arXiv:2602.03463v1 [math.AP] 3 Feb 2026

冷等离子体方程的内部自由边界问题

L.V.Gargyants[1],A.V. Konovalova[2], 和 O.S.Rozanova[3]

Abstract. 对于描述静止离子场中电子运动的冷等离子体方程组，我们考虑在两种介质之间的不可穿透界面上提出的黎曼问题。这两种介质的区别在于离子场的常量大小不同。假设介质间的界面是自由的。其位置由广义兰金–雨贡纽条件和稳定性条件确定，即界面处拉格朗日粒子轨迹的交点。

1. Introduction

电子液体的流体力学方程组与麦克斯韦方程组具有以下形式：

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0\,, \quad \mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right),$$
$$\frac{1}{c}\mathbf{E}_t = -\frac{4\pi}{c} e\rho\mathbf{v} + \operatorname{rot}\mathbf{B}\,, \quad \frac{1}{c}\mathbf{B}_t = -\operatorname{rot}\mathbf{E}\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,,$$

其中 e, m 分别为电子的电荷和质量（此处电子电荷为负： $e<0$）， c 为光速； ρ,$\mathbf{v}$ 分别为电子的密度和速度向量； $\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$ 分别为电场和磁场向量， $x\in\mathbb{R}^3$,$t\geq 0$, ∇, div, rot 分别表示关于空间变量的梯度、散度和涡度。该方程组通常称为“冷”等离子体流体力学方程（例如，参见 [1], [2]）。

人们一直对冷等离子体模型抱有浓厚兴趣，因为它们是对一般等离子体描述方程的一种约化，因而可能使这些方程得以简化。不过，近年来人们的兴趣进一步增加，这是因为实际制造尾波加速器已切实可行（综述见[13], [17], ，另见 [15], [16]），尤其是用于医疗设备的加速器（[14] 及其中的参考文献）。

冷等离子体（或电子液体）是一种高度不稳定的介质，即使对恒定状态的微小扰动，也会导致解失去光滑性。在物理上自然的三维情形下，这类现象几乎不可能通过解析方法研究；即便进行数值分析，也面临着重重困难（例如见 [3] 及其中的参考文献）。

然而，如果我们考虑所谓的平面等离子体振荡，即解的每个分量仅依赖于一个空间变量的情形，方程组便会大大简化，并且可以得到解析结果。具体而言，在空间一维情形下，$\mathbf{v} = (V,0,0)$, $\mathbf{E} = (E,0,0)$, $\mathbf{B} \equiv 0$, 例如[3]。在

无量纲形式下，它可以写成

$$\rho_t + (\rho V)_x = 0, \quad V_t + VV_x = -E, \quad E_t = \rho V. \tag{1.1}$$

对于光滑解，(1.1) 推出 $(\rho + E_x)_t = 0$，由此可知

$$\rho = N(x) - E_x. \tag{1.2}$$

函数 $N(x) \geq 0$ 称为电子背景密度。

如果将 (1.2) 代入 (1.1) 的最后一个方程，就可以消去密度并得到方程组

$$E_t + VE_x = N(x)V, \quad V_t + VV_x = -E, \tag{1.3}$$

这对分析光滑解非常方便。事实上，该方程组是非严格双曲的，所有动力学都可以沿一条拉格朗日特征线[10]进行研究。已知它 E，则 ρ可以由 (1.2) 求得。

关于方程组 (1.3)，已知如下结果。

1. 设 $(E_0(x)\ V_0(x))$ 为方程 (1.3) 的 C^1 初始数据，且 $N(x) = c = \text{const} > 0$。则存在非平凡初始数据，使得柯西问题的解在所有 $t > 0$ 上都保持光滑。具体而言，这类初始数据由条件 [4] 确定

$$(V_0')^2 + 2E_0' - c < 0.$$

2. 若 $N(x) > 0$ 不等于常数，则任何非平凡解都会在有限时间内爆破 [11]。

这促使我们考虑初始时刻不连续的初始数据，并至少针对最简单的情形研究间断的演化。在 [9] 中，研究了黎曼初值和常背景密度。需要注意的是，构造激波需要方程组具有守恒形式。研究证实：

1. 稀疏波和激波周期性交替出现；
2. 激波具有强奇异性（即其中包含狄拉克δ函数形式的密度）。

3. 稀疏波通常并不唯一，要保证唯一性，需要采用非常规技巧，例如要求稀疏波内的能量达到最小。

本文继续研究背景密度初始时存在强间断情形下的一维冷等离子体黎曼问题。换言之，我们希望研究两种介质之间间断的动力学过程，该间断可视为内部自由边界。因此，这个问题可视为黎曼问题的一种变体。

具体而言，我们考虑 $\Omega_-(t):\ x < \Phi(t)$ 或 $\Omega_+(t):\ x > \Phi(t)$ 中的 (1.1)，两者由不可穿透边界 $x = \Phi(t)$、$\Phi(0) = 0$ 分隔，其位置事先未知。对于这些区域中的每一个，我们指定背景密度的不同常数值：

$$N(x) = n_\pm = \text{const} > 0.$$

由 (1.2) 可知，

$$\rho = n_\pm - E_x. \tag{1.4}$$

此处及下文中，对于所有在点 $x_0 \in \mathbb{R}$具有单侧极限 $f_\pm$ 的函数 f，我们用 $[f] = f_+ - f_-$ 表示在 x_0处的跃变值。

对于 (1.3)，我们规定初始条件

$$(V,E)|_{t=0} = (V_-^0 + [V]^0\Theta(x),\ E_-^0 + [E]^0\Theta(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

并且 (1.4) 意味着

$$\rho\big|_{t=0} = n_\pm - [E]^0\delta(x).$$

Here

$$V_-^0,\ [V]^0,\ E_-^0,\ [E]^0 < 0,$$

为常数，$[.]^0$ 在零点处有跃变。

问题在于，求出每个区域 $\Omega_\mp(t)$ 内问题 (1.3)、(1.5) 的解，并根据可容许条件和 Rankine-Hugoniot条件，求出这些区域之间的边界 $x = \Phi(t)$。

当 $t \in (0,\ T)$ 时，$T > 0$ 足够小时，存在两种可能的情形。

1. $V_-^0 > V_+^0$，此时自由边界可解释为一条奇异强间断线。特征线（拉格朗日轨迹）在 $x = \Phi(t)$ 处相交，质量根据广义 Rankine–Hugoniot 条件积聚在间断处。奇异激波的可容许条件与几何熵条件一致：

$$\min\{V_-, V_+\} \le \dot\Phi(t) \le \max\{V_-, V_+\}, \tag{1.6}$$

这意味着两侧的特征线都汇聚到激波上。

2. $V_-^0 < V_+^0$，当 $x = \Phi(t)$的左右两侧形成稀疏波时。它分别被曲线 $x = x_-(t)$ 和 $x = x_+(t)$与不依赖于 x 的状态隔开。因此，Ω_- 区域由Ω_-^1： $x < x_-(t)$和Ω_-^2： $x_-(t) < x < \Phi(t)$组成，而Ω_+ 则由Ω_+^1： $x > x_+(t)$和Ω_+^2： $x_+(t) > x > \Phi(t)$组成。

从点 $x = 0$ 出发的特征线 $x_-(t)$和 $x_+(t)$有无穷多个交点。因此，稀疏区和激波依次交替出现，其起点和终点可由一个超越方程求得。下文将在每个区间内构造一个奇异激波和一个稀疏波。注意，它们是基于方程组的不同形式求得的。

请注意，在两种介质的界面处构造奇异波，与[9], 中描述的常背景密度情形几乎完全相同；不过，此处形成的结构并非单个稀疏波，而是由以下两种情况之一构成：两个稀疏波由一个奇异激波分隔，或一个稀疏波与一个奇异激波。

2. Lagrangian trajectories (characteristics)

介质界面两侧方程组的特征线可由（1.3）求得，即

$$V_t + VV_x = -E, \quad E_t + VE_x = n_\pm V \tag{2.1}$$

在每个 $\Omega_\pm$ 中。作为方程组的解得到的特征线

$$\frac{dV}{dt} = -E, \quad \frac{dE}{dt} = n_\pm V, \quad \frac{dx}{dt} = V,$$

也就是说，对于从点 x_0 出发的拉格朗日轨迹，

$$V_\pm(t) = -\frac{E_\pm^0}{\sqrt{n_\pm}}\sin\sqrt{n_\pm}t + V_\pm^0\cos\sqrt{n_\pm}t, \tag{2.2}$$

$$E_\pm(t) = V_\pm^0\sqrt{n_\pm}\sin\sqrt{n_\pm}t + E_\pm^0\cos\sqrt{n_\pm}t, \tag{2.3}$$

$$x_\pm(t) = \frac{V_\pm^0}{\sqrt{n_\pm}}\sin\sqrt{n_\pm}t + \frac{E_\pm^0}{n_\pm}(\cos\sqrt{n_\pm}t - 1) + x_0. \tag{2.4}$$

将 $T_* > 0$ 记为特征线 $x_\pm(t)$ 首次相交的最小正时刻，即 $x_-(t) = x_+(t)$。在此时刻，激波会转变为稀疏波，或反之，具体取决于黎曼数据。

注意，若 $\sin\sqrt{n_\pm}T_* = 0$，且 $\cos\sqrt{n_\pm}T_* \neq 1$，则 $x_-(T_*) = x_+(T_*)$ 当且仅当 $\frac{E_+^0}{n_+} = \frac{E_-^0}{n_-}$。

3. Construction of a singular shock wave

假设 $V_-^0 > V_+^0$，也就是说，黎曼问题的解始于一个激波。

为了构造激波，必须将方程组写成散度形式：

$$\rho_t + (V\rho)_x = 0, \qquad \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{E^2}{2}\right)_t + \left(\frac{\rho V^3}{2}\right)_x = 0, \tag{3.1}$$

对应于质量守恒定律和总能量守恒定律（例如，[6]）。

由于分量 E 中的初始不连续性意味着 ρ 具有狄拉克 δ 奇异性（见(1.4)），因此我们必须采用奇异激波 [5] 的概念，并寻求如下形式的解

$$V(t,x) = V_-(t,x) + [V(t,x)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x-\Phi(t)), \tag{3.2}$$

$$E(t,x) = E_-(t,x) + [E(t,x)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x-\Phi(t)), \tag{3.3}$$

$$\rho(t,x) = \hat{\rho}(t,x) + e(t)\delta(x-\Phi(t)), \tag{3.4}$$

其中 $[f] = f_+ - f_-$、$f_\pm$ 是具有单侧极限的可微函数，$t \geq 0$、$x \in \mathbb{R}$、$\hat{\rho}(t, x) = n_\pm - \{E_x(t, x)\}$，$\{E_x\}$ 是在通常意义下存在导数的那些点处 E 的导数，$e(t) := e(t, \Phi(t))$，$e(t) = -[E(t, x)]|_{x=\Phi(t)}$。

3.1. 广义强奇异解的定义。从散度形式 (3.1) 出发，我们根据 [5], [7]定义广义强奇异解。

定义 3.1。分布三元组 (V, E, ρ)，由 (3.2) - (3.4) 给出，曲线 γ，由 $x = \Phi(t)$ $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) \in C^1$ 给出，称为问题 (3.1) 的广义奇异解，

$$(V, E, \rho)|_{t=0} =$$
$$(V_-^0(x) + [V(x)]^0\Theta(x),\ E_-^0(x) + [E(x)]^0\Theta(x),\ \rho^0(x) = \hat{\rho}^0(x) + e^0\delta(x)),$$

若对所有测试函数 $\phi(t,x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\hat{\rho}(\phi_t+V\phi_x)dxdt+\int_\gamma e(t)\frac{\delta\phi(t,x)}{\delta t}\frac{dl}{\sqrt{1+(\dot{\Phi}(t))^2}}+$$
$$\int_{\mathbb{R}}\hat{\rho}^0(x)\phi(0,x)dx+e(0)\phi(0,0)=0,$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\left((\frac{\hat{\rho}V^2}{2}+E^2)\phi_t+\frac{\hat{\rho}V^3}{2}\phi_x\right)dxdt+\int_\gamma\frac{e(t)(\dot{\Phi}(t))^2}{2}\frac{\delta\phi(t,x)}{\delta t}\frac{dl}{\sqrt{1+(\dot{\Phi}(t))^2}}+$$
$$\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\hat{\rho}^0(x)(V^0(x))^2}{2}+(E^0(x))^2\right)\phi(0,x)dx+\frac{e(0)(\dot{\Phi}(0))^2}{2}\phi(0,0)=0,$$

其中，$\int\cdot dl$ 是沿曲线 γ的曲线积分，δ 导数 $\frac{\delta\phi(t,x)}{\delta t}\Big|_\gamma$ γ定义为沿曲线 γ的切向导数，即

$$\frac{\delta\phi(t,x)}{\delta t}\Big|_\gamma=\left(\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}+\dot{\Phi}(t)\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial x}\Big|_\gamma\right)\Big|_\gamma=\frac{d\phi(t,\Phi(t))}{dt}=\sqrt{1+(\dot{\Phi}(t))^2}\frac{\partial\phi(t,x)}{d\mathbf{l}},$$

其中，$\mathbf{l}=(-\nu_2,\ \nu_1)=\frac{(1,\ \dot{\Phi}(t))}{\sqrt{1+(\dot{\Phi}(t))^2}}$是与 γ相切的单位向量。

集中在曲线 γ 上的狄拉克δ函数 $\delta(\gamma)$对测试函数的作用按照 [8], 定义为

$$(\delta(\gamma),\phi(t,x))=\int_\gamma\phi(t,x)\frac{dl}{\sqrt{1+(\dot{\Phi}(t))^2}},$$

其中， $\phi(t,\ x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.

将 Rankine-Hugoniot 条件直接推广到奇异激波（[5], [9]）的情形，可得以下定理。

定理 1. 设区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 被光滑曲线 $\gamma=\{(t,x):x=\Phi(t)\}$ 划分为左右部分 $\Omega^{\mp}$。设分布三元组 (V,E,n) (3.2)– (3.4) 和曲线 γ 构成方程组(3.1)的强奇异广义解。则该解满足以下 *Rankine-Hugoniot*条件的类似形式

$$e'(t)=(-[\hat{\rho}V]+[\hat{\rho}]\Phi'(t))\big|_{x=\Phi(t)},\tag{3.5}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{e(t)(\Phi'(t))^2}{2}=\left(-\left[\frac{\hat{\rho}V^3}{2}\right]+\left[\frac{\hat{\rho}V^2+E^2}{2}\right]\Phi'(t)\right)\Big|_{x=\Phi(t)}.\tag{3.6}$$

定理的证明 与情形 $n_-=n_+$的类似结果的证明完全相似，该结果见于 [9], ，因此这里不再给出证明。

该定理允许根据界面两侧分量的取值确定界面的位置。

3.2. **黎曼数据情形**。 黎曼数据 (1.5) 不依赖于 x，因此 (1.3)、(1.5) 在 $\Omega_\pm$ 中的解也不依赖于空间变量，并由 (2.2)、(2.3) 给出。

$$\begin{aligned} V(t,x) &= V_-(t) + [V(t)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x-\Phi(t)),\\ E(t,x) &= E_-(t) + [E(t)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x-\Phi(t)),\\ \rho(t,x) &= n_- + (n_+ - n_-)\Theta(x-\Phi(t)) + e(t)\delta(x-\Phi(t)), \end{aligned}$$

假设激波从点 $t = T_0 \geq 0$ 出发。

因此，(3.5) 可写为

$$e'(t) = -[nV(t)]\big|_{x=\Phi(t)} + [n]\big|_{x=\Phi(t)}\Phi'(t), \tag{3.7}$$

由此，考虑到初始条件 $e(T_0) = -[E(T_0)]$, $\Phi(T_0) = \Phi_0$, ，我们得到

$$e(t) = -[E(t)]\big|_{x=\Phi(t)} + [n]\big|_{x=\Phi(t)}(\Phi(t) - \Phi_0). \tag{3.8}$$

注意到 (2.2)、(2.3) 意味着

$$[\hat{\rho}V^2 + E^2]\big|_{x=\Phi(t)} = [\hat{\rho}V^2 + E^2]^0 = K = \text{const},$$

其中 $\hat{\rho} = \rho_-(t,\ x) + [\rho(t,\ x)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x-\Phi(t))$ 是密度的正则分量。因此，(3.6) 可写为

$$(e(t)(\Phi'(t))^2)' = -\left[\hat{\rho}V^3(t)\right]\big|_{x=\Phi(t)} + K\Phi'(t). \tag{3.9}$$

将 (3.8) 代入 (3.9)，得到关于 $\Phi(t)$ 的非线性二阶方程，

$$\Phi'(t)\Big(2(\alpha\Phi(t)+\beta(t))\Phi''(t) + \alpha(\Phi'(t))^2 + \beta'(t)\Phi'(t) - K\Big) = -\sigma(t), \tag{3.10}$$

其中 $\alpha = n_+ - n_-$, $\beta(t) = -[E(t)]\big|_{x=\Phi(t)} - \alpha\Phi_0$, $\sigma(t) = \left[\hat{\rho}V^3\right]\big|_{x=\Phi(t)}$，还需补充两个边界条件

$$\Phi(T_0) = \Phi_0, \quad \Phi(T_*) = x_+(T_*) = x_-(T_*).$$

我们看到，确定 $\Phi(t)$ 的方程比常背景密度的情形复杂得多，此时 $\alpha = 0$。

4. Construction of a rarefaction wave

问题 (1.3)、(1.5) 在 $\Omega^1_\pm$ 中的解与激波情形一样，不依赖于空间变量，形式为 (2.2)、(2.3)。然而，区域 $\Omega^2_\pm$ 未被特征线覆盖，因此我们需要构造一个解，使其至少在界面 $x = \Phi(t)$ 的每一侧连续。对于常背景密度的情形，可以在发散特征线 $x_-(t)$、 $x_+(t)$ 之间构造处处连续的解；但可以证明，在背景密度不同的介质接触情形下，这无法实现。因此，必须按照构造奇异激波的原则，用一个间断连接构造连续解的区域 $\Omega_\pm$ 。

因此，在区域 $\Omega^2_\pm$ 中，我们必须构造方程组 (2.1) 的解，并根据广义 Rankine–Hugoniot 条件确定界面 $x = \Phi(t)$ 的位置。

本质上，在每个区域 $\Omega_{\pm}^2$ 中，解都唯一地确定为空间变量的仿射函数，而问题在于选择正确的界面。因此，

$$(V,E)=\begin{cases}(V_-(t),E_-(t)), & x<x_-(t),\\ (V_{\pm}^r,E_{\pm}^r)=(a_{\pm}(t)x+b_{\pm}(t),c_{\pm}(t)+d_{\pm}(t)), & x\in\Omega_{\pm}^2,\\ (V_+(t),E_+(t)), & x>x_+(t)\end{cases}$$

假设稀疏波从 $t=T_0=0$ 开始，并在 $t=T_*$处被激波取代。否则，我们将时间改为 $t-T_0$。

系数 $a_{\pm}(t)$ $c_{\pm}(t)$ 满足以下微分方程组：

$$\dot a_{\pm}=-a_{\pm}^2-c_{\pm},\quad \dot c_{\pm}=a_{\pm}(n_{\pm}-c_{\pm}).$$

我们在条件 $a_{\pm}(t)$ $c_{\pm}(t)\to\infty$ 下求解该方程组，其中 $t\to 0$ 处以及 $t\to T_*$处满足该条件，得到

$$a_{\pm}(t)=\frac{\sqrt{n_{\pm}}(B_{\pm}\cos\sqrt{n_{\pm}}t-\sin\sqrt{n_{\pm}}t)}{B_{\pm}\sin\sqrt{n_{\pm}}t+\cos\sqrt{n_{\pm}}t-1},$$
$$c_{\pm}(t)=\frac{n_{\pm}(B_{\pm}\sin\sqrt{n_{\pm}}t+\cos\sqrt{n_{\pm}}t)}{B_{\pm}\sin\sqrt{n_{\pm}}t+\cos\sqrt{n_{\pm}}t-1},$$

with

$$B_{\pm}=\frac{1-\cos\sqrt{n_{\pm}}T_*}{\sin\sqrt{n_{\pm}}T_*}=\tan\frac{\sqrt{n_{\pm}}T_*}{2}.$$

注意，如果 $\sin\sqrt{n_{\pm}}T_*=0$，则取极限可得 $B_{\pm}=0$。

此外，由 $\Omega_{\pm}^1$ 和 $\Omega_{\pm}^2$ 边界上的连续性可得

$$b_{\pm}(t)=V_{\pm}(t)-a_{\pm}(t)x_{\pm}(t)=\frac{(B_{\pm}E_{\pm}^0-\sqrt{n_{\pm}}V_{\pm}^0)(\cos\sqrt{n_{\pm}}t-1)}{\sqrt{n_{\pm}}(B_{\pm}\sin\sqrt{n_{\pm}}t+\cos\sqrt{n_{\pm}}t-1)}$$
$$d_{\pm}(t)=E_{\pm}(t)-c_{\pm}(t)x_{\pm}(t)=\frac{(B_{\pm}E_{\pm}^0-\sqrt{n_{\pm}}V_{\pm}^0)\sin\sqrt{n_{\pm}}t}{B_{\pm}\sin\sqrt{n_{\pm}}t+\cos\sqrt{n_{\pm}}t-1}.$$

由 (1.4) 得到 $\rho=n_{\pm}-c_{\pm}(t)$。

注意，要使激波存在，必须要求 $e(t)\ge 0$，这意味着

$$c_-(t)\Phi(t)+d_-(t)\ge c_+(t)\Phi(t)+d_+(t),\qquad t\in(0,T_*).\tag{4.1}$$

于是，由 (3.5)、(3.6) 可得

$$e' = [n-c]\,\Phi'-[(n-c)a]\,\Phi-[(n-c)b],\tag{4.2}$$
$$(e(\Phi')^2)' = -[(n-c)a^3]\,\Phi^3+3[(n-c)a^2b]\,\Phi^2-3[(n-c)ab^2]\,\Phi+[(n-c)b^3]+\Big([(n-c)a^2+c^2]\,\Phi^2+2\,[(n-c)ab+cd]\,\Phi+[(n-c)b^2+d^2]\Big)\,\Phi',\tag{4.3}$$

其中记 $[.]=[.]\big|_{x=\Phi(t)^\circ}$

该方程组关于 e 是一阶的，关于 Φ 是二阶的，并补充了关于 e 的初始条件，

$$e(0)=-[E]^0$$

以及关于 Φ 的边界条件，

$$\Phi(0)=\Phi_0,\quad \Phi(T_*)=x_+(T_*)=x_-(T_*).\tag{4.4}$$

现在我们考虑这样一种情况：对于 $t\in(t_1^*,\ t_2^*)$，$0<t_1^*<t_2^*\le T_*$，式 (4.1) 不成立；而在点 t_1^* 和 t_2^* 处，条件 (4.1) 变为等式，因此

$e(t_1^*) = e(t_2^*) = 0$。那么对于 $t \in (t_1^*,\ t_2^*)$，不存在从右侧与激波相伴的稀疏波。因此从右侧 $V = V_+$ 和 $E = E_+$。注意，必然有 $\Phi(t_1^*) = x_\pm(t_1^*)$ 且 $e(t_1^*) = 0$。为明确起见，假设 $\Phi(t_1^*) = x_+(t_1^*)$。

因此，由 (3.5)、(3.6) 可得，用于求解 $e(t)$ 和 $\Phi(t)$ 的方程组为

$$\begin{aligned} e' &= ([n] + c_-)\,\Phi' - (V_+ n_+ - ((n_- - c_-)a_-\,\Phi + (n_- - c_-)b_-), \\ (e(\Phi')^2)' &= -n_+ V_+^3 + (n_- - c_-)(a_-\Phi + b_-)^3 \\ &\quad +(n_+ V_+^2 + E_+^2 - (n_- - c_-)(a_-\Phi + b_-)^2 - (c_-\Phi + d_-)^2)\Phi', \end{aligned} \tag{4.5}$$

边界条件为

$$e(t_1^*) = 0, \quad \Phi(t_1^*) = x_+(t_1^*), \quad \Phi(t_2^*) = x_+(t_2^*).$$

此时，阶跃 $t \in (0,\ t_1^*)$ 的边界条件由 (4.4) 变为

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad \Phi(t_1^*) = x_+(t_1^*).$$

条件 (4.1) 现在变为

$$c_-(t)\Phi(t) + d_-(t) \geq E_+(t), \qquad t \in (t_1^*, t_2^*). \tag{4.6}$$

若 $\Phi(t_1^*) = x_-(t_1^*)$，则则方程组 (3.5)、(3.6) 具有如下形式

$$\begin{aligned} e' &= ([n] - c_+)\,\Phi' + (V_- n_- - ((n_+ - c_+)a_+\,\Phi + (n_+ - c_+)b_+), \\ (e(\Phi')^2)' &= n_- V_-^3 - (n_+ - c_+)(a_+\Phi + b_+)^3 \\ &\quad -(n_- V_-^2 + E_-^2 - (n_+ - c_+)(a_+\Phi + b_+)^2 - (c_+\Phi + d_+)^2)\Phi', \end{aligned} \tag{4.7}$$

边界条件为

$$e(t_1^*) = 0, \quad \Phi(t_1^*) = x_-(t_1^*), \quad \Phi(t_2^*) = x_-(t_2^*).$$

在这种情况下，阶跃 $t \in (0,\ t_1^*)$ 的边界条件由 (4.4) 变为

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad \Phi(t_1^*) = x_-(t_1^*).$$

并且我们用以下条件代替条件 (4.1)：

$$c_+(t)\Phi(t) + d_+(t) \leq E_-(t), \qquad t \in (t_1^*, t_2^*). \tag{4.8}$$

注意，条件 (4.1) 在 $(0,\ T_*)$ 上可能不止两次成为等式，因此每个此类点都会发生不同类型稀疏区的切换（见第6节例3）。

4.1. 寻找切换点。 条件 (4.1)、(4.6)、(4.8) 有助于确定特征平面 $(t,\ x)$ 上的这些区域的边界，在这些区域内，$(e,\ \Phi)$ 分别可由 (4.3)、(4.5)、(4.7) 求得。

令 $\Psi_1(t) = -\frac{d_+(t) - d_-(t)\,c_+(t)}{c_-(t)}$ 表示由 (4.1) 取等号得到的曲线，并假设 $\Psi_1(t)$ 在稀疏区 $(0,\ T_*)$ 内仅在 t_1^* 和 t_2^* 两点改变符号。注意，$\Psi_1(t)$ 可能有两个以上的根，见第4节。

在 $\Phi(t)$ 与 $\Psi_1(t)$ 的交点处，狄拉克 δ 函数$e(t)$ 的振幅为零，两个伴随稀疏波区域之间的奇异激波不再存在。然而，该点属于特征线 $x_+(t)$（或 $x_-(t)$），且曲线 $\Psi_2^+(t) = \frac{E_+(t) - d_-(t)\,c_-(t)}{}$（由 (4.6) 定义）（或 $\Psi_2^-(t) = \frac{E_-(t) - d_+(t)\,c_+(t)}{}$（由 (4.8) 定义））也经过同一点。因此，$t_1^*$ 和 t_2^* 是……，其中奇异激波

两个伴随稀疏波区域之间的奇异激波转变为一个伴随稀疏波区域与不依赖于 x 的状态之间的奇异激波，反之亦然；它们是方程 $\Psi_1(t) = \Psi_2^{\pm}(t) = x_{\pm}(t)$ 和 $e(t_1^*) = e(t_2^*) = 0$ 的根。因此，不同类型奇异激波之间的切换点为 $(t_1^*, x_{\pm}(t_1^*))$ 和 $(t_2^*, x_{\pm}(t_2^*))$，我们可以预先确定 (4.3)、(4.5) 或 (4.7) 的适用位置。

5. Conjugation of the shock waves in the compression and rarefaction regions

假设特征线 $x_+(t)$ 和 $x_-(t)$ 的交点 $t = T_0, t = T_+$ 和 $t = T_-$ 满足：当 $t \in (T_0,\ T_+)$ 时，我们有激波；当$t \in (T_-,\ T_0)$ 时，我们有稀疏区，见 (2.4)。令 $T_0 = 0$ 和 $x_{\pm}(0) = 0$，我们分别将 $x = \Phi_{\pm}(t)$ 记为 $t > 0$ 和 $t < 0$ 的间断线（奇异激波）。

为了构造激波，我们知道 $\Phi(0) = 0$ 和 $\Phi(T_+) = x_{\pm}(T_+)$，因此必须求解二阶方程 (3.10) 的边值问题。

下面证明，若我们假设 $\Phi(t)$ 在零点处是 C^1 –光滑的，则可以求得$\Phi'(0)$。如果稀疏波区域由两个稀疏波组成，即条件 (4.1) 成立，那么由 (3.7) 和 (4.2)

$$\begin{aligned} & e'(t) \\ &= -[nV(t)]\big|_{x=\Phi_+(t)} + [n]\big|_{x=\Phi_+(t)}\Phi'(t) \\ &= [n - c(t)]\big|_{x=\Phi_-(t)}\,\Phi'(t) - [(n - c(t))(a(t)\,\Phi(t) + b(t)]\big|_{x=\Phi_-(t)}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{[nV(t)]\big|_{x=\Phi_+(t)} - [(n - c(t))(a(t)\,\Phi(t) + b(t)]\big|_{x=\Phi_-(t)}}{[c(t)]\big|_{x=\Phi_-(t)}} \\ &= V_-^0 + C\,[V]^0, \qquad (5.1) \\ C &= \lim_{t\to 0} \frac{c_+(t)}{c_+(t) - c_-(t)} = \frac{1}{1 - \frac{B_+}{B_-}r}, \quad r = \frac{\sqrt{n_-}}{\sqrt{n_+}}. \end{aligned}$$

类似地，若条件 (4.6)（或 (4.8)）对 $t \in (T_-,\ T_0)$ 成立，则由 (3.7) 和 (4.5)（或 (4.7)）可得

$$\Phi'(0) = V_-^0$$

or

$$\Phi'(0) = V_+^0,$$

分别。

由于激波 $e(t)$ 已由 (3.8) 给出，我们可以求得

$$e(T_+) = -[E(T_+)] + [n]\Phi(T_+) = e(0).$$

现在假设 该问题是周期性的， $L = T_+ + T_-$ 为一个周期，并且在一个周期内，激波仅向稀疏区转变一次，形成两个稀疏波（反之亦然）。

则 $\Phi(T_+) = \Phi(T_-)$， $e(T_+) = e(T_-)$ 以及

$$\Phi'(T_+) = \Phi'(T_-) = V_-(T_{\pm}) + C\,[V(T_{\pm})], \qquad C = \lim_{t\to T_{\pm}} \frac{c_+(t)}{c_+(t) - c_-(t)}.$$

因此，我们可以在激波情形下求解方程 (3.10)，并在稀疏情形下求解满足初始条件的方程组 (4.2)、(4.3)，这在数值上更为容易。

然而，我们将说明，一般情况下，不能要求奇异激波在从压缩转为稀疏的切换点处保持光滑。事实上，对于从零点向右出发的激波，条件 (1.6) 要求$V_+^0 \le \Phi'(0) \le V_-^0$，因此由 (5.1) 可得

$$V_+^0 \le V_-^0 + C\,[V]^0 \le V_-^0, \qquad 0 \le C \le 1, \qquad \frac{B_+}{B_-} \le 0,$$
$$\frac{\tan\frac{\sqrt{n_+}T_*}{2}}{\tan\frac{\sqrt{n_-}T_*}{2}} \le 0. \tag{5.2}$$

显然，若 $n_- \to n_+$，则 (5.2) 不可能成立，因此曲线$x = \Phi(t)$ 在稀疏区内部与外部的奇异激波拼接点处应失去光滑性。

稀疏区内激波的拼接条件可通过与 (4.3) 和 (4.5)（或 (4.7)）完全类似的方式得到。在要求 $\Phi(t)$ 光滑的条件下，当在点 t_* 处从包含两道稀疏波的稀疏区过渡到包含一道稀疏波的区域时，条件为

$$\Phi'(t_*) = V_\pm(t_*)$$

若过渡发生在特征线 $x_\pm(t)$上，则必须满足。

注意，即使问题是周期性的，在一个周期内激波与稀疏区之间也可能存在若干切换点。于是，为了求特征线$x = x_\pm(t)$的任意交点(t_*, x_*)处的导数 Φ'，我们必须将其平移到原点，并利用变量替换 $t - t_*$ 和 $x - x_*$应用上文所得公式。

然而，方程(3.10)与方程组(4.2)、(4.3)在 $\Phi'(t) = 0$的点处均发生退化，因此若 $\Phi(t)$失去单调性，数值求解将十分困难。尽管如此，$\Phi(t)$基本上并非单调。因此，构造奇异间断线无论如何都是一个非常困难的计算问题。

6. Examples

在本节中，我们给出若干示例以说明我们的推理。在特征平面（t, x）上，红线表示奇异激波，即具有不同基准密度的介质之间的界面。在图1左侧，我们展示了背景密度相等情形下特征线 $x_+(t)$与 $x_-(t)$的排布。奇异激波与稀疏波周期性交替，且稀疏波内部没有分界线。图1右侧展示了不可公度振荡周期情形下特征线$x_+(t)$与 $x_-(t)$排布的一个示例。我们看到压缩区与稀疏区以复杂方式交替。稀疏区以实心填充标示。在稀疏区内，界面可以在左右两侧同时邻接两条稀疏波，也可以在一侧邻接一条稀疏波、在另一侧邻接一个与 x 无关的状态。界面位置以示意图给出。

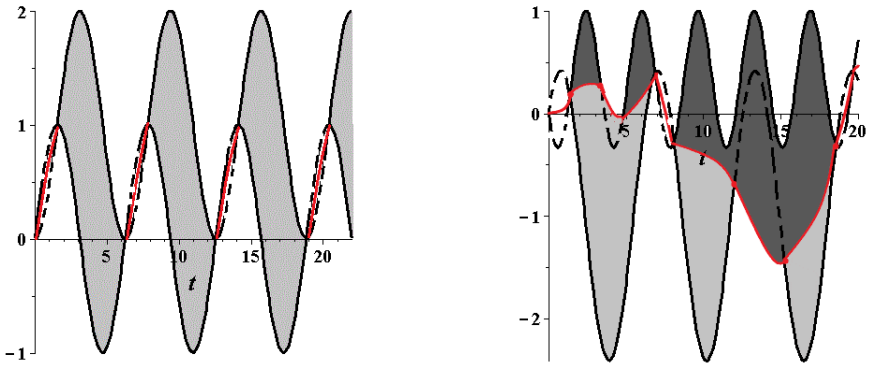

FIGURE 1. 平面（t, x）。特征线 $x_-(t)$ $x_+(t)$以及界面 $\Phi(t)$的位置。左：例1, $n_- = n_+ = 1$, $V_+^0 = 0$, $V_-^0 = 1$, $E_+^0 = -1$, $E_-^0 = 0$. 右：例2, $n_- = 1$, $n_+ = 3$, $V_+^0 = -1$, $V_-^0 = 1$, $E_+^0 = -1$, $E_-^0 = 1$.

图2展示了不同背景密度下、可公度振荡周期情形中压缩区与稀疏区相应周期性交替的情况（例3）。特征线 x_- 与x_+ 的交点位于点 $T_0 = 2k\pi$ 以及 $T_* = 1.035895953 + 2k\pi$、 $k \in \mathbb{Z}$。 $x_+(t)$与 $\Psi_2^+(t)$在稀疏区 $t \in (T_*, 2\pi)$内的交点位于点$t_1^* = 2.176190164 + 2k\pi$、 $t_2^* = 3.920405792 + 2k\pi$以及 $t_3^* = 5.916224372 + 2k\pi$、$k \in \mathbb{Z}$。在这些点处，两条稀疏波邻接介质边界 Φ 的区域切换为仅出现一条此类波的区域，反之亦然。界面 $x = \Phi(t)$的位置以示意图标出（图2，左）。图2右侧表明，切换点起源于特征线 x_+与曲线 Ψ_1 （虚线）和 Ψ_2^+（点线）的交点，这些曲线是条件(4.1)与(4.6)成立的区域的边界。

图3和图4详细展示了奇异界面 Φ 的位置以及稀疏区的结构。

注意，对于 $t = [0, T_*]$， $x = \Phi(t)$的位置可以通过射击法轻松地数值求得，因为在这种情况下 $\Phi'(t) \neq 0$。对于 $t = [T_*, t_1^*]$、 $t = [t_1^*, t_2^*]$、 $t = [t_2^*, t_3^*]$ 和 $t = [t_3^*, 2\pi]$， $x = \Phi(t)$的位置计算则因这些区域存在退化点而显著复杂；在这些退化点处， $\Phi'(t) = 0$ 且 $e(t) = 0$。值得注意的是，目前尚无关于此类边值问题存在性与唯一性的理论结果。

7. CONCLUSION AND DISCUSSION

我们研究了冷等离子体方程的一维情形，其中两种介质连接处的背景密度为常数但彼此不同。两种介质之间的界面是一个强奇异间断，必须满足广义 Rankine–Hugoniot 条件。问题是求出解各分量的值

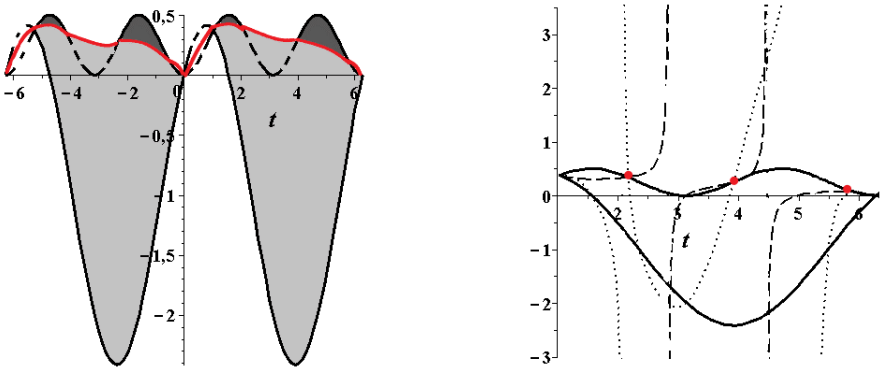

FIGURE 2. 平面（t, x），例3： $n_- = 1$, $n_+ = 4$, $V_+^0 = 0$, $V_-^0 = 1$, $E_+^0 = -1$, $E_-^0 = 1$. 左：界面位置示意图。右：一个周期内的稀疏区， $\Psi_1(t)$（虚线）和 $\Psi_2^+(t)$（点线）的图像，切换点 t_1^*、 t_2^*、 t_3^*

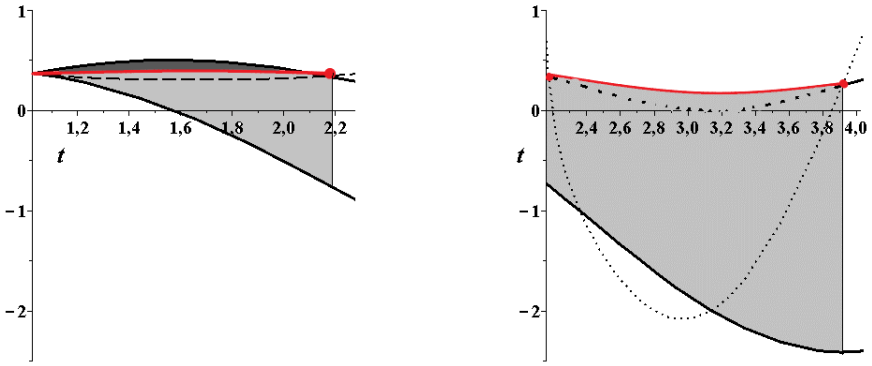

FIGURE 3. 平面（t, x），例3，特征线 $x_-(t)$ $x_+(t)$及界面 $\Phi(t)$ 位置的详细图示。左：$t \in (0, t_1^*)$，包含两道稀疏波的稀疏区。右：$t \in (t_1^*, t_2^*)$，包含一道稀疏波的稀疏区；特征线 x_+ 已移除。

（速度、密度和电场强度）在间断左右两侧的取值，以及对应于两种介质界面的间断位置。因此，我们求解黎曼问题。假设间断左右两侧的初始数据均为常数。

当介质之间不存在分离时， [9]中求解了黎曼问题。在这种情况下，其解由交替出现的奇异激波和连续稀疏波组成。可以证明，该解始终存在，并且在某些条件下唯一。在 [12] 中，针对欧拉-泊松方程的所有变体研究了黎曼问题；当粒子间存在排斥相互作用力且背景密度非零时，这些方程在特定情况下可化为冷等离子体方程

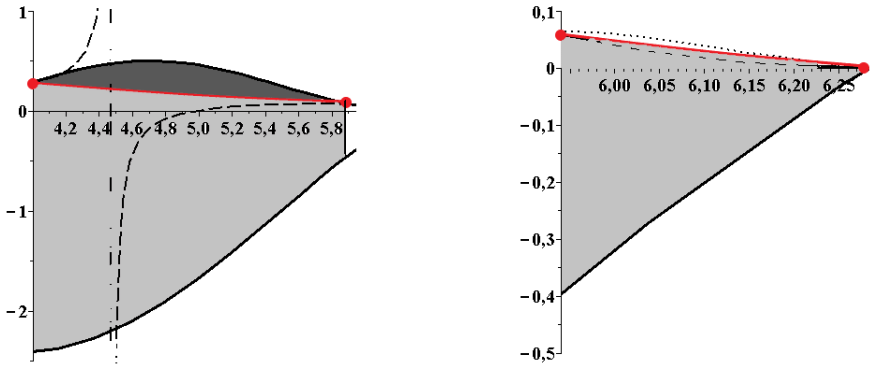

FIGURE 4. 平面（t, x），例3：特征线的详细图示 $x_-(t)$ $x_+(t)$ 以及界面的位置 $\Phi(t)$。左侧：$t \in (t_2^*,\ t_3^*)$，含有两列稀疏波的稀疏区。右侧：$t \in (t_3^*,\ 2\pi)$，含有一列稀疏波的稀疏区；特征线 x_+ 被移除。

。在所有情况下，解都具有有趣的独特性质，但其构造方式仍相当标准。

背景密度存在间断这一假设使问题显著复杂化。事实证明，稀疏区中也必须包含一个奇异激波。根据比值 $r = \frac{\sqrt{n_-}}{\sqrt{n_+}}$（其中 $n_\pm$ 分别是间断右侧和左侧的背景密度），压缩区和稀疏区可能会复杂地交替出现。特别是，如果 r 是有理数，也就是说，间断左右两侧介质的振荡具有公度性，那么问题就会呈周期性。然而，在这个周期内，奇异激波与稀疏区之间可能会发生相当多次切换，反之亦然。不过，稀疏区本身也可能具有多种结构。具体而言，奇异界面两侧都可能各有两列波逼近，也可能只有一侧有稀疏波逼近。在每个稀疏区内，这些结构会交替出现。

尽管本文提出了形式上可确定解的问题，但仍有许多问题尚未解答。特别是，在一般情况下，解的存在性与唯一性问题仍未解决。很可能在某些情形下，介质之间的奇异界面无法保持光滑；而当界面失去单调性时，解的唯一性也仍是一个未决问题。此外，由于存在退化点，数值求解成为一个真正的挑战。

因此，对一个相当标准的问题作出看似微不足道的修改，却催生了一个全新的研究领域。

8. ACKNOWLEDGMENTS

由俄罗斯人民友谊大学通过俄罗斯科学基金会23-11-00056号资助予以支持。

References

[1] A.F. Alexandrov、L.S. Bogdankevich 和 A.A. Rukhadze，《等离子体电动力学原理》，施普林格电子学与光子学系列，施普林格，柏林海德堡，1984。[2] R. C. Davidson，《非线性等离子体理论方法》，学术出版社，纽约，1972。[3] Chizhonkov E.V. *Mathematical aspects of modeling oscillations and wake waves in plasma*。CRC出版社：美国佛罗里达州博卡拉顿，ISBN 978-0-367-25527-5，294[4] Rozanova O. S., Chizhonkov E. V. *On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma* 2021 72, 13 10 1007 00033 020 01440 3 ，《应用数学与物理学杂志》。– 第 卷，第 期，– doi:/ /s– –。[5] Shelkovich V.M. *Singular solutions of systems of conservation laws of the δ and δ′- shock waves types and processes of transport and concentration* 。– UMN。– 2008。– 第 63 卷，第 3 期。– 第 73–146 页。[6] Frolov A.A., Chizhonkov E.V. *On the application of the law of conservation of energy in the cold plasma model* ，《计算数学与数学物理杂志》。– 2020。– 第 60 卷，第 3 期。– 第 503–519 页。[7] Nilsson B., Rozanova O.S., Shelkovich V.M. *Mass momentum and energy conservation laws in zero-pressure gas dynamics and δ-shocks: II* 2011 90, ，《应用分析》。– . – 第 卷，第 5 期。– 第 831–842 页。[8] Kanwal R.P. *Generalized Functions: Theory and technique*，Birkha¨user，波士顿、巴塞尔、柏林，1998。[9] Rozanova O. S. 冷等离子体方程的黎曼问题，《数学分析与应用杂志》 527 2023 127400 ( ), [10] Rozanova, O.S. 关于非严格双曲系统的整体光滑振荡解。《数学科学杂志》293，577586（2025）。[11] Rozanova O.S. 具有可变掺杂剖面的排斥性欧拉-泊松方程，《物理学D：非线性现象》，第 472 卷，2（2025）[12] Gargyants L.V., Rozanova O.S., Turzynsky M.K. 欧拉-泊松方程主要模型情形的黎曼问题，《数学科学杂志》，第 285 卷（2024）[13] C. J. R. Sheppard, *Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review [Invited] Applied* , ,( ), - . *Optics* **52** 2013 538 545 [14] Moshkunov, S.I., Khomich, V.Y., Shershunova, E.A. 冷等离子体射流用高压开关电源。《技术物理快报》45，93-95（2019）。[15] V. Yu. Goryainov, A. Voronin，利用等离子体加速器产生超声速气体射流，《技术物理快报》， 49 24 2023 11 13 : ( ), - Knyazev, R.R., Onishchenko, I.N., Sotnikov, G.V. 充有等离子体的介质结构中尾波场的产生。《技术物理》61，511516（2016）。[16] V. Malka，等离子体尾波加速器：导论与历史概述 //《欧洲核子研究组织加速器学校会议论文集：等离子体尾波加速》，瑞士日内瓦，2014年11月23日至29日，B. Holzer 编，CERN-2016-001（欧洲核子研究组织，日内瓦，2016）。 *https*: *//cds.cern.ch/record/2203628/files/*1418884 1 − 28*.pdf*

–

(1) Bauman Moscow State Technical University
(2,3) Lomonosov Moscow State University