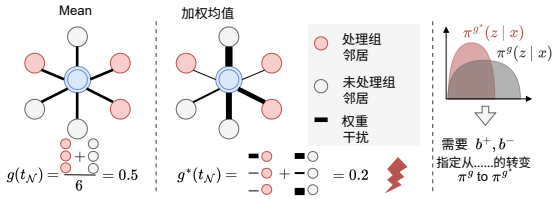


图2. 暴露错设：处理的加权均值

2 **阈值化：** 类似地，映射 g 可被假定为接受处理的邻居之和或受处理邻居比例的函数（例如，Aronow & Samii，2017年；McNealis 等，2024年；Ogburn 等人，2024年；Qu 等，2024年）。例如，该映射可产生一个二元变量 Z，用以表示是否有超过一半的邻居接受了处理。

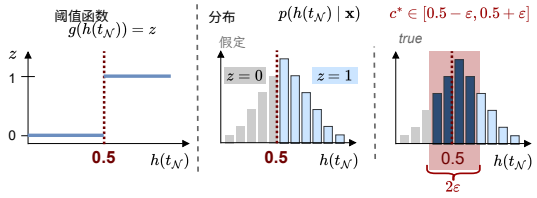


图 3。 暴露错设：阈值函数

3 **高阶溢出效应：** 仅直接邻居的处理会产生溢出效应这一假设可能过强（例如，Belloni 等，2022年；Leung，2022年；Ogburn 等人，2024年；Weinstein &Nevo，2023年）。高阶邻居 即使在网络中没有直接连接边，也可能混淆因果关系。

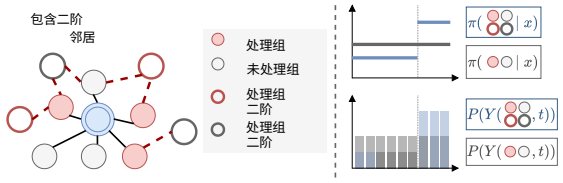


图 4。 暴露错设：高阶溢出效应

3.3. 网络因果推断

我们关注的是在个体处理和邻域处理下估计平均潜在结果(APO)

$T=t$ 和 $Z=z$，其中 $z=g(t_{\mathcal{N}})$，定义为

$$\psi(t,z) := \mathbb{E}[Y(t,z)], \tag{1}$$

以及条件平均潜在结果 (CAPO)

$$\mu(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}[Y(t,z) \mid \mathbf{X}=\mathbf{x}]. \tag{2}$$

总体效应可分解为直接效应（反映个体自身处理对其结果的影响）和溢出效应（反映邻居的处理对该个体结果的间接影响）。

定义 3.1（直接效应（ADE / IDE））。在保持邻域处理 $Z=z$ 不变的情况下，个体处理分配 $T=t$ 和 $T=t'$ 之间的平均直接效应（*ADE*）和个体直接效应（*IDE*）定义为

$$\tau_d^{(t,z),(t',z)} := \psi(t,z) - \psi(t',z) \tag{3}$$

$$\tau_{d_i}^{(t,z),(t',z)}(\mathbf{x}_i) := \mu(t,z,\mathbf{x}_i) - \mu(t',z,\mathbf{x}_i). \tag{4}$$

定义 3.2（溢出效应（ASE / ISE））。在保持个体处理 $T=t$ 不变的情况下，邻域处理 $Z=z$ 和 $Z=z'$ 之间的平均溢出效应（*ASE*）和个体溢出效应（*ISE*）定义为

$$\tau_s^{(t,z),(t,z')} := \psi(t,z) - \psi(t,z') \tag{5}$$

$$\tau_{s_i}^{(t,z),(t,z')}(\mathbf{x}_i) := \mu(t,z,\mathbf{x}_i) - \mu(t,z',\mathbf{x}_i). \tag{6}$$

定义 3.3（总体效应（AOE / IOE））。个体处理分配 $T=t$ 和 $T=t'$ 与邻域处理分配 $Z=z$ 和 $Z=z'$ 之间的平均总体效应（*AOE*）和个体总体效应（*IOE*）定义为

$$\tau_o^{(t,z),(t',z')} := \psi(t,z) - \psi(t',z') \tag{7}$$

$$\tau_{o_i}^{(t,z),(t',z')}(\mathbf{x}_i) := \mu(t,z,\mathbf{x}_i) - \mu(t',z',\mathbf{x}_i). \tag{8}$$

正如网络因果推断中的惯例（例如，Chen 等人，2024a；Forastiere 等人，2021年），我们采用关于一致性、无混杂性和正值性的标准假设，并将其调整为存在网络干扰的情形。

假设 3.4（网络一致性）。给定相同的个体和邻域处理暴露时，潜在结果等于观测结果，即 $y_i = y_i(t_i,\ t_{\mathcal{N}_i})$，若 i接受处理 t_i 且邻域处理为 $t_{\mathcal{N}_i}$。

假设3.5（网络干扰）。一个个体的处理只会影响其自身及其邻居的结果。处理对邻居结果的干扰由一个（可能未知的）汇总函数 g^* 表示，即 $\forall t_{\mathcal{N}_i},\ t'_{\mathcal{N}_i}$ 满足 $g^*(t_{\mathcal{N}_i}) = g^*(t'_{\mathcal{N}_i})$ 时，有$y_i(t_i,\ t_{\mathcal{N}_i}) = y_i(t_i,\ t'_{\mathcal{N}_i})$。

假设 3.6（网络无混杂性）。给定个体及其邻域特征后，潜在结果与个体处理和邻域处理相互独立，即 $\forall t,\ t_{\mathcal{N}}$: $y_i(t,t_{\mathcal{N}}) \perp\!\!\!\perp t_i, t_{\mathcal{N}_i} \mid \mathbf{x}_i$。若汇总函数 g^* 设定正确，则还有$\forall t, g^*(t_{\mathcal{N}})$: $y_i(t,g^*(t_{\mathcal{N}})) \perp\!\!\!\perp t_i, g^*(t_{\mathcal{N}_i}) \mid \mathbf{x}_i$。

假设 3.7（网络正值性）。给定个体及其邻居的特征后，每种处理组合 (t,z) 都以正概率被观测到，即 $0 < p(t,z \mid \mathbf{x}) < 1$对所有 $\mathbf{x}\ t,z$.

在假设 3.4–3.7以及暴露映射被正确设定的情况下 g^*，可以从观察性数据中识别（条件）潜在结果。然而，如果暴露映射 $g \neq g^*$ 被误设，假设3.5和3.6 将不满足。因此，无法根据现有数据对潜在结果进行点识别。

3.4. 目标：暴露映射误设下的部分识别

我们提出转向部分识别，并在此类误设下计算潜在结果和处理效应的上下界 $\mu^{\pm}(t,\ z^*,\ \mathbf{x})$[3]。

我们将部分识别形式化为暴露映射倾向的分布偏移 $\pi^g(z \mid \mathbf{x}) := p(g(t_{\mathcal{N}}) = z \mid \mathbf{x})$，即所采用映射 g 与真实但未知的映射 g^*之间的分布偏移。对于 g 与g^*之间给定的偏移，我们旨在构造上下界 $b^-(z,\ \mathbf{x}) \leq b^+(z,\ \mathbf{x})$，其中 $b^-(z,\ \mathbf{x}) \in 0,1]$与 $b^+(z,\ \mathbf{x}) \in [1,\infty)$作用于广义倾向比，从而对于所有 $z,\ \mathbf{x}$，有

$$b^-(z,\mathbf{x}) \leq \frac{p(g^*(t_{\mathcal{N}})=z \mid \mathbf{x})}{p(g(t_{\mathcal{N}})=z \mid \mathbf{x})} \leq b^+(z,\mathbf{x}). \tag{9}$$

值得注意的是，我们不对数据生成过程施加任何参数假设。$b^{\pm}$ 的具体解释和构造取决于 g 和 g^*的定义。

现在，我们将形式化说明框架如何量化错误映射，以便获得不同暴露映射的界限。相关论证见补充材料D。

1 邻域处理的加权均值：设暴露映射 $g(t_{\mathcal{N}})$: $= \sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} = \frac{N_T}{n}$规定为受处理邻居比例，其中 N_T 表示接受处理的邻居数量，n 表示邻域大小。我们假设真实暴露映射 $g^*(t_{\mathcal{N}})$由受处理邻居的加权比例给出，其中每个权重与 $\frac{1}{n}$ 的差值至多为$\frac{1}{n} \geq \varepsilon \geq 0$。于是，上界和下界为

$$b^-(z,\mathbf{x}) = \inf_{s\in\mathcal{Z}} \frac{P(\frac{ns}{1-\varepsilon n} \leq N_T \leq \frac{nz}{1+\varepsilon n} \mid \mathbf{x})}{P(ns \leq N_T \leq nz \mid \mathbf{x})}, \tag{10}$$

$$b^+(z,\mathbf{x}) = \sup_{s\in\mathcal{Z}} \frac{P(\frac{ns}{1+\varepsilon n} \leq N_T \leq \frac{nz}{1-\varepsilon n} \mid \mathbf{x})}{P(ns \leq N_T \leq nz \mid \mathbf{x})}. \tag{11}$$

2 阈值化：令 $h(t_{\mathcal{N}}) := \sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n}$ 表示接受处理的邻居所占的比例。假设暴露映射

[3]在正文中，我们重点讨论潜在结果的界限。我们在补充材料C中给出了对处理效应的扩展。

通过阈值 $g(t_{\mathcal{N}}) = f(h(t_{\mathcal{N}})) := \mathbf{1}_{[h(t_{\mathcal{N}}) \geq c]}$ 来指定。那么，$P(g(t_{\mathcal{N}}) = 1 \mid \mathbf{x}) = P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})$，其中 N_T 表示接受处理的邻居数量。现在，我们允许定义 $g^*(t_{\mathcal{N}}) := \mathbf{1}_{[h(t_{\mathcal{N}}) \geq c^*]}$ 的真实阈值 c^* 与 c 相差 $\varepsilon \in [0, \min\{c, 1-c\}]$，即 $c^* \in [c \pm \varepsilon]$。经过直接计算，我们得到

$$\frac{P(N_T \geq n(c+\varepsilon) \mid \mathbf{x})}{P(P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})} \leq \frac{P(g^*(t_{\mathcal{N}}) = 1 \mid \mathbf{x})}{P(g(t_{\mathcal{N}}) = 1 \mid \mathbf{x})} \tag{12}$$

$$\leq \frac{P(N_T \geq n(c-\varepsilon) \mid \mathbf{x})}{P(P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})}, \tag{13}$$

其中，$z = 0$ 的界限由互补概率得出。

3 高阶溢出效应：此处，g 的设定存在错误，因为它不仅仅是 $t_{\mathcal{N}_i}$的函数，而且还是其他处理 $t_U \subset t_{\mathcal{N}_{-i}}$（针对相应节点 i）的函数。因此，t_U 会以未观测的方式使暴露汇总 z 产生偏差。于是，我们采用未观测混杂文献中的敏感性界限（Dorn & Guo，2022年；Frauen 等人，2023年），即我们需要用户指定的函数 $b^{\pm}$，使得

$$b^-(z, \mathbf{x}) \leq \frac{p(g(t_{\mathcal{N} \cup U}) = z \mid \mathbf{x})}{p(g(t_{\mathcal{N}}) = z \mid \mathbf{x})} \leq b^+(z, \mathbf{x}), \tag{14}$$

其中 g 可以是任意暴露映射，例如1 和2 中的均值或阈值函数。

4. 我们的部分识别框架

我们现在阐述我们的框架。我们推导出紧且有效的界限 $\mu^{\pm}(t, z, \mathbf{x})$，这些界限针对潜在结果，其思想来自因果敏感性分析（第4.1节）。在补充材料C中，我们将这些界限转化为直接效应、溢出效应和总体效应的相应界限。接下来，我们开发一个正交估计量 $\hat{\mu}^{\pm}_{\text{ortho}}(t, z, \mathbf{x})$，其基于正交统计学习理论（第4.2节）。最后，我们推导该估计量的理论性质，包括收敛速率、尖锐性和有效性保证（第4.3节）。所有证明见补充材料D。

4.1. 推导界限 $\mu^{\pm}(t, z, \mathbf{x})$

现在，我们给出关于误设 $b^{\pm}$的 CAPO 紧上界和下界。

定义 *4.1.* 令 $\tilde{\mathbb{P}}$表示 $\tilde{\mathbb{P}}(X, T, Z, Y(T, Z))$上的一个分布，使得 *(i)* $\tilde{\mathbb{P}}$ 与 $\mathbb{P}(X, T, Z, Y)$ 上观测到的分布 $\mathbb{P}$ 相匹配；*(ii)* 相应的条件分布 $\tilde{\pi}^g(z \mid x)$ 几乎处处满足 $b^-(z, x) \leq \frac{\tilde{\pi}^g(z \mid x)}{\pi^g(z \mid x)} \leq b^+(z, x)$。令 $\tilde{\mathcal{M}}$ 表示此类分布 $\tilde{P}$ 的集合。那么，关于误设的 *CAPO* 尖锐界限 $b^{\pm}(z, \mathbf{x})$ </style}为

$$\mu^+(t, z, \mathbf{x}) = \sup_{\tilde{P} \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}[Y(t, z) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}], \tag{15}$$

$$\mu^-(t, z, \mathbf{x}) = \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{\tilde{P}}[Y(t, z) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]. \tag{16}$$

直觉：为了得到 CAPO 界，我们需要对 $\mathbb{E}[Y \mid t, z, \mathbf{x}] = \int_{\mathcal{Y}} y p(y \mid t, z, \mathbf{x})\, \mathrm{d}y$. 确定界限。根据公式 9，我们只需令 $\mu^{\pm}(y \mid t, z, \mathbf{x}) = \frac{1}{b^{\mp}(z, \mathbf{x})} \mathbb{E}[Y \mid t, z, \mathbf{x}]$，即可构造有效界限。然而，所得界限并不紧，而是较为保守，且可能缺乏信息量。为了得到定义 4.1 中的等式，我们借鉴敏感性分析的思路（Dorn et al., 2025；Frauen et al., 2023），并找到一个截断值 C，使得用非常简化的符号表示时，我们有

$$\mu^{\pm} = \frac{1}{b^{\mp}} \int_{-\infty}^{C^{\pm}} y p(y \mid \cdot)\, \mathrm{d}y + \frac{1}{b^{\pm}} \int_{C^{\pm}}^{\infty} y p(y \mid \cdot)\, \mathrm{d}y. \tag{17}$$

令 $F_Y(y) := F_Y(y \mid t, z, \mathbf{x})$ 表示 Y 的条件累积分布函数（CDF）。我们将结果在水平 $\alpha^{\pm} = \frac{(1 - b^{\mp}(z, \mathbf{x})) b^{\pm}(z, \mathbf{x})}{b^{\pm}(z, \mathbf{x}) - b^{\mp}(z, \mathbf{x})}$ 处的条件分位数函数 定义为

$$Q^{\pm}(t, z, \mathbf{x}) := \begin{cases} \inf\left\{ y \mid F_Y(y), \geq \alpha^{\pm} \right\}, & \text{if } b^- < 1 < b^+, \\ \inf\left\{ y \mid F_Y(y), \geq \frac{1}{2} \right\}, & \text{if } b^- = b^+, \end{cases} \tag{18}$$

其中，我们通过 $b^{\pm}$简写了 $b^{\pm}(z, \mathbf{x})$的符号说明。

通过将 $Q^{\pm}(t, z, \mathbf{x})$用作截断值 C，这些界限在干扰下是紧的。我们在下述定理中对此加以形式化，并给出便于估计的闭式解：

定理 4.2. 令 $Q^{\pm}(t, z, \mathbf{x})$ 的定义如式（*18*），并令 $(u)_+ = \max\{u, 0\}$。尖锐*CAPO*上下界由下式给出

$$\begin{aligned} \mu^{\pm}(t, z, \mathbf{x}) = {} & Q^{\pm}(t, z, \mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{b^{\mp}(z, \mathbf{x})} \mathbb{E}\left[(Y - Q^{\pm}(t, z, \mathbf{x}))_+ \mid t, z, \mathbf{x} \right] \\ & - \frac{1}{b^{\pm}(z, \mathbf{x})} \mathbb{E}\left[(Q^{\pm}(t, z, \mathbf{x}) - Y)_+ \mid t, z, \mathbf{x} \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

注释4.3（敏感性模型的局限）。若 $b^-(z, \mathbf{x}) = b^+(z, \mathbf{x}) = 1$（无暴露映射偏移），则识别集收缩为单点，且 $\mu^{\pm}(t, z, \mathbf{x}) = \mathbb{E}[Y \mid t, z, \mathbf{x}]$。当 $b^+(z, \mathbf{x}) \to \infty$ 且 $b^-(z, \mathbf{x})$固定时，上界集中于 $Y \mid (t, z, \mathbf{x})$的顶部 $b^-(z, x)$尾部（下界则集中于底部 $b^-(z, x)$尾部）。在极限情况下，$b^-(z, \mathbf{x}) \to 0$ 且 $b^+(z, \mathbf{x}) \to \infty$，界限变得无信息，并收敛到条件支撑集 $\mu^+(t, z, \mathbf{x}) \to \text{ess sup}(Y \mid t, z, \mathbf{x})$；$\mu^-(t, z, \mathbf{x}) \to \text{ess inf}(Y \mid t, z, \mathbf{x})$.[4]

[4]本质上确界（本质下确界）简记为esssup（essinf），并定义条件分布 $Y \mid t, z, \mathbf{x}$的本质上（下）界的上确界（下确界），即具有非零测度的上（下）界。

4.2. 正交估计量

•代入估计的缺点。定理4.2 的刻画立即给出一种代入估计策略：估计截断值 $Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$ 以及两个条件矩函数

$$\gamma_u^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}\big[(Y - Q^{\pm}(\cdot))_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}\big],$$
$$\gamma_l^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}\big[(Q^{\pm}(\cdot) - Y)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}\big].$$

然后，将 $(\hat{}Q^{\pm}, \hat{}\gamma_u^{\pm}, \hat{}\gamma_l^{\pm})$ 代入定理 4.2，得到 $\hat{}\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$。然而，由于干扰函数估计误差，这类代入估计量会产生显著的有限样本偏差，尤其是在干扰函数比界函数本身更复杂时（Kennedy，2019年）。因此，我们采用正交化策略（Dorn 等人，2025年；Oprescu 等人，2023年），为界推导正交伪结果，然后通过对伪结果关于 $\mathbf{X}$ 进行回归来估计 $\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$。

•正交伪结果。回顾一下，$T \in \{0,1\}$而 Z 是离散或连续的。这一点很重要，因为我们的界涉及在固定邻域暴露水平 z 处进行评估。当 Z 是二元或离散时，对于每个固定的 (t,z)，泛函$\mathbb{P} \mapsto \mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$ 是正则的（路径可微），因此我们可以构造基于有效影响函数的伪结果。当 Z 是连续时，在 $Z=z$ 处进行评估并非路径可微；因此，我们用基于核函数 $K_h(Z-z)$ 的局部平滑目标替代点估计，这会引入由带宽h控制的非参数偏差-方差权衡。

为便于说明，我们现在给出正交上界 μ^{+}，并将下界 μ^{-} 留待补充材料 C。我们将 $(\pi^t, \pi^g, Q^{\pm}, \gamma_u^{\pm}, \gamma_l^{\pm})$ 称为干扰参数。

定理 4.4。设 $S=(\mathbf{X}\ Y,T,Z)$。固定 (t,z)。定义

$$\omega_{z,h}(Z) := \begin{cases} \mathbf{1}_{[Z=z]}, & \textit{if } Z \textit{ binary/discrete}, \\ K_h(Z-z), & \textit{if } Z \textit{ continuous}, \end{cases}$$

并令 $\pi^g(Z \mid \mathbf{X})$ 表示条件概率质量函数（离散型 Z）或密度（连续型 Z）。令 $\widehat{\eta} = (\widehat{\pi}^t, \widehat{\pi}^g, \widehat{Q}^{+}, \widehat{\gamma}_u^{+}, \widehat{\gamma}_l^{+})$ 为一组估计的干扰参数。那么，*CAPO* 上界 $\mu^{+}(t,z,\mathbf{x})$ 对应的正交伪结果为：

$$\phi_{t,z}^{+}(S;\widehat{\eta}) = \widehat{Q}^{+}(t,z,\mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_u^{+}(t,z,\mathbf{X})}{b^{-}(z,\mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_l^{+}(t,z,\mathbf{X})}{b^{+}(z,\mathbf{X})} + \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\,\omega_{z,h}(Z)}{\widehat{\pi}^t(\mathbf{X})\,\widehat{\pi}^g(Z \mid \mathbf{X})} \left[\frac{(Y - \widehat{Q}^{+}(t,Z,\mathbf{X}))_+ - \widehat{\gamma}_u^{+}(t,Z,\mathbf{X})}{b^{-}(Z,\mathbf{X})} - \frac{(\widehat{Q}^{+}(t,Z,\mathbf{X}) - Y)_+ - \widehat{\gamma}_l^{+}(t,Z,\mathbf{X})}{b^{+}(Z,\mathbf{X})} \right]. \tag{20}$$

此外，当 $\widehat{\eta} = \eta$时，该伪结果对于其目标界泛函是无偏的（见注 *4.5*）。

算法 1 界的正交估计量

输入： 数据 $\{S_i = (\mathbf{X}_i, Y_i, T_i, Z_i)\}_{i=1}^{n}$，目标 (t,z)，带宽 h（如果 Z 连续），折 $\{\mathcal{I}_k\}_{k=1}^{K}$、干扰估计量、回归学习器 $\widehat{\mathbb{E}}_n$
对于 $k = 1, \ldots, K$ **do**
  在 $\{S_i : i \notin \mathcal{I}_k\}$ 上拟合干扰参数 $\widehat{\eta}^{(-k)}$
  对于 $i \in \mathcal{I}_k$，**执行**
    $\widehat{\phi}_{t,z,i}^{+} \leftarrow \phi_{t,z}^{+}(S_i;\ \widehat{\eta}^{(-k)})$
  结束循环
结束循环
$\widehat{\psi}^{+}(t,z) \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{\phi}_{t,z,i}^{+}$ （样本均值）
$\widehat{\mu}^{+}(t,\ z,\ \mathbf{x}) \leftarrow \widehat{\mathbb{E}}_n[\phi_t^{+}{}_{,z}(S;\widehat{\eta}) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]$ （回归拟合）
输出： $\widehat{\mu}^{+}(t,z,\cdot)$, $\widehat{\psi}^{+}(t,z)$

注 4.5（伪结果的无偏性）。当$\widehat{\eta} = \eta$且 Z为离散时，我们有 $\mathbb{E}\big[\phi_{t,z}^{+}(S;\ \eta) \mid \mathbf{X}=\mathbf{x}\big] = \mu^{+}(t,z,\mathbf{x})$，且 $\mathbb{E}\big[\phi_{t,z}^{+}(S;\ \eta)\big] = \psi^{+}(t,z)$。当 Z 为连续时，核局部化伪结果以带宽索引泛函 (μ_h^{+}, ψ_h^{+}) 为目标；在 z 中满足标准光滑性条件时，$\mu_h^{+}(t,z,\mathbf{x}) \to \mu^{+}(t,z,\mathbf{x})$，且 $\psi_h^{+}(t,z) \to \psi^{+}(t,z)$，当 $h \downarrow 0$ 时成立。

•界估计算法。受定理 4.4的启发，我们通过两阶段程序（算法 1）估计界限：首先学习干扰函数 $\widehat{\eta}$，然后计算正交伪结果 $\phi_t^{+}{}_{,z}(S;\widehat{\eta})$，最后通过将伪结果对 $\mathbf{X}$ 进行回归，得到 (i) CAPO界 $\widehat{\mu}^{+}(t,z,\mathbf{x}) = \widehat{\mathbb{E}}_n[\phi_{t,z}^{+}(S;\ \widehat{\eta}) \mid \mathbf{X}=\mathbf{x}]$；以及 (ii) APO界 $\widehat{\psi}^{+}(t,z) = \widehat{\mathbb{E}}_n\big[\phi_{t,z}^{+}(S;\ \widehat{\eta})\big]$，后者通过样本平均得到。为减轻过拟合偏差并确保标准正交化保证，我们使用 K折交叉拟合（Chernozhukov等人，2018）计算 $\widehat{\phi}_t^{+}{}_{z}{}_{,i}$：每个 $\widehat{\phi}_t^{+}{}_{z}{}_{,i}$ 使用在不包含 i 的数据上训练得到的干扰参数估计。

4.3. 我们的界估计量的理论性质

定理 4.2 表明，已识别的 CAPO 界$\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$是尖锐的。我们为正交估计量确立了三项额外保证（定理 4.4）。1 正交性使其对干扰参数估计误差具有二阶敏感度，从而使 CAPO 界达到准神谕速率，并使 APO 界（当 Z 为离散时）可进行根-n 推断。2 如果 $Q^{\pm}$ 得到一致估计，且倾向模型（π^t, π^g）或矩函数（$\gamma_u^{\pm}, \gamma_l^{\pm}$）之一得到一致估计，那么我们估计的端点将收敛（以 $L_2(P_{\mathbf{X}})$ 计）至尖锐界。3 如果 $Q^{\pm}$ 设定错误，但（π^t, π^g）或（$\gamma_u^{\pm}, \gamma_l^{\pm}$）之一得到一致估计，则 (C)APO 区间仍渐近有效，但可能较为保守。正文给出了离散 Z的结果；连续 Z 的情形则留待补充材料 C.4 讨论。所有证明均见补充材料 D。

• 借助正交性的准神谕学习。下一个定理是关键保证：在标准正则性条件下，正交性意味着干扰误差的贡献

仅通过误差乘积。[5]

假设 4.6（正则性与重叠）。存在$\varepsilon > 0$和 $M < \infty$，使得几乎处处满足：(i) $\varepsilon \le \pi^t(\mathbf{X})\ \widehat{\pi}^t(\mathbf{X}) \le 1-\varepsilon$；(ii) 若 Z 为离散变量，则对所有相关的 $(z,\mathbf{X})$，$\varepsilon \le \pi^g(z \mid \mathbf{X})\ \widehat{\pi}^g(z \mid \mathbf{X})$；若 Z 为连续变量，则存在 z 的一个邻域 $\mathcal{N}_z$，使得对所有 $u \in \mathcal{N}_z$，$\varepsilon \le \pi^g(u \mid \mathbf{X})\ \widehat{\pi}^g(u \mid \mathbf{X}) \le M$；(iii) $|Y|, |\widehat{\gamma}_u^{\pm}|, |\widehat{\gamma}_l^{\pm}|, |\widehat{Q}^{\pm}| \le M$。

定理*4.7*（二阶干扰误差（离散 Z））。假设 Z 为离散变量且假设 *4.6* 成立。令 $\widehat{\eta} = (\widehat{\pi}^t, \widehat{\pi}^g, \widehat{Q}^+, \widehat{\gamma}_u^+, \widehat{\gamma}_l^+)$ 表示定理 *4.4* 中用于 $\phi_{t,z}^+(S;\widehat{\eta})$ 的交叉拟合干扰函数。定义 $r_{n,\pi} := \|\widehat{\pi}^t - \pi^t\|_2 + \|\widehat{\pi}^g - \pi^g\|_2$，$r_{n,Q} := \|\widehat{Q}^+ - Q^+\|_2$，以及 $r_{n,\gamma} := \|\widehat{\gamma}_u^+ - \gamma_u(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2 + \|\widehat{\gamma}_l^+ - \gamma_l(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2$，其中 $\gamma_u(\widehat{Q}^+;X) := \mathbb{E}[(Y - \widehat{Q}^+(X))_+ \mid T=t, Z=z, X]$，且 $\gamma_l(\widehat{Q}^+;X) := \mathbb{E}[(\widehat{Q}^+(X) - Y)_+ \mid T=t, Z=z, X]$。那么

$$\left\|\mathbb{E}\left[\phi_{t,z}^+(S;\widehat{\eta}) - \phi_{t,z}^+(S;\eta) \mid \mathbf{X}\right]\right\|_2 = O_p\left(r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2\right). \tag{21}$$

因此，干扰参数对估计误差的贡献仅为二阶。接下来，我们将证明，即使干扰参数收敛得较慢，最终阶段回归仍能达到与观测到真实伪结果时相同的速率（准神谕性质）。

假设 4.8（第二阶段回归速率）。固定 (t,z)，并令 $\widehat{\phi}_{t,z,i}^+$ 表示交叉拟合伪结果。令 $m_{t,z}^+(\mathbf{x}) := \mathbb{E}[\widehat{\phi}_{t,z}^+ \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]$。假设用于构造 $\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot)$ 的回归学习器满足

$$\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - m_{t,z}^+(\cdot)\|_2 = O_p(\delta_n), \tag{22}$$

对于某个（可能依赖于模型的）速率 δ_n。

备注 4.9（第二阶段回归假设）。假设 4.8 将最终阶段回归步骤视为黑箱：它假设，将交叉拟合伪结果对 X 进行回归时，学习器在所有可接受的干扰参数估计范围内都能达到 L_2 误差速率 δ_n $\widehat{\eta} \in \Xi$。许多学习器都满足这一条件，包括在有界函数类 $\mathcal{F}$ 上进行非参数最小二乘/经验风险最小化的估计量；若其括号熵为 $\log N_{[]}(\mathcal{F},\epsilon) \lesssim \epsilon^{-r} (0 < r < 2)$，则可得到通常的回归速率 $\delta_n \asymp n^{-1/(2+r)}$（忽略近似误差）；具体而言，对于 d 维 H¨older(β) 类，有 $\delta_n = n^{-\beta/(2\beta+d)}$。更一般地，满足标准稳定性/预言机不等式性质的黑箱回归器（例如线性平滑器）也符合这一框架（Kennedy，2023年）。因此，我们用 δ_n 来表述结果，从而将正交化与最终阶段回归方法的选择区分开来。

[5]符号说明：令 $\|f\|_2 := \{\mathbb{E}[f(\mathbf{X})^2]\}^{1/2}$ 表示 $L_2(P_{\mathbf{X}})$ 范数。若 $W_n/a_n \to 0$ 依概率收敛，则记为 $W_n = o_p(a_n)$；若 W_n/a_n 依概率有界，则记为 $W_n = O_p(a_n)$。我们用 $\rightsquigarrow$ 表示依分布收敛。

推论 4.10（准神谕速率与推断（离散 Z））。假设 *4.6* 和*4.8* 成立，并令$r_{n,\pi}$，$r_{n,\gamma}$，$r_{n,Q}$ 如定理 *4.7*所述。

CAPO 收敛速率：*CAPO* 上界估计量满足

$$\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2 = O_p\left(\delta_n + r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2\right).$$

特别地，如果 $r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2 = o_p(\delta_n)$，那么 $\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2 = O_p(\delta_n)$。

APO 收敛速率：*APO* 上界估计量 $\widehat{\psi}^+(t,z) = \mathbb{E}_n[\widehat{\phi}_{t,z}^+]$ 满足

$$\left|\widehat{\psi}^+(t,z) - \psi^+(t,z)\right| = O_p\left(n^{-1/2} + r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2\right). \tag{23}$$

此外，如果 $r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2 = o_p(n^{-1/2})$，那么

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\psi}^+(t,z) - \psi^+(t,z)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, V^+(t,z)\right), \tag{24}$$

也就是说，*APO*界估计量是渐近正态的，其方差为 $V^+(t,z) := \mathrm{Var}(\phi_{t,z}^+(S;\eta))$（效率界）。

推论4.10 确立了一个准预言机 性质：如果对于 CAPO 界，干扰估计量以速率 $o_p(\delta_n^{1/2})$收敛（对于 APO，则以 $o_p(n^{-1/4})$ 收敛），那么该估计量将达到预言机速率 $O_p(\delta_n)$，就如同干扰参数已知一样。这是因为，干扰误差仅通过二阶余项 $r_{n,\pi} r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2$ 产生影响。对于 APO，这还使得有效且紧的推断成为可能。

- **紧致性**估计界。接下来，我们给出估计值收敛到定理*4.2*中的紧识别界的条件，因此估计值界也同样是紧的。

命题 *4.11*（尖锐界的一致性（离散Z））。假设推论 *4.10* 的条件成立。假设 $\delta_n = o_p(1)$ 和$r_{n,Q} = o_p(1)$，并且另外满足 $r_{n,\pi} = o_p(1)$ 或 $r_{n,\gamma} = o_p(1)$。那么，$\|\widehat{\mu}^{\pm}(t,z,\cdot) - \mu^{\pm}(t,z,\cdot)\|_2 = o_p(1)$，且 $|\widehat{\psi}^{\pm}(t,z) - \psi^{\pm}(t,z)| = o_p(1)$。因此，估计的 *CAPO* 和 *APO* 区间收敛到尖锐识别区间。

命题4.11表明，如果 $\widehat{Q}^{\pm}$ 具有一致性，且倾向得分或条件矩干扰项中至少一项具有一致性，那么算法1就能一致地估计定理4.2中的紧 CAPO/APO 界。

- **误设下的有效性**。**$\widehat{Q}^{\pm}$ 尖锐性保证要求对 进行一致估计。我们证明，即使 存在误设，只要两个（第一阶段）干扰“模块”之一能够得到一致学习，我们的估计量仍会给出保守但有效的界限。**

推论 4.12 (模型设定错误的截断值下的渐近有效性（离散 Z))。假设推论*4.10*

成立。令$\overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$为任意可测截断值，并定义其诱导的（可能非紧的）界限

$$\bar{\mu}^{\pm}(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^{\pm}) = \overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{\mp}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(Y-\overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x}))_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big] - \frac{1}{b^{\pm}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(\overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x})-Y)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big]. \tag{25}$$

（类似地 $\psi^{\pm}(t,z) := \mathbb{E}[\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{X})]$）。那么，$[\mu^{-}(t,z,\mathbf{x})\ \mu^{+}(t,z,\mathbf{x})]$是一个有效的（不一定是尖锐的）*CAPO*区间；对于$[\psi^{-}(t,z)\ \psi^{+}(t,z)]$，结论也相同。此外，如果$\widehat{Q}^{\pm} \to Q^{\pm}$属于$L_2$，且以下条件之一成立：*(i)* $(\hat{\pi}^t,\hat{\pi}^g)$是一致的；或 *(ii)* 对于由$Q^{\pm}$诱导的尾矩目标，$(\hat{\gamma}_u^{\pm},\hat{\gamma}_l^{\pm})$是一致的，那么所得的估计值 *(C)APO*区间将分别收敛至$[\mu^{-},\mu^{+}]$和$[\psi^{-},\psi^{+}]$，并且是渐近有效的，尽管可能较为保守。若$\overline{Q}^{\pm} = Q^{\pm}$，这些界限将与尖锐界重合。

备注 4.13（连续 Z）。当 Z 为连续变量时，在点 z 处进行评估需要使用核局部化，这会导致带宽上的常见偏差-方差权衡。相应的收敛速率和推断结果见补充材料 C.4。

5. 实验

数据： [6] 我们遵循因果部分识别中的常见实践，在合成数据集上评估我们的框架。我们生成包含 $N = 1000$ 个节点和一个一维协变量的小型网络（小型数据集），以及包含 $N = 6000$ 个节点和六维协变量的更复杂网络（大型数据集）。

评估： 我们的目标是展示框架的理论性质：(1) 我们从有效性方面评估界限，即证明只要满足 $b^{\pm}$ 给出的约束，我们的界限就包含真实结果。(2) 我们比较正交界估计量与插件估计量的收敛情况。(3) 我们根据所得区间的宽度评估界限的信息量。所有结果均基于 10 次运行。[7]

结果： 研究问题 *(1)*：我们的界限是否有效？ ⇒我们通过可视化暴露映射 $\mathbf{1}$ 在小型数据集（图 5）和大型数据集（图 6）上的界限，来评估其有效性。我们比较了不同 $b^{\pm}$ (= “因子” × 真实误设规格下的界限。我们观察到，当敏感性界假设过小（因子为 0.5）时，界限无法完全包含真实效应。若界限假设足够大（因子为 ≥ 1），我们的界限则有效。

[6]数据和实现细节见补充材料 F。[7]我们的目标是展示模型无关的部分识别框架的有效性和优势。因此，我们不再比较干扰参数或第二阶段模型的不同实例化。

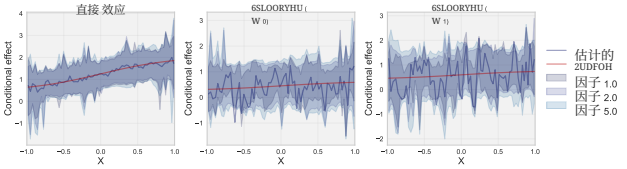


图*5.* **条件效应界：** 对我们在加权平均暴露映射下围绕真实效应的界限的可视化。界限的宽度随敏感性因子增大。从因子1.0开始，我们的界限包含真实效应。

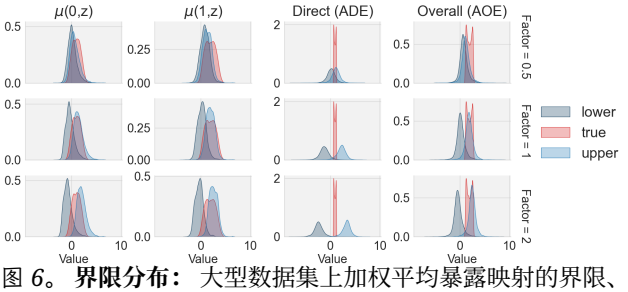
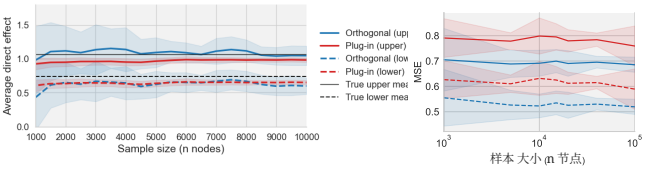


图 *6*。 **界限分布：** 大型数据集上加权平均暴露映射的界限、真实潜在结果和效应。对于足够大的敏感性因子（≥ 1），上下界的分布包含真实的潜在结果/效应，从而证实这些界限是有效的。

研究问题 *(2)*：我们的正交估计量的收敛表现与简单的插件估计量相比如何？ ⇒ 我们比较了在设置 N 下，随着网络规模增大 $\mathbf{2}$ 时，正交估计量的收敛性及其覆盖率表现（见图 7）。如预期所示：(a) 即使样本量较小，我们的界限仍然有效，并迅速接近精确预言界，而插件界限无法提供正确的覆盖率；(b) 得益于正交性，我们的框架具有更快的收敛速度。



(a) *(b)*

图 *7*。 **覆盖率与收敛：** *(a)* 在阈值暴露映射下，随着节点数量增加，ADE 的界限（6 维协变量）。正交界限是有效的，并逐渐接近精确预言界，而插件界限并不有效。*(b)* 我们的正交界限比插件界限表现出更快的收敛速度。

研究问题（*3*）：我们的界限有多富含信息？ ⇒我们评估暴露映射$\mathbf{3}$下区间的宽度。就决策而言，有信息量的界限应（i）相对于结果范围较窄，且（ii）严格为正或严格为负。我们的界限满足这两项要求：（i）在敏感性因子正确设定的所有 z 上，平均直接效应区间的平均宽度仅相当于总体结果范围的8.71%（±0.37 %）。（ii）我们的所有区间都严格远离零，从而正确识别出正的处理效应。

结论： 我们提出了一个灵活且与模型无关的框架，用于在存在暴露映射误设的情况下，对网络上的潜在结果和处理效应进行部分识别。我们推导了一个具有准神谕收敛速率性质的稳健估计框架，并表明估计界仍然有效且是紧的。最后，我们用三种常用的暴露映射实例化了该框架，并在大量实验中凸显了我们界限的可解释性。

致谢

Miruna Oprescu 得到了美国能源部科学办公室先进科学计算研究办公室 DE-SC0023112 项目奖项的支持。

影响声明

本文旨在推动《机器学习》领域的发展。我们的工作可能产生许多社会影响，但我们认为其中没有需要在此特别强调的影响。

参考文献

Adhikari, S. 和 Zheleva, E. 在异质同伴影响下推断个体直接因果效应。《机器学习》，114(4):113，2025年。

Ali, S.、Faruque, O. 和 Wang, J. 在存在空间干扰的情况下估计时空干预的直接因果效应与间接因果效应。载于欧洲机器学习与数据库知识发现联合会议，2024年。

Alzubaidi, S. H. 和 Higgins, M. J. 在k近邻干扰下检测处理干扰。《因果推断期刊》，12(1):20230029，2024年。

Anselin, L. 《空间计量经济学：方法与模型》。Springer Science & Business Media，1988年。

Aronow, P. M. 和 Samii, C. 在一般干扰下估计平均因果效应，并应用于社交网络实验。《应用统计年鉴》，11(4):1912–1947，2017年。

Bargagli-Stoffi, F. J., Tort´u, C. 和 Forastiere, L. 聚类网络干扰下的异质处理效应与溢出效应。《应用统计年鉴》，19(1):28–55, 2025年。

Belloni, A.、Fang, F. 和 Volfovsky, A.《干扰下因果推断的邻域自适应估计量》。*arXiv* 预印本，arXiv:2212.03683，2022。

Bhattacharya, R.、Malinsky, D. 和 Shpitser, I.《干扰与网络不确定性下的因果推断》。载于人工智能不确定性会议（*UAI*），2020。Chen, W.、Cai, R.、Yang, Z.、Qiao, J.、Yan, Y.、Li, Z. 和 Hao, Z.《通过目标学习进行网络化干扰下的双重稳健因果效应估计》。载于机器学习国际会议（*ICML*），2024a。Chen, W.、Cai, R.、Qiao, J.、Yan, Y. 和 Hern´andez-Lobato, J. M.《在不满足网络化无混杂假设的情况下进行网络化干扰下的因果效应估计》。*arXiv* 预印本，arXiv:2502.19741，2025年。

Chen, Z., Guo, R., Ton, J.-F. 和 Liu, Y. 隐匿混杂下的保形反事实推断。载于《知识发现与数据挖掘会议（KDD）》，2024b。

Chernozhukov, V., Chetverikov, D., Demirer, M., Duflo, E., Hansen, C., Newey, W. 和 Robins, J. 用于处理效应和结构参数的双重/去偏机器学习。《计量经济学杂志》，21(1):C1–C68, 2018年。

Dorn, J. 和 Guo, K. 通过分位数平衡对逆倾向加权进行紧的敏感性分析。《美国统计学会杂志》，118(544):2645–2657, 2022年。

Dorn, J.、Guo, K. 和 Kallus, N. 针对未测量混杂下因果推断的双重有效/双重紧的敏感性分析。《美国统计学会杂志》，120(549):331–342，2025年。

Egami, N. 未观测网络存在时的溢出效应。《政治分析》，29(3):287–316，2021年。

Fang, F. 和 Forastiere, L. 用于估计平均溢出效应和条件溢出效应的基于设计的加权回归估计量。*arXiv*预印本，arXiv:2512.12452，2025年。

Forastiere, L.、Airoldi, E. M. 和 Mealli, F. 网络观测性研究中处理效应与干扰效应的识别和估计。《美国统计学会杂志》，116(534):901–918，2021年。

Forastiere, L.、Mealli, F.、Wu, A. 和 Airoldi, E. M. 利用贝叶斯广义倾向评分估计网络干扰下的因果效应。机器学习研究期刊，23：1–61，2022年。

Frauen, D.、Melnychuk, V. 和 Feuerriegel, S. 广义因果敏感性分析的尖锐界。载于神经信息处理系统会议（*NeurIPS*），2023年。

Frauen, D.、Imrie, F.、Curth, A.、Melnychuk, V.、Feuerriegel, S. 和 van der Schaar, M. 一种用于广义因果敏感性分析的神经框架。载于 国际学习表征会议（*ICLR*），2024年。

Freedman, S., Sacks, D.W., Simon, K. 和 Wing, C. 疫苗的直接效应和间接效应：来自新冠疫情的证据。《美国经济学杂志：应用经济学》，18 (1):1–43，2026年。

Giffin, A., Reich, B.J., Yang, S. 和 Rappold, A. G. 采用广义倾向得分方法对空间干扰进行因果推断。《生物计量学》，79(3):2220–2231，2023年。

Hanks, E. M., Schliep, E. M., Hooten, M. B. 和 Hoeting, J. A. 受限空间回归的实践：模型设定错误下的地统计模型、混杂与稳健性。《环境计量学》，26(4):243–254，2015年。

Hess, K., Frauen, D., Melnychuk, V. 和 Feuerriegel, S. 未观测混杂下高效且紧的离策略学习。载于国际学习表征会议 *(ICLR)*，2026年。

Hoshino, T. 与 Yanagi, T. 存在不依从与未知干扰情形下的因果推断。《美国统计学会会刊》，119(548):2869–2880，2024年。

Jesson, A.、Douglas, A.、Manshausen, P.、Solal, M.、Meinshausen, N.、Stier, P.、Gal, Y. 与 Shalit, U. 评估对未观测可扩展敏感性与不确定性分析的敏感性，以及面向连续取值干预之因果效应估计的因果可扩展敏感性与不确定性分析。载于神经信息处理系统会议（*NeurIPS*），2022年。

Jiang, S. 与 Sun, Y. 通过表征学习估计网络化观察性数据上的因果效应。载于国际信息与知识管理会议（*CIKM*），2022年。

Kallus, N. 与 Zhou, A. 对混杂稳健的策略改进。载于神经信息处理系统会议（*NeurIPS*），2018年。

Kallus, N., Mao, X., 和 Zhou, A. 未观测混杂下个体层面因果效应的区间估计。载于人工智能与统计国际会议（*AISTATS*），2019年。

Kennedy, E. H. 基于增量倾向得分干预的非参数因果效应。美国统计学会期刊，114(526):645–656，2019年。

Kennedy, E. H. 迈向异质性因果效应的最优双重稳健估计。《电子统计学期刊》，17(2):3008–3049，2023年。

Khot, A., Oprescu, M., Schr¨oder, M., Kagawa, A., 和 Luo, X. 空间去混杂器：面向空间因果推断的干扰感知去混杂。*arXiv* 预印本，arXiv:2510.08762，2025年。Kilbertus, N., Ball, P. J., Kusner, M. J., Weller, A., 和 Silva, R. 反事实公平性对未测量混杂的敏感性。发表于人工智能不确定性会议 *(UAI)*，2019年。Leung, M. P. 网络干扰下的处理效应和溢出效应。《经济学与统计学评论》，102(2): 368–380，2020。Leung, M. P. 近似邻居干扰下的因果推断。《计量经济学》，90(1):267–293，2022年。

Lin, X., Bao, H., Cui, Y., Takeuchi, K., 和 Kashima, H. 适用于大型图的可扩展个体处理效应估计量。《机器学习》，114(1):23，2025年。

Liu, J., Ye, F., 和 Yang, Y. 观察性研究中网络因果效应的非参数双重稳健估计。*Stat*，12(1):e549，2023年。

Ma, Y. 和 Tresp, V. 网络化干扰下的因果推断与干预策略优化。载于人工智能与统计会议（*AIS- TATS*），2021年。

Matthay, E. C. 和 Glymour, M. M. 社会政策健康影响的流行病学研究中的因果推断挑战与新方向。《当代流行病学报告》，9(1):22–37，2022年。

McNealis, V.、Moodie, E. E. M. 和 Dean, N. 重新审视母亲教育对青少年学业表现的影响：基于网络的观察性研究中的双重稳健估计。《皇家统计学会会刊：C辑（应用统计）》，73(3):715–734，2024年。

Melnychuk, V.、Frauen, D. 和 Feuerriegel, S. 使用曲率敏感性模型对连续型结果进行部分反事实识别。载于神经信息处理系统大会（*NeurIPS*），2023年。

Ogburn, E. L.、Sofrygin, O.、D´ıaz, I. 和 van der Laan, M.J. 社交网络数据的因果推断。《美国统计学会杂志》，119(545):597–611，2024年。

Ohnishi, Y.、Karmakar, B. 和 Sabbaghi, A. 干扰度：干扰下因果推断的一般框架。《机器学习研究期刊》，26 (120):1–37，2025年。

Oprescu, M.、Dorn, J.、Ghoummaid, M.、Jesson, A.、Kallus, N.与Shalit, U. B-learner：隐匿混杂下异质因果效应的准预言机界。载于

国际机器学习会议（*ICML*），2023年。

Oprescu, M., Park, D. K., Luo, X., Yoo, S., 和 Kallus, N. GST-UNet：一种用于时空因果推断的神经框架，可处理时变混杂。载于神经信息处理系统大会*(NeurIPS)*，2025年。

Papadogeorgou, G. 和 Samanta, S. 未测量混杂和干扰存在时的空间因果推断。*arXiv* 预印本，arXiv:2303.08218，2023年。

Qu, Z., Xiong, R., Liu, J., 和 Imbens, G. 异质性部分干扰下观察性研究中处理效应的半参数估计。*arXiv* 预印本，arXiv:2107.12420，2024。Robins, J. M., Rotnitzky, A., 和 Scharfstein, D. O. 缺失数据与因果推断模型中选择偏倚和未测量混杂的敏感性分析。流行病学统计模型，116:1–92，1999年。
Rosenbaum, P. R. 和 Rubin, D. B. 在具有二元结局的观察性研究中评估对未观测二元协变量的敏感性。皇家统计学会会刊*B*辑：统计方法学，第212–218页，1983年。Rubin, D. B. 使用潜在结果进行因果推断：设计、建模与决策。《美国统计学会杂志》，100(469):322–331，2005。S¨avje, F. 对错误设定的暴露映射进行因果推断：区分定义与假设。*Biometrika*，111(1):1–15，2024。S¨avje, F., Aronow, P., 和 Hudgens, M. 未知干扰下的平均处理效应。统计学年刊，49(2):673–701，2021年。Schr¨oder, M., Frauen, D., Schweisthal, J., Heß, K., Melnychuk, V., 和 Feuerriegel, S. 连续处理因果效应的保形预测。*arXiv* 预印本，arXiv:2407.03094，2024。Sengupta, S., Imai, K., 和 Papadogeorgou, G. 干扰下的低秩协变量平衡估计量。*arXiv* 预印本，arXiv:2512.13944，2025年。Tan, Z. 使用倾向得分进行因果推断的分布方法。《美国统计学会杂志》，101(476):1619–1637，2006。Tchetgen Tchetgen, E. J. 和 VanderWeele, T. J. 关于存在干扰时的因果推断。医学研究中的统计方法，21(1):55–75，2012年。

VanderWeele, T. J., Tchetgen Tchetgen, E. J., 和 Halloran, M. E. 干扰与敏感性分析。数理统计学会评论期刊《统计科学》，29(4):687–706，2014。

Vansteelandt, S., Goetghebeur, E., Kenward, M. G. 和 Molenberghs, G. 无知与不确定性区域：敏感性分析中的推断工具。*StatisticaSinica*，16:953–979，2006。

Viviano, D. 网络干扰下的政策靶向。经济研究评论，92(2):1257–1292，2025年。

Wang, Y., Frauen, D., Schweisthal, J., Schr¨oder, M., and Feuerriegel, S. 信息性删失下生存分析中异质性处理效应的稳健性评估。*arXiv* 预印本，arXiv:2510.13397，2025年。

Weinstein, B. and Nevo, D. 误设网络干扰结构下的因果推断。*arXiv* 预印本，arXiv:2302.11322，2023年。Weinstein, B. and Nevo, D. 使用潜在干扰网络的代理变量进行因果效应的贝叶斯估计。*arXiv* 预印本，arXiv:2505.08395，2025年。Yin, M., Shi, C., Wang, Y., and Blei, D. M. 个体处理效应的保形敏感性分析。《美国统计学会杂志》，119(545):122–135，2024年。Zhang, C., Mohan, K., and Pearl, J. 干扰和模型不确定性下的因果推断。载于因果学习与推理会议（*CLeaR*），2023年。Zhang, Y., Onnela, J.-P., Sun, S., and Wang, R. 未知网络下异质性干扰效应的识别与估计。*arXiv* 预印本，arXiv:2510.10508，2025年。

A. 符号说明

$\mathcal{G}$ 由 N 个节点组成的网络$\mathcal{N}$， $\mathcal{E}$ $\mathcal{G}\mathcal{N}_i$中的节点集和边集， $\mathcal{N}_{-i}$ 相对于个体 i的网络划分，其中 $\mathcal{N}_i$ 定义节点 i的邻域，即通过一条边与 i 相连的节点集合 j，而 $\mathcal{N}_{-i}$ 是 $\mathcal{N}$ $\mathcal{N}_i$的补集n_i i节点的度，即其邻居的数量 iT_i， $T_{\mathcal{N}_i}$ 二元个体处理和邻域处理 X 定义域为 $\mathcal{X}$的混杂因素Y定义域为 $\mathcal{Y}$的结果g 暴露映射， $g:[0,1]^n \mapsto \mathcal{Z}Z$ 概括邻域暴露的标量，即 $Z = g(T_{\mathcal{N}})Y(t,z)$个体处理为 t 且邻域暴露为 z时的潜在结果$\psi(t,z)$平均潜在结果估计量$\mu(t,z,\mathrm{x})$条件平均潜在结果估计量$Q^{+}(t,z,\mathrm{x})$ $Q^{-}(t,z,\mathrm{x})$关于b^{+}的条件累积分布函数的上、下分位数$z(\ b^{-},\mathrm{x})z(b^{+},\mathrm{x})z(\ b^{-},\mathrm{x})$因误设导致的暴露映射偏移上界和下界$z(\gamma_u^{\pm},t,\mathrm{x})$ $z(\mathbb{E}[)Y-Q^{\pm},_{+}\mid t,\mathrm{x}\,z$，其中（[）$u$最大值$_{+}=\{u,0\}(\gamma_l^{\pm},t,\mathrm{x})$ $z(\mathbb{E}[)Q^{\pm}-Y,_{+}\mid t,\mathrm{x}\,z$，其中（[）$u$最大值$_{+}=\{u,0\}(\mathrm{x})\pi^{t}(\ \pi^{g}\mathrm{x})$个体节点和邻域倾向函数$z\mid$干扰函数 η $,\phi_t^{+}(z,S)\,\eta,\phi_t^{-}(z,S)$正交伪结果的上界和下界 $\eta\mathrm{DR}(\mu^{\pm},t,\mathrm{x})$正交条件平均潜在结果界估计量的上界和下界 $z\mathrm{DR}(\psi^{+},t)\,z(\ \psi_{DR}^{-},t)$正交平均潜在结果界估计量的上界和下界

B. 扩展相关工作

下文讨论以下方面的相关工作：（i）网络干扰（附录 B.1）和（ii）部分识别方法（附录 B.2）。在附录 B.1中，我们首先概述与本文相关但未讨论的两个领域：用于干扰建模的图神经网络（GNNs），以及用于空间干扰的因果方法。随后，我们详细概述其他针对设定错误的暴露映射的研究，并着重说明本文与这些研究的区别。在附录B.2中，我们简要概述用于部分识别的敏感性方法。

B.1. 网络干扰

GNNs： 标准图机器学习模型无法估计网络中的因果效应，因为它们遵循不同的优化目标（Jiang 和 Sun，2022年）。此外，这些方法在计算上效率低下，因此难以或无法应用于大型网络数据（Lin et al.，2025年）。因此，人们提出了多种方法，通过图神经网络学习协变量的邻域表示（例如，Adhikari & Zheleva，2025年；Jiang 和 Sun，2022年；Linet al.，2025年；Ma 和 Tresp，2021年）。然而，这些方法通常假设邻域处理的暴露映射已知。

空间干扰： 在环境科学中，处理效应估计常面临空间干扰这一挑战，即不同位置的处理会影响其他位置的结果。此处通常假设数据来自空间网格，这意味着节点（=空间单元）之间的距离以及邻近节点的数量在整个网络中都是固定的。空间因果推断方法通常假设暴露映射设定正确，这与针对网络干扰的方法类似（例如，Anselin，1988；Giffin 等人，2023年；Hanks 等人，2015年；Papadogeorgou 与 Samanta，2023年）。较新的方法（例如，Ali 等人，2024年；Khot 等人，2025年；Oprescu 等人，2025年）假设局部干扰基于指定的邻域半径，并采用深度学习方法来捕捉潜在干扰结构。总体而言，所有方法都依赖于各种类型的设定正确的暴露映射。

设定错误的暴露映射： 只有极少数研究考虑在暴露映射设定错误或网络不确定的情况下进行因果效应估计。大多数研究针对未知网络上的估计，即网络中某些边是否存在尚不确定的情况。Egami (2021年) 在随机对照试验中，针对网络设定错误给出了平均因果效应的界限。S¨avje 等人(2021年) 进一步表明，在随机对照试验中存在未知但有限的干扰时，某些标准估计量可以识别平均效应。在后续研究中，S¨avje (2024年) 评估了实验时与推断时所用暴露映射不匹配时处理效应估计量的偏差。Ohnishi 等人(2025年) 在贝叶斯先验下学习干扰的潜在结构，以便在干扰结构任意且未知的情况下估计因果效应。然而，该方法仅适用于随机对照试验（RCT），且针对的是不同于标准条件平均处理效应（CATE）和平均处理效应（ATE）的特定子效应。

在观察性数据这一更一般的情形下，Weinstein & Nevo （2023年）推导了在错误设定的网络下估计因果效应所产生偏差的界限。在后续研究中，Weinstein& Nevo （2025年）和Zhang 等（2025年）提出了仅有代理网络可用时估计因果效应的框架。类似地，Zhang 等（2023年）利用线性图因果模型对不确定交互进行建模，量化错误假设独立同分布（SUTVA）时的偏差，并提出消除该偏差及推导平均因果效应界限的程序。

其他与我们工作更为相似的研究关注邻域半径的不确定性。Leung （2022年）考虑了近似邻域干扰，允许分配给距离所关注个体更远的个体的处理对该个体结果产生潜在的非零影响，但这种影响较小。与我们的工作不同，所提出的方法仅限于特定类型的误设，并且只针对平均总体效应。Belloni 等（2022年）考虑了未知邻域半径下的估计问题，这与我们的第三种应用场景相似。然而，所提出的方法需要很强的建模假设，并且仅适用于平均直接效应。

与我们的研究方向不同，Hoshino 和 Yanagi (2024年) 提出了一种工具变量暴露映射，用于在工具变量回归情境下将溢出效应概括为一个低维变量。他们证明，即使邻域半径设定有误，所得的平均效应估计目标仍具有可解释性。

总体而言，目前尚不存在一种通用框架，能够在实验数据和观察性数据中，针对各种类型的暴露映射设定错误，为潜在结果和处理效应提供界限。这正是我们的贡献。

B.2. 部分识别

作为部分识别的敏感性分析：部分识别中常用的一种工具是因果敏感性分析（CSA）。CSA 不会在不存在未观测混杂这一强假设下对估计目标进行点识别，而是允许存在达到指定混杂强度的未观测混杂，并据此推导因果量的界限。人们提出了各种各样的敏感性模型；这些模型在扰动数据生成过程的哪些方面以及如何参数化偏离方面各不相同（例如，Rosenbaum & Rubin，1983年；Robins 等人，1999年；Vansteelandt 等人，2006）。

边际敏感性模型（MSM）及其扩展：近期文献大多聚焦于边际敏感性模型（Tan，2006），通过对可行的倾向评分重加权进行优化来获得界限。近期研究表明，朴素程序可能过于保守，并推导出了尖锐界的刻画和估计量（Dorn & Guo, 2022; Dorn 等人，2025），这也使得通过元学习高效学习条件平均处理效应界成为可能（Oprescu 等人，2023）。除了二元处理和标准处理效应查询之外，其他研究还提出了连续处理的边际敏感性模型（Jesson 等人，2022）、针对更广泛因果查询且具有尖锐界的广义敏感性模型（Frauen 等人，2023），以及可在不同模型类别和处理类型上自动开展广义敏感性分析的神经网络框架（Frauen 等人，2024）。基于敏感性的部分识别也应用于相邻的机器学习问题，例如抗混杂策略学习（Hess 等人，2026; Kallus & Zhou, 2018; Kallus 等人，2019）、反事实查询的部分识别（Melnychuk 等人，2023）、生存分析（Wang 等人，2025）、因果公平性的敏感性审计（Kilbertus 等人，2019; Schr¨oder 等人，2024），以及现代不确定性量化，例如在给定敏感性水平下针对个体处理效应的共形区间（Yin 等人，2024）。

C. 扩展理论

C.1. 界限总结

潜在结果	$\mu^+(t,\ z,\ \mathbf{x}) = Q^+(t,\ z,\ \mathbf{x}) + \frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})}\gamma_u^+(t,\ z,\ \mathbf{X}) - \frac{1}{b^+(z,\mathbf{x})}\gamma_u^-(t,\ z,\ \mathbf{X})$ $\mu^-(t,\ z,\ \mathbf{x}) = Q^-(t,\ z,\ \mathbf{x}) + \frac{1}{b^+(z,\ \mathbf{x})}\gamma_u^-(t,z,\mathbf{X}) - \frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})}\gamma_l^-(t,\ z,\ \mathbf{x})$
伪结果 （离散）	$\phi_{t,\ z}^+(S;\ \widehat{\eta}) = \widehat{Q}^+(t,\ z,\ \mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_u^+(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^-(z,\ \mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_l^+(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})} + \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}}{\widehat{\pi}^t}\frac{\mathbf{1}_{[Z=z]}}{\widehat{\pi}^g(Z\mid\mathbf{X})}\omega_{z,h}(Z)\left[\frac{(Y-\widehat{Q}^+(t,\ Z,\ \mathbf{X}))_+ - \widehat{\gamma}_u^+(t,\ Z,\ \mathbf{X})b^-(Z,\ \mathbf{X})}{b^+(Z,\ \mathbf{X})b^-(Z,\ \mathbf{X})} - \frac{(\widehat{Q}^+(t,\ Z,\ \mathbf{X})-Y)_+ - \widehat{\gamma}_l^+(t,\ Z,\ \mathbf{X})b^+(Z,\ \mathbf{X})}{b^-(Z,\ \mathbf{X})b^+(Z,\ \mathbf{X})}\right]$ $\phi_{t,z}^-(S;\ \widehat{\eta}) = Q^-(t,z,\mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_u^-(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_l^-(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^-(z,\ \mathbf{X})} + \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}}{\widehat{\pi}^t}\frac{\mathbf{1}_{[Z=z]}}{\widehat{\pi}^g(Z\mid\mathbf{X})}\omega_{z,h}(Z)\left[\frac{(Y-\widehat{Q}^-(t,\ Z,\ \mathbf{X}))_+ - \widehat{\gamma}_u^-(t,\ Z,\ \mathbf{X})b^+(Z,\ \mathbf{X})}{b^+(Z,\ \mathbf{X})b^-(Z,\ \mathbf{X})} - \frac{(\widehat{Q}^-(t,\ Z,\ \mathbf{X})-Y)_+ - \widehat{\gamma}_l^-(t,\ Z,\ \mathbf{X})b^-(Z,\ \mathbf{X})}{b^+(Z,\ \mathbf{X})b^-(Z,\ \mathbf{X})}\right]$
伪结果 (连续)	$\phi_{t,z}^+(S;\ \widehat{\eta}) = \widehat{Q}^+(t,z,\mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_u^+(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^-(z,\ \mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_l^+(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})} + \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\,K_h(Z-z)}{\widehat{\pi}^t(\mathbf{X})\,\widehat{\pi}^g(Z\mid\mathbf{X})}\left[\frac{(Y-\widehat{Q}^+(t,\ Z,\ \mathbf{X}))_+ - \widehat{\gamma}_u^+(t,\ Z,\ \mathbf{X})}{b^+(Z,\ \mathbf{X})b^-(Z,\ \mathbf{X})} - \frac{(\widehat{Q}^+(t,\ Z,\ \mathbf{X})-Y)_+ - \widehat{\gamma}_l^+(t,\ Z,\ \mathbf{X})}{b^-(Z,\ \mathbf{X})b^+(Z,\ \mathbf{X})}\right]$ $\phi_{t,z}^-(S;\ \widehat{\eta}) = Q^-(t,z,\mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_u^-(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_l^-(t,\ z,\ \mathbf{X})}{b^-(z,\ \mathbf{X})} + \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\,K_h(Z-z)}{\widehat{\pi}^t(\mathbf{X})\,\widehat{\pi}^g(Z\mid\mathbf{X})}\left[\frac{(Y-\widehat{Q}^-(t,\ Z,\ \mathbf{X}))_+ - \widehat{\gamma}_u^-(t,\ Z,\ \mathbf{X})}{b^+(Z,\ \mathbf{X})b^-(Z,\ \mathbf{X})} - \frac{(\widehat{Q}^-(t,\ Z,\ \mathbf{X})-Y)_+ - \widehat{\gamma}_l^-(t,\ Z,\ \mathbf{X})}{b^-(Z,\ \mathbf{X})b^+(Z,\ \mathbf{X})}\right]$

表 *1.* 正文中的界限汇总。

C.2. 正交下界

在第4节中，我们给出了一个用于估计潜在结果和处理效应上界的正交估计框架。为完整起见，下面也给出下界的表述:

令 $S=(\mathbf{X}\ Y,T,Z)$。固定 (t,z)。定义局部化权重

$$\omega_{z,h}(Z) := \begin{cases} \mathbf{1}_{[Z=z]}, & \text{if } Z \text{ binary/discrete,} \\ K_h(Z-z), & \text{if } Z \text{ continuous,} \end{cases}$$

并令 $\pi^g(Z\mid\mathbf{X})$ 表示条件概率质量函数（离散型 Z）或密度（连续型 Z）。令 $\widehat{\eta}=(\widehat{\pi}^t,\widehat{\pi}^g,\widehat{Q}^-,\widehat{\gamma}_u^-,\widehat{\gamma}_l^-)$ 为一组估计的干扰参数。那么，CAPO下界$\mu^-(t,z,\mathbf{x})$ 的正交伪结果为:

$$\begin{aligned}\phi_{t,z}^-(S;\widehat{\eta}) =& \widehat{Q}^-(t,z,\mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_u^-(t,z,\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_l^-(t,z,\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} \\ &+ \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\,\omega_{z,h}(Z)}{\widehat{\pi}^t(\mathbf{X})\,\widehat{\pi}^g(Z\mid\mathbf{X})}\left[\frac{(Y-\widehat{Q}^-(t,Z,\mathbf{X}))_+ - \widehat{\gamma}_u^-(t,Z,\mathbf{X})}{b^+(Z,\mathbf{X})} - \frac{(\widehat{Q}^-(t,Z,\mathbf{X})-Y)_+ - \widehat{\gamma}_l^-(t,Z,\mathbf{X})}{b^-(Z,\mathbf{X})}\right],\end{aligned} \tag{26}$$

其中，$\gamma_u^-(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}[(Y-Q^-(\cdot))_+ \mid t,z,\mathbf{x}]$ 以及 $\gamma_l^-(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}[(Q^-(\cdot)-Y)_+ \mid t,z,\mathbf{x}]$。

C.3. 处理效应的界限

回顾平均直接效应和个体直接效应的定义

$$\tau_d^{(t,z),(t',z)} := \psi(t,z)-\psi(t',z)\ \text{(ADE)} \quad \text{and} \quad \tau_{d_i}^{(t,z),(t',z)}(\mathbf{x}_i) := \mu(t,z,\mathbf{x}_i)-\mu(t',z,\mathbf{x}_i)\ \text{(IDE)},$$

溢出效应/间接效应

$$\tau_s^{(t,z),(t,z')} := \psi(t,z)-\psi(t,z')\ \text{(ASE)} \quad \text{and} \quad \tau_{s_i}^{(t,z),(t,z')}(\mathbf{x}_i) := \mu(t,z,\mathbf{x}_i)-\mu(t,z',\mathbf{x}_i)\ \text{(ISE)},$$

和总体效应

$$\tau_o^{(t,z),(t^{'},z^{'})} := \psi(t,z) - \psi(t^{'},z^{'}) \text{ (AOE)} \quad \text{and} \quad \tau_{o_i}^{(t,z),(t^{'},z^{'})}(\mathbf{x}_i) := \mu(t,z,\mathbf{x}_i) - \mu(t^{'},z^{'},\mathbf{x}_i) \text{ (IOE).}$$

基于定理 4.2 中的 CAPO界 $\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$，我们由此通过一般公式$\tau^{+}(a,b) = f^{+}(a,\cdot) - f^{-}(b,\cdot)$ 和 $\tau^{-}(a,b) = f^{-}(a,\cdot) - f^{+}(b,\cdot)$ 得到处理效应。这里略微滥用符号，τ指上述任一（条件）效应，f 指 μ 或 ψ，而（a,b）表示 t 和/或 z的变化。具体而言，条件处理效应 IDE / ISE / IOE 的识别如下。

直接效应：

$$\tau_{d_i}^{+\,(t,z),(t^{'},z)}(\mathbf{x}) = Q^{+}(t,z,\mathbf{x}) - Q^{-}(t^{'},z,\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}(\gamma_u^{+}(t,z,\mathbf{x}) - \gamma_l^{-}(t^{'},z,\mathbf{x})) \tag{27}$$

$$- \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}(\gamma_l^{+}(t,z,\mathbf{x}) - \gamma_u^{-}(t^{'},z,\mathbf{x})) \tag{28}$$

$$\tau_{d_i}^{-\,(t,z),(t^{'},z)}(\mathbf{x}) = Q^{-}(t,z,\mathbf{x}) - Q^{+}(t^{'},z,\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}(\gamma_u^{-}(t,z,\mathbf{x}) - \gamma_l^{+}(t^{'},z,\mathbf{x})) \tag{29}$$

$$- \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}(\gamma_l^{-}(t,z,\mathbf{x}) - \gamma_u^{+}(t^{'},z,\mathbf{x})) \tag{30}$$

间接效应/溢出效应：

$$\tau_{d_s}^{+\,(t,z),(t,z^{'})}(\mathbf{x}) = Q^{+}(t,z,\mathbf{x}) - Q^{-}(t,z^{'},\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}\gamma_u^{+}(t,z,\mathbf{x}) \tag{31}$$

$$+ \frac{1}{b^{+}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_u^{-}(t,z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{-}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_l^{-}(t,z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}\gamma_l^{+}(t,z,\mathbf{x}) \tag{32}$$

$$\tau_{d_s}^{-\,(t,z),(t,z^{'})}(\mathbf{x}) = Q^{-}(t,z,\mathbf{x}) - Q^{+}(t,z^{'},\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}\gamma_u^{-}(t,z,\mathbf{x}) \tag{33}$$

$$+ \frac{1}{b^{-}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_u^{+}(t,z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{+}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_l^{+}(t,z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}\gamma_l^{-}(t,z,\mathbf{x}) \tag{34}$$

总体效应：

$$\tau_{d_o}^{+\,(t,z),(t^{'},z^{'})}(\mathbf{x}) = Q^{+}(t,z,\mathbf{x}) - Q^{-}(t^{'},z^{'},\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}\gamma_u^{+}(t,z,\mathbf{x}) \tag{35}$$

$$+ \frac{1}{b^{+}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_u^{-}(t^{'},z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{-}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_l^{-}(t^{'},z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}\gamma_l^{+}(t,z,\mathbf{x}) \tag{36}$$

$$\tau_{d_o}^{-\,(t,z),(t^{'},z^{'})}(\mathbf{x}) = Q^{-}(t,z,\mathbf{x}) - Q^{+}(t^{'},z^{'},\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}\gamma_u^{-}(t,z,\mathbf{x}) \tag{37}$$

$$+ \frac{1}{b^{-}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_u^{+}(t^{'},z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{+}(z^{'},\mathbf{x})}\gamma_l^{+}(t^{'},z^{'},\mathbf{x}) - \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}\gamma_l^{-}(t,z,\mathbf{x}) \tag{38}$$

平均效应 ADE、AIE 和 AOE 的界限，随后由个体效应关于协变量$\mathbf{X}$的期望确定。

C.4. 连续邻域暴露

本节给出连续情形下的Z 定理4.7 和推论4.10的对应结果，以及相应的尖锐性和有效性保证，用于估计值界限（与正文中的离散情形Z 结果互为补充）。

当 Z 为连续变量时，在 $Z = z$ 处进行点估计并非正则。按照连续暴露正交学习中的标准方法，我们因此以界泛函的核局部化版本（由带宽索引）为目标。在 z满足光滑性条件时，这些局部化目标会在 $h \downarrow 0$时收敛到原始（逐点）界限，其收敛速度遵循由（n，h）决定的常规偏差–方差权衡。

假设 C.1 (核局部化)。设 Z为连续函数，且 $K_h(u) = \frac{1}{h}K(u/h)$，其中 K 有界、积分为 1，且 $\int K(u)^2\,du < \infty$。设 $h = h_n \downarrow 0$ 满足 $nh_n \to \infty$。

核局部化 **目标值**。固定 $(t,\ z)$，并设 $h>0$。对于连续函数 Z，定义局部化选择权重

$$\kappa_{t,z,h}(S) := \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\, K_h(Z-z)}{\pi^t(\mathbf{X})\,\pi^g(Z\mid \mathbf{X})}, \tag{39}$$

与连续情形下对Z定理 4.4证明的修改类似。定义核局部化伪结果 $\phi^+_{t,z,h}(S;\widehat{\eta})$，其形式与式（20）相同，其中 $\omega_{z,h}(Z)=K_h(Z-z)$。

当 $\widehat{\eta}=\eta$ 时，定义相应的带宽索引泛函如下

$$\mu^+_h(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}\Big[\phi^+_{t,z,h}(S;\eta)\mid \mathbf{X}=\mathbf{x}\Big], \qquad \psi^+_h(t,z) := \mathbb{E}\Big[\phi^+_{t,z,h}(S;\eta)\Big]. \tag{40}$$

在 z 上满足标准光滑性条件时，$\mu^+_h(t,z,\mathbf{x})\to\mu^+(t,z,\mathbf{x})$ 以及 $\psi^+_h(t,z)\to\psi^+(t,z)$ 均为 $h\downarrow 0$（见备注 4.5）。

相较于离散-Z 情形，核局部化会使二阶余项膨胀 $h^{-1/2}$ 倍（反映了 $\int K_h^2 = O(1/h)$）。这一影响会传递至最终阶段的 CAPO 收敛率，并导出平滑 APO 的常见 $\sqrt{nh}$ 缩放。

定理 C.2 (二阶干扰误差（连续 Z）)。假设 Z 是连续的，且假设 *4.6* 和 *C.1* 成立。令 $\widehat{\eta}=(\widehat{\pi}^t,\widehat{\pi}^g,\widehat{Q}^+,\widehat{\gamma}^+_u,\widehat{\gamma}^+_l)$ 为用于 $\phi^+_{t,z,h}(S;\widehat{\eta})$ 的交叉拟合干扰函数（式 (20) 中 $\omega_{z,h}(Z)=K_h(Z-z)$）。

定义干扰误差率（在适当自变量上的 L_2 范数）如下：

$$r_{n,\pi} := \|\widehat{\pi}^t-\pi^t\|_2 + \|\widehat{\pi}^g-\pi^g\|_2, \qquad r_{n,Q} := \|\widehat{Q}^+-Q^+\|_2, \tag{41}$$

$$r_{n,\gamma} := \|\widehat{\gamma}^+_u-\gamma_u(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2 + \|\widehat{\gamma}^+_l-\gamma_l(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2, \tag{42}$$

其中，范数是在相应干扰参数所依据的随机变量上计算的（例如，对于 $\pi^g(Z\mid\mathbf{X})$，是在 $(Z,\mathbf{X})$ 上计算；对于 $Q^+(t,Z,\mathbf{X})$和 $\gamma^\pm(t,Z,\mathbf{X})$亦然）。

那么，干扰参数估计所导致的条件偏差满足

$$\Big\|\mathbb{E}\Big[\phi^+_{t,z,h}(S;\widehat{\eta})-\phi^+_{t,z,h}(S;\eta)\mid\mathbf{X}\Big]\Big\|_2 = O_p\left(\frac{r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma}+r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}}\right). \tag{43}$$

推论 C.3 (准神谕速率与推断（连续 Z）)。假设定理 *C.2* 的条件成立，且第二阶段回归学习器 $\widehat{\mathbb{E}}_n[\cdot\mid\mathbf{X}=\mathbf{x}]$ 满足假设 *4.8*，其回归速率为 δ_n，其中将 $\phi^+_{t,z,h}(S;\eta)$ 对 $\mathbf{X}$进行回归。

则：

CAPO 收敛速率：*CAPO* 上界估计量满足

$$\|\widehat{\mu}^+_h(t,z,\cdot)-\mu^+_h(t,z,\cdot)\|_2 = O_p\left(\delta_n+\frac{r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma}+r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}}\right). \tag{44}$$

APO 收敛速率：*APO* 上界估计量 $\widehat{\psi}^+(t,z)=\mathbb{E}_n[\widehat{\phi}^+_{t,z,h}]$ 满足

$$|\widehat{\psi}^+_h(t,z)-\psi^+_h(t,z)| = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+\frac{r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma}+r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}}\right). \tag{45}$$

$\sqrt{nh}$-中心极限定理（中心极限定理）针对（平滑）*APO*。若 $r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma}+r_{n,Q}^2=o_p(n^{-1/2})$，则

$$\sqrt{nh}\left(\widehat{\psi}^+_h(t,z)-\psi^+_h(t,z)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\big(0,\ V^+_h(t,z)\big), \tag{46}$$

其中一个有效的渐近方差目标为 $V^+_h(t,z) := \mathrm{Var}\big(\sqrt{h}\,\phi^+_{t,z,h}(S;\eta)\big)$。

最后，如果平滑偏差满足 $|\psi^+_h(t,z)-\psi^+(t,z)|=o((nh)^{-1/2})$（例如，通过在 z-光滑性条件下采用欠平滑），那么用 $\psi^+(t,z)$ 替代 $\psi^+_h(t,z)$时，同样的中心极限定理仍成立。

估计界的尖锐性与有效性。前述结果控制了二阶余项，并为局部化目标 (μ_h^+, ψ_h^+) 达到了准神谕速率。现在，我们记录正文中两项互补保证在连续-Z 版本下的表述：(i) 对紧的识别界的一致性；(ii) 在截断值可能设定错误的情况下，所得区间的有效性。与前文一样，这些结论对两个端点 $(+/-)$ 均成立；为简洁起见，我们仅表述上端点的结果，下端点的结论可通过在伪结果中交换符号类似地得到。

命题 C.4(连续情形下尖锐界的一致性 Z)。 假设推论 *C.3* 的条件成立，并考虑相应的下界估计量 $\widehat{\mu}_h^-(t,z,\cdot)$，该估计量由下界伪结果构造（定义方式类似于公式(20)）。假设 $\delta_n = o_p(1)$且

$$\frac{r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}} = o_p(1). \tag{47}$$

那么，

$$\|\widehat{\mu}_h^{\pm}(t,z,\cdot) - \mu_h^{\pm}(t,z,\cdot)\|_2 = o_p(1), \qquad |\widehat{\psi}_h^{\pm}(t,z) - \psi_h^{\pm}(t,z)| = o_p(1). \tag{48}$$

因此，估计的 *CAPO* 和 *APO* 区间收敛到带宽索引目标对应的紧核局部化识别区间。

此外，若平滑偏差以适当速率消失（例如，$|\psi_h^{\pm}(t,z) - \psi^{\pm}(t,z)| = o((nh)^{-1/2})$），则当 $h \downarrow 0$ 时，估计区间对于原始逐点界渐近地达到尖锐。

推论 *C.5*（错误设定截断值下的渐近有效性（连续 Z））。固定可测截断值 $Q^{\pm}(t,z,x)$（不一定等于尖锐截断值），并令 $\mu_h^{\pm}(t,z,x;\, Q^{\pm})$ 和 $\psi_h^{\pm}(t,z;\, Q^{\pm})$ 表示这些截断值所诱导的结果（可能非紧的）核局部化界泛函（即通过在伪结果中替换 $Q^{\pm}$，并按照公式（*40*）取条件／无条件期望而得到的目标）。那么，所诱导的区间

$$\big[\overline{\mu}_h^-(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^-),\ \overline{\mu}_h^+(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^+)\big] \quad \textit{and} \quad \big[\overline{\psi}_h^-(t,z;\overline{Q}^-),\ \overline{\psi}_h^+(t,z;\overline{Q}^+)\big] \tag{49}$$

是针对核局部化目标的（不一定是紧的）有效 *CAPO* 和 *APO* 区间。

此外，如果 $\widehat{Q}^{\pm} \to Q^{\pm}$ 属于 L_2 且以下任一条件成立：

(*i*) （$\widehat{\pi}^t$、$\widehat{\pi}^g$）是一致的，或

(*ii*) 相应的尾部矩回归 （$\widehat{\gamma}_u^{\pm}$、$\widehat{\gamma}_l^{\pm}$）对于由 $Q^{\pm}$ 导出的目标是一致的，

那么，估计的端点将收敛于所导出的（保守）目标，所得的（*C*）*APO*区间仍然是渐近有效的，但可能具有保守性。如果 $Q^{\pm}$ 等于尖锐截断值，则所导出的界限与尖锐界相一致，且这些区间同样是渐近尖锐的。

结论。对于连续邻域暴露，我们的估计和理论与离散-Z情形完全相同，但有两点例外：(i) 选择权重中的指示函数 $\mathbf{1}_{[Z=z]}$ 由核局部化 $K_h(Z-z)$ 替代；(ii) 条件概率质量函数 $\pi^g(z \mid \mathrm{X})$由条件密度 $\pi^g(Z \mid \mathrm{X})$ 替代。这一替换使有效样本量 nh 约为 z，从而使二阶余项膨胀 $h^{-1/2}$ 倍，并导致 APO 推断采用 $\sqrt{nh}$ 的缩放。在 z满足光滑性条件时，带宽索引目标 $(\mu_h^{\pm}, \psi_h^{\pm})$ 将随 $h \downarrow 0$收敛至逐点界限 $(\mu^{\pm}, \psi^{\pm})$，从而在 (n,h) 中形成通常的偏差-方差权衡。补充材料 D 中的证明表明，所有连续-Z 结果均可由离散-Z 证明推出，只需将 $\mathbf{1}_{[Z=z]}$ 替换为 $K_h(Z-z)$ 并追踪 $\int K_h^2 = O(1/h)$。

D. 证明

D.1. 特定设定下 b^+, b^-的论证

下面我们将说明，对于暴露映射 b^+，b^-，其 1 和 2 的设定依据。

1 加权平均暴露： 定义 $g(t_\mathcal{N}) := \sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} = \frac{N_T}{n}$，其中 N_T 表示接受处理的邻居数量，n 表示邻域规模。我们假设 $g^*(t_\mathcal{N}) = \sum_{j\in\mathcal{N}} w_j t_j$，其中 $|\frac{1}{n} - w_j| \geq \varepsilon$ 对所有 j 成立。

首先注意到

$$b^-(z,\mathbf{x}) \leq \frac{P(\sum_{j\in\mathcal{N}} w_j t_j = z \mid \mathbf{x})}{P(\sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} = z \mid \mathbf{x})} \leq b^+(z,\mathbf{x}) \iff b^-(z,\mathbf{x}) \leq \frac{G(z \mid \mathbf{x}) - G(s \mid \mathbf{x})}{F(z \mid \mathbf{x}) - F(s \mid \mathbf{x})} \leq b^+(z,\mathbf{x}) \tag{50}$$

对所有 $s \in \mathcal{Z}$，其中 $G(\cdot)$和 $F(\cdot)$分别表示 $g^*(T_\mathcal{N})$和 $g(T_\mathcal{N})$的条件累积分布函数。由于$|\frac{1}{n} - w_j| \geq \varepsilon$，对所有 $k \in \mathcal{Z}$，我们有

$$P\left((\frac{1}{n}+\varepsilon)\sum_{j\in\mathcal{N}} t_j \leq k \mid \mathbf{x}\right) \leq P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} w_j t_j \leq k \mid \mathbf{x}\right) \leq P\left((\frac{1}{n}-\varepsilon)\sum_{j\in\mathcal{N}} t_j \leq k \mid \mathbf{x}\right) \tag{51}$$

$$\iff P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} \leq \frac{k}{1+n\varepsilon} \mid \mathbf{x}\right) \leq P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} w_j t_j \leq k \mid \mathbf{x}\right) \leq P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} \leq \frac{k}{1-n\varepsilon} \mid \mathbf{x}\right). \tag{52}$$

因此，我们可以将枚举量 $G(z \mid \mathbf{x}) - G(s \mid \mathbf{x})$ 界定为

$$P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} \leq \frac{z}{1+n\varepsilon} \mid \mathbf{x}\right) - P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} \leq \frac{s}{1-n\varepsilon} \mid \mathbf{x}\right) \leq G(z \mid \mathbf{x}) - G(s \mid \mathbf{x}) \tag{53}$$

$$\leq P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} \leq \frac{z}{1-n\varepsilon} \mid \mathbf{x}\right) - P\left(\sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n} \leq \frac{s}{1+n\varepsilon} \mid \mathbf{x}\right). \tag{54}$$

由此可得

$$b^-(z,\mathbf{x}) = \inf_{s\in\mathcal{Z}} \frac{P(\frac{ns}{1-\varepsilon n} \leq N_T \leq \frac{nz}{1+\varepsilon n} \mid \mathbf{x})}{P(ns \leq N_T \leq nz \mid \mathbf{x})}, \qquad b^+(z,\mathbf{x}) = \sup_{s\in\mathcal{Z}} \frac{P(\frac{ns}{1+\varepsilon n} \leq N_T \leq \frac{nz}{1-\varepsilon n} \mid \mathbf{x})}{P(ns \leq N_T \leq nz \mid \mathbf{x})}. \tag{55}$$

2 阈值函数：
设 $h(t_\mathcal{N}) := \sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{t_j}{n}$，并假设暴露映射通过阈值指定为 $g(t_\mathcal{N}) = f(h(t_\mathcal{N})) := \mathbf{1}_{[h(t_\mathcal{N}) \geq c]}$，即 $P(g(t_\mathcal{N}) = 1 \mid \mathbf{x}) = P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})$，其中 表示接受处理的邻居数量。我们允许真实阈值 c^* 与 c相差 $\varepsilon \in [0, \min\{c, 1-c\}]$，即 $c^* \in [c \pm \varepsilon]$。因此，$P(g^*(t_\mathcal{N}) = 1 \mid \mathbf{x}) = P(N_T \geq nc^* \mid \mathbf{x})$，故经直接计算可得

$$\frac{P(N_T \geq n(c+\varepsilon) \mid \mathbf{x})}{P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})} \leq \frac{P(g^*(t_\mathcal{N}) = 1 \mid \mathbf{x})}{P(g(t_\mathcal{N}) = 1 \mid \mathbf{x})} \leq \frac{P(N_T \geq n(c-\varepsilon) \mid \mathbf{x})}{P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})}, \tag{56}$$

and

$$\frac{1 - P(N_T \geq n(c-\varepsilon) \mid \mathbf{x})}{1 - P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})} \leq \frac{P(g^*(t_\mathcal{N}) = 0 \mid \mathbf{x})}{P(g(t_\mathcal{N}) = 0 \mid \mathbf{x})} \leq \frac{1 - P(N_T \geq n(c+\varepsilon) \mid \mathbf{x})}{1 - P(N_T \geq nc \mid \mathbf{x})}. \tag{57}$$

D.2. 辅助理论

我们的界限采用了 Frauen 等人 (2023年) 提出的敏感性方法。不过，原始研究针对的是存在未观测混杂的情形，而我们研究的是另一种情形。下文将介绍针对我们所研究情形改编的（Frauen 等人，2023年）中的定理 1。

定理 D.1. 令 $b^-(z,\mathbf{x}) \le b^+(z,\mathbf{x})$ 且 $b^-(z,\mathbf{x}) \in (0,1]$ 且 $b^+(z,\mathbf{x}) \in [1,\infty)$，使得对所有 z ，$\mathbf{x}$

$$b^-(z,\mathbf{x}) \le \frac{p(g^*(t_{\mathcal{N}}) = z \mid \mathbf{x})}{p(g(t_{\mathcal{N}}) = z \mid \mathbf{x})} \le b^+(z,\mathbf{x}) \tag{58}$$

并定义 $\alpha^{\pm}(z,\mathbf{x}) := (1-b^{\mp}(z,\mathbf{x}))b^{\pm}(z,\mathbf{x})b^{\pm}(z,\mathbf{x})-b^{\mp}(z,\mathbf{x})$。此外，令 $F_Y(y) := F_Y(y \mid t,z,\mathbf{x})$ 表示 Y 的条件累积分布函数（*CDF*）。对于 $Y \in \mathbb{R}$ 连续的情形，我们定义

$$p^+(y \mid t,z,\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{b^+(z,\mathbf{x})} p(y \mid t,z,\mathbf{x}), \text{ if } F(y) \le \alpha^+(z,\mathbf{x}), \\ \frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})} p(y \mid t,z,\mathbf{x}), \text{ if } F(y) > \alpha^+(z,\mathbf{x}), \end{cases} \tag{59}$$

对于 $Y \in \mathbb{R}$ 离散的情形，我们定义概率质量函数

$$P^+(y \mid t,z,\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{b^+(z,\mathbf{x})} P(y \mid t,z,\mathbf{x}), & \text{if } F(y) < \alpha^+(z,\mathbf{x}), \\ \frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})} P(y \mid t,z,\mathbf{x}), & \text{if } F(y-1) > \alpha^+(z,\mathbf{x}), \\ \frac{1}{b^+(z,\mathbf{x})}(\alpha^+(z,\mathbf{x}) - F(y-1)) + \frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})}(F(y) - \alpha^+(z,\mathbf{x})), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{60}$$

下界 $p^-(y \mid t,z,\mathbf{x})$ 通过交换 α 和 b中的符号来定义。令 $F^{\pm}(y)$ 表示关于 $p^{\pm}(y \mid t,z,\mathbf{x})$的条件累积分布函数。则，对于所有 $y \in \mathcal{Y}$

$$F^+(y) \le \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{M}} F_{\tilde{P}}(y), F^-(y) \ge \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{M}} F_{\tilde{P}}(y), \tag{61}$$

即，界限是有效的，并且

$$F^+(y) = \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{M}} F_{\tilde{P}}(y), F^-(y) = \inf_{\tilde{P} \in \mathcal{M}} F_{\tilde{P}}(y), \tag{62}$$

即，当 Z 为连续型，或当 Z 为离散且 $b^+ \frac{1}{z}(,\mathbf{x}) \ge \pi^g(z \mid \mathbf{x})$ 时，界限是紧的。

D.3. 定理 4.2 的证明

定理 4.2. 设 $Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x})$ 定义如式 *(18)* 所示，并设 $(u)_+ = \max\{u,0\}$。尖锐 *CAPO* 上下界如下：

$$\begin{aligned} \mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) = & Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{b^{\mp}(z,\mathbf{x})} \mathbb{E}\big[(Y - Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x}))_+ \mid t,z,\mathbf{x}\big] \\ & - \frac{1}{b^{\pm}(z,\mathbf{x})} \mathbb{E}\big[(Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) - Y)_+ \mid t,z,\mathbf{x}\big]. \end{aligned} \tag{19}$$

证明。 在整个证明过程中，我们着重讨论连续型结果的上界。其他情况可类似推出。回顾其定义：

$$Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) := \inf\left\{ y \mid F_Y(y \mid t,z,\mathbf{x}) \ge \frac{(1-b^{\mp}(z,\mathbf{x}))b^{\pm}(z,\mathbf{x})}{b^{\pm}(z,\mathbf{x}) - b^{\mp}(z,\mathbf{x})} \right\}, \tag{63}$$

当 $b^-(z,\mathbf{x}) < 1 < b^+(z,\mathbf{x})$，且 $Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) = Q(t,z,\mathbf{x})$：$= \inf\{y \mid F_Y(y \mid t,z,\mathbf{x}) \ge \frac{1}{2}\}$ 否则。

应用定理 D.1，条件潜在结果 $\mu(t,\ z,\ \mathbf{x})$ 的精确上下界为

$$\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) = \frac{1}{b^{\pm}(z,\mathbf{x})} \int_{-\infty}^{Q^{\pm}(z,\mathbf{x})} y \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{b^{\mp}(z,\mathbf{x})} \int_{Q^{\pm}(z,\mathbf{x})}^{\infty} y \,\mathrm{d}\mu \tag{64}$$

$$= \frac{1}{b^{\pm}(z,\mathbf{x})} \cdot \alpha^{\pm} \mathrm{LCTE}_{\alpha}^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{\mp}(z,\mathbf{x})} \cdot (1-\alpha^{\pm}) \mathrm{CVaR}_{\alpha}^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) \tag{65}$$

其中定义 $\alpha^{\pm} := (1-b^{\mp}(z,\mathbf{x}))b^{\pm}(z,\mathbf{x})-b^{\mp}(z,\mathbf{x})$。此处，CVaR$^{\pm}$ 表示水平为 $\alpha^{\pm}$ 的条件风险价值，其对应的分位数 $Q^{+}(t,z,\mathbf{x})/Q^{-}(t,z,\mathbf{x})$ 定义为

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}^{+}(t,z,\mathbf{x}) := \min_{q\in\mathbb{R}}\Big\{ q + \frac{1}{1-\alpha^{+}}\,\mathbb{E}\big[\,(Y-q)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big]\Big\} = Q^{+}(t,z,\mathbf{x}) + \frac{b^{-}-b^{+}}{(1-b^{+})b^{-}}\mathbb{E}\big[(Y-Q^{+}(t,z,\mathbf{x}))_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big], \quad (66)$$

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}^{-}(t,z,\mathbf{x}) := \min_{q\in\mathbb{R}}\Big\{ q + \frac{1}{1-\alpha^{-}}\,\mathbb{E}\big[\,(Y-q)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big]\Big\} = Q^{-}(t,z,\mathbf{x}) + \frac{b^{+}-b^{-}}{(1-b^{-})b^{+}}\mathbb{E}\big[(Y-Q^{-}(t,z,\mathbf{x}))_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big] \quad (67)$$

其中 $(u)_{+}=$ 最大$\{u,0\}$，而 LCTE$^{\pm}$ 表示在水平 $\alpha^{\pm}$ 下的下条件尾部期望，其对应的分位数为$Q^{+}(t,\ z,\ \mathbf{x}))$ $/Q^{-}(t,\ z,\ \mathbf{x}))$，定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{LCTE}_{\alpha}^{+}(t,z,\mathbf{x}) :=& \sup_{q\in\mathbb{R}}\Big\{ q\ -\ \frac{1}{\alpha^{+}}\,\mathbb{E}\big[(\,q-Y\,)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big]\Big\}\\ =& Q^{+}(t,z,\mathbf{x})) - \frac{b^{+}(z,\mathbf{x})-b^{-}(z,\mathbf{x})}{(1-b^{-}(z,\mathbf{x}))b^{+}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(Q^{+}(t,z,\mathbf{x}))-Y)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big],\end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LCTE}_{\alpha}^{-}(t,z,\mathbf{x}) :=& \sup_{q\in\mathbb{R}}\Big\{ q\ -\ \frac{1}{\alpha^{-}}\,\mathbb{E}\big[(\,q-Y\,)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big]\Big\}\\ =& Q^{-}(t,z,\mathbf{x})) - \frac{b^{-}(z,\mathbf{x})-b^{+}(z,\mathbf{x})}{(1-b^{+}(z,\mathbf{x}))b^{-}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(Q^{-}(t,z,\mathbf{x}))-Y)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big].\end{aligned} \quad (69)$$

利用 CVaR 和 LCTE 的这些重述，即可得到所需结果

$$\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) = Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) + \frac{1}{b^{\mp}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(Y-Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x}))_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big] - \frac{1}{b^{\pm}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(Q^{\pm}(t,z,\mathbf{x})-Y)_{+} \mid t,z,\mathbf{x}\big]. \quad (70)$$

□

D.4. 定理 证明4.4

定理 4.4. 令 $S=(\mathbf{X}\ Y,T,Z)$。固定 (t,z)。定义

$$\omega_{z,h}(Z) := \begin{cases}\mathbf{1}_{[Z=z]}, & \textit{if } Z \textit{ binary/discrete},\\ K_h(Z-z), & \textit{if } Z \textit{ continuous},\end{cases}$$

并令 $\pi^{g}(Z\mid\mathbf{X})$ 表示条件概率质量函数（离散情形 Z）或密度（连续情形 Z）。令 $\widehat{\eta}=(\widehat{\pi}^{t},\widehat{\pi}^{g},\widehat{Q}^{+},\widehat{\gamma}_{u}^{+},\widehat{\gamma}_{l}^{+})$ 为一组估计的干扰参数。那么，*CAPO* 上界 $\mu^{+}(t,z,\mathbf{x})$ 的一个正交伪结果为：

$$\begin{aligned}&\phi_{t,z}^{+}(S;\widehat{\eta}) =\\ &\widehat{Q}^{+}(t,z,\mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_{u}^{+}(t,z,\mathbf{X})}{b^{-}(z,\mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_{l}^{+}(t,z,\mathbf{X})}{b^{+}(z,\mathbf{X})}\\ &+ \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\,\omega_{z,h}(Z)}{\widehat{\pi}^{t}(\mathbf{X})\,\widehat{\pi}^{g}(Z\mid\mathbf{X})}\Bigg[\frac{(Y-\widehat{Q}^{+}(t,Z,\mathbf{X}))_{+}-\widehat{\gamma}_{u}^{+}(t,Z,\mathbf{X})}{b^{-}(Z,\mathbf{X})}\\ &\qquad\qquad - \frac{(\widehat{Q}^{+}(t,Z,\mathbf{X})-Y)_{+}-\widehat{\gamma}_{l}^{+}(t,Z,\mathbf{X})}{b^{+}(Z,\mathbf{X})}\Bigg].\end{aligned} \quad (20)$$

此外，当 $\widehat{\eta}=\eta$时，伪结果对于其目标界泛函是无偏的（参见注 *4.5*）。

证明。 我们先讨论 Z 为离散型（包括二元型）的情形，因此 $\omega_{z,\ h}(Z)\ =\mathbf{1}_{[Z=z]}$。最后再讨论连续-$Z$情形下的修正。

固定 (t,z)，并简记

$$p(t,z\mid\mathbf{X}) := \pi^{t}(\mathbf{X})\,\pi^{g}(z\mid\mathbf{X}), \qquad \alpha := \alpha^{+}(z,\mathbf{X}), \qquad Q := Q^{+}(t,z,\mathbf{X}). \quad (71)$$

定义（未归一化的）条件尾部矩

$$\gamma_u := \gamma_u^+(t,z,\mathbf{X}) := \mathbb{E}[(Y-Q)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}], \qquad \gamma_l := \gamma_l^+(t,z,\mathbf{X}) := \mathbb{E}[(Q-Y)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}]. \tag{72}$$

精确上界可以写为

$$\mu^+(t,z,\mathbf{X}) = Q + \frac{\gamma_u}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l}{b^+(z,\mathbf{X})}, \tag{73}$$

这与公式（20）中的第一行相符，其中 $\widehat{\eta} = \eta$。

步骤 1：将 μ^+ 重新参数化为 CVaR/LCTE 泛函的凸组合。 定义水平为 α 的上尾和下尾伪结果（例如参见 Dorn 等人（2025年）；Oprescu 等人（2023年））

$$H_u(y,q) := q + \frac{1}{1-\alpha}(y-q)_+, \qquad H_l(y,q) := q - \frac{1}{\alpha}(q-y)_+. \tag{74}$$

它们在真实分位数 Q 处的条件期望分别为条件上部条件风险价值和下条件尾部期望（LCTE）：

$$\theta_u(\mathbf{X}) := \mathbb{E}[H_u(Y,Q) \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}] = Q + \frac{1}{1-\alpha}\gamma_u, \qquad \theta_l(\mathbf{X}) := \mathbb{E}[H_l(Y,Q) \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}] = Q - \frac{1}{\alpha}\gamma_l. \tag{75}$$

现在设权重为

$$w_u(\mathbf{X}) := \frac{1-\alpha}{b^-(z,\mathbf{X})}, \qquad w_l(\mathbf{X}) := \frac{\alpha}{b^+(z,\mathbf{X})}. \tag{76}$$

根据 $\alpha^+(z, \mathbf{X})$ 的定义，有

$$w_u(\mathbf{X}) + w_l(\mathbf{X}) = \frac{1-\alpha}{b^-(z,\mathbf{X})} + \frac{\alpha}{b^+(z,\mathbf{X})} = 1. \tag{77}$$

因此，

$$w_u(\mathbf{X})\theta_u(\mathbf{X}) + w_l(\mathbf{X})\theta_l(\mathbf{X}) = (w_u+w_l)Q + \frac{w_u}{1-\alpha}\gamma_u - \frac{w_l}{\alpha}\gamma_l = Q + \frac{1}{b^-}\gamma_u - \frac{1}{b^+}\gamma_l = \mu^+(t,z,\mathbf{X}), \tag{78}$$

所以，μ^+ 是这两个尾部泛函的一个（凸）线性组合。

步骤 2：重新中心化有效影响函数 μ^+。 我们的正交伪结果是 $\mu^+(t, z, \mathbf{X})$ 的重新中心化有效影响函数（REIF）。由于 $w_u(\mathbf{X})$ $w_l(\mathbf{X})$ 是 $(b^{\pm}, \alpha)$ 的已知函数（因此相对于数据生成分布是固定的），REIF 的线性性质意味着

$$\phi^+_{t,z}(S;\eta) := \mathrm{REIF}(\mu^+(t,z,\mathbf{X})) = w_u(\mathbf{X})\,\phi_u(S;\eta) + w_l(\mathbf{X})\,\phi_l(S;\eta), \tag{79}$$

其中 $\phi_u(S; \eta) := \mathrm{REIF}(\theta_u(\mathbf{X}))$，且 $\phi_l(S; \eta) := \mathrm{REIF}(\theta_l(\mathbf{X}))$。

定义选择权重

$$\kappa_{t,z}(S) := \frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\,\mathbf{1}_{[Z=z]}}{\pi^t(\mathbf{X})\,\pi^g(z \mid \mathbf{X})}. \tag{80}$$

根据已知结果 条件 CVaR/LCTE 泛函的 REIF（例如，Dorn 等人(2025年）；Oprescu 等人(2023年)），

$$\phi_u(S;\eta) = \theta_u(\mathbf{X}) + \kappa_{t,z}(S)\big(H_u(Y,Q) - \theta_u(\mathbf{X})\big), \quad \phi_l(S;\eta) = \theta_l(\mathbf{X}) + \kappa_{t,z}(S)\big(H_l(Y,Q) - \theta_l(\mathbf{X})\big). \tag{81}$$

此外，这些 REIF 相对于 Q是正交的：截断值 Q 被刻画为相应尾部目标函数（等价地，Rockafellar–Uryasev CVaR 变分形式）的最优解，因此包络／一阶条件给出$\partial_q \mathbb{E}[H_u(Y, q) \mid t, z, \mathbf{X}]|_{q=Q} = 0$ 以及 $\partial_q \mathbb{E}[H_l(Y, q) \mid t, z, \mathbf{X}]|_{q=Q} = 0$（参见 Dorn 等人(2025年）；Oprescu 等人(2023年)）。

最后，将（81）代入（79），使用 $\theta_u(\mathbf{X}) = Q + \gamma_u/(1-\alpha)$ 和 $\theta_l(\mathbf{X}) = Q - \gamma_l/\alpha$，再利用$w_u/(1-\alpha) = 1/b^-$ 和 $w_l/\alpha = 1/b^+$ 进行化简，恰好得到方程（ 20 ）。

步骤 3：无偏性与正交性。正交性（Neyman 正交性）成立，因为 $\phi^+_{t,z}$ 是关于 θ_u 和 θ_l 的正交 REIF 的线性组合（线性运算保留正交性）；此外，θ_u, θ_l 本身既与选择干扰项正交，也与回归干扰项正交；前者对应 (π^t, π^g)，后者则通过方程（（81））中的标准条件均值有效影响函数得以保证。关于 Q 的正交性，则由上述包络／一阶条件（FOC）论证保证。

由迭代期望可得无偏性：给定$\mathbf{X}$时，

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\mathbf{1}_{[Z=z]}}{p(t,z\mid\mathbf{X})}\left\{\frac{(Y-Q)_+-\gamma_u}{b^-}-\frac{(Q-Y)_+-\gamma_l}{b^+}\right\}\,\Big|\,\mathbf{X}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{(Y-Q)_+-\gamma_u}{b^-}-\frac{(Q-Y)_+-\gamma_l}{b^+}\,\Big|\,T=t,Z=z,\mathbf{X}\right]=0, \tag{82}$$

因此 $\mathbb{E}[\phi^+_{t,z}(S;\,\eta)\mid\mathbf{X}]=\mu^+(t,\ z,\ \mathbf{X})$。这就完成了离散 Z 情形的证明。

连续 Z。当 Z 为连续变量时，在 $Z=z$ 处进行评估不是路径可微的。我们改用核局部化：将 $\kappa_{t,\,z}$ 中的 $\mathbf{1}_{[Z=z]}$ 替换为 $\omega_{z,\,h}(Z)=K_h(Z-z)$，并将概率质量函数 $\pi^g(z\mid\mathbf{X})$ 替换为条件密度$\pi^g(Z\mid\mathbf{X})$，以定义局部化权重

$$\kappa_{t,z,h}(S):=\frac{\mathbf{1}_{[T=t]}\,K_h(Z-z)}{\pi^t(\mathbf{X})\,\pi^g(Z\mid\mathbf{X})}. \tag{83}$$

于是，将 $\kappa_{t,z}$ 替换为 $\kappa_{t,z,h}$ 后，公式（81）和公式（79）中的线性关系仍原样成立，从而得到公式（20）中的局部化伪结果。同样的迭代期望论证给出 $\mathbb{E}[\phi^+_{t,z,h}(S;\eta)\mid\mathbf{X}]=\mu^+_h(t,z,\mathbf{X})$，并且在 $z,\mu^+_h(t,z,\mathbf{X})$ 的标准光滑性条件下，$\to\mu^+(t,z,\mathbf{X})$ 当 $h\downarrow 0$ 时。 □

D.5. 定理4.7 的证明

定理*4.7*（二阶干扰误差（离散 Z））。假设 Z 是离散的，且假设 *4.6* 成立。令 $\widehat{\eta}=(\widehat{\pi}^t,\widehat{\pi}^g,\widehat{Q}^+,\widehat{\gamma}^+_u,\widehat{\gamma}^+_l)$ 为定理 *4.4* 中 $\phi^+_{t,z}(S;\,\widehat{\eta})$ 所使用的交叉拟合干扰函数。定义 $r_{n,\pi}:=\|\widehat{\pi}^t-\pi^t\|_2+\|\widehat{\pi}^g-\pi^g\|_2$，$r_{n,Q}:=\|\widehat{Q}^+-Q^+\|_2$，以及 $r_{n,\gamma}:=\|\widehat{\gamma}^+_u-\gamma_u(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2+\|\widehat{\gamma}^+_l-\gamma_l(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2$，其中 $\gamma_u(\widehat{Q}^+;X):=\mathbb{E}[(Y-\widehat{Q}^+(X))_+\mid T=t,Z=z,\ X]$ 以及 $\gamma_l(\widehat{Q}^+;X):=\mathbb{E}[(\widehat{Q}^+(X)-Y)_+\mid T=t,Z=z,\ X]$。则

$$\left\|\mathbb{E}\left[\phi^+_{t,z}(S;\widehat{\eta})-\phi^+_{t,z}(S;\eta)\mid\mathbf{X}\right]\right\|_2=O_p\left(r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma}+r^2_{n,Q}\right). \tag{21}$$

证明。我们针对离散的 Z 证明该结论。以下固定 $(t,\ z)$，并在符号明确时省略 $(t,\ z)$。由于我们采用 K 折交叉拟合，对于留出折中的任意观测，干扰参数估计 $\widehat{\eta}=(\widehat{\pi}^t,\ \widehat{\pi}^g,\ \widehat{Q}^+,\ \widehat{\gamma}^+_u,\ \widehat{\gamma}^+_l)$ 仅是训练折的函数；因此，在对留出折取均值时，可以将 $\widehat{\eta}$ 视为固定（形式上，即以训练样本为条件）。

令 $A:=\mathbf{1}_{[T=t]}\mathbf{1}_{[Z=z]}$，并将真实的联合倾向得分和估计的联合倾向得分分别写作

$$\pi(\mathbf{X}):=\pi^t(\mathbf{X})\pi^g(z\mid\mathbf{X}),\qquad\widehat{\pi}(\mathbf{X}):=\widehat{\pi}^t(\mathbf{X})\widehat{\pi}^g(z\mid\mathbf{X}). \tag{84}$$

此外，记任意截断值 Q 处的（总体）条件均值为：

$$\gamma_u(\widehat{Q};\mathbf{X}):=\mathbb{E}\Big[(Y-\widehat{Q}(\mathbf{X}))_+\mid T=t,Z=z,\mathbf{X}\Big],\quad\gamma_l(\widehat{Q};\mathbf{X}):=\mathbb{E}\Big[(\widehat{Q}(\mathbf{X})-Y)_+\mid T=t,Z=z,\mathbf{X}\Big] \tag{85}$$

其中 $\gamma_u(Q^+;\mathbf{X})=\gamma_u(\mathbf{X})$，且 $\gamma_l(Q^+;\mathbf{X})=\gamma_l(\mathbf{X})$。

步骤 1：估计伪结果的条件期望。对于离散的 Z，伪结果可简化为（因为 A 会使方括号内的 $Z=z$ 成立）

$$\phi(S;\widehat{\eta})=\widehat{Q}(\mathbf{X})+\frac{\widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})}-\frac{\widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}+\frac{A}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})}\left[\frac{(Y-\widehat{Q}(\mathbf{X}))_+-\widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})}-\frac{(\widehat{Q}(\mathbf{X})-Y)_+-\widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}\right]. \tag{86}$$

在给定$\mathbf{X}$的条件下取条件期望，并利用 $\mathbb{E}[A \mid \mathbf{X}] = \pi(\mathbf{X})$，得到

$$\mathbb{E}[\phi(S;\widehat{\eta}) \mid \mathbf{X}] = \widehat{Q}(\mathbf{X}) + \frac{\widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})} + \frac{\pi(\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})}\left[\frac{\gamma_u(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}\right] \tag{87}$$

$$= \underbrace{\widehat{Q}(\mathbf{X}) + \frac{\gamma_u(\widehat{Q}^+;\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l(\widehat{Q}^+;\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}}_{=:\,\mu_{\widehat{Q}^+}(\mathbf{X})} + \left(\frac{\pi(\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})} - 1\right)\left[\frac{\gamma_u(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}\right] \tag{88}$$

此外，根据定理 4.4 （应用真实干扰参数），我们得到

$$\mathbb{E}[\phi(S;\eta) \mid \mathbf{X}] = \mu^+(\mathbf{X}) := Q(\mathbf{X}) + \frac{\gamma_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}. \tag{89}$$

因此，我们得到

$$\mathbb{E}[\phi(S;\widehat{\eta}) - \phi(S;\eta) \mid \mathbf{X}] = \mu_{\widehat{Q}^+}(\mathbf{X}) - \mu^+(\mathbf{X}) + \left(\frac{\pi(\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})} - 1\right)\left[\frac{\gamma_u(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}\right], \tag{90}$$

and

$$\|\mathbb{E}[\phi(S;\widehat{\eta}) - \phi(S;\eta) \mid \mathbf{X}]\|_2 \le \underbrace{\left\|\mu_{\widehat{Q}}(\mathbf{X}) - \mu^+(\mathbf{X})\right\|_2}_{\text{cutoff-induced error}} + \underbrace{\left\|\frac{\pi(\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})} - 1\right\|_2 \left\|\frac{\gamma_u(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}\right\|_2}_{\text{propensity} \times \text{regression product term}} \tag{91}$$

其中，最后一个不等式由三角不等式和柯西–施瓦茨不等式得出。

步骤 2：用 $O_p(r_{n,\pi}r_{n,\gamma})$ 对乘积项进行界定。 根据假设 4.6, $\widehat{\pi}(\mathbf{X}) \ge \varepsilon$几乎处处成立，因此

$$\left\|\frac{\pi(\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})} - 1\right\|_2 = \left\|\frac{\pi(\mathbf{X}) - \widehat{\pi}(\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})}\right\|_2 \le \varepsilon^{-1}\|\widehat{\pi} - \pi\|_2. \tag{92}$$

由于 $\pi = \pi^t\pi^g$ 和 $\widehat{\pi} = \widehat{\pi}^t\widehat{\pi}^g$,

$$\widehat{\pi} - \pi = (\widehat{\pi}^t - \pi^t)\widehat{\pi}^g + \pi^t(\widehat{\pi}^g - \pi^g), \tag{93}$$

因此由三角不等式以及 $0 \le \pi^t, \widehat{\pi}^g \le 1$ （离散 Z），

$$\|\widehat{\pi} - \pi\|_2 \le \|\widehat{\pi}^t - \pi^t\|_2 + \|\widehat{\pi}^g - \pi^g\|_2. \tag{94}$$

因此

$$\left\|\frac{\pi}{\widehat{\pi}} - 1\right\|_2 \le \varepsilon^{-1}\Big(\|\widehat{\pi}^t - \pi^t\|_2 + \|\widehat{\pi}^g - \pi^g\|_2\Big) \tag{95}$$

并且还需要界定第二个因子。由于 $b^-(z,\mathbf{X})$远离0，我们有

$$\left\|\frac{\gamma_u(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-(z,\mathbf{X})} - \frac{\gamma_l(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+(z,\mathbf{X})}\right\|_2 \le \varepsilon^{-1}\Big(\|\widehat{\gamma}_u - \gamma_u(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2 + \|\widehat{\gamma}_l - \gamma_l(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2\Big), \tag{96}$$

由三角不等式。与前一不等式结合可得

$$\underbrace{\left\|\frac{\pi}{\widehat{\pi}} - 1\right\|_2}_{=O_p(r_{n,\pi})} \cdot \underbrace{\left\|\frac{\gamma_u(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_u(\mathbf{X})}{b^-} - \frac{\gamma_l(\widehat{Q}^+;\mathbf{X}) - \widehat{\gamma}_l(\mathbf{X})}{b^+}\right\|_2}_{=O_p(r_{n,\gamma})} = O_p(r_{n,\pi}r_{n,\gamma}), \tag{97}$$

其中，第二个 $O_p(r_{n,\,\gamma})$ 根据 $r_{n,\,\gamma}$ 的定义（即用于估计伪结果中所用截断值处条件尾部均值的 L_2 率）。

步骤 3：通过 $O_p(r_{n,Q}^2)$ 对截断值引致项进行界定。 现在需要控制项 $\mu_{\widehat{Q}^+}(\mathbf{X}) - \mu^+(\mathbf{X})$。固定 (t, z) 和 $\mathbf{x}$，并定义标量函数

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(q) := q + \frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})}\,\mathbb{E}[(Y-q)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}] - \frac{1}{b^+(z,\mathbf{x})}\,\mathbb{E}[(q-Y)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}]\,. \tag{98}$$

根据构造，

$$\mu_{\widehat{Q}^+}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\widehat{Q}^+(t,z,\mathbf{x})), \qquad \mu^+(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(Q^+(t,z,\mathbf{x})), \tag{99}$$

其中 $Q^+(t,z,\mathbf{x})$ 是定理 4.2中的最优截断值。

假设（与分位数/CVaR 型展开的标准做法一样）条件累积分布函数 $F_{Y|t,z,\mathbf{x}}$ 在 $Q^+(t,z,\mathbf{x})$ 的某个邻域内可微，且密度为 $f_{Y|t,z,\mathbf{x}}$，并有界于 $\bar{f} < \infty$。那么，$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ 可微，且

$$\mathcal{L}'_{\mathbf{x}}(q) = 1 - \frac{1 - F_{Y|t,z,\mathbf{x}}(q)}{b^-(z,\mathbf{x})} - \frac{F_{Y|t,z,\mathbf{x}}(q)}{b^+(z,\mathbf{x})}. \tag{100}$$

此外，$\mathcal{L}'_{\mathbf{x}}$ 是 Lipschitz 连续的，且

$$|\mathcal{L}''_{\mathbf{x}}(q)| = \left|\left(\frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})} - \frac{1}{b^+(z,\mathbf{x})}\right) f_{Y|t,z,\mathbf{x}}(q)\right| \le \bar{f}\left(\frac{1}{b^-(z,\mathbf{x})} + \frac{1}{b^+(z,\mathbf{x})}\right) \le L, \tag{101}$$

对于某个有限常数 L(在 $\mathbf{x}$ 上一致，这由假设 4.6保证)。

由 $Q^+(t,z,\mathbf{x})$ 对 $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ 的最优性，我们有 $\mathcal{L}'_{\mathbf{x}}(Q^+(t,z,\mathbf{x})) = 0$。因此，根据微积分基本定理，

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\widehat{Q}^+(t,z,\mathbf{x})) - \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(Q^+(t,z,\mathbf{x}))\right| &= \left|\int_{Q^+(t,z,\mathbf{x})}^{\widehat{Q}^+(t,z,\mathbf{x})} \left(\mathcal{L}'_{\mathbf{x}}(u) - \mathcal{L}'_{\mathbf{x}}(Q^+(t,z,\mathbf{x}))\right)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\le \int_{Q^+(t,z,\mathbf{x})}^{\widehat{Q}^+(t,z,\mathbf{x})} L\,|u - Q^+(t,z,\mathbf{x})|\,\mathrm{d}u \\
&\le \frac{L}{2}\,|\widehat{Q}^+(t,z,\mathbf{x}) - Q^+(t,z,\mathbf{x})|^2.
\end{aligned}$$

取 $L_2(P_{\mathbf{X}})$ 范数可得

$$\|\mu_{\widehat{Q}^+} - \mu^+\|_2 = O_p\Big(\|\widehat{Q}^+ - Q^+\|_2^2\Big) = O_p(r_{n,Q}^2). \tag{102}$$

结论。 将式（90）分解中的步骤 2 与步骤 3 相结合，可得

$$\left\|\mathbb{E}\big[\phi^+_{t,z}(S;\widehat{\eta}) - \phi^+_{t,z}(S;\eta) \mid \mathbf{X}\big]\right\|_2 = O_p\big(r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2\big)\,, \tag{103}$$

这恰好是式（21）。 □

D.6. 推论4.10的证明

推论 4.10（准神谕速率与推断（离散 Z））。 设假设 *4.6* 与 *4.8* 成立，并令$r_{n,\pi}$，$r_{n,\gamma}$，$r_{n,Q}$ 如定理 *4.7*中所设。

CAPO 收敛速率：*CAPO* 上界估计量满足

$$\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2 = O_p\big(\delta_n + r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2\big)\,.$$

特别地，若$r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2 = o_p(\delta_n)$，则 $\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2 = O_p(\delta_n)$。

APO 收敛速率：*APO* 上界估计量 $\widehat{\psi}^+(t,z) = \mathbb{E}_n[\widehat{\phi}^+_{t,z}]$ 满足

$$\left|\widehat{\psi}^+(t,z) - \psi^+(t,z)\right| = O_p\left(n^{-1/2} + r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2\right). \tag{23}$$

此外，如果 $r_{n,\pi} r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2 = o_p(n^{-1/2})$ </style}，则

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\psi}^+(t,z) - \psi^+(t,z)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\big(0,\, V^+(t,z)\big)\,, \tag{24}$$

即，*APO*界估计　　量渐近正态，其方差为 $V^+(t,z) := \mathrm{Var}(\phi^+_{t,z}(S;\eta))$（效率界）。

证明。 我们证明上界情形下的 CAPO 和 APO 结论；下界情形可通过对符号相反的伪结果采用相同论证得到。

CAPO界收敛速率。 令 $m^+_{t,z}(\mathbf{x}) := \mathbb{E}[\widehat{\phi}^+_{t,z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]$ 表示（交叉拟合）伪结果的条件均值。根据假设 4.8,

$$\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - m^+_{t,z}(\cdot)\|_2 = O_p(\delta_n). \tag{104}$$

根据三角不等式,

$$\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2 \le \|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - m^+_{t,z}(\cdot)\|_2 + \|m^+_{t,z}(\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2. \tag{105}$$

第二项恰好是由干扰参数估计引起的条件偏差。应用定理 4.7 可得

$$\|m^+_{t,z}(\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2 = O_p(r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r^2_{n,Q}). \tag{106}$$

结合这两个界限即可得到所述的 CAPO 收敛率。

APO 收敛率与渐近正态性。回顾 $\widehat{\psi}^+(t,z) = \mathbb{E}_n[\widehat{\phi}^+_{t,z}]$。分解

$$\widehat{\psi}^+(t,z) - \psi^+(t,z) = (\mathbb{E}_n - \mathbb{E})[\phi^+_{t,z}(S;\eta)] + \mathbb{E}\big[\phi^+_{t,z}(S;\widehat{\eta}) - \phi^+_{t,z}(S;\eta)\big] + R_n, \tag{107}$$

其中 $R_n := (\mathbb{E}_n - \mathbb{E})[\phi^+_{t,z}(S;\,\widehat{\eta}) - \phi^+_{t,z}(S;\eta)]$ 是一个经验过程项。在假设 4.6(iii) 下，$\phi^+_{t,z}(S;\,\cdot)$ 一致有界；通过交叉拟合，利用标准论证（对训练折进行条件化，并应用 Hoeffding/Bernstein不等式）可得 $R_n = o_p(n^{-1/2})$。

第一项根据中心极限定理为 $O_p(n^{-1/2})$。第二项由定理4.7 界定（对 $\mathbf{X}$ 积分后），从而得到

$$\big|\mathbb{E}\big[\phi^+_{t,z}(S;\widehat{\eta}) - \phi^+_{t,z}(S;\eta)\big]\big| = O_p(r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r^2_{n,Q}). \tag{108}$$

这证明了公式（23）。若还满足 $r_{n,\pi} r_{n,\gamma} + r^2_{n,Q} = o_p(n^{-1/2})$，则干扰参数引起的偏差项和 R_n 均为$o_p(n^{-1/2})$，因此

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\psi}^+(t,z) - \psi^+(t,z)\big) = \sqrt{n}(\mathbb{E}_n - \mathbb{E})[\phi^+_{t,z}(S;\eta)] + o_p(1) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, V^+(t,z)), \tag{109}$$

其中 $V^+(t,\ z) = \mathrm{Var}(\phi^+_{t,\ z}(S;\eta))$。 □

D.7. 命题 4.11 的证明

命题 *4.11*（紧界的一致性（离散 Z））。假设推论 *4.10* 的条件成立。设 $\delta_n = o_p(1)$ 且 $r_{n,Q} = o_p(1)$，并且此外满足 $r_{n,\pi} = o_p(1)$ 或 $r_{n,\gamma} = o_p(1)$。那么，$\|\widehat{\mu}^{\pm}(t,z,\cdot) - \mu^{\pm}(t,z,\cdot)\|_2 = o_p(1)$，且 $|\widehat{\psi}^{\pm}(t,z) - \psi^{\pm}(t,z)| = o_p(1)$。因此，估计的 *CAPO* 和 *APO* 区间收敛于紧识别区间。

证明。我们证明 CAPO 上界的结论；其他界限（CAPO 下界、APO 上界/下界）可用类似方法证明。

根据推论 4.10,

$$\|\widehat{\mu}^+(t,z,\cdot) - \mu^+(t,z,\cdot)\|_2 = O_p\big(\delta_n + r_{n,\pi} r_{n,\gamma} + r^2_{n,Q}\big)\,. \tag{110}$$

在该命题的假设下，$\delta_n = o_p(1)$ 和 $r_{n,\ Q} = o_p(1)$。此外，如果 $r_{n,\ \pi} = o_p(1)$ 或 $r_{n,\ \gamma} = o_p(1)$，那么$r_{n,\ \pi} r_{n,\ \gamma} = o_p(1)$。因此，右侧为 $o_p(1)$，这意味着 $\|\widehat{\mu}^+(t,\ z,\ \cdot) - \mu^+(t,\ z,\ \cdot)\|_2 = o_p(1)$。

对于 APO，类似结论可由推论 4.10 中的 APO 收敛率以及余项的相同收敛性得出。最后，对下界重复相同的论证（使用其对应的伪结果），即可证明两个端点均收敛，从而估计区间收敛至尖锐识别区间。

□

D.8. 推论4.12 的证明

推论 4.12（错误设定的截断值下的渐近有效性（离散 Z））。假设推论 *4.10* 的条件成立。令 $Q^{\pm}(t,\ z,\ \mathbf{x})$ 为任意可测的截断值，并定义由此诱导的（可能并非紧的）界限

$$\begin{aligned}\overline{\mu}^{\pm}(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^{\pm}) = \overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) \\ + \frac{1}{b^{\mp}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(Y-\overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x}))_+ \mid t,z,\mathbf{x}\big] \\ - \frac{1}{b^{\pm}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}\big[(\overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x})-Y)_+ \mid t,z,\mathbf{x}\big].\end{aligned} \tag{25}$$

*(*类似地，$\psi^{\pm}(t,z) := \mathbb{E}[\mu^{\pm}(t,z,\mathbf{X})]$*)* 。那么，$[\mu^{-}(t,z,\mathbf{x})\ \mu^{+}(t,z,\mathbf{x})]$ 是一个有效的（不一定是尖锐的）*CAPO* 区间，$[\psi^{-}(t,z)\ \psi^{+}(t,z)]$也同样如此。

此外，若 $\widehat{Q}^{\pm} \to Q^{\pm}$ 属于 L_2，且以下条件之一成立：*(i)* $(\widehat{\pi}^t, \widehat{\pi}^g)$ 是一致的；或 *(ii)* 对由 $Q^{\pm}$诱导的尾部矩目标，$(\widehat{\gamma}_u^{\pm}, \widehat{\gamma}_l^{\pm})$ 是一致的；那么，由此得到的估计 *(C)APO*区间将分别收敛于$[\mu^{-}, \mu^{+}]$ 和 $[\psi^{-}, \psi^{+}]$，且渐近有效，但可能是保守的。若 $Q^{\pm} = Q^{\pm}$，则这些界限与尖锐界一致。

证明。我们证明 CAPO 结论；对$\mathbf{X}$取期望即可得到 APO 结论。

步骤 1：任意截断值都会诱导一个有效（保守）区间。固定 $(t,z,\mathbf{x})$，并对任意标量截断值 q定义上尾和下尾目标函数

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{+}(q) := q + \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}[(Y-q)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}] - \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}[(q-Y)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}], \tag{111}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{-}(q) := q + \frac{1}{b^{+}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}[(Y-q)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}] - \frac{1}{b^{-}(z,\mathbf{x})}\mathbb{E}[(q-Y)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}]. \tag{112}$$

根据定理4.2（等价地，标准的 Rockafellar–Uryasev 变分形式），

$$\mu^{+}(t,z,\mathbf{x}) = \inf_q \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{+}(q), \qquad \mu^{-}(t,z,\mathbf{x}) = \sup_q \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{-}(q), \tag{113}$$

其最优解分别为 $q = Q^{+}(t,z,\mathbf{x})$ 和 $q = Q^{-}(t,z,\mathbf{x})$。因此，对于任意可测的 $\overline{Q}^{+}(t,z,\mathbf{x})$ 和 $\overline{Q}^{-}(t,z,\mathbf{x})$，

$$\overline{\mu}^{+}(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^{+}) := \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{+}(\overline{Q}^{+}(t,z,\mathbf{x})) \ \geq\ \mu^{+}(t,z,\mathbf{x}), \qquad \overline{\mu}^{-}(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^{-}) := \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{-}(\overline{Q}^{-}(t,z,\mathbf{x})) \ \leq\ \mu^{-}(t,z,\mathbf{x}), \tag{114}$$

因此 $[\mu^{-}(t,z,\mathbf{x})\ \mu^{+}(t,z,\mathbf{x})]$ 包含紧的 CAPO 区间，因而是有效的。

步骤 2：收敛至诱导界限。固定可测截断值 $Q^{\pm}$，并定义相应的铰链均值目标

$$\overline{\gamma}_u^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}\Big[(Y-\overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x}))_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}\Big], \tag{115}$$

$$\overline{\gamma}_l^{\pm}(t,z,\mathbf{x}) := \mathbb{E}\Big[(\overline{Q}^{\pm}(t,z,\mathbf{x})-Y)_+ \mid T=t, Z=z, \mathbf{X}=\mathbf{x}\Big]. \tag{116}$$

令 $\eta^{\pm} := (\pi^t,\ \pi^g, \overline{Q}^{\pm},\ \gamma_u^{\pm},\ \gamma_l^{\pm})$。根据定理 4.4，相应的伪结果在条件上无偏：$\mathbb{E}[\phi_{t,z}^{\pm}(S;\ \eta^{\pm}) \mid \mathbf{X}] = \mu^{\pm}(t,z,\mathbf{X};\ Q^{\pm})$。

现在考虑估计的伪结果 $\phi_{t,z}^{\pm}(S;\ \widehat{\eta}^{\pm})$ 并简记为 $\widehat{Q} = \widehat{Q}^{\pm}$，$Q = Q^{\pm}$。与定理4.7证明中相同的条件期望代数推导出如下分解

$$\mathbb{E}[\phi_{t,z}^{\pm}(S;\widehat{\eta}^{\pm}) \mid \mathbf{X}] = \mu_{\widehat{Q}}^{\pm}(\mathbf{X}) + \left(\frac{\pi(\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(\mathbf{X})} - 1\right)\Delta_{\widehat{Q}}^{\pm}(\mathbf{X}), \tag{117}$$

其中，$\mu^{\pm}_{\widehat{Q}}(\mathbf{X})$ 是在 $\widehat{Q}$ 处求值的诱导界泛函（即 $\mathcal{L}^{\pm}\mathbf{x}(\widehat{Q})$），而 $\Delta^{\pm}_{\widehat{Q}}(\mathbf{X})$ 汇集了截断值 Q处的条件均值^回归误差。

首先，由于 $(u)_+$ 是 1-Lipschitz 的，对于每个 $\mathbf{X}$，

$$|\gamma_u(\widehat{Q};\mathbf{X})-\gamma_u(\overline{Q};\mathbf{X})|\le|\widehat{Q}(\mathbf{X})-\overline{Q}(\mathbf{X})|,\qquad|\gamma_l(\widehat{Q};\mathbf{X})-\gamma_l(\overline{Q};\mathbf{X})|\le|\widehat{Q}(\mathbf{X})-\overline{Q}(\mathbf{X})|. \tag{118}$$

利用 $b^{\pm}$ 界 定远离 0，这意味着当 $\widehat{Q}\to Q$ in L_2 时，$\|\mu^{\pm}_{\widehat{Q}}-\mu^{\pm}(;Q)\|_2\lesssim\|\widehat{Q}-Q\|_2=o_p(1)$.

其次，对于乘积项，假设 4.6 意味着 $\|\pi/\widehat{\pi}-1\|_2$ 有界；并且，如果 $(\widehat{\pi}^t,\widehat{\pi}^g)$ 是一致的，那么 $\|\pi/\widehat{\pi}-1\|_2=o_p(1)$。此外，

$$\|\gamma_u(\widehat{Q};\cdot)-\widehat{\gamma}^{\pm}_u\|_2\le\|\overline{\gamma}^{\pm}_u-\widehat{\gamma}^{\pm}_u\|_2+\|\gamma_u(\widehat{Q};\cdot)-\gamma_u(\overline{Q};\cdot)\|_2\le\|\overline{\gamma}^{\pm}_u-\widehat{\gamma}^{\pm}_u\|_2+\|\widehat{Q}-\overline{Q}\|_2, \tag{119}$$

下铰链均值也同理。因此，如果 $(\widehat{\gamma}^{\pm}_u,\widehat{\gamma}^{\pm}_l)$ 与诱导目标 $(\gamma^{\pm}_u,\gamma^{\pm}_l)$ 和 $\widehat{Q}\to Q$ 一致，那么 $\|\Delta^{\pm}_{\widehat{Q}}\|_{\overline{2}}=o_p(1)$，所以即使 $(\widehat{\pi}^t,\widehat{\pi}^g)$ 设定错误（但有界且远离 0），乘积项仍为 $o_p(1)$。

结合这两部分可得

$$\|\mathbb{E}[\phi^{\pm}_{t,z}(S;\widehat{\eta}^{\pm})\mid\mathbf{X}]-\overline{\mu}^{\pm}(t,z,\mathbf{X};\overline{Q}^{\pm})\|_2=o_p(1). \tag{120}$$

在假设 4.8 且 $\delta_n=o_p(1)$ 的条件下，最终阶段回归因此得到 $\|\widehat{\mu}^{\pm}(t,z,\cdot)-\mu^{\pm}(t,z,\cdot;Q^{\pm})\|_{\overline{2}}=o_p(1)$，而样本均值估计量给出 $\widehat{\psi}^{\pm}(t,z)\to\psi^{\pm}(t,z)$。因此，估计的(C)APO区间收敛到所诱导的（保守）区间，并且渐近有效。如果 $Q^{\pm}=Q^{\pm}$，则 $\mu^{\pm}=\mu^{\pm}$，且极限与尖锐界一致。

□

D.9. 定理证明C.2

定理 C.2 (二阶干扰误差（连续 Z）)。 假设 Z连续，且假设 *4.6* 和*C.1* 成立。令 $\widehat{\eta}=(\widehat{\pi}^t,\widehat{\pi}^g,\widehat{Q}^+,\widehat{\gamma}^+_u,\widehat{\gamma}^+_l)$ 为用于 $\phi^+_{t,z,h}(S;\widehat{\eta})$ 中的交叉拟合干扰函数（式 (20)，其中 $\omega_{z,h}(Z)=K_h(Z-z)$）。

定义干扰误差率（在适当自变量上的 L_2 范数）为

$$r_{n,\pi}:=\|\widehat{\pi}^t-\pi^t\|_2+\|\widehat{\pi}^g-\pi^g\|_2,\qquad r_{n,Q}:=\|\widehat{Q}^+-Q^+\|_2, \tag{41}$$

$$r_{n,\gamma}:=\|\widehat{\gamma}^+_u-\gamma_u(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2+\|\widehat{\gamma}^+_l-\gamma_l(\widehat{Q}^+;\cdot)\|_2, \tag{42}$$

其中，范数是针对相应干扰项所依赖的随机变量取的（例如，对于π^g，是$(Z,\mathbf{X})$；对于 Q^+，是$(Z\mid\mathbf{X})$；对于 $\gamma^{\pm}$，是$(t,Z,\mathbf{X})$；对于 t，是$(t,Z,\mathbf{X})$）。

那么，干扰参数估计所引致的条件偏差满足

$$\Big\|\mathbb{E}\Big[\phi^+_{t,z,h}(S;\widehat{\eta})-\phi^+_{t,z,h}(S;\eta)\mid\mathbf{X}\Big]\Big\|_2=O_p\left(\frac{r_{n,\pi}\,r_{n,\gamma}+r^2_{n,Q}}{\sqrt{h}}\right). \tag{43}$$

证明。 我们仿照定理 4.7 的证明，仅强调针对连续 Z所需的改动。固定 (t,z) 并在符号说明中省略 (t,z)。和之前一样，根据交叉拟合，我们可以对训练折取条件，并在对留出折取期望时将 $\widehat{\eta}$ 视为固定。

关键改动。 对于连续 Z，定义

$$A_h:=\mathbf{1}_{[T=t]}K_h(Z-z),\qquad\pi(Z,\mathbf{X}):=\pi^t(\mathbf{X})\,\pi^g(Z\mid\mathbf{X}),\qquad\widehat{\pi}(Z,\mathbf{X}):=\widehat{\pi}^t(\mathbf{X})\,\widehat{\pi}^g(Z\mid\mathbf{X}), \tag{121}$$

因此，真实的局部化选择权重为

$$\kappa_{t,z,h}(S)=\frac{A_h}{\pi(Z,\mathbf{X})}. \tag{122}$$

离散-Z 代数推导仍然成立，只需将 A 替换为 A_h，并将 $\pi(\mathbf{X})$ 替换为 $\pi(Z,\mathbf{X})$。唯一实质性的区别是，核加权项的 L_2 范数会通过 $\int K_h(u)^2\,du=O(1/h)$ 带上一个因子 $h^{-1/2}$。

一个有用的核矩界。在假设 4.6和 C.1下，存在一个常数 $C < \infty$，使得对于任意平方可积可测函数 $G(S)$,

$$\|\mathbb{E}[\kappa_{t,z,h}(S)\, G(S) \mid \mathbf{X}]\|_2 \le \frac{C}{\sqrt{h}}\, \|G(S)\|_2. \tag{123}$$

事实上，根据条件柯西–施瓦茨不等式,

$$\big(\mathbb{E}[\kappa_{t,z,h} G \mid \mathbf{X}]\big)^2 \le \mathbb{E}[\kappa_{t,z,h}^2 \mid \mathbf{X}]\, \mathbb{E}[G^2 \mid \mathbf{X}], \tag{124}$$

并且 $\mathbb{E}[\kappa_{t,z,h}^2 \mid \mathbf{X}]$ 的量级为 $1/h$，因为 K_h^2 积分为 $O(1/h)$，且 $\pi^t(\mathbf{X})\ \pi^g(\cdot \mid \mathbf{X})$ 均远离 0（重叠性）。

步骤 1：条件期望分解。对于式（20），令 $\phi_h(S;\cdot)$ 表示其中 $\omega_{z,h}(Z) = K_h(Z - z)$ 的情形。与离散情形证明一样，给定$\mathbf{X}$ 取条件期望，并利用迭代期望，将样本内铰链项替换为相应的条件均值目标（在伪结果所用的截断值处求值）。由此可得如下形式的分解

$$\mathbb{E}[\phi_h(S;\widehat{\eta}) - \phi_h(S;\eta) \mid \mathbf{X}] = \underbrace{\Big(\mu_{h,\widehat{Q}^+}(\mathbf{X}) - \mu_h^+(\mathbf{X})\Big)}_{\text{cutoff-induced error}} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\pi(Z,\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(Z,\mathbf{X})} - 1\right) \kappa_{t,z,h}(S)\, \Delta_{\widehat{Q}^+}(S) \;\Big|\; \mathbf{X}\right]}_{\text{propensity} \times \text{regression product term}}, \tag{125}$$

其中 $\mu_{h,\widehat{Q}^+}(\mathbf{X})$ 表示由截断值 $\widehat{Q}^+$ 所诱导的界泛函（对于该截断值，其余目标保持为总体值），而 $\Delta_{\widehat{Q}^+}(S)$ 汇总了截断值 $\widehat{Q}^+$ 处的铰链均值回归偏差（即连续情形下，对应于离散情形证明中式（90）方括号内项的对应项）。

步骤 2：界定乘积项。根据重叠性，$\widehat{\pi}(Z,\ \mathbf{X})$与 0 保持正距离；因此

$$\left\|\frac{\pi(Z,\mathbf{X})}{\widehat{\pi}(Z,\mathbf{X})} - 1\right\|_2 \lesssim \|\widehat{\pi}^t - \pi^t\|_2 + \|\widehat{\pi}^g - \pi^g\|_2 = O_p(r_{n,\pi}), \tag{126}$$

其中，范数是在评估干扰参数所依据的自变量上计算的（这里对 $(Z,\ \mathbf{X})$ 而言，π^g）。此外，根据 $r_{n,}$ $_\gamma$、$\|\Delta_{\widehat{Q}^+}(S)\|_2 = O_p(r_{n,\ \gamma})$的定义，利用 123 式，其中 $G(S) := \big(\frac{\pi}{\widehat{\pi}} - 1\big)\, \Delta_{\widehat{Q}^+}(S)$ 可得

$$\left\|\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\pi}{\widehat{\pi}} - 1\Big)\, \kappa_{t,z,h} \Delta_{\widehat{Q}^+} \mid \mathbf{X}\Big]\right\|_2 \le \frac{C}{\sqrt{h}} \left\|\Big(\frac{\pi}{\widehat{\pi}} - 1\Big)\, \Delta_{\widehat{Q}^+}\right\|_2 = O_p\left(\frac{r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma}}{\sqrt{h}}\right). \tag{127}$$

步骤 3：界定截断值引致项。离散情形证明利用截断值的包络／一阶条件性质以及二阶泰勒展开来界定截断值引致项，从而得到其对 $\widehat{Q}^+ - Q^+$ 的二次依赖。同样的论证也适用于截断值自变量上的逐点情形（对于局部化目标，截断值仍是相同尾部目标函数的最优解），因此

$$|\mu_{h,\widehat{Q}^+}(\mathbf{X}) - \mu_h^+(\mathbf{X})| \lesssim \mathbb{E}\Big[\kappa_{t,z,h}(S)\, \big|\widehat{Q}^+(t,Z,\mathbf{X}) - Q^+(t,Z,\mathbf{X})\big|^2 \;\Big|\; \mathbf{X}\Big]. \tag{128}$$

将式（123）应用于 $G(S) := \big|\widehat{Q}^+(t,Z,\mathbf{X}) - Q^+(t,Z,\mathbf{X})\big|^2$，并采用与离散情形证明中相同的有界矩简化，可得

$$\|\mu_{h,\widehat{Q}^+} - \mu_h^+\|_2 = O_p\left(\frac{r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}}\right). \tag{129}$$

结论。综合步骤2–3于式（125），可得

$$\|\mathbb{E}[\phi_h(S;\widehat{\eta}) - \phi_h(S;\eta) \mid \mathbf{X}]\|_2 = O_p\left(\frac{r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}}\right), \tag{130}$$

这正是所要证明的结论。 □

D.10. 推论的证明 C.3

推论 C.3 (准神谕速率与推断（连续型 Z）。 假设定理 C.2 中的条件成立，且第二阶段回归学习器 $\widehat{\mathbb{E}}_n[\cdot \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]$ 在对$_{,,h}(S;\eta)$ 关于$\mathbf{X}$进行回归时满足假设4.8 ， 其速率为 δ_n 。

那么：

CAPO 收敛速率：CAPO 上界估计量满足

$$\|\widehat{\mu}_h^+(t,z,\cdot) - \mu_h^+(t,z,\cdot)\|_2 = O_p\left(\delta_n + \frac{r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}}\right). \tag{44}$$

APO 收敛速率：APO 上界估计量 $\widehat{\psi}^+(t,z) = \mathbb{E}_n[\widehat{\phi}_{t,z,h}^+]$ 满足

$$|\widehat{\psi}_h^+(t,z) - \psi_h^+(t,z)| = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}} + \frac{r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}}\right). \tag{45}$$

$\sqrt{nh}$-APO（平滑处理后）的中心极限定理。如果 $r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2 = o_p(n^{-1/2})$， 则 n

$$\sqrt{nh}\left(\widehat{\psi}_h^+(t,z) - \psi_h^+(t,z)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\big(0,\, V_h^+(t,z)\big)\,, \tag{46}$$

其中，一个有效的渐近方差目标为 $V_h^+(t,z)$：$=$方差$\big(\sqrt{h}\,\phi_{t}^{+}{}_{,z,\,h}(S;\ \eta)\big)$。

最后，若平滑偏差满足 $|\psi_h^+(t,z) - \psi^+(t,z)| = o((nh)^{-1/2})$ （例如，在 z 光滑性条件下通过欠平滑实现），则相同的中心极限定理仍成立，只需将 $\psi_h^+(t,z)$替换为 $\psi^+(t,z)$ 。

证明。 我们沿用推论 4.10的证明，将定理4.7 替换为定理 C.2，并跟踪核函数诱导的缩放。

CAPO 收敛率。 令 $m_{t}^{+}{}_{z,,h}(\mathbf{x})$：$= \mathbb{E}[\widehat{\phi}_{t,z,h}^+ \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]$ 表示（交叉拟合的）局部化伪结果的条件均值。根据假设 4.8,

$$\|\widehat{\mu}_h^+(t,z,\cdot) - m_{t,z,h}^+(\cdot)\|_2 = O_p(\delta_n). \tag{131}$$

由三角不等式,

$$\|\widehat{\mu}_h^+(t,z,\cdot) - \mu_h^+(t,z,\cdot)\|_2 \le \|\widehat{\mu}_h^+(t,z,\cdot) - m_{t,z,h}^+(\cdot)\|_2 + \|m_{t,z,h}^+(\cdot) - \mu_h^+(t,z,\cdot)\|_2. \tag{132}$$

第二项恰好是由定理 C.2控制的条件性干扰项诱导的偏差，从而得到所述的 CAPO 收敛率。

APO 收敛率与 $\sqrt{nh}$ 渐近正态性。回顾 $\widehat{\psi}_h^+(t,\ z) = \mathbb{E}_n[\widehat{\phi}_{t,z,h}^+]$。 分解

$$\widehat{\psi}_h^+(t,z) - \psi_h^+(t,z) = (\mathbb{E}_n - \mathbb{E})[\phi_{t,z,h}^+(S;\eta)] + \mathbb{E}\Big[\phi_{t,z,h}^+(S;\widehat{\eta}) - \phi_{t,z,h}^+(S;\eta)\Big] + R_{n,h}, \tag{133}$$

其中 $R_{n,\ h}$:= $(\mathbb{E}_n - \mathbb{E})[\phi_{t,z,h}^+(S;\ \widehat{\eta}) - \phi_{t}^{+}{}_{,\ z,\ h}(S;\eta)]$。

在假设 C.1 和重叠性条件下，Var$(\phi_{t}^{+}{}_{,\ z,\ h}(S;\eta)) = O(1/h)$，因此根据中心极限定理，$(\mathbb{E}_n - \mathbb{E})[\phi_{t,z,h}^+(S;\ \eta)] = O_p((nh)^{-1/2})$。采用交叉拟合并使用与离散情形证明中相同的条件化论证，$R_{n,\ h} = o_p((nh)^{-1/2})$。

对$\mathbf{X}$积分后，偏差项由定理 C.2 控制，从而得到所述的 APO 收敛率。若进一步有$r_{n,\ \pi} r_{n,\ \gamma} + r_{n,\ Q}^2 = o_p(n^{-1/2})$, 则偏差项和 $R_{n,\ h}$ 为 $o_p((nh)^{-1/2})$，这意味着

$$\sqrt{nh}\big(\widehat{\psi}_h^+(t,z) - \psi_h^+(t,z)\big) = \sqrt{nh}(\mathbb{E}_n - \mathbb{E})[\phi_{t,z,h}^+(S;\eta)] + o_p(1) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, V_h^+(t,z)), \tag{134}$$

其中 $V_h^+(t,z)$ $=$Var$(\sqrt{h}\,\phi_{t}^{+}{}_{,z,h}(S;\eta))$。最终的欠平滑陈述通过加减 $\psi^+(t,z)$ 并利用所假设的偏差条件而得到。

□

D.11. 命题的证明 C.4

命题 C.4（尖锐界的一致性（连续 Z））。 假设推论 *C.3* 的条件成立，并考虑相应的下界估计量 $\widehat{\mu}_h^-(t,z,\cdot)$，该估计量由下界伪结果构造而成（定义方式类似于式(20)）。假设 $\delta_n = o_p(1)$且

$$\frac{r_{n,\pi}\, r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}} = o_p(1). \tag{47}$$

于是，

$$\|\widehat{\mu}_h^{\pm}(t,z,\cdot) - \mu_h^{\pm}(t,z,\cdot)\|_2 = o_p(1), \qquad |\widehat{\psi}_h^{\pm}(t,z) - \psi_h^{\pm}(t,z)| = o_p(1). \tag{48}$$

因此，估计的 *CAPO* 与 *APO* 区间收敛到带宽索引目标的紧的核局部化识别区间。

此外，若平滑偏差以适当速率消失（例如，$|\psi_h^{\pm}(t,z) - \psi^{\pm}(t,z)| = o((nh)^{-1/2})$），则当 $h \downarrow 0$ 时，估计区间对原始逐点界是渐近紧的。

证明。 论证与命题 4.11 的证明相同，只需将推论 4.10 替换为推论 C.3。在所述假设下，$\delta_n = o_p(1)$ 与 $\frac{r_{n,\pi} r_{n,\gamma} + r_{n,Q}^2}{\sqrt{h}} = o_p(1)$，因此两个 CAPO 端点在 L_2 中收敛到紧的核局部化端点 $\mu_h^{\pm}(t,z,\cdot)$。APO 的收敛由推论 C.3 中的 APO 收敛率得出。最后，若平滑偏差以所述速率消失，则同一结论对逐点（未平滑）界成立。

□

D.12. 推论的证明 C.5

推论 *C.5*（错误设定截断值下的渐近有效性（连续 Z））。固定可测截断值 $Q^{\pm}(t,z,x)$（不一定等于尖锐截断值），并令 $\mu_h^{\pm}(t,z,x;\, Q^{\pm})$ 和 $\psi_h^{\pm}(t,z;\, Q^{\pm})$ 表示由这些截断值诱导的相应核局部化界泛函（可能不是紧的）（即，将伪结果中的 $Q^{\pm}$ 替换后，并按公式（*40*）取条件／无条件期望所得到的目标）。那么，所诱导的区间

$$\big[\overline{\mu}_h^-(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^-),\ \overline{\mu}_h^+(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^+)\big] \quad \textit{and} \quad \big[\overline{\psi}_h^-(t,z;\overline{Q}^-),\ \overline{\psi}_h^+(t,z;\overline{Q}^+)\big] \tag{49}$$

是核局部化目标的有效 *CAPO* 和 *APO* 区间（不一定是紧的）。

此外，如果 $\widehat{Q}^{\pm} \to Q^{\pm}$ 属于 L_2，且满足以下任一条件：

(i) $(\widehat{\pi}^t, \widehat{\pi}^g)$ 是一致的，或

(ii) 相应的尾部矩回归$(\widehat{\gamma}_u^{\pm}, \widehat{\gamma}_l^{\pm})$ 针对由 $Q^{\pm}$ 诱导的目标是一致的，

那么，估计端点收敛到所诱导的（保守）目标，所得的*(C)APO*区间仍保持渐近有效，尽管可能是保守的。若 $Q^{\pm}$ 等于尖锐截断值，则诱导界与尖锐界重合，且这些区间同样是渐近尖锐的。

证明。 我们改编推论 4.12 的证明，并仅指出连续-Z 情形的差异。

步骤1：任意截断值都会诱导出一个有效的（保守）局部化区间。 固定$(t,z,\mathbf{x})$。对每个暴露水平 u，离散-Z 证明表明（经由相同的Rockafellar-Uryasev 尾部目标函数），在任意截断值 $Q^{\pm}(t,u,\mathbf{x})$处评估尾部目标函数，可得保守端点 $\mu^{\pm}(t,u,\mathbf{x};\, Q^{\pm})$，它们包含尖锐逐点端点 $\mu^{\pm}(t,u,\mathbf{x})$。

核局部化保持这一序关系，因为 $K_h(\cdot) \geq 0$且积分为1。事实上，连续-Z 局部化目标由与式(40)中相同的条件期望构造得到，而权重$\kappa_{t,z,h}(S)$将 u 中的逐点陈述传递为 z附近的局部化对应物。因此，

$$\overline{\mu}_h^-(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^-) \ \leq\ \mu_h^-(t,z,\mathbf{x}) \ \leq\ \mu_h^+(t,z,\mathbf{x}) \ \leq\ \overline{\mu}_h^+(t,z,\mathbf{x};\overline{Q}^+), \tag{135}$$

使得 CAPO 区间有效（尽管不一定是紧的）。通过对 $\mathbf{X}$ 取期望，即可得到 APO 的结论。

步骤 2：收敛到所诱导的（保守）局部界。 收敛论证遵循离散-Z 证明的步骤 2，唯一的变化是核加权项利用式（123）中的界加以控制（因此额外因子 $h^{-1/2}$ 出现在中间不等式中）。若 $\widehat{Q}^{\pm} \to Q^{\pm}$ 在 L_2 中成立，且要么 (i) $(\widehat{\pi}^t, \widehat{\pi}^g)$ 一致，要么 (ii) $(\widehat{\gamma}_u^{\pm}, \widehat{\gamma}_l^{\pm})$ 对由 $Q^{\pm}$ 所诱导的目标一致，则同一分解可得

$$\left\| \mathbb{E}\left[\phi_{t,z,h}^{\pm}(S; \widehat{\eta}^{\pm}) \mid \mathbf{X} \right] - \overline{\mu}_h^{\pm}(t, z, \mathbf{X}; \overline{Q}^{\pm}) \right\|_2 = o_p(1). \tag{136}$$

在假设 4.8 与 $\delta_n = o_p(1)$ 下，第二阶段回归因此意味着 $\|\widehat{\mu}_h^{\pm}(t, z, \cdot) - \mu_h^{\pm}(t, z, \cdot; Q^{\pm})\|_2 = o_p(1)$，而样本均值估计量给出 $\widehat{\psi}_h^{\pm}(t, z) \to \psi_h^{\pm}(t, z; Q^{\pm})$。因此，估计区间收敛于所诱导的（保守的）局部化区间，并保持渐近有效。若 $Q^{\pm} = Q^{\pm}$，这些极限与尖锐局部界重合。

□

E. 实际考量

E.1. 暴露映射的应用

我们的框架能够容纳一系列暴露映射 $g(\cdot)$，这些映射将邻居的处理构成的（通常为高维的）向量约简为个体 i 的低维暴露变量。g 的选择应依据关于干扰如何运作的实质性知识，以及数据中实际测量的内容。下文我们总结常见的映射及其出现的情形。

① 加权平均暴露的应用

一种常见的暴露映射是接受处理的邻居数量 $g(T_{\mathcal{N}_i}) = \sum_{j\in\mathcal{N}_i} T_j$。当溢出效应大致随接受处理的联系人数量增加时，这种映射很自然：来自多个同伴的反复鼓励可以提高关注度，多个接受处理的农民可以增强当地的示范强度，多个接受培训的同事可以提高工作流程工具的采用率。在空间政策应用中，附近接受处理的地点数量（例如接受处理的交叉路口或走廊）可以作为基础设施变化所致局部暴露强度的代理指标。

更现实的映射通常会根据互动强度对邻居赋予不同权重：$g(T_{\mathcal{N}_i}) = \sum_{j\in\mathcal{N}_i} w_{ij}T_j$, $w_{ij} \geq 0$，其中w_{ij} 表示地理距离衰减、沟通频率、关系强度或流动流量。这种做法常见于流行病学（接触率）、空间经济学（通勤流量）和在线平台（互动网络）。在交通运输和基础设施领域，基于旅行时间或距离设定的权重可以体现这样一种可能性：距离较近的干预措施影响更大。

当邻域规模存在差异时，归一化映射可以捕捉饱和效应：$g(T_{\mathcal{N}_i}) = \frac{1}{|\mathcal{N}_i|}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} T_j$.这种方法广泛用于教育领域（已接受处理的同学所占比例）、工作场所（已接受培训的同事所占比例）以及社区项目（活动覆盖的家庭所占比例）。基于比例的映射在信息环境（线上或线下）中同样自然，因为个人社会邻域中受到某项干预（例如纠正信息或信息助推）的个体所占比例，会影响其信念或行为。

② 阈值暴露的应用

一种简单的映射是 $g(T_{\mathcal{N}_i}) = \mathbf{1}\left\{\sum_{j\in\mathcal{N}_i} T_j \geq 1\right\}$，即个体 i 是否至少有一名已处理邻居。当溢出效应很可能通过存在而非强度发挥作用时，这种映射便十分合适：新实践或新技术的扩散可能在一名密切接触者采用后便开始（例如示范效应或同伴推荐）。在公共卫生领域，存在一名已接种疫苗（或以其他方式接受处理的）接触者，可能会通过降低小型网络中的传播风险而产生影响（例如家庭或密切接触结构）；此时关键在于是否至少有一名相关接触者属于处理组。

当溢出效应呈现非线性，例如协调、社会规范或能力约束时，阈值饱和映射 $g(T_{\mathcal{N}_i}) = \mathbf{1}\left\{\frac{1}{|\mathcal{N}_i|}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} T_j \geq c\right\}$，是合适的。示例包括集体行动（达到临界规模后，私人激励发生变化）、技术标准（采用率超过阈值后产生兼容性收益）以及社区合规情境（只有参与度超过最低水平后，项目效果才会显现）。在气候行为干预中，阈值可以代表一种社会规范机制：一旦个体认为“大多数同伴”都在采取某种行为，行为就会发生改变。

③ 高阶溢出效应

如果干扰通过比 $\mathcal{N}_i$ 所捕捉到的更长路径发挥作用（例如两跳网络效应、市场层面一般均衡或更广泛的媒体溢出效应），那么严格的局部暴露定义可能并不充分。扩大 $\mathcal{N}_i$ 或使用加权核函数可以从概念上解决这一问题，但通常会削弱重叠性，并可能进一步扩大界限。

E.2. 我们的部分识别界的局限性

我们的部分识别结果在存在干扰且结构有限的情况下，得出了识别稳健陈述。尽管如此，这些界限仍有具体的局限性。

首先，当数据提供的信息较弱时，我们的界限可能较宽。部分识别在构造上具有保守性。当反事实信息稀缺时，例如罕见的高饱和度邻域、暴露状态之间重叠有限，或分配高度聚类时，界限可能较宽。这反映了维持的假设下确实存在信息不足，而非估计失败。尽管我们的方法旨在实现稳健性，但有限样本可能会受到敏感

于罕见暴露水平以及干扰参数估计的质量（例如结果回归和任何分配／暴露模型）。重尾结果或高度不平衡的暴露可能会加剧不稳定性，因此需要谨慎进行重叠诊断、按暴露机制报告有效样本量，并针对不同学习器开展敏感性检验。此外，网络数据往往并不完整（缺失关系、距离测量误差、未知的交互强度）。尽管本文假设网络已被完整观测，但 T_j、$\mathcal{N}_i$ 或权重 w_{ij} 中的误差会直接传递至 $g\left(T_{\mathcal{N}_i}\right)$。由于界限是相对于观测到的暴露定义的，测量误差可能会削弱或扭曲有效暴露机制，并使实质性解释变得复杂。

F. 实施细节

F.1. 数据生成

我们研究了在网络干扰情境下，所提出的界估计量在有限样本中的表现，其中暴露映射可能存在误设。数据生成过程旨在尽可能贴合第 4节的结构假设，同时允许对暴露映射进行可控的偏离。

单位、协变量和网络。 我们观测到 N 个单位，索引为 $i = 1,\ldots, n$。每个单位都具有一个 d 维协变量向量 $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{U}(-1,1)$，这些向量在不同单位间独立抽取。单位通过一个已知的无向网络 $G = (V, E)$ 相连，其中邻域定义为 $\mathcal{N}_i = \{j : (i, j) \in E\}$，节点度记为 $n_i = |\mathcal{N}_i|$。 </output>

总体而言，我们进行了六项实验。我们分别生成三种包含 $N = 1000$ 个节点且协变量维度为 1（小型数据集）的网络，以及三种包含 $N = 6000$ 个节点且协变量维度为 6（大型数据集）的网络。每种网络的选择都旨在展示我们的框架处理不同形式暴露错设时的理论性质：我们采用随机 Erd˝os–R´enyinetwork 来检验暴露映射 1，采用无标度 Barab´asi–Albe网络检验暴露映射 2，并采用社区结构随机块模型暴露映射 3。我们将在第 F.2 小节详细说明设计。

处理分配。 每个个体接受二元处理 $T_i \in \{0, 1\}$。处理在给定协变量的条件下，依据逻辑斯蒂倾向得分模型 $\pi^t(\mathbf{x})$独立分配：$= \mathbb{P}(T_i = 1 \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x}) = \text{logit}^{-1}(\beta_T^\top \mathbf{x})$，其中 $\beta_T \in \mathbb{R}^d$ 在各次模拟中保持固定。

潜在结果与观测数据。 潜在结果取决于个体处理、暴露和协变量，具体如下

$$Y_i(t, z) = m(t, z, \mathbf{X}_i) + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{137}$$

with

$$m(t, z, \mathbf{x}) = \tau\, t + \delta\, z + \gamma\, tz + f(\mathbf{x}), \tag{138}$$

其中 τ 刻画处理的直接效应，δ 刻画暴露的溢出效应，η 允许处理与暴露的交互作用，$f(\mathbf{x})$是协变量的非线性基线函数。观测结果由 $Y_i = Y_i(T_i, Z_i^*)$给出，因此干扰通过真实暴露映射 g^*发挥作用。

T目标估计目标。 我们的主要目标是条件平均潜在结果（CAPO ）

$$\mu(t, z, \mathbf{x}) := \mathbb{E}[Y(t, z) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}], \tag{139}$$

及其诱导的因果效应。具体而言，我们考虑（i）条件直接效应 $\mu(1, z, \mathbf{x}) - \mu(0, z, \mathbf{x})$，（ii）条件溢出效应 $\mu(t, z_1, \mathbf{x}) - \mu(t, z_0, \mathbf{x})$，以及它们的平均（APO）对应量。

实验设置。 在各个模拟情景中，我们改变网络密度、通过 ε 表示的暴露映射设定错误程度、Z 的离散性或连续性，以及样本量 n。所有报告结果均为多次蒙特卡洛重复实验的平均值。

F.2. 网络结构的选择

我们有意在不同模拟情景中改变底层网络结构，以确保每种暴露映射设定错误都在具有实质意义的情境中接受评估。不同的设定错误会与网络的不同结构特性相互作用，而始终使用同一种网络模型会掩盖或减弱这些效应。

具体而言，我们采用以下网络：1 加权与非加权均暴露： Erd˝os–R´enyi（ER）网络，其均质的度分布可将影响权重异质性的作用与度异质性造成的混杂区分开来；2 基于阈值的暴露映射： 由 Barab´asi–Albert（BA）过程生成的无标度网络，其重尾度分布意味着阈值的微小变化就可能导致暴露被大幅误分类，尤其是对于高度连接的个体；3 高阶溢出效应： 随机区块模型

表2. 模拟设计与参数设定。

组成部分	设定/取值
单位（节点）	$N = 3000/6000$
协变量维度	$d = 1/6$
处理倾向	$\beta_T = 0.8$
直接效应	$\tau = 0.8$
溢出效应	$\delta = 0.6$
交互作用	$\gamma = 0.2$
结果模型非线性	$0.6\tanh(X) + 0.4\sin(X) - 0.2X^2$
噪声	$\xi_i \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$
核带宽	$h = 0.1$
均值设定错误	$\varepsilon = 0.03$
阈值设定错误	$c^* = 0.45$
交叉拟合折	$K = 5$
Runs	20

（SBM），其社区结构显著，溢出效应会自然地沿着较短的多步路径传播至直接邻居之外，因此截断暴露半径会产生重要影响。

因此，在所有情景中，我们选择网络是为了突出相应暴露映射设定错误所导致的特定失效模式，而非优化估计量的表现。

F.3. 实现

我们使用 Python 实现实验。所有用于复现的代码均可在我们的 GitHub 仓库中获取：

https://github.com/m-schroder/ExposureMisspecification。

我们通过交叉拟合学习器估计干扰成分：使用梯度提升分类器拟合处理倾向；对于连续暴露，使用高斯混合条件模型估计暴露密度（对于离散情形，则使用多项式模型/梯度提升）。我们使用 XGBoost 模型拟合分位数回归和条件期望 γ。对于第二阶段回归，我们同样采用 XGBoost 并进行交叉拟合。我们通过交叉验证选择超参数（倾向得分/暴露模型采用对数损失，分位数模型采用针状损失，回归采用均方误差）。