arXiv:2602.03460v1 [math.OC] 3 Feb 2026

# Cholesky分解与内在稀疏的线性二次调节

Julia Adlercreutz 和 Richard Pates *†


## 摘要

我们对一类移位算子矩阵进行分类，这类矩阵可以通过 Cholesky 算法以计算上可行的方式进行分解。这类矩阵出现在线性二次调节器问题及相关领域中。我们利用这种分解，揭示具有底层树结构的交通运输问题中控制律的内在稀疏性。这表明，最优控制可以采用分布式方式实施，而标准求解方法会掩盖这一点。


## 1 引言

本文提出一种适用于移位算子矩阵的保持稀疏性分解方法。我们所考虑的矩阵自然出现在最优控制的背景下，例如线性二次调节器（LQR）问题。我们研究这种分解如何帮助揭示最优控制律中的稀疏模式，而这些模式通常会被掩盖。

分布式（或去中心化）控制旨在寻找从测量序列 $x$ 到控制序列 $u$的稀疏映射 $K$，其形式通常为

$$u[k] = Kx[k]. \tag{1}$$

当 $K$ 是矩阵时，如上面的方程所示，该映射的稀疏性与实现控制律所需的通信需求之间存在明确的联系。特别是，如果 $K$ 的第 $ij$个元素为零，就意味着计算第 $i$个控制输入时不需要第 $j$个测量值。因此，稀疏矩阵 $K$ 通常意味着在实施控制时，测量值之间的通信需求较低。在大规模场景中进行控制时，这一点尤为重要，因为我们希望仅依赖局部测量值，并以易于扩展的方式进行设计。因此，区域供热 [1], 、电力系统 [2], 和互联网拥塞 [3]等大型网络在实际中通常采用分布式方式进行控制。

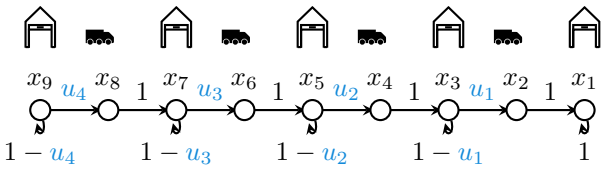



图 1：具有线图拓扑的运输网络。

在稀疏性约束下寻找最优控制器通常是一项困难的任务 [4]。二次不变性 [5, 6] 可用于确定映射 $K$ （1）上的结构约束能否转化为凸设计约束。然而，（1）上的稀疏性约束往往不满足二次不变性。文献 [7] 和 [8], 探讨了二次不变性适用的重要情形，其中具有偏序集结构的过程模型发挥着核心作用。

此外，在对控制律施加稀疏性约束时，还存在一些与此过程内在耦合的基本局限（1）。例如， [9]表明，在低维空间系统中，局部反馈不足以抑制大规模扰动。此外，[10] 表明，限制通信可能会对性能产生负面影响。

与以往方法不同，系统级综合 [11, 12]对闭环轨迹施加稀疏性，而不是 $K$。因此，可以设计采用分布式实现的控制律，而不必满足（1）中的稀疏性约束。在本研究中，我们采用了某种相似的视角，但不同于通过约束来强制施加结构，我们着眼于无约束最优控制律中固有的结构。也就是说，控制器结构并非先验地施加。因此，我们所考虑的控制律具有与集中式控制律相同的性能和鲁棒性保证（去中心化线性二次调节器的鲁棒性见 [13]）。

本文的主要贡献是对移位算子的稀疏矩阵进行分解。随后，我们将其应用于一个 线性二次调节器 问题，该问题针对交通网络，并揭示了底层控制律中显著的稀疏结构。为说明我们的结果，考虑以下 线性二次调节器问-

*作者任职于隆德大学自动控制系，地址：Box 118, SE-22100 隆德，瑞典。

†作者是隆德大学 ELLIIT 战略研究领域的成员。本研究得到 ELLIIT 战略研究领域的资助。

题，该问题与图 1中的交通网络相关：

$$\begin{aligned}\min_{u[0],u[1],\ldots} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(x_1[k]^2 + x_3[k]^2 + \ldots + x_9[k]^2\right)\\ \text{s.t.}\quad x_{2i-1}[k+1] = x_{2i-1}[k] + x_{2i}[k], \quad i = 1,\ldots,5,\\ x_{2i}[k+1] = u_i[k], \qquad\qquad i = 1,\ldots,4\\ x[0] = x_0.\end{aligned}$$

如第 3.1 节中进一步解释的那样，基本目标是通过存储设施之间的局部运输，以最优方式重新分配商品。求解上述最优控制问题可得到如下形式的反馈律（1）；如果按照（1）的形式书写，实现该反馈律似乎需要集中式通信。然而，我们将展示，同一个控制律可以按如下方式因子化为稀疏形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{0} & \frac{13}{2}\frac{15}{30}\frac{14}{40} \\ 0 & — & — \end{bmatrix}}_{K_1} u[k] = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{11}{72} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{K_2} x[k].$$

这就是经典的状态反馈解。由此可见，第 $i$ 个控制输入仅取决于四个状态测量值，以及相邻运输链路的控制输入。这使得该控制律非常适合仅使用局部通信的实现方式。

上述稀疏线性二次调节器解的求解方法涉及对移位算子矩阵进行 Cholesky分解。关于该分解的存在性结果见第2.1节。相关的计算框架与算法见第 2.2 节，软件实现见 [14]。该分解的稀疏性及其与谱分解技术的联系将在第 2.3 节和2.4中讨论。最后，我们将说明如何利用该分解，找出线性二次调节器控制律的稀疏分解，详见第3节。

# 符号说明

## 1.1 基本符号

$\mathbb{R}$ 表示实数域，$\mathbb{R}^n$ 表示元素属于 $\mathbb{R}$的$n$ 向量，以及元素属于 $\mathbb{R}$的 $\mathbb{R}^{n\times m}$ $n\times m$ 矩阵。全文中，$\ell_{2+}^n$ 表示平方可和序列 $y=(y[0],\ y[1],\ \ldots\ldots)$，其中 $y[k]\in\mathbb{R}^n$，内积为 $\langle x,\ y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]^\top y[k]$。作用于 $\ell_{2+}$上的算子以及作用于 $\ell_{2+}^n$上的算子矩阵均用粗体表示。（矩阵）恒等算子记为$\mathbf{I}$（即对于所有$x\in\ell_{2+}^n$，$\mathbf{I}x = x$），零算子矩阵记为$\mathbf{0}$（其维数总能从上下文中明确）。算子$\mathbf{M}$的伴随记为$\mathbf{M}^*$。若$\mathbf{M}\succeq\mathbf{0}$，则$\mathbf{M}$ 为半正定（记作$\mathbf{M}\succeq\mathbf{0}$），且 $\langle x,\ \mathbf{M}x\rangle\geq 0$ 对所有 $x\in\ell_{2+}^n$均成立。在适当情况下，粗体整数表示缩放算子（例如，$-\mathbf{2}$ 是将序列中的每个元素都乘以 $-2$的算子）。算子矩阵$\mathbf{P}$ 若每一行和每一列恰好包含一个非零元素，且该元素等于$\mathbf{1}$，则称其为置换矩阵。

## 1.2 移位算子

前向移位算子为

$$\mathfrak{q}:(y[0],y[1],y[2],\ldots)\mapsto(y[1],y[2],y[3],\ldots). \tag{2}$$

$\mathfrak{q}$ 的伴随是后向移位，定义为

$$\mathfrak{q}^*:(y[0],y[1],y[2],\ldots)\mapsto(0,y[0],y[1],\ldots).$$

此外，我们定义算子集合

$$\mathbb{R}[\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*] = \left\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}\left(\mathfrak{q}^*\right)^i\mathfrak{q}^j : \alpha_{ij}\in\mathbb{R}\right\}, \tag{3}$$

and

$$\mathbb{R}_\infty = \left\{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(\mathfrak{q}^{*k}\mathfrak{q}^k\right) : n\in\mathbb{N},\alpha_k\in\mathbb{R}\right\}. \tag{4}$$

这些集合的代数和计算性质将在第 2.2 节中加以阐述和讨论。

# 2 结果

本节研究算子矩阵的分解 $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$，其中 $\mathbf{M}$ 的元素属于 $\mathbb{R}[\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*]$。正如我们将在 第3节中看到的，这类矩阵会出现在最优控制问题中，例如 线性二次调节器 问题。我们特别关注如下形式的乔列斯基分解

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^* = (\mathbf{M}\mathbf{P})^*\mathbf{M}\mathbf{P},$$

其中 $\mathbf{L}$ 是一个下三角矩阵，其对角元素属于 $\mathbb{R}_\infty$，而 $\mathbf{P}$ 是一个置换矩阵。这些条件最终将证明，正是通过基于多项式的计算框架进行回代以求解最小二乘问题所需的条件。我们在 第2.1节给出了此类分解存在的充要条件。随后，我们将在第 2.2 节中介绍能够实现分解与回代的计算框架和工具。接着，我们将在 第 2.3 节探讨该分解保持稀疏性的性质，然后在第2.4节将我们的方法与基于谱分解、受经典方法启发的分解方法进行比较。

## 2.1 移位算子矩阵的一种分解

本节将刻画算子矩阵的可分解条件。稀疏性至关重要，因此我们引入以下一类矩阵，其稀疏模式由图的结构所决定。

**定义1**。 设 $\mathcal{G}$ 是一个图，其顶点为 $\{v_1,\dots,v_n\}$，且 $m$ 有向边为 $e_i=\{v_j,v_k\}$。定义 $\mathbb{M}_{\mathcal{G}}$ 为满足以下条件的 $n\times m$ 算子矩阵 $\mathbf{M}$ 的集合：$\mathbf{M}$ 的第 $ij$ 个元素满足

$$\mathbf{M}_{ij}\in\begin{cases}\left\{\alpha_{ij}\mathfrak{q}^k,\left(\mathfrak{q}^*\right)^k\alpha_{ij}\right\} & if\ v_i\in e_j,\\ \{\mathbf{0}\} & otherwise,\end{cases}$$

对于某个 $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}_\infty$。

下面的定理表明，对于每个 $\mathbf{M}^*\mathbf{M}\ \mathbf{M}\in\mathbb{M}_{\mathcal{G}}$，都存在一个 Cholesky分解，此外：

1. 因子的对角元素属于 $\mathbb{R}_\infty$;
2. 因子的其余元素属于 $\mathbb{R}[\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*]$;

当且仅当 $\mathcal{G}$ 是一个树图。这个结果的重要性源于其计算性质。虽然在更一般的条件下也能证明 Cholesky分解的存在，但确保满足 1–2) 将使分解能够高效计算。相关内容将在 第 2.2 节.中讨论。

**定理1**。 给定任意无向图 $\mathcal{G}$，以下两个命题等价：

*(i)* $\mathcal{G}$ 是一个树图。

*(ii)* 对于每一个$\mathbf{M}\in\mathbb{M}_{\mathcal{G}}$，存在一个置换矩阵$\mathbf{P}$，以及一个下三角矩阵$\mathbf{L}$，其元素属于$\mathbb{R}[\mathfrak{q},\mathfrak{q}^*]$，对角元素属于 $\mathbb{R}_\infty$，使得

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^*=(\mathbf{M}\mathbf{P})^*\,\mathbf{M}\mathbf{P}.$$

**注 1.** 定理*1* 也可应用于其元素$\mathbf{M}$ 所受约束较少的情形。更具体地说，只要$\mathbf{U}\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\in\mathbb{M}_{\mathcal{G}}$，其中$\mathbf{U}$ 是内算子（$\mathbf{U}^*\mathbf{U}=\mathbf{I}$），一种类乔列斯基分解

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^*=(\mathbf{M}\mathbf{T}\mathbf{P})^*\,\mathbf{M}\mathbf{T}\mathbf{P}$$

仍可得到。这将在第 *3.1* 节研究线性二次调节器问题时加以利用。

证明。 (i) $\Longrightarrow$ (ii)：该证明将需要关于算子 $\mathfrak{y}\in\mathbb{R}_\infty$的下列事实。F3 可由 $\mathbb{R}_\infty$的定义直接得出，而 F1-F2 在引理 2 中得到证明，该引理见于第 2.2 节。

F1 若 $\mathfrak{y}\succeq\underline{0}$，则它具有唯一的半正定平方根 $\sqrt{\mathfrak{y}}\in\mathbb{R}_\infty$。

F2 穆尔-彭罗斯逆 $\mathfrak{y}^+$ 是 $\mathbb{R}_\infty$中的一个算子。

F3 $\mathfrak{y}$ is self-adjoint $(\mathfrak{y}=\mathfrak{y}^*)$.

令 $m$ 表示 $\mathcal{G}$中边的数量。若 $m=1$，$\mathbf{M}^*\mathbf{M}\in\mathbb{R}_\infty$，因此 $\mathbf{M}^*\mathbf{M}=\mathbf{P}\mathbf{L}(\mathbf{P}\mathbf{L})^*$，其中

$$\mathbf{P}=\mathbf{1}\text{ and }\mathbf{L}=\sqrt{\mathbf{M}^*\mathbf{M}},$$

根据 F1，这满足 (ii) 的所有要求。现在我们对 $m$ 进行归纳，并考虑 $\mathcal{G}$ 有 $m+1$ 条边的情形。由于 $\mathcal{G}$ 是一棵树，它必定包含一条与度为 1 的顶点相连的边，即一条叶边。因此，存在置换矩阵$\mathbf{P}_{\mathrm{v}}$ 和$\mathbf{P}_{\mathrm{e}}$，使得对于任意$\mathbf{M}\in\mathbb{M}_{\mathcal{G}}$,

$$\mathbf{P}_{\mathrm{v}}\mathbf{M}\mathbf{P}_{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{M}}_{11} & \mathbf{0}\\ \overline{\mathbf{M}}_{21} & \overline{\mathbf{M}}_{22}\\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}}_{32}\end{bmatrix},$$

其中两个分块 $\mathbf{M}_{11}$ 和$\overline{\mathbf{M}_{21}}$ 的维度均为 $1\times1$。此外

$$\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{M}}_{22}\\ \overline{\mathbf{M}}_{32}\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathcal{G}_1}$$

其中 $\mathcal{G}_1$ 是一棵具有 $m$ 条边的树图。现在定义 $\mathbf{N}=\mathbf{P}_{\mathrm{e}}^*\mathbf{M}^*\mathbf{M}\mathbf{P}_{\mathrm{e}}$, 并将$\mathbf{N}$ 划分为一个 $2\times2$ 分块矩阵，其子块为 $\mathbf{N}_{11}$, $\mathbf{N}_{12}$, $\mathbf{N}_{21}$ 和 $\mathbf{N}_{22}$,，使得

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{M}}_{11}^*\overline{\mathbf{M}}_{11}+\overline{\mathbf{M}}_{21}^*\overline{\mathbf{M}}_{21} & \overline{\mathbf{M}}_{21}^*\overline{\mathbf{M}}_{22}\\ \overline{\mathbf{M}}_{22}^*\overline{\mathbf{M}}_{21} & \overline{\mathbf{M}}_{22}^*\overline{\mathbf{M}}_{22}+\overline{\mathbf{M}}_{32}^*\overline{\mathbf{M}}_{32}\end{bmatrix}.\quad(5)$$

特别注意，

1. $\mathbf{N}_{11}\in\mathbb{R}_\infty$;
2. $\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+=\mathbf{N}_{11}^+\mathbf{N}_{11}$;
3. $\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+\mathbf{N}_{12}=\mathbf{N}_{12}$.

1)–2) 由 F2–3 立即得出，而 3) 则由$\mathbf{N}\succeq\mathbf{0}$ 推出，下面将对此进行说明。为了导出矛盾，假设 3) 不成立，因此 $\left(\mathbf{1}-\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+\right)\mathbf{N}_{12}\neq0$。因此，存在$\ell_{2+}$序列 $x_1$ 和 $x_2$，使得

$$\begin{aligned}\left\langle x_1,\left(\mathbf{1}-\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+\right)\mathbf{N}_{12}x_2\right\rangle&=\\ &=\left\langle\left(\mathbf{1}-\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+\right)x_1,\mathbf{N}_{12}x_2\right\rangle\neq0,\end{aligned}\quad(6)$$

其中我们用到了以下事实：$\mathbf{1}-\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+$ 是自伴的。令 $x_3=\left(\mathbf{1}-\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+\right)x_1$，并由方程（6）注意到 $x_3\neq0$。令

$$y=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^+ & \mathbf{I}\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix}x_3\\ \gamma x_2\end{bmatrix},$$

考虑

$$\begin{aligned}\langle y,\mathbf{N}y\rangle=\langle x_3,\mathbf{N}_{11}x_3\rangle+\gamma^2\langle x_2,\mathbf{N}_{\mathrm{red}}x_2\rangle+\\ +2\gamma\left\langle x_3,\left(\mathbf{1}-\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+\right)\mathbf{N}_{12}x_2\right\rangle,\end{aligned}\quad(7)$$

其中

$$\mathbf{N}_{\mathrm{red}}=\mathbf{N}_{22}-\mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^+\mathbf{N}_{12}.$$

根据 F3 以及穆尔-彭罗斯逆的性质，$\mathbf{N}_{11}\left(\mathbf{1}-\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11}^+\right)=\mathbf{0}$。于是由（7）可得

$$\langle y,\mathbf{N}y\rangle=\alpha\gamma+\beta\gamma^2$$

对某个 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha \neq 0$。这意味着存在 $\gamma$ 的取值，使得 $\langle y,\ \mathbf{N}y\rangle \leq 0$。然而这是一个矛盾，因为

$$\mathbf{N} \succeq 0 \implies \langle y, \mathbf{N}y\rangle \geq 0,$$

因此 3）成立。

现在回到（5），利用 1)–3) 的直接计算表明

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{+} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{\mathrm{red}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{N}_{11}^{+}\mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

以及

$$\mathbf{N}_{\mathrm{red}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_{22} \\ \overline{\mathbf{M}}_{32} \end{bmatrix}^{*} \left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_{21} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{+} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_{21} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{*} \right) \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_{22} \\ \overline{\mathbf{M}}_{32} \end{bmatrix}.$$

通过常规计算可得，$\mathbf{M}_{21}\mathbf{N}_{11}^{+}\mathbf{M}_{21}^{*} \in \mathbb{R}_{\infty}$，同时还可得

$$\mathbf{1} - \overline{\mathbf{M}}_{21}\mathbf{N}_{11}^{+}\overline{\mathbf{M}}_{21}^{*} \succeq \mathbf{0}.$$

因此

$$\mathbf{N}_{\mathrm{red}} = \mathbf{M}_{\mathrm{red}}^{*}\mathbf{M}_{\mathrm{red}},$$

其中

$$\mathbf{M}_{\mathrm{red}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{1} - \overline{\mathbf{M}}_{21}\mathbf{N}_{11}^{+}\overline{\mathbf{M}}_{21}^{*}}\,\overline{\mathbf{M}}_{22} \\ \overline{\mathbf{M}}_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathcal{G}_1}. \tag{9}$$

根据归纳假设，存在一个置换矩阵$\mathbf{P}_{\mathrm{red}}$ 和一个下三角$\mathbf{L}_{\mathrm{red}}$，其对角元素属于 $\mathbb{R}_{\infty}$，使得

$$\mathbf{N}_{\mathrm{red}} = \mathbf{P}_{\mathrm{red}}\mathbf{L}_{\mathrm{red}} \left(\mathbf{P}_{\mathrm{red}}\mathbf{L}_{\mathrm{red}}\right)^{*}.$$

由（8），可得 $\mathbf{M}^{*}\mathbf{M} = \mathbf{PL}\left(\mathbf{PL}\right)^{*}$，其中

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathrm{red}} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{N}_{11}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{\mathrm{red}}^{*}\mathbf{N}_{21}\sqrt{\mathbf{N}_{11}}^{+} & \mathbf{L}_{\mathrm{red}} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

因此，对于有 $m+1$ 条边的图，存在合适的分解，结论由归纳法得出。

¬(i) $\implies$ ¬(ii)：假设 $\mathcal{G}$ 包含一个环，并设

$$\mathbf{M}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathfrak{q}^{*} \\ \mathfrak{q}^{*} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathfrak{q}^{*} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathfrak{q}^{*} & -\mathbf{1} \end{bmatrix},$$

其中$\mathbf{M}_{\mathrm{c}}$ 的行数等于该环中的顶点数。于是存在置换矩阵 $\mathbf{P}_{\mathrm{v}}$ 和$\mathbf{P}_{\mathrm{e}}$，使得

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\mathrm{v}}^{*} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathrm{e}}^{*} \in \mathbb{M}_{\mathcal{G}}.$$

在证明的其余部分，我们将证明该矩阵不存在 (ii) 中形式的分解。首先

注意，$\mathbf{M}^{*}\mathbf{M}$ 存在这种分解，当且仅当$\mathbf{M}_{\mathrm{c}}^{*}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}$也存在这种分解。现在我们将证明，$\mathbf{N} = \mathbf{M}_{\mathrm{c}}^{*}\mathbf{M}${v20>存在适当的分解，当且仅当$\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12} \in \mathbb{R}_{\infty}$，其中$\mathbf{N}_{11}, \mathbf{N}_{12}$，$\mathbf{N}_{21}$ 和$\mathbf{N}_{22}$ 是一个 2×2 分块矩阵划分的子块

$$\mathbf{M}_{\mathrm{c}}^{*}\mathbf{M}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -\mathfrak{q} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathfrak{q}^{*} \\ -\mathfrak{q}^{*} & \mathbf{2} & -\mathfrak{q} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & -\mathfrak{q} \\ -\mathfrak{q} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathfrak{q}^{*} & \mathbf{2} \end{bmatrix},$$

使得子块$\mathbf{N}_{22}$ 的维数为 1×1。令

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

从右侧作用时，$\mathbf{S}$会使所有列向左循环移动一位（第一列变为最后一列）；从左侧作用时，则会使所有行向上循环移动一位（第一行变为最后一行）。由此可见，

$$\mathbf{N} = \mathbf{S}^{*}\mathbf{N}\mathbf{S}.$$

置换矩阵 $\mathbf{P}$ 的每一行和每一列恰有一个非零矩阵元素。这意味着，对于任意置换矩阵，都存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathbf{S}^{k}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{P}_{11}$ 是一个置换矩阵。

(ii)中的分解假设存在一个置换矩阵 $\mathbf{P}$ 和一个对角元素属于 $\mathbb{R}_{\infty}$ 的下三角矩阵 $\mathbf{L}$，使得 $\mathbf{P}^{*}\mathbf{N}\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{*}$。然而，从上述论证可知，存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathbf{P}^{*}\mathbf{N}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{*}(\mathbf{S}^{k})^{*}\mathbf{N}\mathbf{S}^{k}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^{*}\mathbf{N}_{11}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{11}^{*}\mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

任何有效的分解都满足

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{*}\mathbf{N}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}^{*} & \mathbf{L}_{21}^{*} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{22}^{*} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}\mathbf{L}_{11}^{*} & \mathbf{L}_{11}\mathbf{L}_{21}^{*} \\ \mathbf{L}_{21}\mathbf{L}_{11}^{*} & \mathbf{L}_{21}\mathbf{L}_{21}^{*} + \mathbf{L}_{22}\mathbf{L}_{22}^{*} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

通过比较不等式（11）和（12），可以看出

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{22}\mathbf{L}_{22}^{*} &= \mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21}\mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{11}^{*}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{11}^{*}\mathbf{N}_{12} = \\ &= \mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{L}_{22}$ 是 $\mathbf{L}$ 中的对角元素，因此它必须属于 $\mathbb{R}_{\infty}$，才能满足 (ii)。这意味着 $\mathbf{L}_{22}\mathbf{L}_{22}^{*}$ 必须属于$\mathbb{R}_{\infty}$，也就是说，只有当 $\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12} \in \mathbb{R}_{\infty}$时，才存在 (ii) 中形式的分解。

现在我们计算 $\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}$，目的是导出一个矛盾。通过计算可以验证

$$\mathbf{N}_{11}^{-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{N}^{(k)},$$

其中 $n$ 是环的长度，而算子 $\mathbf{N}^{(k)}$的元素等于

$$\mathbf{N}_{ij}^{(k)} = \frac{(n-i)(n-j)}{k(k+1)} \left(\mathfrak{q}^*\right)^{i+k-n} \mathfrak{q}^{j+k-n}$$

每当 $i,\ j \geq n+k$，其中 $\mathbf{N}_{ij}^{(k)} = \mathbf{0}$ 否则。由此可得

$$\begin{aligned} &\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12} = \\ &= \frac{n+1}{n}\mathbf{1} - \frac{1}{n}\mathfrak{q}^n - \frac{1}{n}\left(\mathfrak{q}^*\right)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \left(\mathfrak{q}^*\right)^i \mathfrak{q}^i. \end{aligned}$$

这不属于 $\mathbb{R}_\infty$。因此，不存在满足 (ii) 的分解，证明至此完成。 □

## 2.2 使用移位算子进行计算

本节将构建一个计算框架，用于求得并处理定理1中的分解。我们首先讨论第 2.2.1 节至2.2.3节中涉及移位算子的基本代数运算。随后，我们将在第 2.2.4 节和2.2.5节介绍关键结果，其中算法 1给出了执行分解的伪代码，并讨论了相关的回代计算。除了能够求解第3节所述的最小二乘问题之外，我们希望读者也能认识到，借助我们的工具，还可以处理其他涉及移位算子矩阵的线性代数问题并运行相应算法。文中所述所有运算的 Matlab 和 Julia 实现均见 [14]。

### 2.2.1 移位算子代数

定义1中的矩阵$\mathbf{M}$的基本构件是前移算子 $\mathfrak{q}$，定义见式（2）。需要注意的是，由 $\mathfrak{q}$和 $\mathfrak{q}^*$ 组合而成的算子一般并不满足交换律。例如， $\mathfrak{q}\mathfrak{q}^* = \mathbf{1}$，而

$$\mathfrak{q}^*\mathfrak{q}\left(y\left[0\right], y\left[1\right], y\left[2\right], \ldots\right) = \left(0, y\left[1\right], y\left[2\right], \ldots\right).$$

除此之外，加法、乘法和伴随运算都符合预期。例如

$$\left(\mathfrak{q} + 2\mathfrak{q}^*\right)\left(\mathfrak{q}^*\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\right) = \mathfrak{q} + \mathfrak{q}^2 + 2\mathfrak{q}^*\mathfrak{q} + 2\left(\mathfrak{q}^*\right)^2\mathfrak{q}$$

and

$$\left(\mathfrak{q} + \left(\mathfrak{q}^*\right)^2\mathfrak{q}\right)^* = \mathfrak{q}^* + \mathfrak{q}^*\left(\mathfrak{q}\right)^2.$$

特别要注意，由于 $\mathfrak{q}\mathfrak{q}^* = \mathbf{1}$，执行这些运算后，我们总能得到一个算子，它可以表示为形如 $\left(\mathfrak{q}^*\right)^i\mathfrak{q}^j$的各项的线性组合。这正是集合中的算子 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$在（3）中的定义动机。注意，加法、乘法和伴随运算在 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$中是封闭的。

### 2.2.2 移位算子计算

对于 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$ 中的算子，可以通过处理描述相应算子的系数，在计算机上执行上述代数运算。为此，考虑双射线性映射 $\mathbf{M}$： $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*] \to \mathbb{R}^{n\times n}$，其定义如下

$$\left[\mathbf{M}\,\mathfrak{y}\right]_{ij} := \alpha_{ij},$$

其中 $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ 是 $\mathfrak{y}$中 $\left(\mathfrak{q}^*\right)^i\mathfrak{q}^j$ 项的系数。也就是说，$\mathbf{M}\,\mathfrak{y}$ 返回指定给定算子 $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$的系数矩阵。算子 $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ $\in\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$ 的数乘、加法、乘法和伴随运算，都可以等价地表示为对 $\mathbb{R}$ 执行标准运算，并作用于 $\mathbf{M}\,\mathfrak{y}$ 和 $\mathbf{M}\ \mathfrak{z}$，如下列交换图所示：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*] & \xrightarrow{\ \mathbf{M}\ } & \mathbb{R}^{n\times n} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle +,\times,^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_+, f_\times, f_*} \\ \mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*] & \xleftarrow[\ \mathbf{M}^{-1}\ ]{} & \mathbb{R}^{n\times n} \end{array}$$

为了在计算机上执行这些算子，我们定义一种与 $\mathbf{M}\,\mathfrak{y}$ 对应的数据类型。随后，通过实现函数 $f_+$， $f_\times$ 和 $f_*$，以执行该类型的加法、乘法和伴随运算，我们便能在计算机上执行 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$ 中的相应算子运算。具体细节虽然基础但较为繁琐，因此此处省略；相关内容可参见所提供的软件实现。

$\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$ 中算子对 $\ell_{2+}$ 中某些序列的作用也可以用可计算的方式描述。当然，序列必须具有可计算描述。就我们的目的而言，只需考虑由三元组 $(C, A, x_0)$ 定义的序列，其中 $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $A \in\mathbb{R}^{n\times n}$，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\left(Cx_0, CAx_0, CA^2x_0, \ldots\right).$$

下面的引理表明，对这样的序列应用$\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$ 中的任意算子，得到的仍是一个可以用三元组描述的序列。因此，通过引入一种将序列表示为三元组的数据类型，也可以对序列进行计算。如第 2.2.5 节所述，这使我们能够对 $\ell_{2+}$ 中的方程精确地应用回代求解，并构成了我们在第3节求解线性二次调节器问题的基础。

**引理 1**。设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 和 $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}\left[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*\right]$。若

$$w = \left(Cx_0, CAx_0, CA^2x_0, \ldots\right) \in \ell_{2+},$$

那么存在 $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^m$、 $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和 $\bar{C}^{1\times m}$，使得

$$\mathfrak{y}w = \left(\bar{C}\bar{x}_0, \bar{C}\bar{A}\bar{x}_0, \bar{C}\bar{A}^2\bar{x}_0, \ldots\right) \in \ell_{2+}.$$

证明。只需考虑 $\mathfrak{y} = \mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{y} = \mathfrak{q}^*$，因为所有算子 $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$ 都是它们的线性组合。我们从 $\mathfrak{y} = \mathfrak{q}$ 开始。于是

$$\mathfrak{y}w = \left(CAx_0, CA^2x_0, CA^3x_0, \dots\right).$$

由此可见，$\bar{x}_0 = x_0$、$\bar{A} = A$和 $\bar{C} = CA$。现在我们考虑 $\mathfrak{y} = \mathfrak{q}^*$。于是

$$\mathfrak{y}w = \left(0, Cx_0, CAx_0, \dots\right).$$

我们可以看到

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}$$

给出了正确的序列。 □

### 2.2.3 伪逆与平方根

Cholesky 算法（以及许多其他算法）需要或受益于逆、伪逆和平方根等额外运算。不幸的是，即使这些运算对 $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$有良好定义，所得算子也可能不属于 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$。例如，$\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathfrak{q}\right)$ 的逆是 $\ell_{2+}$上的一个定义良好的算子，然而由于

$$\left(\mathbf{1} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{q}\right)^i,$$

它不是 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$中的算子。这使我们无法再通过上一小节中的映射 $\mathbf{M}\,\mathfrak{y} \in \mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$，为 $\mathfrak{y}$ 中的每个可逆元素计算逆。不过，我们可以找出 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$的子集，这些子集在伪逆和平方根运算下封闭。这正是（$\mathbb{R}_\infty$ 4）中的算子集合所起的作用。容易验证，在加法、乘法和取伴随运算下封闭。下面的引理表明，在取伪逆运算下也封闭，且其半正定元素在中有半正定平方根。

**引理 2**。若 $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}_\infty$，则：

*(i)* 摩尔－彭若斯伪逆 $\mathfrak{y}^+$ 属于 $\mathbb{R}_\infty$；

*(ii)* $\mathfrak{y}$ 有唯一的半正定平方根$\sqrt{\mathfrak{y}}$，当且仅当 $\mathfrak{y} \succeq \mathbf{0}$，并且 $\sqrt{\mathfrak{y}} \in \mathbb{R}_\infty$。

证明。 我们将通过基于两个算子的乘积推导伪逆和平方根的公式，来证明这两个结论

$$\mathfrak{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\mathfrak{q}^{*k}\mathfrak{q}^k\right) \quad \text{and} \quad \mathfrak{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\mathfrak{q}^{*k}\mathfrak{q}^k\right), \tag{13}$$

其中 $\alpha_k = 0$ 对于 $k \geq n$，且 $\beta_k = 0$ 对于 $k \geq m$。$\mathbb{R}_\infty$ 中的算子可以等价地用基算子改写

$$\mathfrak{e}_k = \mathfrak{q}^{*k}\mathfrak{q}^k - \mathfrak{q}^{*k+1}\mathfrak{q}^{k+1}.$$

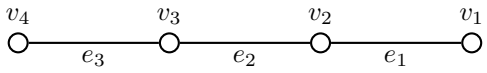



图 2：指定$\mathbf{M}$ 在（15）中的稀疏模式的图。

记部分和 $\sigma_i = \sum_{k=0}^{i} \alpha_k$ 与 $\tau_i = \sum_{k=0}^{i} \beta_k$由（13）可得

$$\mathfrak{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \mathfrak{e}_k \quad \text{and} \quad \mathfrak{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k \mathfrak{e}_k. \tag{14}$$

这种表示是可逆的（也就是说，对于任意 $\sigma_k$，$\tau_k$使得 $\sigma_{k+1} = \sigma_k$ 并且 $\tau_{k+1} = \tau_k$ 当 $k$足够大时，（14）中的形式的表示总是可以改写成（13）中的形式）。现在利用 $\mathfrak{e}_i^2 = \mathfrak{e}_i$ 和$\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j = \mathbf{0}$ 若 $i \neq j$，可得

$$\mathfrak{y}\mathfrak{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \tau_k \mathfrak{e}_k.$$

也就是说，$\mathbb{R}_\infty$ 中算子的乘法对应于其部分和系数的相乘。由此可知，$\mathfrak{z}$是 $\mathfrak{y}$ 的摩尔－彭若斯伪逆，当且仅当

$$\tau_k = \begin{cases} 1/\sigma_k & \text{if } \sigma_k \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

类似地，我们看到，对于所有$k$，$\mathfrak{y} \succeq \mathbf{0}$ 成立当且仅当 $\sigma_k \geq 0$ 成立；而唯一的半正定平方根可以通过对部分和系数取平方根得到。 □

### 2.2.4 分解算法

证明定理1中求取分解的关键步骤是（9）。基于此，算子 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{L}$在（10）中递归定义。关键在于，这些步骤中的所有计算都与 第 2.2.1 节至 第 2.2.3 节所采用的计算框架兼容。也就是说，在 $\mathbb{R}_\infty$中，伪逆和平方根只应用于半正定算子，而其他情况下只需进行加法、乘法和伴随运算；这些运算在 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$中都是封闭的。这意味着，我们可以在计算框架中实现定理1证明中概述的分解过程。该过程的伪代码见算法 1。

为了说明算法 1中的步骤，考虑矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathfrak{q}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathfrak{q}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathfrak{q}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathcal{G}}, \tag{15}$$

其中 $\mathcal{G}$ 是 图 2中的图。在递归的第一步中，$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{I}$因为$\mathbf{M}$的第一列已经

**算法 1：** 用于$\mathbf{LL}^*$ =的 Cholesky 算法
(**MP**) $^*$**MP**

**函数** 乔列斯基分解(**M**)：
  **如果 M**只有一列**则**
    $\mathbf{L} = \sqrt{\mathbf{M}^*\mathbf{M}}$；
    $\mathbf{P} = \mathbf{1}$;
  **else**
    $\mathbf{P}$ =叶边优先置换(**M**)；
    $\mathbf{M} = \mathbf{MP}$；
    $\mathbf{Q}$ = verteciesFirstPermutation(M);
    **M**=**QM**;
    $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}[1,1]$；
    $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}[2,1]$；
    $\mathbf{M}_{22}$ =**M**[2, 2: 末尾]；
    $\mathbf{M}_{32}$ =**M**[3: 末尾，2: 末尾]；
    $\mathbf{N}_{11} = \mathbf{M}_{11}^*\mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{21}^*\mathbf{M}_{21}$;
    $\mathbf{N}_{21} = \mathbf{M}_{22}^*\mathbf{M}_{21}$ ;$\mathbf{M}_{\text{red}} = \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{M}_{21}\mathbf{N}}$
    $\mathbf{M}_{11}^+ \quad \mathbf{M}_{21}^* \quad \mathbf{M}_{22}$ **M M M**;
    $\mathbf{L}_{\text{red}}$, $\mathbf{P}_{\text{red}}$ = 乔列斯基分解($\mathbf{M}_{\text{red}}$);
    $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{21}\sqrt{\mathbf{N}_{11}} & \mathbf{L}_{\text{red}} \\ \mathbf{0} & \end{bmatrix}$ ;
    $\mathbf{P} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\text{red}} \end{bmatrix}$ ;
  **返回 L**，**P**；

**函数**leafEd eFirstPermutation(M):
  leafEdgeNotFound = true ;
  c = 0 ;
  **while** *leafEdgeNotFound* **do**
    c = c + 1 ;
    $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}[:, c]$ ;
    $[r_1, r_2]$ = Non-zero indices of $\mathbf{M}_c$ ;
    **if** *(*$\mathbf{M}[r_1, 2{:}\text{end}] = 0$*) OR (*$\mathbf{M}[r_2, 2{:}\text{end}] = 0$*)* **then**
      leafEdgeNotFound = false ;
  **P** = Permutation matrix for swapping column 1 and column c ;
  **return P** ;

**函数** verteciesFirstPermutation(M):
  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}[:, 1]$ ;$[r_1, r_2] = \mathbf{M}_1$ 的非零项索引;
  $\mathbf{P}_1$ = 用于交换第 1 行与第 $r_1$ 行的置换矩阵;
  $\mathbf{P}_2$ = 用于交换第 2 行与第 $r_2$ 行的置换矩阵;
  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ；**返回 P**；

对应于一条叶边。类似地，$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{I}$，因为**M** 的第一列在第 1 行和第 2 行各有一个非零项。然后算法继续计算

$$\mathbf{M}_{\text{red}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{1}} \begin{bmatrix} \mathfrak{q}^* & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathfrak{q}^* \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^* & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathfrak{q}^* \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

第二次递归步骤随即开始，此时对$\mathbf{M}^{(1)}$ 红色调用乔列斯基分解。在此步骤中，$\mathbf{P}^{(2)}$ =**I** 与$\mathbf{Q}^{(2)}$ =**I** 再次出现，并且

$$\mathbf{M}_{\text{red}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\mathfrak{q}^* \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

第三个递归步骤随后到达基本情形，得到

$$\mathbf{L}_{\text{red}}^{(3)} = \sqrt{\mathbf{M}_{\text{red}}^{(2)*}\mathbf{M}_{\text{red}}^{(2)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{1}$$

以及 $\mathbf{P}^{(3)}$ 约化 $= \mathbf{1}$。由此可计算出 $\mathbf{P}^{(2)}$ 约化 $=$**I** 和

$$\mathbf{L}_{\text{red}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathfrak{q} & \mathbf{L}_{\text{red}}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathfrak{q} & \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{1} \end{bmatrix},$$

最后 $\mathbf{P}$ =**I** 和

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathfrak{q} & \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

均可计算得到。

### 2.2.5 回代计算

由算法 1 得到的分解可用于求解方程组

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M}z = w$$

当$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ 可逆时，通过回代求得 $z \in \ell_{2+}^n$。特别地，方程组

$$\mathbf{L}v = \bar{w},$$

其中 $\bar{w}$ =$\mathbf{P}^*w$，首先按照以下方式依次求解 $v$ 的每个元素

$$v_k = \mathbf{L}_{kk}^{-1}\left(\bar{w}_k - \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{L}_{ki}v_i\right). \tag{17}$$

由此，可以通过以下方式逐项求得 $z$

$$\mathbf{L}^*\mathbf{P}^*z = v.$$

由于**L**的对角元素均属于 $\mathbb{R}_\infty$，这可以通过将 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$ 中的算子作用于$\ell_{2+}$中的序列来实现。由引理 1 可知，对于任意序列$w$，只要它可写成如下形式

$$w = \left(Cx_0, CAx_0, CA^2x_0, \dots\right),$$

描述该解 $z$ 的三元组可使用我们的软件工具计算得出。

在许多应用中，只需计算序列的第一个元素 $z_0$。我们将在线性二次调节器问题的背景下说明这一事实，见第3.1.3 节。在这种情况下，考察回代步骤会揭示进一步的简化。下面的引理以专门针对第3节中示例的方式说明了这一事实。

**引理 3.** 设 $\mathbf{L} = L_0 + L_1\mathfrak{q}$，其中 $L_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是下三角矩阵，$L_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角线为零的下三角矩阵。若 $L_0$ 可逆，则对任意 $r \in (0, 1)$，其解

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^* z = \left(r^0 K_2 x_0, r^1 K_2 x_0, r^2 K_2 x_0, \dots\right)$$

满足

$$K_1 z[0] = r^0 K_2 x_0,$$

其中 $K_1 = (L_0 + L_1 r)\, L_0^\top$.

**注释 2.** 特别地，请注意在引理 3的陈述中，$z[0]$ 也可通过回代得到（在 $\mathbb{R}^n$ 而非 $\ell_{2+}^n$上），因为因子 $K_1$ 由至少与$\mathbf{L}$同样稀疏的三角矩阵之积给出。

**注释 3.** 上述讨论适用于（17）对所有 $v \in \ell_{2+}^n$ 都有唯一解的情况。然而，算法 1 保证对任意 $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{\mathcal{G}}$ 都能运行，即使$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ 仅为半正定（因此不可逆）。不难看出，$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ 可逆，当且仅当 $\mathbf{L}$的对角元素可逆，因此我们的软件工具可以轻松检测所述回代过程是否适用。按照线性代数中的标准方法，可能可以将其推广到半定情形，但这里不再进一步探讨。

证明。 我们先引入一个中间变量 $v$，使得

$$\begin{cases} \mathbf{L} v &= \left(r^0 K_2 x_0, r^1 K_2 x_0, r^2 K_2 x_0, \dots\right) \\ \mathbf{L}^* z &= v. \end{cases}$$

由于 $\mathbf{L}^* = L_0^\top + L_1^\top \mathfrak{q}^*$，我们得到 $z[0] = \left(L_0^\top\right)^{-1} v[0]$。因此，我们只需计算 $v[0]$，而非整个序列 $v$。一般而言，我们得到

$$v[k] + \overline{L} v[k+1] = L_0^{-1} r^k K_2 x_0,$$

其中 $\overline{L} = L_0^{-1} L_1$。这意味着

$$v[0] + (-1)^{n+1} \overline{L}^n v[k+n] = L_0^{-1} \sum_i^n \left(-\overline{L}\right)^i r^{k+i} K_2 x_0.$$

由于 $L$ 因 $L_0$ 和 $L_1$ 中的结构而是幂零的，我们得到

$$v[0] = L_0^{-1} \sum_i^\infty \left(-\overline{L} r\right)^i K_2 x[0].$$

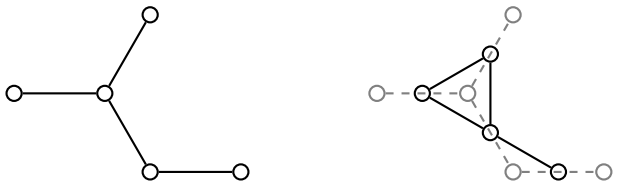



图3： 定义2中的图示。a.) 显示一个图 $\mathcal{G}$，而 b.) 显示 $\mathcal{G}$，以灰色虚线表示，边 $(\mathcal{G})$ 则以黑色表示。

上式中的级数可识别为诺伊曼级数。计算后得到

$$(L_0 + L_1 r)\, L_0^\top z[0] = K_2 x[0].$$

□

## 2.3 稀疏因式分解

本节将说明，算法 1 始终会生成保持稀疏性的分解，即

$$[(\mathbf{MP})^* \mathbf{MP}]_{ij} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L}_{ij} = \mathbf{0}. \tag{18}$$

也就是说，$\mathbf{L}$ 的稀疏程度至少不低于 $(\mathbf{MP})^*\mathbf{MP}$。这一性质使回代尤其高效，也使得引言和第3节中所述的控制律分解极为稀疏。

算法 1 保持稀疏性的性质本质上源自基于弦图的已知结果。我们先回顾这些结果。如果一个图的每个长度为四或更长的环都包含一条弦，则称该图为弦图。现在考虑一个图，其中矩阵$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$的每一行对应一个顶点，并在顶点 $i$ 和 $j$ 之间连一条边，当且仅当

$$[\mathbf{M}^*\mathbf{M}]_{ij} \neq \mathbf{0}.$$

众所周知，如果该图是弦图，那么在将行和列置换为所谓的完美消去序后，Cholesky 算法执行时不会产生填充（即，如果执行 Cholesky 算法，则（18）成立）[15]。

现在我们将这些结果与我们的设置联系起来。唯一的难点在于，定义1 使用图来约束$\mathbf{M}$ 的稀疏模式，而Cholesky分解的经典结果依赖于与$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$的稀疏模式相关联的图。请看下面的定义，该定义在图3中进行了说明。

**定义2。** 令edge$(\mathcal{G})$ 表示一个图，其中每条 $\mathcal{G}$中的边对应一个顶点；如果两条对应边在 $\mathcal{G}$ 中构成一条长度为二的路径，则在对应的两个顶点之间连一条边。

边（$\mathcal{G}$）的相关性在于，它描述了$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ 基于图 $\mathcal{G}$ 的稀疏模式，该图刻画了$\mathbf{M}$ 的稀疏性，如定义1所示。更具体地说，

对于 $i \neq j$，$(\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{ij} \neq \mathbf{0}$ 对于某个 $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{\mathcal{G}}$ 当且仅当顶点 $i$ 和 $j$ 在边（$\mathcal{G}$）中相连。这表明，在对$\mathbf{M}$的列进行适当置换后，如果边($\mathcal{G}$)是弦图，Cholesky 算法将保证在不进行填充的情况下执行。

以下定理精确刻画了 edge($\mathcal{G}$) 的弦性质（依据 $\mathcal{G}$的性质）。由于树图没有环，该结果足以表明，所有由定理1所刻画（并由算法 1计算）的分解均满足 (18)。

**定理 2.** 图 $\mathcal{G}$ 没有长度为四或更长的环，当且仅当 edge($\mathcal{G}$) 是弦的。

**注 4.** 函数 *leafEdgeFirstPermuation* 在算法 *1* 中给出一个置换矩阵，使得$\mathbf{MP}^*\mathbf{MP}$ 的行与列被排列成完美消元序。

证明. 我们通过表明当且仅当 edge($\mathcal{G}$) 不是弦时， $\mathcal{G}$ 含有长度为 4 或更长的环来证明该结果。设 $\mathcal{G}$ 包含一个长度为 $m \geq 4$ 的环。因此，在对 $\mathcal{G}$ 的顶点作适当标记后，边集

$$E_{\text{cycle}} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}\}$$

在 $\mathcal{G}$ 中形成一个环。对于 $E_{\text{cycle}}$ 中的每一条边，edge ($\mathcal{G}$) 中都有一个顶点。此外，由于 $\mathcal{G}$ 的边与 edge ($\mathcal{G}$) 的顶点之间存在一个双射，edge ($\mathcal{G}$) 中这些顶点的任意一对之间存在一条边，当且仅当 $E_{\text{cycle}}$ 中相应的边满足

$$e_i \cap e_j \neq \emptyset.$$

因此，边（$\mathcal{G}$）包含一个长度为 $m \geq 4$ 且无弦的环，因而不是弦图。反之，如果边（$\mathcal{G}$）不是弦图，则其中必定包含一个长度为四或更大的环。反转上述论证即可推出， $\mathcal{G}$ 必定包含一个长度为四或更大的环，正如所要求的那样。□

## 2.4 与谱分解的比较

在本节中，我们将比较由定理1产生的分解与谱分解。尽管二者具有很强的相似性，但我们将看到，一般而言，谱分解并不一定保持稀疏性，即不一定满足（18）的意义。这表明，为了在重要的应用领域（例如线性二次调节器问题）中充分利用稀疏性，本文所建立的非交换分解框架是必要的。

定理1中的分解问题定理1是求解线性二次调节器问题的关键。不过，正如我们将在第3节中看到的，在这种情况下，矩阵$\mathbf{M}$ 的元素还受到额外约束，必须属于

$$\mathbb{R}[\mathfrak{q}^*] = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (\mathfrak{q}^*)^j : \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

显然 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}^*] \subset \mathbb{R}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*]$，不过 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}^*]$中的算子是可交换的。谱分解过程利用了这一事实，其目标是找到一个算子$\mathbf{L}_{\text{spec}}$，使得，

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M} = \mathbf{L}_{\text{spec}}\mathbf{L}_{\text{spec}}^*.$$

与定理1中的因子类似，只要$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ 可逆，谱因子$\mathbf{L}_{\text{spec}}$ 就是可逆的。然而，$\mathbf{L}_{\text{spec}}$ 中的元素属于 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}]$（即具有 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}^*]$ 伴随的算子集合，也就是仅依赖于 $\mathfrak{q}$的幂的那些算子），因此在计算上更易于处理；此外，用于计算$\mathbf{L}_{\text{spec}}$ 的高效算法如今已经相当成熟。

正如我们在（16）中所见，稀疏谱因子可以通过算法 1得到。然而，一般情况下并非如此。通过示例最能说明这一点，因此考虑

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^* & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^* & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

如第 3.2.3 节所示，该矩阵与一个特定的线性二次调节器问题相关。使用算法 1 计算分解，得到 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ 以及

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^* & \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\mathbf{1} - \sqrt{2}\mathfrak{q}^*\mathfrak{q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\mathbf{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^*\mathfrak{q} & \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\mathbf{1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}^*\mathfrak{q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{q} & \frac{\sqrt{5}}{2}\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

该因子是下三角且保持稀疏性；这是高效回代计算所需的两个性质。然而，由于 $\mathbf{L}$包含 $\mathfrak{q}^*\mathfrak{q}$ 项，因此它不是谱因子。现在我们证明，在这种情况下，不存在保持稀疏性的谱因子，这表明第 2.1 节和第 2.2 节的代数框架对于求得最大稀疏因式分解是必不可少的。请注意，该证明依赖于一个关于三角分解的稀疏性性质的技术性结果，该结果以引理 4 的形式列于附录中。

**定理 3.** 若$\mathbf{M}$ 如（*19*）所示，且 $\mathbf{P}$ 是一个置换矩阵，那么不存在一个可逆的 $\mathbf{L}$，其元素属于 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}]$，使得以下两个性质同时成立：

1. $\mathbf{L}\mathbf{L}^* = (\mathbf{M}\mathbf{P})^* \mathbf{M}\mathbf{P}$;
2. $\mathbf{L}$ 是下三角矩阵，并且满足

$$[(\mathbf{M}\mathbf{P})^* \mathbf{M}\mathbf{P}]_{ij} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L}_{ij} = \mathbf{0}.$$

证明。 证明将采用反证法，因此我们假设存在一个满足 1)–2) 的$\mathbf{L}$。我们首先证明，只有特定的置换矩阵才可能满足性质 2)，这将在除少数特殊情形外的所有情况下导出矛盾。随后将证明，在这些

情形中，算法 1 生成的因子具有 $\mathfrak{q}^*\mathfrak{q}$ 对角线上的项。这足以在所有其余情形下导出矛盾。

将$\mathbf{L}$写成

$$\mathbf{L} = \sum_k^\infty L^{(k)}\mathfrak{q}^k,$$

其中 $L^{(k)} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$。注意，只有当 $L_{ij}^{(k)} \neq 0$ $\mathbf{L}_{ij} \neq \mathbf{0}$ 时，矩阵 $L^{(k)}$ 才至少与$\mathbf{L}$一样稀疏。令$1^{(n)} \in \ell_{2+}$ 为序列

$$1^{(n)}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{if } k < n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于$\mathbf{L}$ 有界，因此对于任意向量 $v \in \mathbb{R}^4$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathbf{L}^* v 1^{(n)}\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \left\| \left(\sum_{k=0}^{l} L^{(k)}\right) v \right\|^2 < \infty.$$

这足以得出

$$L = \sum_{k=0}^\infty L^{(k)}$$

存在，且至少与$\mathbf{L}$一样稀疏。还可得出，对于任意向量 $v$, $w \in \mathbb{R}^4$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle w1^{(n)}, \mathbf{L}\mathbf{L}^* v 1^{(n)} \right\rangle = w^\top L L^\top v.$$

类似地，可以证明，对于任意向量 $v, w \in \mathbb{R}^4$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \mathbf{M}\mathbf{P} w 1^{(n)}, \mathbf{M}\mathbf{P} v 1^{(n)} \right\rangle = w^\top P^\top N P v.$$

其中 $P$ 是一个置换矩阵，且

$$N = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

因此

$$P^\top N P = L L^\top.$$

现在共有 24 种可能的置换。可以验证，除其中 8 种之外，$P^\top N P$的乔列斯基因子的稀疏性不及 $\mathbf{L}$。然而，根据引理 4 可知，乔列斯基因子的稀疏性必定与 $L$相同，而其稀疏性至少与 $\mathbf{L}$相同。因此，除这 8 种置换外，其余情况都会导致矛盾。

现在固定 $\mathbf{P}$ 为这 8 种置换中的任意一种。可以验证，算法 1 作用于 $\mathbf{M}\mathbf{P}$，并令 $\mathbf{L}_1$为所得的因子。由于

$$\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}\left(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}\right)^* = \mathbf{I}$$

根据引理 4 可知

$$\operatorname{diag}(\mathbf{L})\operatorname{diag}(\mathbf{L})^* = \operatorname{diag}(\mathbf{L}_1)\operatorname{diag}(\mathbf{L}_1)^*.$$

然而，这再次导致矛盾，因为可以在每种情况下验证，上述式子的右端包含涉及 $\mathfrak{q}^*\mathfrak{q}$ 的项，而 $\mathbf{L}$ 的元素被假定属于 $\mathbb{R}[\mathfrak{q}]$，因此左端不可能包含这些项。

□

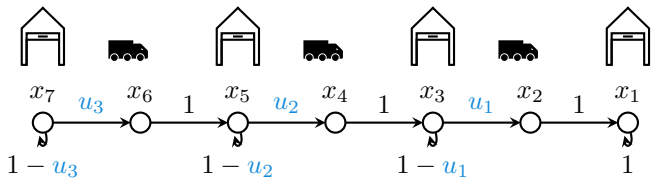



图 4：第 3.1 节所研究的运输网络模型。

## 3 控制中的应用

在本节中，我们将讨论如何应用来自 第 2 节 的分解，从而为某些无限时域 线性二次调节器问题给出利用稀疏性的控制器实现。我们将考虑的例子是不对控制序列施加惩罚的简单运输控制问题。我们所考虑的简化设定将使我们能够找到如下形式的最优控制的显式分解

$$K_1 u[k] = K_2 x[k], \tag{20}$$

其中 $K_1$ 与 $K_2$ 非常稀疏，且 $K_1^{-1}K_2$ 是经典的线性二次调节器状态反馈。

我们希望从控制的角度清晰而透明地阐明定理1的许多有趣方面。我们所给出的例子当然可以显著推广，这些技术也可应用于一系列相关领域（如滤波和估计）。本节其余部分结构如下。在第 3.1 节中，我们从一个高度简化的例子入手，以阐明关键思想。该例子的灵感来自 [16], ，其中针对该问题找到了一个结构化控制器。在第 3.2 节中，我们接着讨论允许更复杂运输网络拓扑的推广情形。

**注释 5。** 至少有三种方法可以利用（20）高效地根据测量值计算 $u[k]$ $x[k]$。第一种方法与我们此前的讨论最为相关，即使用回代（参见 注释 2）。我们将看到，$K_1$ 和 $K_2$ 的稀疏模式反映了底层运输网络拓扑，因此可以基于消息传递实现高效且通常局部化的计算。另一种方法是将基于 $K_1$、$K_2$ 和 $x[k]$ 计算 $u[k]$视为一个分布式优化问题。同样，这种方法也可以通过局部通信高效实现。最后，可以利用 $K_1$ 和 $K_2$ 的稀疏性，通过局部影子价格设计市场激励，促使每个储存设施仅根据 $u[k]$的局部测量值 $x[k]$以及局部确定的市场价格 [17]来运输最优的。

### 3.1 一个简单的线性二次调节器示例

#### 3.1.1 问题设置

考虑图中所示的运输网络图 4，其对应的动态为

$$x[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} x[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=:B} u[k]$$

$$y[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:C} x[k].$$

这些动力学描述了这样一种情形：某种物质（例如水、某种商品等）可以通过运输网络在一组储存设施之间运输。状态向量 $x[k]$ 中奇数索引对应的元素表示该物质在某个储存设施中的数量。此外，每个设施都有一组控制序列，用于决定从该设施取出多少物质并将其送往相邻设施，物质会在一个时间步后到达那里。

要构建一个线性二次调节器问题，假设目标是围绕给定工作点优化运输。也就是说，整个网络中存在某种平衡流（并假设所有变量均相对于该平衡流定义），而目标是调整流量，以满足各个储存设施的需求。一个自然的代价函数为

$$J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} \left( x_1[k]^2 + x_3[k]^2 + x_5[k]^2 + x_7[k]^2 \right),$$

其中 $r \in (0, 1)$ 是折扣因子（由于 $\sum_i x_i[k] = \sum_i x_i[0]$ 对每个 $k$ 都成立，因此需要折扣因子，才能使大多数初始条件下的代价保持有限）。随后，可以通过求解线性二次调节器问题来计算最优输入

$$\begin{aligned} \min_{u[0],u[1],\dots} & \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}[k]^\top \bar{y}[k] \\ \text{s.t.} \quad & \bar{x}[k+1] = rA\bar{x}[k] + Bu[k], \bar{x}[0] = x_0 \\ & \bar{y} = C\bar{x}[k]. \end{aligned} \tag{21}$$

注意，上述状态 $\bar{x}[k+1]$ 按照 $\bar{x}[k] = r^k x[k]$ 与原始运输网络相关联。

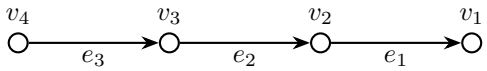



图 5：表示图 4 中运输网络的图。每个储存设施对应一个顶点，每条运输链路对应一条边。边的方向已设定为反映运输方向。该图的无向版本（即图 2）描述了 $\mathbf{M}$ 的稀疏模式，该矩阵出现在第 3.1.2 节中，依据定义 1。

#### 3.1.2 最小二乘重构

式（21）中的动态可依据移位算子改写为

$$(\mathbf{1} - r\mathfrak{q}^*) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_5 \\ \bar{x}_7 \end{bmatrix} = \mathfrak{q}^* \underbrace{\begin{bmatrix} r\mathfrak{q}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & r\mathfrak{q}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & r\mathfrak{q}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + d, \tag{22}$$

其中

$$d = (Cx[0], CrAx[0], 0, 0, \dots).$$

的稀疏模式 $\mathbf{M}$ 由图 5 中的图表示；应用定理1时，相关的正是这张图。该图还体现了传输网络的基本拓扑特征，其中每个储存设施对应一个顶点，每一步延迟对应一条边。序列 $d$ 体现了初始条件的影响。按照注 1 的做法，我们通过以下变量变换隐藏了（22）中的储存动态

$$\begin{cases} (\mathbf{1} - r\mathfrak{q}^*)\, z & = u \\ (\mathbf{1} - r\mathfrak{q}^*)\, y_{\text{init}} & = d. \end{cases} \tag{23}$$

将这些约束直接代入代价函数可知，最小二乘问题

$$\min_{z \in \ell_{2+}} \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathfrak{q}^* \mathbf{M} z + y_{\text{init}}\|^2. \tag{24}$$

等价于线性二次调节器问题（21）。

#### 3.1.3 通过回代求解

方程（24）中的最小二乘问题可通过任意满足以下条件的 $z \in \ell_{2+}^n$ 求解

$$\mathbf{M}^* \mathbf{M} z = -\mathfrak{q} \mathbf{M}^* y_{\text{init}}.$$

最优 $z$ 可以利用第 2 节中的工具，以利用稀疏性的方式求得。应用算法 1 可得 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ 以及一个 $\mathbf{L}$，使得 $\mathbf{M}^*\mathbf{M} = \mathbf{L}^*\mathbf{L}$。例如，当 $r = 1/\sqrt{2}$ 时，

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathfrak{q} & \sqrt{\frac{7}{6}}\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sqrt{\frac{3}{7}}\mathfrak{q} & \sqrt{\frac{15}{14}}\mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

随后可以通过依次求解以下方程，求得最优 $z$

$$\mathbf{L}v = w,\ \mathbf{L}^* z = v$$

通过回代，过程如 第 2.2.5 节所述，其中 $w = -\mathfrak{q}\mathbf{M}^* y_{\text{init}}$。

为继续进行，我们必须先将 $w$ 表示为一个三元组。将算子矩阵 $\mathbf{M}^*$ 写为 $\mathbf{M}^* = \left(M^{(0)}\right)^\top + \left(M^{(1)}\right)^\top \mathfrak{q}$，可见 $w$ 是系统的响应

$$\tilde{x}[k+1] = \begin{bmatrix} rA & 0 \\ CrA & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}[k],\ \tilde{x}[0] = \begin{bmatrix} \bar{x}[0] \\ 0 \end{bmatrix}^\top$$

$$w[k] = \begin{bmatrix} \left(M^{(1)}\right)^\top CrA & \left(M^{(0)}\right)^\top \end{bmatrix} \tilde{x}[k]$$

这已经是合适的形式，不过由于 $A = A^2$，这种表示还可以进一步简化，我们得到

$$w[k] = r^k \left( \left(M^{(0)}\right)^\top + \left(M^{(1)}\right)^\top r \right) CrAx[0]. \tag{26}$$

也就是说，序列 $w$ 可由三元组表示

$$\left( \left( \left(M^{(0)}\right)^\top + \left(M^{(1)}\right)^\top r \right) CrA, rI, x[0] \right).$$

现在已知序列后，可以利用稀疏性进行回代，从而得到 $z$ 由此 $u$ 可通过式（23）求得。

### 3.1.4 结构化控制律

上述过程表明，整个最优输入序列 $u \in \ell_{2+}^n$ 可以利用底层交通网络中的稀疏性来计算。这实际上超出了实践中的需要，因为在实践中，以滚动时域的方式施加输入是很自然的（对于线性二次调节器 问题，最优控制由静态状态反馈给出）。也就是说，只需刻画映射

$$K : x[0] \mapsto u[0].$$

由（25）和（26）可知，$\mathbf{L}$ 和 $w$ 都具有应用引理 3所需的结构。此外，由于$z[0] = u[0]$ 我们可以直接得到控制律，而无需对（23）求逆。因此，当$r = 1/\sqrt{2}$ 时，我们得到一个控制律的分解，其形式如（20）所示，其中

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{14} \end{bmatrix}$$

and

$$K_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$K_1$ 和 $K_2$ 的结构表明，为了计算第 $i$个输入，只需要相邻顶点中的状态变量，以及沿某一条相邻边的控制序列信息。

## 3.2 具有树结构的 LQR问题

本节将介绍如何把前面的示例扩展到底层具有树结构的交通网络。我们将给出几种情况下得到的控制器稀疏模式，以说明交通链路的拓扑和方向如何影响控制律分解中的稀疏性。需要注意的是，这里的扩展是最简单的形式，因此此前从 第 3.1 节推导出的许多公式都无需修改即可使用。在不影响控制律稀疏性结果的前提下，这些结果还可以进行大幅推广。

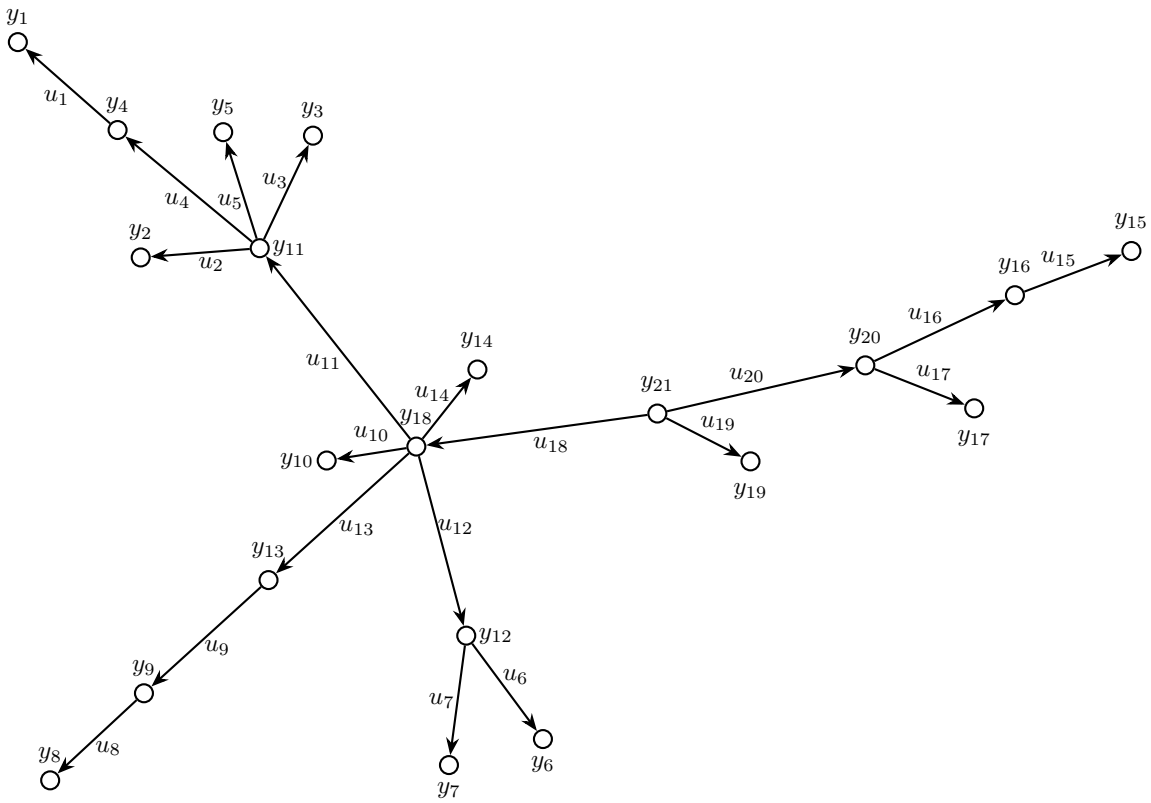
再次考虑图 4所示的运输网络，但假设储存设施按照底层树拓扑连接。也就是说，表征运输网络拓扑的图（图 5对应第 3.1 节中的设置）是树图，而非线图。按照第 3.1.1 节的方法，可以为任何此类运输网络建立一个线性二次调节器问题。请注意，通过适当更新矩阵 $A$、 $B$ 和 $C$，该问题的形式与（21）相同，所有中间公式也都可以继续使用，包括（23）中的变量变换（结果表明，在这种情况下$A = A^2$，这意味着（26）也可以继续使用，无需修改）。

按照第 3.1.2 节的方法，可以将线性二次调节器问题转换为具有（24）形式的最小二乘问题。所得矩阵$\mathbf{M}$的稀疏模式由描述运输网络拓扑的图所决定，与图 5所示相同。具体来说，每个储存设施对应图中的一个顶点，每条运输链路对应一条有向边。矩阵$\mathbf{M}$ 中，每个顶点（储存设施）对应一行，图中的每条边（运输链路）对应一列。顶点的每条流出都由一个元素 $-\mathbf{1}$表示，每条流入则由一个元素 $r\mathfrak{q}^*$ 表示，用于描述运输过程中的单位延迟。

由此得到的最小二乘问题可以按照第3.1.3节和第3.1.4节中的方法求解。现在，我们展示几个特殊情形下所得结构化控制律的稀疏模式。图图6和7展示了运输网络拓扑和控制器稀疏模式。

### 3.2.1 一个更大的示例

为了突出式（20）中控制律分解所固有的稀疏性，我们研究一个规模相当大的运输网络。该网络由21个存储设施组成，按树结构排列，如图6中的图所示。其稀疏模式 $K_1$ 和 $K_2$ 显示在图下方。请注意




$$K_1 = \begin{bmatrix}
\star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star
\end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix}
\star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star

非零项的位置与图中的局部结构密切对应。

### 3.2.2 运输方向的作用

使图6中的运输网络控制如此稀疏的一个原因是，所有运输都从与顶点 $y_{21}$相对应的中央储存设施出发。当有多条运输路线可以为某个储存设施供货时，控制律会稍微变得稠密一些。为了了解方向对稀疏性的影响，请比较图7a.)与图7b.)，以及图7c.)与第1节中的引言示例。

### 3.2.3 无稀疏谱因子时的控制律

如第2.4节所述，在某些情况下，不存在保持稀疏性的谱分解。图图7c.)所示的运输网络就是这种情况。尽管如此，我们仍可利用算子分解的稀疏性，得到结构化控制律。与其他所有示例一样，增益 $K_1^{-1}K_2$ 等于经典的线性二次调节器状态反馈增益。请注意，在这种情况下，无法直接使用引理 3计算 $K_1$ 和 $K_2$。不过，实际上，对于任意给定的 $\mathbf{M}$，总是可以按照本节概述的方法，得到一种利用稀疏性的分解。要精确描述细节颇为棘手，因此此处略去，但所提供的软件实现涵盖了一般情况。

## 4 结论

本文建立了一个计算框架，用于对移位算子矩阵进行Cholesky分解。该工具能够以利用稀疏性的方式精确求解最小二乘问题。我们举例说明了 Cholesky 算法能够生成谱因子，但也证明了存在一些矩阵，无法对其进行保持稀疏性的谱分解。我们运用这些结果揭示了特定运输相关线性二次调节器问题中控制律的稀疏性。


## 致谢

作者感谢 Anders Hansson 在整个项目期间给予的支持，尤其感谢他对本文早期草稿提出的意见。


## 参考文献


[1] Svend Frederiksen 和 Sven E. Werner。区域供热与制冷。Studentlitteratur，隆德，第 1 版，2013 年。

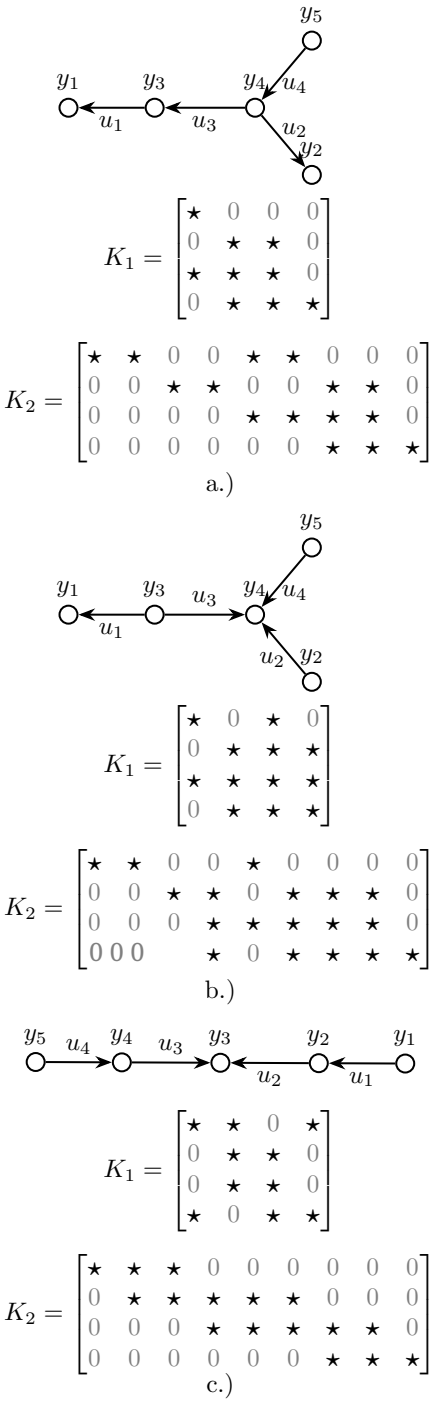




图7：运输方向对（20）中控制律稀疏性的影响示意图。与图6一样，该图展示了运输网络的拓扑结构，而 $\star$ 符号表示（20）中控制律的非零项。请注意，a.)和b.)中的图除了边的方向不同外完全相同。b.)中的图有多条边指向同一个顶点。通常，这会使控制律的稀疏性降低。c.)中的图也呈现出相同特征，但这次是因为底层分解不是谱因子（不存在保持稀疏性的谱因子，详见第2.4节）。

[2]Michele Tucci、Stefano Riverso、Juan C. Vasquez、Josep M. Guerrero 和 Giancarlo Ferrari-Trecate。直流孤岛微电网电压控制的分散式可扩展方法。*IEEE* 控制系统技术汇刊，24(6):1965–1979，2016 年。

[3]Frank Kelly. 端到端拥塞控制的公平性与稳定性*。欧洲控制期刊，9(2):159–176，2003。

[4] Vincent D. Blondel and John N. Tsitsiklis. 系统与控制中计算复杂性结果综述。*Automatica*，36(9):1249–1274，2000。

[5] Michael Rotkowitz and Sanjay Lall. 分散式控制中凸问题的刻画$^{a}st$。*IEEE* 自动控制汇刊，51(2):274–286，2006。[6] Laurent Lessard and Sanjay Lall. 分散式控制器综合的凸性。*IEEE* 自动控制汇刊，61(10):3122–3127，2016。[7] Parikshit Shah and Pablo A. Parrilo. $H2$偏序集上的最优分散式控制：状态反馈的状态空间解。载于第 *49* 届 *IEEE* 决策与控制会议（*CDC*），第 6722–6727 页，2010。[8]Alexandre Amice and Pablo A. Parrilo. 求解偏序集上的最小二乘问题。载于*2022* 年第 *61* 届 *IEEE* 决策与控制会议，第 5014–5021 页，2022。[9] Bassam Bamieh, Mihailo R. Jovanovic, Partha Mitra, and Stacy Patterson. 大规模网络中的相干性：局部反馈受维数影响的局限性。*IEEE* 自动控制汇刊，57(9):2235–2249，2012。

[10]C´edric Langbort 和 Jean-Charles Delvenne。线性二次控制的分布式设计方法及其局限性。*IEEE* 自动控制汇刊，55(9):2085–2093，2010。

[11] Yuh-Shyang Wang、Nikolai Matni 和 JohnC. Doyle。面向大规模系统的可分离且局部化的系统级综合。*IEEE* 自动控制汇刊，63(12):4234–4249，2018。

[12]Yuh-Shyang Wang、Nikolai Matni 和 John C. Doyle。一种系统级控制器综合方法。*IEEE* 自动控制汇刊，64(10):4079–4093，2019。

[13] Mruganka Kashyap 和 Laurent Lessard。分散式线性二次调节器的保证稳定裕度。*IEEE* 控制系统快报，7:1778–1782，2023。

[14] Julia Adlercreutz. juliaatz/shiftoperatoralgebra：基本移位算子代数，2026年2月。

[15] Kshitij Khare和Bala Rajaratnam。稀疏矩阵分解与图刻画。《线性代数及其应用》，437(3):932–947，2012。[16] Martin Heyden、Richard Pates和Anders Rantzer。用于运输问题的结构化线性二次控制器。载于*2018*年欧洲控制会议（*ECC*），第1654–1659页，2018。[17] Martin Heyden、Richard Pates和Anders Rantzer。运输延迟下的基于价格的线性二次控制。*IFAC-PapersOnLine*，53(2):3192–3197，2020。第21届IFAC世界大会。

## 三角分解保留稀疏性

下面的引理将在定理 3的证明中用到。该引理讨论的是 $n \times n$ 矩阵，其中每个元素都是希尔伯特空间上的算子 $\mathcal{H}$。它表明，下三角—上三角分解（例如 Cholesky分解）总能得到具有相同稀疏模式的因子，而且这些因子总满足一个涉及其对角元素的公式。

**引理 4**。设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间。若$\mathbf{L}_1 : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ 和$\mathbf{L}_2 : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ 均可逆且为下三角，并且

$$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^* = \mathbf{L}_2\mathbf{L}_2^*, \tag{27}$$

*then* $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 \mathrm{diag}\,(\mathbf{L}_1)^{-1}\,\mathrm{diag}\,(\mathbf{L}_2)$.

证明。首先注意，由于$\mathbf{L}_1$ 和$\mathbf{L}_2$ 均可逆且为下三角，算子矩阵$\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2$ 和$\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1$ 均为下三角矩阵。由式（27）可得

$$\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\left(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\right)^* = \mathbf{I} \text{ and } \mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1\left(\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1\right)^* = \mathbf{I}.$$

这意味着$\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = \mathrm{diag}\left(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\right)$。最后，由于$\mathbf{L}_1^{-1}$和$\mathbf{L}_2$ 均为下三角，

$$\mathrm{diag}\left(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\right) = \mathrm{diag}\,(\mathbf{L}_1)^{-1}\,\mathrm{diag}\,(\mathbf{L}_2),$$

证明至此完成。 □