arXiv:2602.03475v1 [math.RA] 3 Feb 2026

关于斜多项式环中子扩张的一致维数

BERTRANDNGUEFACK

摘要。本文研究变量良序集上双射型斜多项式环 $\mathbb{S} = R[X; \alpha, \delta]$ 中子扩张的不必有限的一致维数及相关概念的不变性。当系数环具有足够多的一致左理想时，在交换变量情形下，我们证明：关于多项式环这一主题的经典结果可推广到由任意一族（标准）项在 R 上生成的斜 Laurent 多项式环 $\mathbb{S} = R[X^{\pm 1}; \alpha]$ 的子扩张。非交换变量情形更为复杂；容易构成的类多项式子环相对于环境环可能表现得极为反常。我们给出双射型（半）素左 Goldie 斜多项式环的简单例子，其中包含同构于自由非交换多项式环的幺半群子环。随后我们研究所谓的本质特殊子扩张 子类，并得到它们对一致维数及相关概念的保持。

1. 引言

本文中，所有环均为含幺结合环； R 表示一个基环（系数环）； R 的环扩张也称为 R-环。 R-环之间的态射是指任何将基环上的恒等映射限制为恒等映射的环映射； R-环 S 的子扩张通常是指 S的任意 R-子环。模M （在某个环上）的统一维数（或 Goldie 维数）$\mathrm{udim}(M)$，是满足 M包含由非零子模构成的 $\mathfrak{N}$指标直和的基数 $\mathfrak{N}$ 的上确界 GW04, DGALP06]。除非另有说明，环 S 的统一维数指其左一致维数，记为 $\mathrm{udim}(S) = \mathrm{udim}({}_S S)$。环的左 Goldie 条件是指其一致维数有限，且左湮灭子满足升链条件。众所周知，子环未必与环境环具有相同的一致维数。自 [Sho72] 关于有限右一致维数多项式环的经典论文问世以来，环扩张下的一致维数不变性及 Goldie 条件的保持一直是活跃的研究课题。鉴于多项式环，尤其是斜多项式环及相关类多项式环的重要性，Shock 的结果很快由 [Wil73], 推广至群环，随后又推广至双射型的（有限）迭代 Ore 扩张

2020数学主题分类。16P60, 16P70, 16S36, 16S38。关键词和短语。一致维数；Goldie 环、特殊子扩张、斜多项式环。

参见 [Mat95]；半素左 Goldie 环上的单射型迭代 Ore 扩张情形由 [LM03], 研究，而斜 PBW 扩张方面的研究则始于 [Rey14]。众所周知，一致维数和 Goldie 条件不仅在环论本身中有重要应用 [Jat72, CC73, Sho74, CG86, MR87, Ker90, Fai96, VHJLP03] 及其中的参考文献，也在模论中有重要应用 [Cam77, AHJLP92,LM04]。

类多项式子环与普通斜多项式环相比，可能表现得非常奇特；然而，它们在代数和几何中自然出现，并呈现各种特殊形式。本文考察一个环境R环 $\mathbb{S}$ 及其子扩张，其中 $\mathbb{S}$ 是

- 或者是一个多元斜 Laurent 多项式环 $R[\boldsymbol{X}^{\pm 1};\ \boldsymbol{\alpha}]$ 具有双射型 e 其变量可交换,
- 或者是一个多元斜多项式环 $R[\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}]$ 它在任意良序集 $\boldsymbol{X}$ 上的独立变量具有双射型。

因此，作为左 R模， $\mathbb{S}$ 是自由的，其基由标准项集合 $\mathbb{T}$ 给出：对于斜多项式环 $R[\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}]$， $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$由所有有序乘积组成，$x_1 \cdots x_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$属于 $\boldsymbol{X}$；而对于变量可交换的斜 Laurent 多项式环，$\mathbb{T} = \mathbb{T}(\boldsymbol{X}^{\pm 1})$则仅由字母表 $\boldsymbol{X}^{\pm 1} = \boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{X}^{-1}$上的所有可交换词构成，其中 $\boldsymbol{X}^{-1} = \{x^{-1}:\ x \in \boldsymbol{X}\}$。随后我们讨论一个自然出现的问题。

问题 1.1. 设 A 是 $\mathbb{S}$的一个类多项式子扩张；本质上，我们可以只考虑 A 包含 R，且由一组标准项作为左 R-模生成的情形。对 A 的形状施加哪些条件，才能保证：一致维数(A) = 一致维数$(\mathbb{S})$ = 一致维数(R)，并且只要 R是左 *Goldie*， A 也是左 *Goldie*?

问题 1.1 在交换变量情形下的一个特例如下。

问题 1.2. 设 A 是斜 *Laurent* 多项式环$R[\boldsymbol{X}^{\pm 1};\ \boldsymbol{\alpha}]$的任意子扩张，由来自 $\mathbb{T}(\boldsymbol{X}^{\pm 1})$的一族标准项在 R上生成。是否有一致维数(A) = 一致维数(R)？当且仅当 R是（半）素左 *Goldie* 环时， A 是否也是如此?

对于问题 1.2，直觉上答案应该是肯定的，至少当环境环只是多项式环 $R[\boldsymbol{X}]$时如此。然而，即便在后一种情形下，似乎也无法依靠 Sho72] 的经典方法 [得到预期的肯定答案。在问题 1.1 的非交换变量情形下，这个问题变得极其复杂且极具挑战性。

论文内容与主要结果。在第 2 节中，我们回顾了任意环扩张下不一定有限的一致维数的不变性。事实上，在 Shock 的原始论文及之后关于这一主题的论文中，人们都默许或明确假设基环具有有限一致维数。对于某个环上的非零左模 M，我们称 M 具有足够多的一致子模，是指 M 中的每个非零子模都包含一个一致子模。命题 2.3 给出了一致维数不变性证明中的一个关键步骤： M 具有足够多的一致子模，当且仅当 M 包含

一个本质子模，该子模是某个指标集 I所对应的一族一致子模的直和 $\oplus_{i\in I}M_s$；在这种情况下，$\mathrm{udim}(M)$ 等于基数 $|I|$。这一关键刻画使我们能够提出一种通用且简洁的策略，以保证一般环扩张下一致维数的不变性（命题 2.4）。具体而言，我们引入并研究给定环 S 的一个概念——良好本质子环 A （定义 2.5）；结果表明， A 和 S 具有许多共同性质，包括一致维数的不变性、Goldie 条件的保持以及（半）素性；参见命题 2.6 和 2.7。

第 3 节聚焦于交换变量情形，因为这一情形有助于理解更复杂的非交换情形。我们仅依赖第 2 节探讨的一般策略，便在定理 3.3 和 3.5 中彻底解决了问题 1.2。

在第 4 节中，我们全面讨论问题 1.1，并正式引入和研究 $\mathbb{S}$的本质特殊子扩张。随后，我们将经典结果 [Sho72、Mat95], 推广到这一一般情形，同时允许一致维数为无限。具体而言，定理 4.12 和 4.15 确立了本质特殊子扩张 A的一致维数不变性，并给出了左奇异理想的计算方法。其主要策略是证明如何将基环 R 中的一致或本质左理想提升到 A，从而推广经典方法。最后的定理 4.17 是关于（半）素左 Goldie 环的一个应用。

第 5 节在二元情形下提供了一族本质特殊子扩张，凸显出这样一个事实： $\mathbb{S}$ 中的熟悉子扩张通常无法以任何有意义的方式成为斜多项式环，但其一致维数仍与 $\mathbb{S}$相同。

尽管我们的结果对于双射型的环境斜多项式环是最佳的，但一个显而易见的研究方向是进一步扩展 $\mathbb{S}$ 中“特殊化”子扩张的类别，使其仍满足一致维数的不变性。

2. 一致维数在一般环扩张下的不变性

我们考虑一般环扩张 $R\subset S$，并提出一些策略：一方面，可以快速比较两个环 R和 S的一致维数；另一方面，可以为左 Goldie 环的子环推导 Goldie 条件。

虽然 $\mathbb{N}$ 表示包含 0 的自然数集，但对于 $m,\ n\in\mathbb{Z}$，我们分别记 $[\![m,\ n]\!]$ 为所有满足 $m\le k\le n$的整数 k 的范围。对于左 S-模 M中的任意子集 U， S 中 U 的左湮灭子是左理想 $\mathrm{a}_S(U)=\{a\in S:\ aU=0\}$；当 U是 M中的子模时，它是 S的理想。通常，当 S是基环或上下文已明确时，我们省略 $\mathrm{a}_S(U)$ 的下标。 M 的奇异子模定义为 $\zeta(M)=\{x\in M:\mathrm{a}(x)$ 在 S中包含一个本质左理想$\}$。我们用 $\zeta(S)=\zeta({}_SS)$ 表示环 S的左奇异理想。奇异子模的记号借用于 [MR87，第 2.2 节4]。

注 2.1。 左湮灭子的升链条件和降链条件可由子环继承。因此，左 *Goldie* 环的子环是左 *Goldie* 环，当且仅当它具有有限一致维数。

2.1. 具有足够均匀子模的模。

定义 2.2。 若某个环上的非零模 M 具有足够多的一致子模，即其中每个非零子模都 M 包含一个一致子模，则称该模具有足够多的一致子模。同样，若一个环 S 具有足够多的一致左理想，即其中每个非零左理想都 S 包含该环的一个一致左理想 S，则称该环具有足够多的一致左理想。

我们的第一个关键结果刻画了那些一致维数（以强意义）能够达到的模，从而推广了有限维情形。

命题 2.3. 设 M 是某个环上的任意非零左模。那么， M 具有足够的均匀子模，当且仅当 M 包含一个本质子模，该子模是某个指标集 I上的均匀子模的直和 $\oplus_{i\in I}M_s$。在这种情况下，一致维数(M) 等于基数 $|I|$。

证明。 先假设 M 具有足够的均匀子模。因此， M 的均匀子模族非空；显然应用佐恩引理后，我们可以取 M中一个极大的独立均匀子模集 $\mathrm{U} = \{M_i : i \in I\}$。那么，子模 $\oplus_{i\in I}M_i$必为 M的本质子模。事实上，若不然，就存在一个非零子模 $N \subset M$，使得 $(\oplus_{i\in I}M_i) \cap N = 0$；而根据假设， N包含某个均匀子模 $N\prime$。由此可得到一个更大的独立集 $\mathrm{U} \cup \{N'\}$，这与 U 的极大性矛盾。因此，正如预期的那样， M 包含一个本质子模，该子模是均匀子模的直和。

反之，假设 M包含由一致子模构成的直和 $M_I = \oplus_{i\in I}M_s$，且 M_I 在 M中是本质的。我们的目标是证明， M 中的每个非零子模都包含一个均匀子模，并且 $\mathrm{udim}(M) = |I|$。当基数 $n \geq 1$有限时，众所周知（参见 GW04，引理 5.16，命题 5.20] ）：一个模具有一致维数 n，当且仅当它包含一个本质子模，而该子模是 n 个一致子模的直和。因此，我们可以继续讨论 $|I|$ 为无限的情形。设 $N \subset M$ 是任意一个非零子模；对于每个有限子集 $\Lambda \subset I$，我们也令 $M_\Lambda = \oplus_{i\in\Lambda}M_i$。由于 M_I在 M中是本质的，模 $N \cap M_I = N \cap (\oplus_{i\in I}M_i)$ 非零，因此存在某个非空有限子集 $\Lambda \subset I$，使得模 $N \cap M_\Lambda$ 也非零。但这样一来（由基数有限的情形可知），$\mathrm{udim}(M_\Lambda) = |\Lambda|$ 有限，且 $\mathrm{udim}(N \cap M_\Lambda) \leq |\Lambda|$ 也有限且非零。因此， $N \cap M_\Lambda$ 包含一个均匀子模。

现在假设 M 包含一个由非零子模构成的直和 $\oplus_{s\in I'}M'_s$，且 $|I'| \geq |I|$，我们的下一个目标是证明 $|I\prime| = |I|$。用 $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$表示可数基数；对于每个有限数 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathrm{E}_n = \{\Lambda \subset I : |\Lambda| = n\}$。对于每个 $s \in I'$，由于 M'_s是 M的一个非零子模，而 M_I是 M的一个本质子模，模 $M'_s \cap M_I$必定包含一个非零循环子模N_s，并且存在某个有限子集 $\Lambda_s \subset I$满足 $N_s \subset M_{\Lambda_s}$。接下来固定 $1 \leq n \in \mathbb{N}$。对于每个 n元子集 $\Lambda \subset I$，构造子集： $I\prime_\Lambda = \{s \in I\prime : N_s \subset M_\Lambda\}$，于是由均匀子模构成的有限直和 $M_\Lambda = \oplus_{i\in\Lambda}M_i$ 包含由非零循环子模构成的直和 $N_{I'_\Lambda} = \oplus_{s\in I'_\Lambda}N_s$。然而，由于 M_Λ不可能包含超过 n 个非零子模的直和，因此有$|I'_\Lambda| \leq n$。此外，按定义，每个元素 $s \in I\prime$都是 I'_{Λ_s}的成员，因此我们也有

$I\prime = \cup_{1\le n\in\mathbb{N}}\cup_{\Lambda\in\mathcal{E}_n} I\prime_{\Lambda}$。然而，对于每个 $1 \le n \in \mathbb{N}$，集合 I显然可嵌入每个 $\mathrm{E}n$，而后者可嵌入 n重笛卡尔积 I^n，并且由于 I是无限基数，因此可得 $|I| \le |\mathrm{E}_n| \le |I^n| = |I|$。因此，对于每个 $1 \le n \in \mathbb{N}$ 以及每个$\Lambda \in \mathrm{E}n$，我们已证明 $|I\prime_{\Lambda}| \le n$且 $|\mathrm{E}_n| = |I|$，由此得到：

$$|I'| = |\cup_{1\le n\in\mathbb{N}} \cup_{\Lambda\in\mathcal{E}_n} I'_{\Lambda}| \le \aleph_0|I| = |I|.$$

这表明 $|I'| = |I|$，从而完成该命题的证明。 □

2.2. 确保一致维数的不变性及相关概念的一般策略。 研究斜多项式环有限一致维数的不变性时行之有效的经典策略，由下述命题概括到任意环扩张，并允许无限一致维数。

命题 2.4. 设 A是某个 R-环的任意子环，使得对 R中每一个非零左理想 L， $A\cap AL$作为左 A-子模在 AL中是本质的，并且对所有满足 $L\cap L' = 0$、 $AL\cap AL' = 0$的左理想 L、 L'亦然。则 一致维数(R) ≤一致维数(A)。进一步假设，若 L是 R中的任意一致或本质左理想，则 A中的左理想 $A\cap AL$亦然。于是，若 R具有足够多的一致左理想，则 A亦然，并且 一致维数(A) =一致维数(R)。

证明。 为说明 $\mathrm{udim}(R)$ ≤$\mathrm{udim}(A)$，给定 R中任意一个非零左理想的直和 $\oplus_{i\in I}L_i$，我们可以快速验证得到 A中非零左理想的直和 $\oplus_{i\in I}(A\cap AL_i)$。根据假设，对于所有 $i \in I$，每个 $A\cap AL_i$已经是 A中的非零左理想。若 i_1、 ..... 、 i_n是来自 I的两两不同的指标，其中某个整数为 $n \ge 2$，那么对于每个 $s \in [\![1,\ n]\!]$，由于 $L_{i_s}\cap\sum_{k\ne s}L_{i_k} = 0$，命题的第一个假设保证了 $AL_{i_s}\cap\sum_{k\ne s}AL_{i_k} = 0$。因此，和 $\sum_{i\in I}($ $A\cap AL_i)$仍然是 A中非零左理想的直和。

接下来，假设R具有足够多的一致左理想，并且如果L是R中的一个一致（或本质）左理想，那么$A\cap AL$中的左理想A也具有相同性质。因此，根据命题 2.3， R的一致维数以更强的意义达到，即 R包含一个本质左理想，该理想可表示为一致左理想的直和 $L = \oplus_{i\in I}L_i$，且 $|I| =\mathrm{udim}(R)$。但是，左理想 $A\cap AL$是 A中的本质左理想$\tilde{}$，并且它包含$\sim$中一致左理想的直和 $L = \oplus_{i\in I}(A\cap AL_i)A$。我们证明 L作为 A中的左理想也是本质的。任取 A中的非零左理想 J，由于 $J\cap AL = J\cap A\cap AL \ne 0$，存在一个有限非空子集 $\Lambda\subset I$，使得 $J\cap\oplus_{i\in\Lambda}AL_i \ne 0$。但是，由于根据假设，对于所有 $i \in \Lambda$，每个 $A\cap AL_i$都是左 A-模 AL_i的本质子模，因此可知$\oplus_{i\in\Lambda}(A\cap AL_i)$仍然是左 A-模 $\oplus_{i\in\Lambda}AL_i$的本质子模，从而$\sim J\cap\oplus_{i\in\Lambda}(A\cap AL_i) \ne 0$也成立。因此，我们已经证明， L是 A中的一个本质左理想，它是由一致左理想组成的 I-指标直和。再次应用命题 2.3，得到 $\mathrm{udim}(A) = |I| = \mathrm{udim}(R)$，并且 A 具有足够多的一致左理想。□

众所周知，对于关于正则元左 Ore 集的左局部化，一致维数保持不变，[MR87，引理 2.2。12]正如我们将要展示的，下面的良好本质环扩张概念涵盖了一种稍微更一般的情形。

定义 2.5。 设 L 是左 R-模 M的子模。若对于每个非零元素的有限集 $E \subset M$，都存在 $a \in R$，使得对所有 $x \in E$均有 $0 \neq ax \in L$，则称 L 在其中良好本质 M，或者称 M 是[1] 的良好本质扩张 L 。如果进一步地，对于每个 $x \in M$，都存在 c 中的左正则元素，使得 $cx \in L$，那么称 L 为 M的强良好本质子模（因为缺乏更简洁的术语）。

环 S 的（强）良好本质子环是指任意子环 A，它是 S 中的一个（强）良好本质左 A-子模。在这种情况下，我们也称 S 是 A 的（强）良好本质环扩张。

命题 2.6. 环 S的良好本质子环 A 满足以下结论。

(a) 若 A 中的 L、L' 是左理想，且满足 $L \cap L' = 0$，则 $SL \cap SL' = 0$；一致维数(S) =一致维数(A)。左奇异理想 $\zeta(A)$ 是 $\zeta(S)$ 中的一个良好本质左 A-子模，且满足$\zeta(A) = A \cap \zeta(S)$。

(b) 令 $L \subset S$ 为任意非零左 A-子模。左理想 $A \cap L$ 在 A 中是一致的（或本质的）当且仅当左理想 SL 在 S中也是如此。

证明。先看第一个断言，由于 A作为 S中的左 A-子模至少是本质的，因此已经有 $\operatorname{udim}(S) \leq \operatorname{udim}(A)$。接下来，假设 L, L' 是 A中的两个左理想，且满足 $L \cap L' = 0$，我们将证明 $SL \cap SL' = 0$。令 $v \in SL \cap SL'$；则对某些 $n, n' \in \mathbb{N}$，有 $v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \sum_{i=1}^{n'} v'_i u'_i$，并且 $v_i, v'_j \in S$, $u_i \in L, u'_j \in L'$对于$1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq j \leq n'$ 成立。将关于 S 的主要假设应用于有限集 $E = \{v, v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_{n'}\}$，可得某个 $a \in A$，使得对每个（i, j） $\in [\![1, n]\!] \times [\![1, n']\!]$，都有： $av_i, av'_j \in A$, $av = \sum_{i=1}^{n}(av_i)$ $u_i = \sum_{i=1}^{n'}(av'_i)u'_i \in L \cap L'$，并且只要 v非零， av 也非零。但由于 $L \cap L' = 0$，我们必有 $av = 0$以及 $v = 0$。因此， $SL \cap SL' = 0$。这也（正如命题 2.4 的第一个断言中那样）保证了 $\operatorname{udim}(A) \leq \operatorname{udim}(S)$；由此得到等式 $\operatorname{udim}(S)$ =$\operatorname{udim}(A)$。

关于左奇异理想的断言，假设 A 是 S的一个良好本质左 A-子模，这已经保证对于 S的每个左理想 J， $A \cap J$仍然是 J的一个良好本质左 A-子模。此外， $\zeta(A) \subset A \cap \zeta(S)$，因为 A 已经是 S中的一个本质 A-子模。对于反向包含，设 $x \in A \cap \zeta(S)$且 $0 \neq y \in A$。左奇异理想 $\zeta(S)$的定义给出某个 $b \in S$，满足 $by \neq 0$ 且 $by \cdot x = 0$，因此根据关于 S的假设，还必然存在某个 $a \in A$，使得 $0 \neq ab$, $ab \cdot y \in A$，同时$(ab \cdot y) \cdot x = 0$ 且 $x \in \zeta(A)$。由此，$A \cap \zeta(S) \subset \zeta(A)$。

接下来，对于命题（b），假设 $A \cap L$ 是 A中的一致左理想，我们来证明 SL是 S中的一致左理想。因此，设 $f = \sum_{i=1}^{m} f_i u_i$和 $g = \sum_{j=1}^{n} g_j v_j$为

[1]另一种替代术语本可以是“强本质子模”，但后者已经在文献中的少数地方出现过（用于不同目的，并且）表示一个子模 L，它属于一个 R-模 M，满足每个 I-索引的 L 的直积I都是相应的 M 的 I-索引直积中的本质子模。对于 M的一个 R-模的子模 L，虽然 M 中的 L 为“强本质”的条件并不意味着 M中的 L 是一个良好本质子模，但后者显然强于要求 L 的每个直和都是 M的相应直和中的本质子模。

SL中的非零元素，其中$0 \neq m$、 $n \in \mathbb{N}$、 f_i、 $g_j \in S$和 u_i、 $v_j \in L$对应于$1 \leq i \leq m$、$1 \leq j \leq n$。将主要假设应用于有限子集$\{f$、 g、 f_i、 g_j： $1 \leq i \leq m$、 $1 \leq j \leq n\}$，可得某个 $v \in A$满足 vf、 vg、 vf_i、 $vg_j \in A$（对所有$(i$、 $j) \in [\![1$、 $m]\!] \times [\![1$、 $n]\!]$均成立）以及 vf、 $vg \neq 0$。特别地，非零元素 vf和 vg已经属于 A中的一致左理想 $A \cap L$，且存在两个元素 a、 $b \in A$满足 $0 \neq avf = bvg$；由此可知， SL是 S中的一致左理想。反过来，假设 SL是 S中的一致左理想，我们很快就能验证 $A \cap L$是 A中的一致左理想。由于 A已经是 S中的本质左 A-子模，因此 $A \cap L$必非零。给定任意非零元素 x、$y \in A \cap L$，根据假设，存在 c、 $d \in S$满足$0 \neq cx = dy$；再次应用主要假设，可得某个 $v \in A$满足 vc、 $vd \in A$ 和 $0 \neq (vc)x = (vd)y$，这表明 $A \cap L$是 A中的一致左理想。接下来，为完成命题（b）的证明，还需处理关于本质左理想的断言。由于 A已经是S中的本质左 A-子模，若 $A \cap L$是 A中的本质左理想，那么它仍是 S 中的本质左 A-子模，因此左理想 SL 是 S中的本质左理想。反过来，假设 SL 是 S中的本质左理想，我们来验证 $A \cap L$ 是 A中的本质左理想。给定任意非零 $x \in A$，存在某个 $v \in S$ 使得 $0 \neq vx = \sum_{i=1}^{m} v_i u_i \in SL$，其中某个正 $m \in \mathbb{N}$以及某个$(v_i$、 $u_i) \in S \times L$满足对 $1 \leq i \leq m$有 $v_i u_i \neq 0$。将关于 S的主要假设应用于子集$\{vx$、 v_i： $1 \leq i \leq m\}$，可得某个 $a \in A$满足 $0 \neq avx$、 $av_i \in A$对所有 $i \in [\![1$、 $m]\!]$均成立，因此， $0 \neq avx = \sum_{i=1}^{m} (av_i)$ $u_i \in A \cap L$，且 $A \cap L$ 如预期般是 A 中的本质左理想。命题的证明至此完成。□

现在我们刻画良好本质扩张下的（半）素性。这里，“（半）素”是“素（或相应地，半素）”的简写。

命题 2.7. 设 A 是环 S的良好本质子环。那么，若 A 是（半）素环，则 S也是；若进一步 A 是左 *Goldie* 环，则 S也是。反过来，若S 是左 *Goldie* 环，则 A也是。若 S 是半素左 *Goldie* 环，则 S中的每个强良好本质子环也都是半素左 *Goldie* 环。

证明。 从命题的第一条陈述出发，并假设 A是素环，我们将证明 S也是素环。设 S 中的 I, J为理想，且 $IJ = 0$ 并且 $J \neq$不为 0。由于 A 是 S中作为左 A-子模的本质子模， $J \cap A$ 是 A的非零理想，而（$I \cap A$）（$J \cap A$） $= 0$，由此得到 $I \cap A = 0$ 且 $I = 0$。因此， S 是素环。令 $I = J$，即可得到半素性的相应结论。现在，由于素环是半素环，而（根据 Goldie 定理 [MR87, §2.3.6]）半素左 Goldie 环恰好是具有有限一致维数且左奇异理想为零的半素环，命题第一条陈述中的第二部分便由命题 2.6(a) 得出。

对于逆向，假设 S 是左 Goldie 的。由于左湮灭子的升链条件 可由子环继承，根据命题 2.6(a)， A 是左 Goldie 的。现在再假设 A 是 S中的强良好本质子环。假设 S 是半素环，并取 A 中满足 $N^2 = 0$ 的任意理想N，我们来证明 N是零理想。已知右湮灭理想 $I = \mathrm{r}.a_A(N)$ 是 A中的本质左理想。事实上，对于 A中任意非零左理想 L，存在某个 $k \in \{0,1\}$，使得 $N^k L \neq 0$ 且 $N^{k+1} L = 0$，

因此 $0 \neq N^k L \subset L \cap \mathrm{r.a}\,(N)$。由命题 2.6(b) 可知， SI也是 S的本质左理想。但由于 S 是半素左非奇异环且具有有限一致维数，我们知道（多亏 [MR87，命题 2.3.5]） SI 包含某个正则元 c。设 $c = u_1a_1 + \cdots + u_na_n$，其中 $u_1, \ldots, u_n \in S$ 且$a_1, \ldots, a_n \in I$。根据关于 A的附加假设，存在 A中的左正则元$c_1, \ldots, c_n$，满足 c_nu_n， $c_{n-1}c_nu_{n-1}, \ldots, c_1 \cdots c_nu_1 \in A$。特别地，乘积$c' = c_1c_2 \cdots c_nc$必定是 A中的左正则元，而它现在属于 I；因此$Nc' = 0$，由此得到预期的 $N = 0$。最后，假设S是素环，我们希望证明 A 也是素环。根据 Goldie 定理 [MR87, §2.3.6]，集合 $\mathcal{C}(S)$（由 S的所有正则元组成）是左 Ore 集，而相应的 S的左戈尔迪商环 Q是单环。下面的论证推广了这样一种证明：由 Q 是单环推出 S 是素环。称元素$c \in S$为左 A-正则元，如果其左湮灭子 $\mathrm{a}_A(c) = \{a \in A : ac = 0\}$ 为零。取 A中的任意两个非零理想 I、 J。由于 Q是单环，存在某个正整数 $n \in \mathbb{N}$ 以及 u_i、 $v_i \in S$、 d_i、 $s_i \in \mathcal{C}(S)$ 和 $a_i \in J$（对 $1 \leq i \leq n$），使得 $QJQ = Q$且 $1 = \sum_{i=1}^n d_i^{-1}u_ia_is_i^{-1}v_i$。令 $d \in \mathcal{C}(S)$为各个d_i的公共左分母，则对于某些 $u_i' \in S$、 $1 \leq i \leq n$，有 $d = d\times 1 = \sum_{i=1}^n u_i'a_is_i^{-1}v_i$。现在对 A应用附加假设，存在 A中的左正则元 c_1、 $\ldots$、 c_n，满足 c_nu_n'， $c_{n-1}c_nu_{n-1}'$、 $\ldots$、 $c_1 \cdots c_nu_1' \in A$。但是，由于此外 d是较大环 S中的正则元，乘积 $c = c_1c_2 \cdots c_nd$必定是左 A-正则元，且现在属于 JQ。特别地，可得 $IJQ \supset Ic \neq 0$。因此 $IJ \neq 0$，且 A 是素环。命题得证。□

2.3. 说明一致维数的不变性或其失效的简单例子。

例 2.8. 固定 $1 \leq q \in \mathbb{N}$ 以及 R的中心中的两个 q-单位根 ε、 ε'。考虑斜多项式环 $\mathbb{S} = R[x, y][z; \alpha]$，其中 α是满足$\alpha(x) = \varepsilon y$与 $\alpha(y) = \varepsilon' x$的 R-环自同构；显然 α^{2q}是恒等映射。

由 x、 z 生成的子扩张 $A \subset \mathbb{S}$ 作为左 R-模是自由的，其左R-基是如下项的子集：

$$\mathsf{T} = \{x^m y^n z^p : m, n, p \in \mathbb{N} \text{ and, if } n \neq 0 \text{ then } p \neq 0\}.$$

环 A 不能表示为斜多项式环（即使允许无限变量集）。但有趣的是，项 $z^{2q} \in \mathsf{T}$ 是 $\mathbb{S}$ 中满足$z^{2q}\mathbb{S} \subset A$的中心元。因此 A 是 $\mathbb{S}$中的良好本质子环，特别地，命题 *2.6* 保证一致维数(A) =一致维数$(\mathbb{S})$。

例 2.9。 一个关于 R 的三元（半）素左 *Goldie* 分次斜多项式环，具有双射型，并含有一个幺半群 R-子环，该子环同构于自由非交换多项式环。

修改前面的例子，考虑分次 *Ore* 扩张 $\mathbb{S} = R[x, y][z; \alpha]$，其中这次 α 是 R- 环自同构，满足 $\alpha(x) = y$ 且 $\alpha(y) = x + y$。因此，我们知道 $\mathbb{S}$ 是（半）素左 *Goldie*，当且仅当系数 R 也是如此。令 $(a_n)_n$ 表示斐波那契数列，其中 $a_0 = 0$、 $a_1 = 1$，且对所有 $n \geq 1$ 都有 $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$，则有：

$$\alpha^n(x) = a_{n-1}x + a_ny \text{ and } \alpha^n(y) = \alpha^{n+1}(x) = a_nx + a_{n+1}y \text{ for } 1 \leq n \in \mathbb{N}.$$

很容易得出，只有当 R 具有非零特征时， α 才具有有限阶。假设 R 的特征为 0，并令 $u = xz$、 $v = x^2z$。

那么，项 u 和 v 属于由 $\mathbb{S}$ 的所有正则元构成的幺半群 $\mathcal{C}(\mathbb{S})$，因为变量 x、 y、 z 在 $\mathbb{S}$中都是正则的。我们断言，由 u 和 v 生成的子幺半群 $\Gamma = \langle u, v\rangle \subset \mathcal{C}(\mathbb{S})$是以两个非交换变量为字母的自由幺半群。事实上，给定任意一个长度为 k的词 $w = u_1u_2\cdots u_k$，其中对 $1 \le i \le k$有 $u_i \in \{u, v\}$，我们有： $deg_z(u_i) = 1$且 $deg_z(w) = k$；因此，字母表$\{u, v\}$中长度不同的两个词，在Γ中不可能相等。接下来， Γ 中恰有四个长度为 2 的不同元素：

$$u^2 = xyz^2,\ uv = xy^2z^2, vu = x^2yz^2 \text{ and } v^2 = x^2y^2z^2.$$

由 u 和 v 构成的三个长度为 8 的词在Γ中也两两不同：

$$\begin{aligned} u^3 &= xy(x+y)z^3, & v^3 &= x^2y^2(x+y)^2z^3;\\ u^2v &= xy(x+y)^2z^3, & v^2u &= x^2y^2(x+y)z^2\\ uvu &= xy^2(x+y)z^3, & vuv &= x^2y(x+y)^2z^3,\\ uv^2 &= xy^2(x+y)^2z^2, & vu^2 &= x^2y(x+y)z^3. \end{aligned}$$

令 Γ_α 为 $\mathcal{C}(\mathbb{S})$ 中由元素 $\alpha^n(x)\ \ 1 \le n \in \mathbb{N}$生成的子幺半群。对于任意一个长度为 k 的词 $w = u_1u_2\cdots u_k$，其中 $k \ge 3$和 u_1，……， $u_k \in \{u, v\}$，

存在某个 $\tau \in \Gamma_\alpha$，使得 $w = x\tau z^k$，如果 $u_1 = u$；或者 $w = x^2\tau z^k$，如果 $u_1 = v$。

此外，由于对于所有 $\tau \in \Gamma_\alpha$， $gcd(x, \tau) = 1$，结合上述观察以及字母表 $\{u, v\}$ 中已计算出的长度为 2 的词，可知对于所有 $k, l \in \mathbb{N}$ 和项 $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l \in \{u, v\}$，乘积 $u_1\cdots u_k$ 与 $v_1\cdots v_l$ 在 $\mathbb{S}$ 中相等，当且仅当对于所有 $1 \le i \le k$， $k = l$ 且 $u_i = v_i$。因此，子幺半群 $\Gamma = \langle u, v\rangle \subset \mathcal{C}(\mathbb{S})$ 是由两个非交换变量生成的自由幺半群。由此，幺半群子环 $R[u, v] = R\Gamma \subset \mathbb{S}$ 是二元自由非交换多项式环，并且具有无限左或右一致维数（即使环境环是（半）素左 *Goldie* 环）。

前例中的子环 $R[u, v]$ 是一个非常简单的幺半群R-子扩张示例，它由一组标准项生成，显然在 $\mathbb{S}$ 中不满足本质特殊条件（定义 4.7 中引入）。这表明第 4.3 小节的主要结果也是尖锐的。

对于 R 上的（半）素左 Goldie 注入型斜多项式环，构造具有无限一致维数的幺半群 R-子扩张甚至更加容易。

例 2.10。一族 R 上包含二元自由非交换多项式环的二元（半）素左 *Goldie* 注入型斜多项式环。

固定一个整数 $e \ge 2$，并考虑幺半群环 $\mathbb{S} = R\Gamma_e$，其中 $\Gamma_e = \langle x, y : yx = x^ey\rangle$是由两个生成元 x, y生成的自由幺半群对关系 $yx = x^ey$取商所得。或者， $\mathbb{S} = R[x, y;\ \alpha] = R[x][y;\ \alpha]$是分次斜多项式环，其中 $\alpha: R[x] \to R[x]$是具有 $\alpha(x) = x^e$的 R-环单射映射。因此，当系数环 R是半素左 *Goldie* 时，我们知道 $\mathbb{S}$ 是半素左 *Goldie*，并且udim$(\mathbb{S})$ = udim(R) [LM03, 定理 3.4、3.8]。

接下来，我们声称项 xy, x^2y 自由生成一个非交换子幺半群 $\langle xy, x^2y\rangle \subset \Gamma_e$。给定任意一个长度为 k 的词 $w = u_1 \cdots u_k$，其中 $u_1 \dots u_k \in \{xy, x^2y\}$，注意到 $deg_y(u_i) = 1$ 且 $deg_y(w) = k$，因此，字母表 $\{xy, x^2y\}$ 中长度不同的两个词不可能作为 Γ_e 的元素相等。接下来，$deg_x(w) \equiv deg_x(u_1) \bmod e$（而 $1 = deg_x(xy) \neq deg_x(x^2y) = 2$）。这两个观察表明，对于所有 $k, l \in \mathbb{N}$ 以及项 $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l \in \{xy, x^2y\}$，乘积 $u_1 \cdots u_k$ 和 $v_1 \cdots v_l$ 在 Γ_e 中相等，当且仅当对所有 $1 \leq i \leq k$，$k = l$ 和 $u_i = v_i$；由此得到我们的断言。因此，幺半群子环 $R[xy, x^2y] \subset R\Gamma_e$ 是 R 上的二元自由非交换多项式环；而 $R[xy, x^2y]$ 具有无限左或右一致维数。

3. 斜 Laurent 多项式环中的子扩张

我们固定一个环境斜 Laurent 多项式环 $R[X^{\pm 1}; \boldsymbol{\alpha}]$，并始终假设它是双射型；此处 X 是 R 上的任意非空自由交换变量集合，$X^{\pm 1} = X \cup X^{-1}$ 满足 $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$。

对每个 $x \in X$，相应的共轭映射 $\alpha_x : R \xrightarrow{\sim} R$ 是一个环自同构，满足 $xa = \alpha(a)x$ 且 $x^{-1}a = \alpha_x^{-1}(a)x^{-1}$，对所有 $a \in R$ 均成立。对每个满足 $n \in \mathbb{N}, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ 且 $x_1, \dots x_n \in X$ 的 $\lambda = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$，相应的共轭映射是复合自同构

$$\alpha_\lambda = \alpha_{x_1}^{k_1} \cdots \alpha_{x_n}^{k_n} : R \xrightarrow{\sim} R.$$

斜 Laurent 多项式环 $R[X^{\pm 1}; \boldsymbol{\alpha}]$ 也可称为 X 上的 R 关于自由阿贝尔群 $\mathcal{T}(X^{\pm 1})$ 的斜幺半群环扩张：

$$\mathcal{T}(X^{\pm 1}) = \{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \text{ and } x_1, \dots, x_n \in X\}.$$

因此，$R[X^{\pm 1}; \boldsymbol{\alpha}]$（由来自 $\mathbb{T}(X^{\pm 1})$ 的一族项在 R 上生成）的子扩张，恰好是由自由阿贝尔群中的子幺半群 T 扩张 R 所得的斜幺半群环扩张。每个双射型且变量交换的斜多项式环都嵌入某个斜 Laurent 多项式环；见下文命题 3.2。

为了研究 $R[X^{\pm 1}; \boldsymbol{\alpha}]$ 中的左奇异理想及子扩张的半素性，有必要考虑 X 上的良序‘$\leq$’，这总是可行的（至少可由选择公理保证）。然后，通过对所有变量 x，$y \in X$（满足 $x < y$）设定 $y^{-1} < x^{-1}$，将其扩展为 $X^{\pm 1}$ 上的线性序。$\mathcal{T}(X^{\pm 1})$ 上诱导的反字典序定义如下。对每个自然数 $n \geq 1$ 以及每个由变量 $x_1 < \cdots < x_n$（属于 $(X, \leq)$）构成的 n-子集或 n-元组 $\boldsymbol{x}$，对于所有 n-元组 $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_n)$ $\boldsymbol{k'} = (k'_1, \dots, k'_n) \in \mathbb{Z}^n$，令 $\boldsymbol{x^k} = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$，则有：

$$\boldsymbol{x^k} < \boldsymbol{x^{k'}} \iff \exists j \in [\![1, n]\!],\ k_j < k'_j \text{ and } k_i = k'_i \text{ for } j < i \leq n.$$

我们得到一个相应的首项函数 $\mathrm{T} : R[X^{\pm 1}; \boldsymbol{\alpha}]\mathcal{T}(X^{\pm 1})$，其中对于每个 $f = a_1\tau_1 + \cdots + a_p\tau_p$ 满足 $1 \leq p \in \mathbb{N}, 0 \neq a_1, \dots, a_p \in R$ 且 $\tau_1 < \cdots < \tau_p$ 属于 $\mathcal{T}(X^{\pm 1})$ 的情形，我们令 $\mathrm{T}(f) = \tau_p$，其相应的首项系数为 $\mathrm{lc}(f) = a_p$。为方便起见，我们通常令：$\mathrm{lc}(0) = 0 = \mathrm{T}(0)$，并且对所有 $\mathcal{T}(X^{\pm 1})$ 都有 $0 < \tau$。

注 3.1. 我们得到一个线性有序自由阿贝尔群$(\mathcal{T}(X^{\pm 1}) \leq)$：$\mathcal{T}(X^{\pm 1})$ 上的线性序与乘法相容，具体来说，

$$for\ all\ \lambda, \tau, \tau' \in \mathcal{T}(X^{\pm 1}),\ if\ \tau < \tau'\ then\ \lambda\tau < \lambda\tau'.$$

因此，首项函数 $T:\ R[X^{\pm 1};\ \alpha]\ T\ (X^{\pm 1})$ 是 $R[X^{\pm 1};\ \alpha]$ 上的伪赋值；更确切地说，对所有 $0 \neq f, g \in R[T\ \alpha]$，都有$fg = lc(f)^{\alpha_{\Gamma}(f)}\ (lc(g))T(f)T(g)\ + h$，其中某个多项式 h满足 $T(h)\ < T(f)T(g)$。

我们将幺半群 Γ 中的左正规元素 定义为任意满足 $v\Gamma \subset \Gamma v$的 $v \in \Gamma$。下面给出一个应当是众所周知的命题。

命题 3.2. 设 $S = R[\Gamma; \alpha]$ 是一个单射型斜幺半群环。

(a) 若 Γ 是左消去或右消去的，则每个 $\lambda \in \Gamma$ 作为 S的元素都是左正则（或分别为右正则）的。

(b)假设 Γ 是消去的。那么，Γ 中左正规项构成的子集 Z 是 S 的正则元左 *Ore* 集。若对 $v \in Z$ 中的每个元素而言，共轭映射 α_v 都是双射，则左分式环 $Z^{-1}S$是斜幺半群环 $R[G;\ \alpha]$，其中$G = Z^{-1}\Gamma = \{v^{-1}\lambda : (v, \lambda) \in Z \times \Gamma\}$，且对所有$(v, \lambda) \in Z \times \Gamma$，有 $\alpha_{v^{-1}\lambda} = \alpha_v^{-1} \circ \alpha_\lambda$。

证明。 命题的 (a) 部分通过直接验证即可轻松得出。接下来考虑 (b) 部分，假设 Γ 是消去的。由 (a) 可立即得出，Γ 的每个元素作为 $S = R[\Gamma$ 的元素都是正则的；$\alpha]$。令 Z 为 Γ 中所有左正规元素组成的集合，并注意到 Z 在乘法下已封闭。显然，对每个 $v \in Z$ 和 $f \in S$，存在某个 $f, \in S$，使得 $vf = f,$ $v \in Sv \cap Zf$。由此可知，Z 是 S 的正则元左 Ore 集；特别地，可以构造左分式环 $Z^{-1}S$。为证明 (b) 中的最后一个结论，现在假设对每个 $v \in Z$，共轭映射 α_v：$R \to R$ 都是双射。给定每个 $v \in Z$，对于每个项 $\lambda \in \Gamma$，都存在唯一的项 λ_v 使得 $v\lambda = \lambda_v v$；对于每个标量 $a \in R$，有 $va = \alpha_v(a)v$。特别地，在 $Z^{-1}S$ 中有：

$$\lambda v^{-1} = v^{-1}\lambda_v \text{ and } v^{-1}a = \alpha_v^{-1}(a)v^{-1} \text{ for all } a \in R.$$

我们在 $Z^{-1}S$ 中得到一个子幺半群 $G = Z^{-1}\Gamma = \{v^{-1}\lambda : (v, \lambda) \in Z \times \Gamma\}$，它包含 Γ 作为子幺半群；而 G 是 $Z^{-1}S$的左 R-生成集。为完成证明，还需证明 G 自由生成左 R-模 $Z^{-1}S$。因此，设 $f = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i^{-1}\lambda_i = 0$ 满足 $0 \neq n \in \mathbb{N}$、$a \in R$，且 $(v_i, \lambda_i) \in Z \times \Gamma$，其中各个 $v_i^{-1}\lambda_i$ 都是 $Z^{-1}S$ 中两两不同的元素。我们必须验证所有 a_i 均为零。由于 Z 由 Γ 的左正规元素组成，乘积项 $v = v_1 \cdots v_n$ 显然可作为各个 $v_i^{-1}\lambda_i$ 的公共左分母，因此有：$v \cdot v_i^{-1}\lambda_i = \lambda_i'$，其中某些 $\lambda_i' \in \Gamma$、$1 \leq i \leq n$ 两两不同。由此可得：$0 = vf = \sum_{i=1}^{n} \alpha_v(a_i)\lambda_i'$，这表明 $\alpha_v(a_i) = 0$，且对所有 i 均有 $a_i = 0$。因此，G 是 $Z^{-1}S$ 的左 R-基，后者可表示为斜幺半群环 $R[G;\ \alpha]$。□

定理 *3.3.* 设 $A = R[T;\ \alpha]$ 为 R 上双射型斜 *Laurent* 多项式环中的任意子扩张。则 T 是 A的分母集，相伴的分式环是双射型斜 *Laurent* 多项式环 $\mathbb{S} = R[X^{\pm 1};\ \alpha]$，并且一致维数$(A)$ =一致维数$(\mathbb{S})$ =一致维数$(R[X;\ \alpha])$，$\zeta(A) = \zeta(R)T$。若 R具有足够多的一致左理想，则 A 亦然，并且一致维数(A) =一致维数(R)。

证明。鉴于主理想整环上自由模的结构定理 [Hun74, Thm IV. 6.1], , 自由阿贝尔群中的每个子群仍是自由阿贝尔群。由 $A = R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$ 的定义可知, T 是某个自由阿贝尔群中的子幺半群。因此我们可以构造一个以 T 为子幺半群的自由阿贝尔群 G, 使得 $G = \mathrm{T}\mathrm{T}^{-1} = \{\lambda\tau^{-1}:\ \lambda, \tau \in \mathrm{T}\}$, 并可令 $\boldsymbol{X}$为 G 的一个基。可以把 $\boldsymbol{X}$仅仅视为 R 上的一组自由交换变量, 并记作 $G = \mathrm{T}(\boldsymbol{X}^{\pm 1})$。自然地设定 $\alpha_{\lambda\tau^{-1}} = \alpha_\lambda \alpha_\tau^{-1}$, 对所有 $\lambda, \tau \in \mathrm{T}$, 现在便可构造双射型且具有交换变量的分次斜多项式环 $S = R[\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{\alpha}]$; 回想 S 的一个自然双边 R-基由（标准）项的集合$\mathbb{T}(\boldsymbol{X})$给出。同样, 我们得到双射型斜 Laurent 多项式环 $\mathbb{S} = R[\boldsymbol{X}^{\pm 1};\ \boldsymbol{\alpha}]$。显然, 正如命题 3.2 所阐明的, $\mathbb{S}$既是 $S = R[\boldsymbol{X};\ \boldsymbol{\alpha}]$ 关于 $\boldsymbol{X}$ 的分式环, 也是环 $A = R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$关于 T 的分式环（因为 $G = \mathrm{T}(\boldsymbol{X}^{\pm 1}) = \mathrm{T}\mathrm{T}^{-1}$）。特别地, 环 S 与 A 都是 $\mathbb{S}$中的良好本质子扩张; 更确切地说,

> 对于有限子集 $Y \subset \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$ 和 $Z \subset \mathrm{T}$, 存在项 $\lambda \in \mathrm{T}$ 和 $\tau \in \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$ 使得 $\lambda Y \subset \mathrm{T}$ 和 $\tau Z \subset \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$。

于是, 命题 2.6 表明, 一致维数(A) =一致维数$(\mathbb{S})$ =一致维数(S),$\zeta(A) = A \cap \zeta(\mathbb{S})$ 且 $\zeta(S) = S \cap \zeta(\mathbb{S})$。

接下来, 我们将证明 $\zeta(S) = \zeta(R) \cdot \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$, 并推导出关于 A 的类似公式。证明与经典情形类似, 即在任意一组交换变量上的多项式环。对于每个有限子集 $\boldsymbol{X}_\prime \subset \boldsymbol{X}$, 记 $S_{\boldsymbol{X}'} = R[\boldsymbol{X}_\prime;\ \boldsymbol{\alpha}]$表示由 $\boldsymbol{X}'$ 中的变量在 R 上生成的 S 的斜多项式子扩张。经典结果 [Mat95, 定理 2.7] 已经表明: 如果 L 是 R 中的一致左理想或本质左理想, 那么左理想 $S_{\boldsymbol{X}'}L$ 也是 $S_{\boldsymbol{X}'}$ 中的一致左理想或本质左理想。由于 S 显然是由斜多项式子环 $S_{\boldsymbol{X}'}$ 的并构成, 其中 $\boldsymbol{X}'$ 遍历 $\boldsymbol{X}$ 中所有有限子集, 因此仍有:

> 如果 L 是 R 中的一致左理想或本质左理想, 那么左理想 SL 也是如此在 S 中。根据命题 2.6, 对于 $\mathbb{S} = R[\boldsymbol{X}^{\pm 1}$ 同样成立; $\boldsymbol{\alpha}]$ 和 A.

由此立即得到 $\zeta(R)\mathbb{T}(\boldsymbol{X}) \subset \zeta(S)$ 以及 $\zeta(R)\mathrm{T} \subset \zeta(A)$。反设 $\zeta(S)$ 不包含于 $\zeta(R) \cdot \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$, 则可构造一个多项式 $h \in \zeta(S)$, 使得 $h \notin \zeta(R) \cdot \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$。根据注 3.1, 自由交换幺半群 $(\mathbb{T}(\boldsymbol{X}), \cdot)$ 具有如下线性序: 对所有 $0 \neq f, g \in S$, 都有 $fg = \mathrm{lc}(f)\alpha_{\mathrm{T}(f)}(\mathrm{lc}(g))\mathrm{T}(f)\mathrm{T}(g) + w$对于某个多项式 w, 满足 $\mathrm{T}(w) < \mathrm{T}(f)\mathrm{T}(g)$。因此, 我们可以令 $\lambda = \mathrm{T}(h) \in \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$, 且 $a = \mathrm{lc}(h)$。由于 $a \notin \zeta(R)$, 取非零的 $b \in R$, 使得 $Rb \cap \mathfrak{a}_R(a) = 0$。我们断言 $Sb \cap \mathfrak{a}_S(h) = 0$, 这将与 h 位于 $\zeta(S)$ 中这一事实产生矛盾。令 $f = a_1\tau_1 + \cdots + a_p\tau_p$, 其中 $1 \leq p \in \mathbb{N}, 0 \neq a_1, \ldots, a_p \in R$, 且 $\tau_1 < \cdots < \tau_p$ 属于 $\mathbb{T}(\boldsymbol{X})$, 并满足 $fbh = 0$。那么必有 $a_p\alpha_{\tau_p}(ba) = 0$, 即 $\alpha_{\tau_p}^{-1}(a_p)ba = 0$, 从而推出 $\alpha_{\tau_p}^{-1}(a_p)b = 0$。因此, $a_p\tau_p b = 0$ 且 $(f - a_p\tau_p)b = 0$, 于是归纳可得, 对所有 $i \in [\![1, p]\!]$ 和 $fb = 0$, 都有 $a_i\tau_i b = 0$。这就证明了我们的断言, 即 $Sb \cap \mathfrak{a}_S(h) = 0$, 并与 h 属于 $\zeta(S)$ 这一事实产生所需的矛盾。因此, $\zeta(S) \subset \zeta(R)\mathbb{T}(\boldsymbol{X})$, 从而得到 $\zeta(S) = \zeta(R)\mathbb{T}(\boldsymbol{X})$。但是, 对于所有满足 $(a_i, \tau_i) \in R \times \mathrm{T}$ 的 $f = a_1\tau_1 + \cdots + a_p\tau_p \in \zeta(A)$, 存在某个项 $\lambda \in \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$, 使得对所有 $i \in$ 都有 $\lambda\tau_i \in \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$

$[\![1,\ p]\!]$。因此，鉴于 $\zeta(A) = A \cap \zeta(\mathbb{S})$，而 $\zeta(S) = S \cap \zeta(\mathbb{S})$，我们得到 $\lambda f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_\lambda(a_i)\lambda\tau_i \in S \cap \zeta(\mathbb{S}) = \zeta(S) = \zeta(R)\mathbb{T}(X)$，所以对于所有$i \in [\![1,\ p]\!]$，$\alpha_\lambda(a_i) \in \zeta(R)$ 且 $a_i \in \zeta(R)$，因为 α_λ 是 R 的自同构。因此，等式 $\zeta(A) = \zeta(R)\mathrm{T}$ 也成立。

最后，在附加假设 R 具有足够多的一致左理想的条件下，我们将证明 A 同样如此，并且一致维数(A) = 一致维数(R)。由于 T 是 A的双侧 R-基， R中左理想的每一个直和 $\oplus_{i\in I}L_i$都可扩张为 A中左理想的直和 $\oplus_{i\in I}\mathrm{T}L_i$。此外，已经得到（如上文所示），若 L 是 R中的一致左理想或本质左理想，则 A中的左理想 AL 亦然。因此，命题 2.4 保证一致维数(A) = 一致维数(R)，且 A 具有足够多的一致左理想，从而完成该定理的证明。□

命题 3.4. 设 $A = R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$ 是 R上单射型斜洛朗多项式环的任意子扩张。假设 R 满足左湮灭子升链条件。则若 R 是（半）素的，则 A亦然。

证明。 借助注 3.1，T 被赋予一个线性序，且首项函数 $\mathbf{T}:\ R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]\mathrm{T}$ 是 $R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$ 上的一个伪赋值。更精确地说，对所有 $0 \neq f,\ g \in R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$，其中 $\lambda = \mathbf{T}(f)$ 且 $\tau = \mathbf{T}(g)$，我们有：$fg = \mathrm{lc}(f)\alpha_\lambda(\mathrm{lc}(g))\lambda\tau + w$对某个 $w \in R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$，满足 $\mathbf{T}(w) < \mathbf{T}(f)\mathbf{T}(g)$。基于这些事实，该命题的证明通过完全重复 [LM03 中命题 3.6] 在单变量情形下的同样论证而继续。□

定理 3.5。 设 $A = R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$ 为（半）素环 R 上的双射型斜 *Laurent* 多项式环中的任意子扩张。则系数环 R 为左 *Goldie* 当且仅当 A亦然，此时 A 也是（半）素的，且 一致维数(A) =一致维数(R)。

证明。 回顾一下，在具有有限一致维数的环中，每个非零左理想都总是包含一个一致左理想。根据 Goldie 定理 [MR87, 2.3.6], ，半素左 Goldie 环是一个具有有限一致维数且具有零左奇异理想的半素环。因此，如果 R 是一个（半）素左 Goldie 环，那么定理 3.3 与命题 3.4 表明，环 $A = R[\mathrm{T};\ \boldsymbol{\alpha}]$ 也是（半）素左 Goldie 环，并且 $\mathrm{udim}(R) = \mathrm{udim}(A)$。反之，假设 A 是左 Goldie 的。由于每个左理想的直和 $\oplus_{i\in I}L_i$已经会在 R中产生左理想的直和 $\oplus_{i\in I}\mathrm{T}L_i$，因此我们得到 $\mathrm{udim}(R) \leq \mathrm{udim}(A)$。但是作为子环，$R$ 已经从 A 的左湮灭子上的升链条件 继承了该条件。因此R 是左 Goldie 的，从而根据定理 3.3，有 $\mathrm{udim}(R) = \mathrm{udim}(A)$。□

4. 斜多项式环中的本质特殊子扩张

下文中， $\mathbb{S}$ 是一个双射型环境斜多项式环。

4.1. 斜多项式环与 nice多项式。有必要重新审视以任意良序变量集为变量的斜多项式环。令$\boldsymbol{X} = \{x_s:\ s \in \mathfrak{n}\}$由某个不一定有限的序数 $\mathfrak{n}$编索引； $\boldsymbol{X}$ 上的良序由序数 $\mathfrak{n}$上的良序诱导。提醒读者，所有序数的类具有一个良序“$\leq$”，满足：

$$\kappa < \eta \text{ if and only if } \kappa \in \eta \text{ for all ordinals } \kappa, \eta.$$

我们有以下一组标准项，以及每个序数 $\kappa \leq \mathfrak{n}$对应的截断子集：

$$\begin{aligned} &\mathbb{T} = \mathbb{T}(\boldsymbol{X}) = \{x_{s_1} \cdots x_{s_n} \,:\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n < \mathfrak{n}\}; \\ &\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}(\boldsymbol{X}_\kappa) \text{ with } \boldsymbol{X}_\kappa = \{x_s \,:\, s \in \kappa\} \subset \boldsymbol{X};\ \text{thus } \mathbb{T}_{\mathfrak{n}} = \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

斜多项式环 $\mathbb{S} = R[\boldsymbol{X};\, \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\delta}]$及其截断子扩张 $\mathbb{S}_\kappa$（对于序数 $\kappa \leq \mathfrak{n}$）按如下方式归纳描述。

❍ $\mathbb{S}_\kappa = R\mathbb{T}_\kappa$是以 $\mathbb{T}_\kappa$; $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\mathfrak{n}}$ 为基的自由左 R-模。作为环，对于有限序数 $\kappa = \{0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ k\}$，$\mathbb{S}_\kappa = R[x_0;\, \alpha_0,\ \delta_0,\ \ldots\ldots,\ x_k;\, \alpha_k,\ \delta_k]$是 R 的通常迭代 Ore 扩张，且 $\mathbb{S}_0 = R$。

❍设 $\kappa < \mathfrak{n}$ 是任意序数，并假设我们已定义截断斜多项式子扩张 $\mathbb{S}_\kappa = R\mathbb{T}_\kappa = R[\boldsymbol{X}_\kappa;\, \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\delta}]$ 的乘法。则$\mathbb{S}_{\kappa+1} = \mathbb{S}_\kappa[x_\kappa;\, \alpha_\kappa,\ \delta_\kappa]$是 $\mathbb{S}_\kappa$ 的一元斜多项式环扩张，其中共轭映射 $\alpha_\kappa : \mathbb{S}_\kappa \to \mathbb{S}_\kappa$ 是 $\mathbb{S}_\kappa$ 的端同态，而δ_κ; $\mathbb{S}_\kappa \to \mathbb{S}_\kappa$是一个 α_κ-导子。

❍于是我们注意到，对于极限序数 $\mathfrak{n}$，$\mathbb{S}$ 以及任意子环 $A \subset \mathbb{S}$ 均可表示为截断子环的递增并：$\mathbb{S} = \cup_{\kappa \in \mathfrak{n}} \mathbb{S}_\kappa$与 $A = \cup_{\kappa \in \mathfrak{n}} A_\kappa$，其中对 $\kappa \in \mathfrak{n}$有 $A_\kappa = A \cap \mathbb{S}_\kappa$。

注 4.1. 对每个 $\kappa \in \mathfrak{n}$，相应的共轭映射与导子映射被适当地延拓为映射 α_κ、δ_κ：$\mathbb{S} \to \mathbb{S}$，它们定义在整个 $\mathbb{S}$上，其中 α_κ是$\mathbb{S}$的环端同态，δ_κ 是 α_κ-导子，使得：

$$\alpha_\kappa(\tau) = \tau \text{ and } \delta_\kappa(\tau) = 0 \text{ for every } \tau \in \mathbb{T}(x_\eta \,:\, \kappa \leq \eta \in \mathfrak{n}).$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及每一个标准项 $\lambda = x_{s_1} \cdots x_{s_n}$（满足 $s_1 \leq \cdots \leq s_n < \mathfrak{n}$），我们同样使用另一种记号：

$$\alpha_\lambda = \alpha_{s_1} \circ \cdots \circ \alpha_{s_n}.$$

我们的主要假设指出：斜多项式环 $\mathbb{S}$ 为双射型，也就是说，对 $\kappa \in \mathfrak{n}$ 而言，每个共轭映射 α_κ 都是自同构。特别地，每个集合 $\mathbb{T}(x_\kappa) = \{x_\kappa^m :\ m \in \mathbb{N}\}$既是 $\mathbb{S}_{\kappa+1}$的左 $\mathbb{S}_\kappa$-基，也是右 $\mathbb{S}_\kappa$-基。

命题 4.2。设 A 是 $\mathbb{S}$ 中的任意子环。则 R 中左理想的每个直和 $\oplus_{i \in I} L_i$ 都产生 A 中左理想的直和 $\oplus_{i \in I}$（$A \cap AL_i$）。

证明. 我们首先证明当 $A = \mathbb{S}$时的命题。显然，通过对指标序数 $\mathfrak{n}$进行（超限）归纳法，基础情形为空，而极限序数情形是直接的（因为在此情形下 $\mathbb{S}$ 作为截断斜多项式环的递增并出现）。现在转向 $\mathfrak{n} = \kappa + 1$ 为后继序数的情形，并设 $\oplus_{i \in I} L_i$为 R中左理想的直和。归纳假设保证和 $\sum_{i \in I} \mathbb{S}_\kappa L_i$是直和，且对所有 $i \in I$有 $\mathbb{S}\mathbb{S}_\kappa L_i = \mathbb{S}L_i$。但随后，一元项的集合 $\mathbb{T}(x_\kappa) = \{x_\kappa^n :\ n \in \mathbb{N}\}$ 也是一元斜多项式环 $\mathbb{S} = \mathbb{S}_\kappa[x_\kappa$的右 $\mathbb{S}_\kappa$-基；$\alpha_\kappa, \delta_\kappa]$从而和$\sum_{i \in I} \mathbb{S}L_i$ 仍是 $\mathbb{S}$中左理想的直和。因此该命题对$A = \mathbb{S}$得证。对于一般子环 $A \subset \mathbb{S}$，由于每个 $A \cap AL_i$ 对所有 $i \in I$都是$\mathbb{S}L_i$中的左 A-子模，和 $\sum_{i \in I}(A \cap AL_i)$同样是直和。□

我们将在标准项上考虑由 $\boldsymbol{X}$ 上的良序诱导并按如下方式归纳定义的反字典序‘$\leq_{\mathbf{revlex}}$’。对所有$\kappa \in \mathfrak{n}$以及 $x = x_\kappa \in \boldsymbol{X}, \lambda, \tau \in \mathbb{T}_\kappa$和 $k, l \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\lambda x^k <_{\mathbf{revlex}} \tau x^l \iff k < l \text{ or } k = l \text{ and } \lambda <_{\mathbf{revlex}} \tau.$$

我们继续将此排序简记为‘$\leq$’。正如下一个技术性引理所证实的，这样我们便在 $\mathbb{T}$ 上得到一个良序。因此，存在一个诱导的首项函数 $\mathbf{T}: \mathbb{S} \to \mathbb{T} \cup \{0\}$：对于每个非零多项式$f = a_1\tau_1 + \cdots + a_m\tau_m$，其中 $0 \neq m \in \mathbb{N}, 0 \neq a_1, \ldots, a_m \in R$，且项 $\tau_1 > \cdots > \tau_m$ 属于 $\mathbb{T}$，有 $\mathbf{T}(f) = \tau_1$；f 的首项系数为 $\mathbf{lc}(f) = a_1$。为方便起见，规定 $\mathbf{T}(0) = 0 = \mathbf{lc}(0)$，并且对每个 $\lambda \in \mathbb{T}$，$0 < \lambda$。

引理 4.3. 标准项的集合 $\mathbb{T}$ 在由 $\boldsymbol{X}$ 上的良序所诱导的反字典序下是良序的。

证明。 假定非平凡情形，即 $\boldsymbol{X}$ 非空。我们通过对良序集（或者，若愿意，对序数）作（超限）归纳法来论证。若 $\boldsymbol{X}$ 仅有一个变量（即若 $\mathfrak{n}$ 为序数“1”），则所求结果是显然的。设 $\boldsymbol{X}$ 不是单元素集，且该结果对 $\boldsymbol{X}$中所有真良序子集成立。设 Σ为 $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\boldsymbol{X})$的一个非空子集，其“首变量”集合为 $\mathrm{Lvar}(\Sigma) = \{x \in \boldsymbol{X}: \Sigma \cap \mathbb{T}(\boldsymbol{X}_{\leq x})x \neq \varnothing\}$，其中对每个序数$s \in \mathfrak{n}$，我们有截断子集 $\boldsymbol{X}_{<x_s} = \boldsymbol{X}_s = \{z \in \boldsymbol{X}: z < x_s\}$与$\boldsymbol{X}_{\leq x_s} = \boldsymbol{X}_{s+1} = \{z \in \boldsymbol{X}: z \leq x_s\}$。由 $\boldsymbol{X}$与 $\mathbb{N}$的良序原理，可令 y 为 $\mathrm{Lvar}(\Sigma)$中的最小变量，并令 m 为满足 $\Sigma \cap \mathbb{T}(\boldsymbol{X}_{<y})y^m \neq \varnothing$的最小正整数。然后，构造非空子集$\Sigma' = \{\lambda \in \mathbb{T}(\boldsymbol{X}_{<y}): \lambda y^m \in \Sigma\}$。由归纳假设，$\Sigma'$ 含有一个最小项，记为 λ。$\mathbb{T}$ 上反字典序的归纳定义立即表明，项 λy^m 是 Σ中的最小项。□

在实现本节主要目标的过程中，最困难且重要的一步出现在指标序数为后继序数时。因此，从现在起，我们令 $\mathcal{S} = S[x; \alpha, \delta]$为一个定义在 R-环 S 上的双射型一元斜多项式环，其中 S 表示一个双射型多元斜多项式环的特化子扩张。作为一项基本假设，

S必须作为左 R-模为自由模，其基记为 $\mathbb{T}_S$。因此，集合 $\mathbb{T}_S\mathbb{T}(x) = \{\lambda x^n: \lambda \in \mathbb{T}_S$和 $n \in \mathbb{N}\}$是 $\mathcal{S}$的左 R-基。我们将 $\mathbb{T}_S\mathbb{T}(x)$ 的元素视为“项”，并将 $\mathcal{S}$ 看作一个“类多项式”环。

现在，我们继续回顾一些有助于研究类多项式环的一致维数的关键策略。为此，有必要适当地回顾“nice多项式”的概念，并收集一些关于它们的重要技术事实。

定义 4.4. </style}所谓-良好元素 </style}，是指中的任意非零，其在中的系数具有共同的左-湮灭子。因此，满足，且各两两不同，并且对所有,,，都有$\mathbf{a}_R(a_i) = a_R(a_j)$ </style}。我们也称集合系数 $(f) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ *</style}*为 R-良好*</style}*。

我们从以下 firstkey 引理开始；就本文的框架而言，该引理涵盖并推广了 [Sho72 的引理 2.1 和命题 2.2]。

引理 4.5. 设 L 是 R 的任一本质左理想，且 $E \subset R$ 是任意有限子集，其中$E\backslash\{0\}$ 非空。那么对适当的 $c \in R$， $cE\backslash\{0\}$ 是L的一个非空 R-*nice* 子集。此外，若 E 含有某个元素 a，满足 $a_R(a) \subset a_R(E)$，则可选择 $c \in R$ 使得 $a_R(cE) = a_R(ca)$。

证明。首先处理引理的主要部分，并从 E 含有某个元素 a且满足 $\mathfrak{a}_R(a) \subset \mathfrak{a}_R(E) = \cap_{x\in E}\mathfrak{a}_R(x)$ 的情形入手。我们将证明存在某个$c \in R$，使得 $cE \neq \{0\}$、 $cE\backslash\{0\}$ 是 R-nice，且 $\mathfrak{a}_R(cE) = \mathfrak{a}_R(ca)$。对 E中非零元素的个数作归纳；由于基础情形显然成立，我们可进一步假设存在某个 $0 \neq b \in E$，满足 $\mathfrak{a}_R(b) \neq \mathfrak{a}_R(a)$。于是取某个 $c_1 \in$，使得 $\mathfrak{a}_R(b)\backslash\mathfrak{a}_R(a)$；则 c_1E 的非零元素个数少于 E，$0 \neq c_1a \in c_1E$且 $\mathfrak{a}_R(c_1a) \subset \mathfrak{a}_R(c_1E)$。因此根据归纳法，存在某个 $c_2 \in R$，使得 $c_2 \cdot (c_1a) \neq 0$，且 $\mathfrak{a}_R(c_2c_1a)$ 是 c_2c_1E中每个非零元素的左湮灭子，证毕。接下来，若 E 不含任何元素，其在 R 中的左湮灭子包含于 R中 E 的左湮灭子，则只需重复前述论证（但不涉及 a），即可证明对适当的 $c \in R$， $cE\backslash\{0\}$ 是一个非空的 R-nice 子集。

为完成引理主要部分的证明，令 $E = \{a_1, \ldots\ldots, a_n\} \subset R\backslash\{0\}$ 为 R-良好的，我们必须验证存在某个 $c \in R$ 满足 $0 \notin cE \subset L$（因为cE 显然仍然是 R-良好的）。由于根据假设， L 是 R中的本质左理想，而 a_i's 在 R 中具有公共左湮灭子，归纳地存在标量$c_1, \ldots\ldots, c_n$，使得 $0 \neq c_1a_1 \in L$， $0 \neq c_2c_1a_2 \in L$, $\ldots\ldots$， $0 \neq (c_n \cdots c_1)a_n \in L$。于是令$c = c_n \cdots c_1$，即可得到所需结果。□

我们给出 R-良好多元多项式的左湮灭子的如下刻画。

命题 *4.6*。设 $0 \neq g \in \mathcal{S} = S[x; \alpha, \delta]$ 和 $p = lc_S(g)$；假设 p 是 R-良好的，并且 $a_R(p) = a_R(g)$，只要 g 是 R-良好的，该条件就成立。则当 $a_S(p) = Sa_R(p)$ 时，有 $a_S(g) = \mathcal{S}a_R(g)$。特别地，对于每个 R- 良好多项式 $g \in \mathbb{S}$，均有 $a_{\mathbb{S}}(g) = \mathbb{S}a_R(g)$。

证明。 命题的第一个断言的证明仿照一元类比 [Mat95，引理 1.1] 中的相同论证。第二个断言的证明对指标序数 $\mathfrak{n}$进行（超限）归纳，这实质上归结为后继序数的情形。为清楚起见，我们给出所需的论证。设 $g \in \mathbb{S}$ 是 R-nice。归纳的基始情形是平凡的。如果 $\mathfrak{n}$ 是极限序数，且结果对所有序数 $\kappa < \mathfrak{n}$都成立，那么 $\mathbb{S}$ 是截断斜多项式子环 $\mathbb{S}_\kappa$ 的递增并，其中 $\kappa < \mathfrak{n}$，由归纳假设可得 $a_{\mathbb{S}}(g) = \cup_{\kappa<\mathfrak{n}}a_{\mathbb{S}_\kappa}(g) = \cup_{\kappa<\mathfrak{n}}\mathbb{S}_\kappa a_R(g) = \mathbb{S}a_R(g)$。现在，$\mathfrak{n} = \kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\}$为后继序数的情形已由第一个断言处理完毕，从而完成命题的证明。□

4.2. **本质特殊子扩张与具有预定次数的nice多项式**。值得回顾的是，根据 [Mat95]，确保一元斜多项式环 $B = R[t;\ \sigma,\ \vartheta]$ 的一致维数不变性的自然要求，等价于如下条件：对于每个非零标量 $a \in R$，每个 Ba 都包含一个次数为一的一元 R-nice多项式。让我们考察 R-子扩张 $A \subset \mathcal{S} = S[x, \alpha, \delta]$ 所满足的这一要求。根据假设，α是双射型的；但在此处 α 的单射性就足够了。若存在 $f \in A$，使得 $\deg_x(f) = n$，我们称 $n \in \mathbb{N}$ 为可达的 x-次数，位于 A 中。我们定义：

$$\begin{aligned} \mathrm{Deg}_x(A) &= \{n \in \mathbb{N} :\ n \text{ is an attainable } x\text{-degree in } A\} \text{ and,} \\ \mathrm{d}_A &= \gcd(\mathrm{Deg}_x(A)\backslash\{0\}) \text{ if } A \subsetneq S; \text{ otherwise, } \mathrm{d}_A(x) = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

显然，$0 \in \mathrm{Deg}_x(A) \subset \mathrm{d}_A\mathbb{N}$。如果 d_A 尚未成为 A 中可达到的次数，那么就会存在某个 $0 \neq n,\ e \in \mathbb{N}$，使得 $n,\ n+e \in \mathrm{Deg}_x(A)$，但 $e \notin \mathrm{Deg}_x(A)$；而给定一个 R-良好的多项式 $f \in A$，满足 $n = \deg_x(f)$，Af便不可能包含任何次数为 x 的多项式。如此怪异的情形必然会妨碍人们采用研究斜多项式环一致维数所必需的经典策略。为解决最后一个问题，我们将 ~嵌入另一个子扩张 $A \subset \mathcal{S}$，在其中可达到次数的跳跃消失，同时 A 与 A 仍足够接近，从而保证一致维数的不变性。

由此我们得到斜多项式环中的以下一类特殊化子扩张。这里回顾一下，对于任意环 A，有

$$\mathcal{C}(A) = \{u \in A :\ u \text{ is a regular element}\}.$$

定义 4.7. (a) 我们将一元斜多项式环 $\mathcal{S} = S[x;\ \alpha, \delta]$ 的任意具有以下特殊形式的 R-子环 A称为 $\mathcal{S}$ 的特殊子扩张：

$A = \sum(A \cap Sx^m)$, $Deg_x(A) = d_A\mathbb{N}$；对每个 $0 \neq m \in Deg_x(A)$，都关联着某个 $\lambda_m = v_m x^m \in A$，满足 $v_m \in \mathcal{C}(S)$，以及某个 R- 子环 $A_{(m)} \subset A \cap S$ 和自同构 $\alpha_{(m)}$，其中 $A_{(m)}$ 由 α诱导，使得：对所有满足 $qx^m \in A$ 的 $p \in A_{(m)}$ 和 $q \in S$，都有 $deg_x(\lambda_m p - \alpha_{(m)}(p)\lambda_m) < m$，且$uqx^m \in A_{(m)}\lambda_m$对某个 $u \in A_{(m)} \cap \mathcal{C}(S)$成立。

请注意，对于 $m = 0$，上述要求显然成立，其中 $A_{(0)} = A \cap S$、$\lambda_0 = 1 = x^0$ 和 $\alpha_{(0)}$ 均为恒等映射。

(b) $\mathcal{S}$ 的特殊子扩张中的（强）良好本质子环，在 $\mathcal{S}$ 中简称为 本质特殊子扩张 （或 强本质特殊子扩张）。

(c)多元斜多项式环 $\mathbb{S}$ 的（或强）本质特殊子扩张 归纳定义如下。✧ 若指标序数 $\mathfrak{n}$ 是零序数，则 A 是 R的（强）良好本质子环。对于极限序数 $\mathfrak{n}$，$A = \cup_{\kappa \in \Lambda} A_\kappa$ 是由环递增并得到的，其中 $\Lambda \subset \mathfrak{n}$，且对 $\kappa \in \Lambda$ 的每个 A_κ 而言，它都是 $\mathbb{S}_\kappa$的（或强）本质特殊子扩张。

✧ 若 $\mathfrak{n} = \kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\}$ 是后继序数，则 A 是某个指定的 A 的（强）良好本质子环； $\mathbb{S} = \mathbb{S}_\kappa[x_\kappa; \alpha_\kappa, \delta_\kappa]$ 视为以 $\mathbb{S}_\kappa$ 为底环的一元斜多项式环，而对于所有 $m \in \mathrm{Deg}_{x_\kappa}(A)^{\sim}$，相应的 R-子环 $A_{(m)}$ 再次是 $\mathbb{S}_\kappa$ 的（或强）本质特殊子扩张。

注记 4.8. 沿用上述定义第(a) 部分中的记号，并令 A 为 $\mathcal{S}$ 中的一个特殊子扩张。对于每个满足 $\deg_x(f) = m$ 的多项式 $f \in A$， A 的特殊形式保证存在某个正则元 $u \in A_{(m)}$，使得 $uf = \lambda_m p + f'$，其中 $0 \neq p \in A_{(m)}$， $f' \in A$ 且 $\deg_x(f') < m$。

例 4.9. 下面按顺序列出一些观察结果。
(i) 对于双射型一元斜多项式环 $R[x; \sigma, \vartheta]$，每个由某个子集 $\mathbb{T}(x^d) \subset \mathbb{T}(x)$ 生成、且作为左 R-模由其生成的 R-子环 A（其中 $d \in \mathbb{N}$），显然都是 $R[x; \sigma, \vartheta]$ 的特殊子扩张。*(ii)* 环境斜多项式环 $\mathbb{S}$ 显然是其自身的特殊子扩张。若 A 是 $\mathbb{S}$ 中的任意（强）本质特殊子扩张，则 A 的每个（强）良好本质子环也如此。*(iii)* 以下可得一些简单但非平凡的例子：设 $A \subset \mathbb{S}$ 作为左 R-模以 $T \subset \mathbb{T} = \mathbb{T}(X)$ 为基自由生成，并具有如下简单结构：对所有 $\kappa \in \mathfrak{n}$，$A_{\kappa+1} = A_\kappa \cdot (T \cap \mathbb{T}(x_\kappa))$。那么 A 显然是 $\mathbb{S}$ 中的特殊子扩张，但该环未必是通常意义上的斜多项式环。

第 5 节将讨论更复杂的特殊子扩张实例。

接下来，我们给出第二个关键引理；它是普通单变量类比结果的一个更强、更一般的版本 [Mat95，引理 2.1]。

引理 4.10。 对于双射型斜多项式环 $\mathcal{S} = S[x; \alpha, \delta]$，假设对每个 R-良好的 $p \in S$，都有 $a_S(p) = Sa_R(p)$。设 A 是 $\mathcal{S}$ 的任意特殊子扩张，不要求 d_A 属于 $\mathrm{Deg}_x(A)$。则下面的(a) 与(b) 等价。

(a) Aa 对所有 $0 \neq a \in R$ 都包含一个次数为 d_A 的 R-良好多项式。在这种情况下，$\mathrm{Deg}_x(A) = \mathrm{d}_A\mathbb{N}$。
(b) 对每个 R-良好多项式 $f \in A$，以及所有满足 $n \geq deg_x(f)$ 的 $n \in Deg_x(A)$， Af 都包含一个 R-良好多项式 gf，使得 $deg_x(gf) = n = deg_x(g) + deg_x(f)$。*(c)* 假设 $\zeta(R) \subset \zeta(S)$ 且 $\delta(\zeta(S)) = 0$。那么，只要 d_A 是 A 中可实现的 x- 次数，且 $R \cap \zeta(A_{(\mathrm{d}_A)}) \subset \zeta(R)$，命题 *(a)* 就成立。

证明。 考虑非平凡情形：在 A 中可达到的 x次数集合 $\mathrm{Deg}_x(A)$ 不等于 $\{0\}$；因此自然数 $\mathrm{d} = \mathrm{d}_A = \gcd(\mathrm{Deg}_x(A)\backslash\{0\})$ 非零，且 $\mathrm{Deg}_x(A) \subset \mathrm{d}\mathbb{N}$。对于每个 $0 \neq m \in \mathrm{Deg}_x(A)$，$A$ 的特殊形式（定义 4.7(a)）保证存在一个特殊元素 $\lambda_m = v_m x^m \in A \cap \mathcal{C}(\mathcal{S})$，满足 $v_m \in \mathcal{C}(S)$，以及与之关联的 R子环 $A_{(m)}$ 的一个诱导自同构 $\alpha_{(m)}$，使得

$$\deg_x(\lambda_m p - \alpha_{(m)}(p)\lambda_m) < m \text{ for all } p \in A_{(m)}.$$

我们很快就能看出，$\mathrm{Deg}_x(A)$ 是加法幺半群 $(\mathbb{N},+)$ 的子幺半群。事实上，对于 $0\neq m,n\in \mathrm{Deg}_x(A)$，我们有：$\lambda_m\lambda_n=v_m\alpha^m(v_n)x^{m+n}+\Delta$，其中 $v_m\alpha^m(v_n)\neq 0,\Delta\in A$ 且 $\deg_x(\Delta)<m+n$，这表明 $m+n\in\mathrm{Deg}_x(A)$。

从假设 (b) 成立出发，我们来证明 (a)。如果 d 是 A 中一个可取到的 x 次数，那么 (a) 就是 (b) 的一个特例。因此，我们只需证明 d 是 A 中一个可取到的 x 次数，这也将推出等式 $\mathrm{Deg}_x(A)=\mathrm{d}\mathbb{N}$。令 $0\neq m\in\mathbb{N}$ 为满足 $\mathrm{d}m$ 是 A 中一个可取到的 x 次数的最小对象。由引理 4.5，我们可以选取一个 R-良好多项式 $w\in R\lambda_{\mathrm{d}m}\subset A$，使得 $\deg_x(w)=\mathrm{d}m$。我们的目标是证明 $m=1$。反设不然，根据 d 的定义，必定存在某个 $\mathrm{d}n\in\mathrm{Deg}_x(A)$，使得 $n=ms+r$ 对某些 $1\leq s$、$r\in\mathbb{N}$ 成立，且 $r<m$。但根据假设，我们可以构造一个 R-良好多项式 $g=px^{\mathrm{d}ms}+g'\in Aw$，使得 $0\neq p\in S$、$g'\in A$ 且 $\deg_x(g')<\mathrm{d}ms$；再次应用该假设，可选取一个次数最小的多项式 $h\in A$，记其次数为 $\mathrm{d}k$，使得 $\deg_x(hg)=\mathrm{d}n=\mathrm{d}ms+\mathrm{d}r$。由注记 4.8，可得某个 $u\in A_{(\mathrm{d}k)}\cap\mathcal{C}(S)\subset\mathcal{C}(\mathcal{S})$，使得 $uh=\lambda_{\mathrm{d}k}q+h'$，且 $0\neq q\in A_{(\mathrm{d}k)}$、$h'\in A$ 以及 $\deg_x(h')<\mathrm{d}k$；特别地，我们仍有 $\deg_x(uh)=\deg_x(h)$，且 $\deg_x(uhg)=\deg_x(hg)=\mathrm{d}n$。然而，$\lambda_{\mathrm{d}k}=v_{\mathrm{d}k}x^{\mathrm{d}k}\in A$ 满足 $v_{\mathrm{d}k}\in\mathcal{C}(S)$，且 $uhg=v_{\mathrm{d}k}\alpha^{\mathrm{d}k}(qp)x^{\mathrm{d}\cdot(ms+k)}+\Delta$ 满足 $\Delta\in\mathcal{S}$ 以及 $\deg_x(\Delta)<\mathrm{d}\cdot(ms+k)$。由于 g 是 R-良好的，其首项系数 $p=\mathrm{lc}_S(g)$ 也具有 $\mathrm{a}_R(g)=\mathrm{a}_R(p)$；关于 S 中左湮灭子的假设推出 $\mathrm{a}_S(p)=S\mathrm{a}_R(p)\subset\mathrm{a}_S(g)$。因此，$qp$ 不可能是零多项式，否则 qg 将为 0，且 $uhg=h'g$，同时 $\deg_x(h'g)=\deg_x(uhg)=\mathrm{d}n$，而多项式 $h'\in A$ 满足 $\deg_x(h')<\deg(h)$，这与 $\deg_x(h)$ 的极小性矛盾。此外，由于 $v_{\mathrm{d}k}$ 是 S 中的一个正则元，故 $v_{\mathrm{d}k}\alpha^{\mathrm{d}k}(qp)\neq 0$ 也成立，因此 $\mathrm{d}\cdot(ms+k)=\deg_x(uhg)=\mathrm{d}n=\mathrm{d}ms+\mathrm{d}r$，这表明 $k=r$。于是，整数 $\mathrm{d}r=\deg_x(h)$ 属于 $\mathrm{Deg}_x(A)$，且 $1\leq r<m$，这与 m 的极小性矛盾。因此，$m=1$，并且如预期，$\mathrm{d}\in\mathrm{Deg}_x(A)$。

接下来假设 (a) 成立，我们将证明 (b) 成立。由于假设已保证 $\mathrm{Deg}_x(A)=\mathrm{d}\mathbb{N}$，给定任意 R-nice 多项式 $f\in A$ with $\deg_x(f)=m\in\mathbb{N}$，只需证明 Af 包含一个 R-nice 多项式 gf with $g\in A$，$\deg_x(gf)=m+\mathrm{d}$ 且 $\deg_x(g)=\mathrm{d}$。令 $p=\mathrm{lc}_S(f)\in S$，多项式 $f'=f-px^m\in\mathcal{S}$ 满足 $\deg_x(f')<m$。由于 f 是 R-nice，p 也如此；并且选取某个系数 $a\in\mathbf{coef}_R(p)$，可得

$$\mathfrak{a}_R(p)=\mathfrak{a}_R(a)=\mathfrak{a}_R(f)\text{ and }\mathfrak{a}_{\mathcal{S}}(f)=\mathcal{S}\mathfrak{a}_R(a)=\mathfrak{a}_{\mathcal{S}}(a),$$

其中最右边的两个等式由命题 4.6 保证。特别地，我们得到左 $\mathcal{S}$-模 $\mathcal{S}a\tilde{\ }\twoheadrightarrow\mathcal{S}f$ 的一个同构，它对所有 $h\in\mathcal{S}$ 均将每个 ha 映射到 hf，并且对所有 $h\in\mathcal{S}$，$\mathfrak{a}_{\mathcal{S}}(hf)=\mathfrak{a}_{\mathcal{S}}(ha)$。现在由 (a)，族 $\mathrm{E}=\{h\in A:\deg_x(ha)=\mathrm{d}\text{ 且 }ha\text{ 是 }R\text{-nice}\}$ 非空。

取某个具有最小 x 次数 e 的 $h\in\mathrm{E}$，我们将证明 $e=\mathrm{d}$。可将 $ha=qx^{\mathrm{d}}+w$ 写成 $q\in S,w\in A$，且 $\deg_x(w)<\mathrm{d}$；由于 ha 是 R-良好的，其首多项式系数 $q=\mathrm{lc}_S(ha)$ 也 $_R$，并且 $ha(=)_R\mathrm{a}q$，因此，$_{\mathcal{S}}(ha)=\mathcal{S}\mathrm{a}_R(q)=\mathrm{a}_{\mathcal{S}}(q)$（仍由命题 4.6）。由注记 4.8 可得某个 $u\in A_{(e)}$，它在 S 中正则，且满足 $uh=\lambda_eq'+h'$，其中 $0\neq q'\in A_{(e)}$，$\deg_x(uh)=e=\deg_x(\lambda_e)$，$h'\in A$ 且 $\deg_x(h')<e$。特别地，$\deg_x(uha)=\deg_x(ha)=\mathrm{d}$，而 $uha=\lambda_eq'a+h'a$。我们断言 $q'a\neq 0$。若非如此，则由于

多项式 $h'a = uha = uqx^{\mathrm{d}} + uw$的 x次数为 d，且 $\deg(uw) < \mathrm{d}$，而$a_R(uq) = a_R(uha)$，关键引理 4.5 的第一部分表明，存在适当的 $c \in R$，使得$ch'a$是 R-良好的，且其 x次数仍为 d；然而，这将与 $e = \deg(h)$的极小性矛盾，因为多项式 $ch' \in A$ 的 x次数小于 e。因此，$q'a \neq 0$，如所断言。现在，$\lambda_e = v_e x^e$ 且 $v_e \in S$ 正则，因此 $uha = \lambda_e q'a + h'a = v_e\alpha^e(q'a)x^e + h''$，其中 $0 \neq v_e\alpha^e(q'a) \in S$，$h'' \in A$且 $\deg_x(h'') < e$。所以，$e = \deg_x(uha) = \deg_x(ha) = \mathrm{d}$。

那么我们可以令 $h = vx^{\mathrm{d}} + v'$ for some $(v, v') \in S \times A$ with $\deg_x(v') < \mathrm{d}$；因此，$ha = v\alpha^{\mathrm{d}}(a)x^{\mathrm{d}} + h'$with $0 \neq v\alpha^{\mathrm{d}}(a) \in S, h' \in A$and $\deg_x(h') < \mathrm{d}$。由于 $ha$is$R$-nice，$v\alpha^{\mathrm{d}}(a)$ 也如此，并且 $\mathrm{a}_R(ha) = \mathrm{a}_R(v\alpha^{\mathrm{d}}(a))$。由此可知，$hf$是一个非零多项式，其 $\mathrm{a}_R(hf) = \mathrm{a}_R(ha) = \mathrm{a}_R(v\alpha^{\mathrm{d}}(a))$。但我们有：

$$hf = v\alpha^{\mathrm{d}}(p)x^{m+\mathrm{d}} + f'' \text{ with } f'' \in \mathcal{S} \text{ and } \deg_x(f'') < m + \mathrm{d}.$$

接下来，我们希望证明 $\mathrm{a}_R(v\alpha^{\mathrm{d}}(p)) \subset \mathrm{a}_R(hf)$。任取 $b \in R$with$bv\alpha^{\mathrm{d}}(p) = 0$。那么，$\alpha^{-\mathrm{d}}(bv)p = 0$，而对于系数 $a \in \mathrm{coef}_R(p)$，已知 $\mathrm{a}\mathcal{S}(p) = \mathcal{S}\mathrm{a}_R(a)$。由此可得 $\alpha^{-\mathrm{d}}(bv)a = 0andb \in \mathrm{a}_R(v\alpha^{\mathrm{d}}(a)) = \mathrm{a}_R(hf)$。因此，正如预期，$\mathrm{a}_R(v\alpha^{\mathrm{d}}(p)) \subset \mathrm{a}_R(hf)$；此外，由于 $hf \neq 0$，我们必有 $v\alpha^{\mathrm{d}}(p) \neq 0$，从而 hf 的次数为 x-degree $m + \mathrm{d}$。现在，应用第一个关键引理 4.5，可得一个适当的标量 $c \in R$，使得 $chf$is$R$-nice，同时 $cv\alpha^{\mathrm{d}}(p)$ 仍然非零。因此 $\deg_x(chf) = m + \mathrm{d}$ 且 $\deg_x(ch) = \mathrm{d}$，从而完成了 (a) 蕴含 (b) 的证明。

继续讨论引理的部分 (c)，假设：$\zeta(R) \subset \zeta(S)$，$\delta(\zeta(R)) = 0$，$\mathrm{d}$ 是 A 中的一个可达到的 x-次数，同时 $R \cap \zeta(A_{(\mathrm{d})}) \subset \zeta(R)$。我们必须证明，对于每个非零标量 $a \in R$，Aa都包含一个 R-良好的多项式，其 x-次数为 d。令 $B = A_{(\mathrm{d})}$，则可取到一些特殊元素 $\upsilon_{\mathrm{d}} \in \mathcal{C}(S)$和$\lambda = \lambda_{\mathrm{d}} = \upsilon_{\mathrm{d}}x^{\mathrm{d}} \in A \cap \mathcal{C}(\mathbb{S})$，以及关联的 R-子环 $B \subset S$ 的一个诱导自同构$\alpha_{(\mathrm{d})}$，使得 $\lambda a = \alpha_{(\mathrm{d})}(a)\lambda + \Delta$，其中 $0 \neq \alpha_{(\mathrm{d})}(a) \in B$，$\Delta \in A$，且 $\deg_x(\Delta) < \mathrm{d}$。先考虑 $a \notin \zeta(R)$的情形。由假设 $R \cap \zeta(B) \subset \zeta(R)$，可知 $a \notin \zeta(B)$且$\alpha_{(\mathrm{d})}(a) \notin \zeta(B)$。因此，可以令 $0 \neq w \in B$，其中 $Bw \cap \mathrm{a}_B(\alpha_{(\mathrm{d})}(a)) = 0$。特别地，由于 λ 作为 $\mathcal{S}$的元素是正则的，我们有：

$$w\alpha_{(\mathrm{d})}(a)\lambda \neq 0 \text{ and } a_R(w\alpha_{(\mathrm{d})}(a)\lambda) = a_R(w\alpha_{(\mathrm{d})}(a)) \subset a_R(w) \subset a_R(w\lambda a).$$

应用引理 4.5 可得某个合适的 $c \in R$，使得 $cw\lambda a$ 是带有$cw\alpha_{(\mathrm{d})}(a)\lambda \neq 0$的 R-良好的；因此 $\deg_x(cw\lambda a) = \mathrm{d}$。接下来考虑 a属于$\zeta(R)$的情形。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，根据 Ore 规则可得：

$$x^n a = \alpha^n(a)x^n + \delta_{x^n}(a) \text{ with } \delta_{x^n}(a) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\delta(\alpha^{n-k}(a))x^{n-k}.$$

但根据假设，$\zeta(R) \subset \zeta(S)$，而导子映射 δ在 $\zeta(S)$ 上为零，并且每个自同构 α^k：$S \to S$ for $k \in \mathbb{N}$ 都将 $\zeta(S)$映为$\zeta(S)$。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\delta_{x^n}(a) = 0$，且 $x^n a = \alpha^n(a)x^n$。特别地，$\lambda a = \upsilon_{\mathrm{d}}x^{\mathrm{d}}a = \upsilon_{\mathrm{d}}\alpha^{\mathrm{d}}(a)x^{\mathrm{d}}$，其中 $0 \neq \upsilon_{\mathrm{d}}\alpha^{\mathrm{d}}(a) \in S$（因为 υ_{d}是 S的正则元，且 $\alpha^{\mathrm{d}}(a) \neq 0$）。因此，我们只需应用引理 4.5，选取一个合适的$c \in R$，使得多项式

$c\lambda a = c\upsilon_{\mathrm{d}}\alpha^{\mathrm{d}}(a)x^{\mathrm{d}}$ 是 R-nice 的，次数为 d。由此完成了 (c) 的证明，也完成了该引理的证明。□

下一个技术性引理是最为棘手的结果之一，专门针对斜多项式环中子扩张的一般情形，处理由系数环诱导的特殊子扩张中的左理想。该结果补充了上述引理所提供的“好多项式”策略，它们合在一起，对于在下文实施主要定理的证明至关重要。请继续沿用定义 4.7 所引入的记号。

引理 4.11. 设 A 是 $\mathcal{S} = S[x$的一个特殊子扩张; α、 $\delta]$、 L 为 R中的任意左理想。则对每一个满足 $m = \deg_x(f)$ 的 $0 \neq f \in AL$，都有 $f \in \sum_{k=0}^{m}(A \cap Sx^k)L$，并且存在某个 $u \in A_{(m)} \cap \mathcal{C}(S)$ 使得$\mathrm{lc}_S(uf)x^m \in \alpha_{(m)}(A_{(m)}L)\lambda_m$，其中若 $m = 0$则$u = 1$ 。

证明。定义 4.7 已经包含了 $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} A \cap Sx^k$ 这一要求。设$0 \neq f \in AL$，而 $\deg_x(f)$ 尚未设定。我们考虑按如下方式定义的所有对 (m, u) 所构成的集合 E:

❍ $m \in \mathbb{N}$；若 f是关于变量 x 的常数多项式，则 $u = 1$；否则， u是 $A_{(m)}$ 中作为 S 的元素为正则的任意元素；
❍ 多项式 uf表示为形如 $px^k a$ 的元素之和，其中 $px^k \in A \cap Sx^k$、 $a \in L$ 且 $k \leq m$。
由于 $0 \neq f \in AL$，集合 E 显然非空。因此我们选取一对 $(m, u) \in \mathrm{E}$，使 m 极小；在证明过程中我们将证明 $m = \deg_x(f)$。 m 的极小性已经表明，存在非零多项式$h = \sum_{i=1}^{n} p_i x^m a_i$，对应于某个正的 $n \in \mathbb{N}$，满足 $p_i x^m a_i \neq 0$， $p_i \in S$, $p_i x^m \in A, a_i \in L$（对所有 i），并且多项式 $uf - h$要么为零（若 $m = 0$），要么是形如 $px^k a$ 的元素之和，其中 $px^k \in A \cap Sx^k$、 $a \in L$ 且 $k < m$。注意，由于u是 S 的正则元，故 $\deg_x(uf) = \deg_x(f)$。

若 $m = 0$，则 $uf = h \in (A \cap S)L$，特别是 f 已经是常数；根据 E 的定义，我们已经有 $u = 1$；因此，正如预期的那样， f 属于 $(A \cap S)L$。所以，我们继续讨论 $m \geq 1$的情形。鉴于 A 的特殊形式（定义 4.7(a)），特殊元素 $\lambda = \lambda_m \in A \cap Sx^m$ 作为$\mathcal{S}$ 的元素是正则的，因此存在某个元素 $u' = u_n u_2 \cdots u_1$，其中每个 u_i 都属于相应的 R-子环 $A_{(m)} \subset A \cap S$，并且作为 S 的元素是正则的，使得

$$u' p_i x^m = u_i' \lambda \text{ for some } u_i' \in A_{(m)}, 1 \leq i \leq n.$$

容易看出，$(m, u'u) \in \mathrm{E}$，而多项式 $u'uf - u'h = u' \cdot (uf - h)$ 可表示为形如 $px^k a$with $px^k \in A \cap Sx^k, a \in L$and $k \leq m-1$的元素之和。仍由 A的特殊形式， $A_{(m)}$ 带有一个诱导自同构$\alpha_{(m)}$ ，使得:

$$\deg_x(\lambda p - \alpha_{(m)}(p)\lambda) \leq m - 1 \text{ for all } p \in A_{(m)}.$$

由此观察可知，对于某个 $\Delta_i \in A$，有 $u_i'\lambda = \lambda\alpha^{-1}{}_{(m)}(u_i') + \Delta_i$，且 $\deg_x(\Delta_i) \leq m-1$ for $1 \leq i \leq n$，因此，

$$u'h = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot (\alpha_{(m)}^{-1}(u_i') + \Delta_i)a_i = \lambda\alpha_{(m)}^{-1}(v) + \Delta \text{ with}$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} u_i'\alpha_{(m)}(a_i) \text{ and } \Delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i a_i \in AL, \text{ with } \Delta_i \in A, \deg_x(\Delta_i) \leq m-1.$$

因此，配对 $(m,u) \in \mathrm{E}$ 的极小性质表明，上文刚定义的多项式 v 必定非零。但这样一来，我们还得到 $u'h = v\lambda + \Delta'$存在某个 $\Delta' \in A$，使得 $\deg_x(\Delta') \leq m-1$，并且多项式 $u'uf \in AL$ 现在满足：$\deg_x(u'uf) = \deg_x(v\lambda) = m$，且 $\deg_x(f) = m$，因为元素$u'u \in A_{(m)} \subset A \cap S$在 S 中是正则的。特别地，由此可知，$u'uf$属于 $\sum_{k=0}^{m}(A \cap Sx^k)L$，正如预期的那样。此外，**首项系数**$_S(u'uf)x^m = v\lambda = \sum_{i=1}^{n} u_i'\alpha_{(m)}(a_i)\lambda$属于 $A_{(m)}\alpha_{(m)}(L)\lambda = \alpha_{(m)}(A_{(m)}L)\lambda$，这正如引理最后一部分所述。

□

4.3. **本质特殊子扩张的一致维数**。有必要回顾此前作为集合记号的 $\mathcal{S} = S[x; \alpha, \delta]$ 是一种双射型一元斜多项式环，它定义在一个 R-环上 S，并且作为左 R-模是自由的，其左 R-基记为 $\mathbb{T}_S$。对于我们的主要定理，S 的一个特定选择将是双射型多元斜多项式环中的一个本质特殊R-子扩张。因此，从现在起我们要求附加条件：

每个 R-良好元素 $p \in S$ 在 S 中都有一个 R-良好湮灭子环：$a_S(p) = Sa_R(p)$；

and for all ideals L, L' in R, if $L \cap L' = 0$ then $SL \cap SL' = 0$,

鉴于命题 4.6 和 4.2，该条件对 $\mathbb{S}$ 成立；正如我们将在下文进一步证明的，对 $\mathbb{S}$ 中的所有本质特殊子扩张也成立。

现在我们可以陈述本小节的第一个主要定理；对于 $\mathcal{S}$ 的一个本质特殊子扩张 A，我们按通常记号将 A 表示为 $\mathcal{S}$ 的一个给定特殊子扩张，其中包含 A 作为良好本质子环。

定理 4.12。设 A 是 $\mathcal{S}$ 的本质特殊子扩张，且 Aa 对所有 $0 \neq a \in R$都包含一个次数为$\mathrm{d}_{\tilde{A}}$的 x-*nice* 多项式 R。那么，R 的每个一致或本质左理想 L 都可提升为 A 中的一致（或本质）左理想 $A \cap AL^{\sim}$，前提是对所有 $m \in \mathrm{Deg}_x(A)$，$A_{(m)}$ 也满足同样的条件。在这种情况下，若R 具有足够多的一致左理想，那么 A 也具有足够多的一致左理想，且一致维数(A) = 一致维数(R)。

证明。根据命题 2.6，有：$\mathrm{udim}(A) = \mathrm{udim}(A)$；并且对于 R 中的每个左理想 L，左理想 $A \cap AL$ 在 A 中一致（或本质），当且仅当左理想 AL 在 A 中也如此。因此，我们只需证明当 $\sim A = A$ 是 $\mathcal{S}$ 中的特殊子扩张时，该定理成立。假设后者成立，在证明余下部分中，我们令 $m \in \mathrm{Deg}_x(A)$。现在假设的 A 的特殊形式保证存在一个在 $\mathcal{S}$ 中正则的特殊元素 $\lambda = \lambda_m \in A \cap Sx^m$，以及一个$\alpha_{(m)}$ 的诱导自同构

相应的 R-子环 $A_{(m)} \subset A \cap S$，使得：

$$\begin{aligned}&\text{for all } p \in A_{(m)}, \deg_x(\lambda p - \alpha_{(m)}(p)\lambda) < m; \text{and for all } q \in S \text{ with}\\&qx^m \in A, \text{it holds for some } u \in A_{(m)} \text{ regular in } S \text{ that } uqx^m \in A_{(m)}\lambda.\end{aligned} \tag{$\star$}$$

当然（在定义 4.7 中），我们令： $\lambda_0 = 1 = x^0, A_{(0)} = A \cap S$ 以及 $\alpha_{(0)} = \mathrm{id}$。还要记住， A 的特殊形式已经包含了$A = \sum_{k\in\mathbb{N}} A \cap Sx^k$这一要求。

设 L 为 R 的任意一致左理想，且提升为 $A_{(m)}$ 中的一致左理想，对所有 $m \in \mathrm{Deg}_x(A)$。证明 AL 作为左理想在 A 中仍然是一致的。给定非零多项式 f, $g \in AL$，令 $k = \deg_x(f)$， $m = \deg_x(g)$。我们还可进一步假设 $k \le m$，并且通过用基环R 中适当的标量去乘 f与 g，借助第一条关键引理 4.5，我们可以假定 f与 g 是 R-良好的。我们将对自然数 $k + m$ 使用普通归纳法来证明 $Af \cap Ag \neq 0$。

若 $k+m = 0$，则 $f, g \in AL \cap S$，而技术性引理 4.11 表明 $AL \cap S = (A \cap S)L = A_{(0)}L$；根据假设，$(A \cap S)f \cap (A \cap S)g \neq 0$成立，故得证。现在转向归纳步骤，假设$k+m \ge 1$，并且对于所有满足 $\deg_x(f') + \deg_x(g') < k+m$的非零多项式 f', $g' \in AL$，有 $Af' \cap Ag' \neq 0$。引理 4.10 保证 Af包含一个 R-良好多项式 $\sim f$，其 $\deg_x(f) = m$。接着考察首项多项式系数 $p = \widetilde{\mathrm{lc}_S(f)}$ 和 $q = \mathrm{lc}_S(g)$，可得 R中的一个 S-良好多项式，使得 $f - px^m, g - \sim qx^m \in A$ 是 x-次数小于 m 的多项式，而 $\mathrm{a}_R(p) = \mathrm{a}_R(f)$ 且 $\widetilde{\mathrm{a}_R(q)} = \mathrm{a}_R(g)$。特别地，命题 4.6 保证 $\mathrm{a}_S(f) = S\mathrm{a}_R(p) = \mathrm{a}S(p)$，并且 $\mathrm{a}_S(g) = S\mathrm{a}_R(q) = \mathrm{a}S(q)$。接下来，结合上文的 (★)，技术性引理 4.11 表明 $upx^m = p'\lambda$，并且对于某些元素 $u, u' \in A_{(m)} \cap \mathcal{C}(S)$ 和非零多项式 p', $q' \in \alpha_{(m)}(A_{(m)}L)$，有 $u'qx^m = q'\lambda$。特别地（由于x^m, λ 在 S中是正则的），有：

$$\mathrm{a}_S(up) = \mathrm{a}_S(p') \text{ and } \mathrm{a}_S(u'q) = \mathrm{a}_S(q'); \ \mathrm{a}_S(u\widetilde{f}) = \mathrm{a}_S(p') \text{ and } \mathrm{a}_S(u'g) = \mathrm{a}_S(q').$$

但由于根据假设， $A_{(m)}L$ 是 $A_{(m)}$中的一致左理想，因此存在元素p''， $q'' \in A_{(m)}$ 使得

$$0 \neq p''p' = q''q', \text{ so that } p''u\widetilde{f} \neq 0 \text{ and } q''u'g \neq 0 \text{ as well.}$$

$\widetilde{\ }$多项式 $h = q''u'g - p''uf$属于 AL，且 $\deg_x(h) < m$。若 $h = 0$，则$\widetilde{\ }$，此时 $0 \neq q''u'g = p''uf \in Af \cap Ag$，因此结论成立。故设$h \neq 0$。由归纳假设可得某个 f', $g' \in A$ 使得

$$0 \neq f'f = g'h = g'q''u'g - g'p''u\widetilde{f} \text{ and } g'q''u'g = f'f + g'p''u\widetilde{f}.$$

$\widetilde{\ }$由于$\mathrm{a}_S(uf) = \mathrm{a}_S(p')$且$\mathrm{a}_S(u'g) = \mathrm{a}_S(q')$，而 $p''p' = q''q'$，因此$\widetilde{\ }$有 $\mathrm{a}_S(g'q''u'g) = \mathrm{a}_S(g'q''q') = \mathrm{a}_S(g'p''p') = \mathrm{a}_S(g'p''uf)$。又由于$\sim g'q''u'g - g'p''uf \neq 0$，可得$g'q''u'g \neq 0$，于是多项式$g'q''u'g = \sim f'f + g'p''uf$是 $Af \cap Ag$中的非零元，从而完成证明： AL是 A中的一致左理想。

设 K 是 R 的一个本质左理想，对于所有$m \in \mathrm{Deg}_x(A)$，它都提升为 $A_{(m)}$ 中的一个本质左理想。证明 AK 是 A中的本质左理想。令 $0 \neq f \in A$且 $m = \deg_x(f)$，我们将对 m 使用归纳法证明 $AK \cap Af \neq 0$。根据第一个关键引理 4.5，用适当的标量左乘 f，可假设 f是 R-nice。若 $m = 0$，则 $f \in A \cap S$，且假设已保证$(A \cap S)K \cap (A \cap S)f \neq 0$，因此 $AK \cap Af \neq 0$ 也成立。接下来，假设 $m \geq 1$，并且所需结论对次数小于 m的 x成立。根据(★)，回忆特殊元 $\lambda \in A \cap \mathcal{C}(S)$、相应的 R-子环 $A_{(m)} \subset A \cap S$ 以及 $A_{(m)}$ 的诱导自同构$\alpha_{(m)}$ 满足：对于所有 $p' \in A_{(m)}$，多项式$\lambda p' - \alpha_{(m)}(p')\lambda \in A$ 的 x-次数小于 m；并且存在某个 $u \in A_{(m)} \cap \mathcal{C}(S)$和某个非零多项式 $p \in A_{(m)}$，使得多项式 $f' = uf - p\lambda \in A$的 x-次数小于 m。关于 K 的假设保证 $A_{(m)}K$ 是 $A_{(m)}$中的一个本质左理想；因此左理想 $A_{(m)}\alpha_{(m)}(K) = \alpha_{(m)}(A_{(m)}K)$是 $A_{(m)}$ 中的本质左理想，并且存在某个 $v \in A_{(m)}$ 使得 $0 \neq vp \in \alpha_{(m)}(A_{(m)}K)$。由定义，$\lambda$ 是 S 的一个正则元，因此 $vp\lambda \neq 0$，且多项式$vuf = vp\lambda + vf'$的 x-次数仍为 m。注意，根据引理 4.5，如果$\mathrm{a}_R(vp\lambda) \not\subset \mathrm{a}_R(vuf)$，那么用适当的标量 c左乘 vuf，可构造一个 R-nice多项式 $cvuf \in A$，使得$\deg_x(cvuf) < m$，随后应用归纳假设，在 $AK \cap Af$中得到一个非零元。因此，我们可以继续讨论，并假设$\mathrm{a}_R(vp\lambda) \subset \mathrm{a}_R(vuf)$。同样根据引理 4.5，还可进一步假设 $vp\lambda$和 vuf都是 R-nice多项式，且$\mathrm{a}_R(vuf) = \mathrm{a}_R(vp\lambda)$。虽然非零多项式 $\alpha^{-1}_{(m)}(vp) \in A_{(m)}$未必是 R-nice的，但将其左乘来自 R 的适当标量，构造出 $A_{(m)} \subset S$中的一个R-nice元，再应用第二个关键引理 4.10，可得到某个 R-nice多项式 $g = (qx^m + g')\alpha^{-1}_{(m)}(vp)$，其中 $q \in S, qx^m, g' \in A$满足$\deg_x(g') < m$ 且$\deg_x(g) = m$。但我们已经知道，存在某个 $w \in A_{(m)} \cap \mathcal{C}(S)$和某个非零多项式 $q' \in A_{(m)}$使得 $wqx^m = q'\lambda$。因此，

$$wg = (q'\lambda + wg')\alpha^{-1}_{(m)}(vp) = q'vp\lambda + \Delta \text{ with } \Delta \in A \text{ and } \deg_x(\Delta) < m;$$
and letting $p' = \mathbf{lc}_S(g)$ it holds that $q'vp\lambda = \mathbf{lc}_S(wg)x^m = wp'x^m$.

由于 g 是 R-优良的，其首多项式系数 $p' = \mathbf{首项系数}_S(g)$ 以及 $a_R(g) = a_R(p') = a_R(p'x^m)$ 也都是如此。现在，由于 $vuf = vp\lambda + vf'$且 $\deg_x(vf') < m$，多项式 $q'vuf - wg \in A$ 的 x-次数小于 m。若 $q'vuf - wg = 0$，则$0 \neq q'vuf = wg \in AK$，于是得证。接下来假设 $q'vuf - wg$ 非零，由归纳假设可知存在某个 $w' \in A$，使得

$$0 \neq w' \cdot (q'vuf - wg) \in AK.$$

但此时，多项式 vuf，$vp\lambda$，g 和 $p'x^m = \mathbf{首项系数}_S(g)x^m$ 都是 R-优良的，且

$$a_R(vuf) = a_R(vp\lambda),\ a_R(g) = a_R(p'x^m) \text{ and } q'vp\lambda = wp'x^m.$$

因此，命题 4.6 表明 $a_S(vuf) = a_S(vp\lambda)$，而 $a_S(g) = a_S(p'x^m)$，由此可得：$a_S(q'vuf) = a_S(q'vp\lambda) = a_S(wp'x^m) = a_S(wg)$.因此，$w' \cdot (q'vuf - wg)$ 非零这一事实迫使 $w'q'vuf$非零，从而 $0 \neq w'q'vuf = w' \cdot (q'vuf - wg) + w'wg \in AK$。这就完成了 AK 是 A中本质左理想的证明。

对于该定理的最后一个断言，附加假设表明，R中的每一个一致或本质左理想都提升为 A 中的一个一致（或相应地，一个本质）左理想。接下来，给定 R 中满足 $L\cap L'=0$ 的任意左理想 L,L'，我们迅速验证$AL\cap AL'=0$。由我们对 R-环 S的设定可知 $SL\cap SL'=0$。因此，对于双射 $\mathcal{S}$ 的一元斜多项式环，命题 4.2 保证 $\mathcal{S}L\cap\mathcal{S}L'=0$，从而作为 $\mathcal{S}$ 中的 R-子环，同样成立 $AL\cap AL'=0$。现在，命题 2.4 适用，表明一致维数(A) = 一致维数(R)，从而完成该定理的证明。□

推论 4.13。设 A 是双射型一元扭多项式~环中的本质特殊子扩张 $R[x;\ \alpha、\ \delta]$，且对于所有 $0\neq a\in R$，Aa都包含一个 R-良好多项式，其 x-次数为$\mathrm{d}_{\tilde{A}}$。则，L 的每个一致或本质左理想R都可提升为 A中的一致（或分别为本质）左理想 $A\cap AL$；$\zeta(A)=A\cap\zeta(R)\mathbb{T}(x)$；如果 R 具有足够多的一致左理想，那么 A 也具有足够多的一致左理想，并且一致维数(A) = 一致维数(R)。

证明。除关于左奇异理想的断言外，该推论的其他断言均由定理 4.12 在 S 与基环 R重合的情形下特化得到。特别地，这意味着 $\zeta(R)\subset\zeta(AR)$，其中将 AR 视为左 A-模。现在，关于 $\zeta(A)=A\cap\zeta(R)\mathbb{T}(x)$的断言，是下面命题 4.14 所给出的一个更一般结果的对象。□

根据引理 4.3，反字典序在 $\mathbb{T}=\mathbb{T}(X)$ 上给出一个良序；相应地，对于每个 $f\in\mathbb{S}$，我们分别将$\mathbf{T}(f)\in\mathbb{T}$和$\mathbf{lc}(f)\in R$定义为 f 的首项和首项系数。

命题 *4.14.* 设 $A\subset\mathbb{S}$ 是任意子环，满足对于 R中的每个非零左理想 L，都有 $A\cap AL\neq 0$。那么，对于所有 $f\in\mathbb{S}\backslash\zeta(R)\mathbb{T}$，都存在一个非零左理想 $L\subset R$，使得 $\mathbb{S}L\cap a_{\mathbb{S}}(f)=0$。因此，$\zeta(A)\subset\zeta(R)\mathbb{T}$，并且在满足$\zeta(R)\subset\zeta(AR)$的情况下，$\zeta(A)=A\cap\zeta(R)\mathbb{T}$，其中将 AR 视为 $\mathbb{S}$ 中的左 A-子模。

证明。设 $0\neq f\in\mathbb{S}$, $a=\mathrm{lc}(f)$。我们首先假设 $a\notin\zeta(R)$。那么，对于 R 的某个非零左理想 L，有 $L\cap\mathrm{a}_R(a)=0$。我们将对指标序数 $\mathfrak{n}$ 进行超限归纳，以证明 $\mathbb{S}L\cap\mathrm{a}_{\mathbb{S}}(f)=0$。由于基始情形显然成立，下面转向归纳步骤，并假设对于所有小于 $\mathfrak{n}$的序数，所需结论都成立。现在，$\mathfrak{n}$ 要么是极限序数，要么是后继序数。$\mathfrak{n}$ 为极限序数的情形同样直接。事实上，在此情形下，$\mathbb{S}=\cup_{\kappa<\mathfrak{n}}\mathbb{S}_\kappa$ 是 R 上的双射型截断斜多项式环的递增并，而对于某个固定的 κ_0，$f\in\mathbb{S}_\kappa$ 对于 $\kappa_0\leq\kappa<\mathfrak{n}$。但是，$\mathrm{a}_{\mathbb{S}}(f)=\cup_{\kappa_0\leq\kappa<\mathfrak{n}}\mathrm{a}_{\mathbb{S}_\kappa}(f)$ 和 $\mathbb{S}L=\cup_{\kappa_0\leq\kappa<\mathfrak{n}}\mathbb{S}_\kappa L$，而归纳假设保证，对于 $\kappa_0\leq\kappa<\mathfrak{n}$，$\mathbb{S}_\kappa L\cap\mathrm{a}_{\mathbb{S}_\kappa}(f)=0$，这表明 $\mathbb{S}L\cap\mathrm{a}_{\mathbb{S}}(f)=0$。接下来考虑后继序数 $\mathfrak{n}=\kappa+1=\kappa\cup\{\kappa\}$的情形。令$x=x_\kappa$、$\alpha=\alpha_\kappa$和 $\delta=\delta_\kappa$，可得 $\mathbb{S}=\mathbb{S}_\kappa[x;\ \alpha,\ \delta]$是 R上的双射型一元斜多项式环，而 $\mathbb{S}_\kappa$是 R上的双射型截断斜多项式环。令 $m=\deg_x(f)$，可写为：$f=px^m+f'$，其中 $p\in\mathbb{S}_\kappa$、$f'\in\mathbb{S}$且 $\deg_x(f')<m$。根据反字典序的定义，$\mathrm{lc}(p)=\mathrm{lc}(f)=a$。因此，归纳假设保证 $\mathbb{S}_\kappa L\cap\mathrm{a}_{\mathbb{S}_\kappa}(p)=0$。由于共轭映射 α在 $\mathbb{S}_\kappa$上是双射的，一元项集合 $\mathbb{T}(x)=\{x^n:\ n\in\mathbb{N}\}$也可作为 $\mathbb{S}$的右 R-基。因此，每个元素 $g\in\mathbb{S}L$ 都表示为

as $g = x^{n_1}w_1 + \cdots + x^{n_k}w_k$，其中 $k \in \mathbb{N}$、 $n_1 > \cdots > n_k$以及 $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{S}_\kappa L$。假设 $gf = 0$。由于 $gf = \alpha^{n_1}(w_1 p)x^{n_1+m} + g'$对于某个 $g' \in \mathbb{S}$成立，且 $\deg_x(g') < n_1 + m$，必有 $w_1 p = 0$，因此根据超限归纳假设， $w_1 = 0$。于是通过归纳可知， w_1， w_2， $\ldots$， w_k全部为零，且 $g = 0$。因此，在假设$\mathbf{lc}(f) \notin \zeta(R)$的条件下，我们证明了 $\mathbb{S}L \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{S}}(f) = 0$。

现在，对于一个不属于 $\zeta(R)\mathbb{T}$ 的一般多项式 $f \in \mathbb{S}$，我们可以写作 $f = g + f'$，其中 $g \in \zeta(R)\mathbb{T}$，且 $\mathrm{lc}(f') \notin \zeta(R)$。因此，设 L' 是 R 的非零左理想，且 $L' \cap \mathrm{a}_R(\mathrm{lc}(f')) = 0$。由上文可知， $\mathbb{S}L' \cap \mathrm{a}_{\mathbb{S}}(f') = 0$。由于在任意环中，有限个本质左理想的交仍是本质左理想，因此 $\mathrm{a}_R(g)$ 是 R 的本质左理想。于是，令 $L = \mathrm{a}_R(g) \cap L'$，即可得到 R 中的一个非零左理想，且 $\mathbb{S}L \cap \mathrm{a}_{\mathbb{S}}(f) = 0$，正如所期望的那样。

转向命题的第二部分，设 $A \subset \mathbb{S}$ 为任意子环，且对于 R 中的每个非零左理想 L，都有 $A \cap AL \neq 0$。给定任意多项式 $f \in A$，满足 $f \notin \zeta(R)\mathbb{T}$，由上文可知，存在 R 的一个非零左理想 L，使得 $\mathbb{S}L \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{S}}(f) = 0$，从而，$(A \cap AL) \cap \mathrm{a}_A(f) = 0$，而 $A \cap AL$ 是 A 中的非零左理想；因此， $f \notin \zeta(A)$，这说明 $\zeta(A) \subset \zeta(R)\mathbb{T}$。最后，给定附加假设 $\zeta(R)$ 包含于 $\mathbb{S}$ 的左 A-子模 AR 的奇异理想中，我们要证明 $A \cap \zeta(R)\mathbb{T} \subset \zeta(A)$。设 $g = a_1\tau_1 + \cdots + a_m\tau_m \in A$，其中 $0 \neq m \in \mathbb{N}$，且对于 $1 \leq i \leq m$， $(a_i, \tau_i) \in \zeta(R) \times \mathbb{T}$。由于 a_i 属于 $\zeta(R) \subset \zeta(AR)$，每个 $\mathrm{a}_A(a_i)$ 都是 A 中的本质左理想，因此， $\cap_{i=1}^{m}\mathrm{a}_A(a_i)$ 仍是 A 中的本质左理想，且包含于 $\mathrm{a}_A(g)$。于是， $g \in \zeta(A)$。命题的证明至此完成。□

现在我们继续讨论定理 4.12 的多变量版本。

定理 4.15。 假设与 $\mathbb{S}$ 相关联的每个导子映射在$\zeta(R)\mathbb{T}$上都为零。设 A 是 $\mathbb{S}$中的一个本质特殊子扩张。那么， R 中的每个一致或本质左理想 L 都可提升为 A中的一个一致（或本质）左理想 $A \cap AL$； $\zeta(A) = A \cap \zeta(R)\mathbb{T}$。而且，如果 R 具有足够多的一致左理想，那么A 也如此，并且一致维数(A) =一致维数(R)。

值得指出的是，即使将环境斜多项式环 $\mathbb{S}$ （作为其自身的特殊子扩张）限制到经典情形，上述定理在以下方面仍比其经典类比 [Mat95，定理 2.4] 更强：

❍R的一致维数不必有限，变量集合 $\boldsymbol{X}$ 也不必有限；❍ 对所有 $\kappa \in \mathfrak{n}$，假设 $\delta_\kappa(\zeta(R)\mathbb{T}) = 0$ 可由经典的更强条件 $\zeta(R) = 0$ 推出；此外，我们得到 $\zeta(\mathbb{S}) = \zeta(R)\mathbb{T}$，这推广了经典结论：若 $\zeta(R) = 0$ 且 $\boldsymbol{X}$ 有限，则 $\zeta(\mathbb{S}) = 0$。

证明。 对 $\mathfrak{n}$ 使用归纳法，我们首先证明以下第一个断言。

每个非零左理想 L 都 R 提升为一个良好本质子模 $A \cap AL$，它属于非零左 A-模 AL。如果 $\mathfrak{n}$ 是零序数，那么 $\mathbb{S}$ 退化为基环 R，而 A 则成为 R中的一个良好本质子环，因此， $A \cap AL$ 显然是 AL中的一个良好本质左 A-子模。设 $\mathfrak{n}$ 非零，而

所需结果对所有序数 $\kappa < \mathfrak{n}$均成立。对于极限序数 $\mathfrak{n}$，根据 $\mathbb{S}$的本质特殊子扩张的定义，该结果对某个子集 $\Lambda \subset \mathfrak{n}$ 成立，其中$A = \cup_{\kappa\in\Lambda} A_\kappa$是截断子环的递增并，并且对于 $\kappa \in \Lambda$的每个 A_κ都是 $\mathbb{S}_\kappa$中的本质特殊子扩张。由归纳假设可知，对于 $\kappa \in \Lambda$ 的每个 $A_\kappa \cap A_\kappa L$ 都是$A_\kappa L$中的良好本质左 A_κ-子模。由于 AL 中的每个有限子集都必然完全包含于某个满足 $\kappa \in \Lambda$的 $A_\kappa L$ 中，因此可得， $A \cap AL$ 仍然是 AL中的良好本质左 A-子模。接下来考虑后继序数的情形， $\mathfrak{n} = \kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\}$，其中 κ为某个序数。在这里，根据定义 4.7，$\sim A = A_{\kappa+1}$ 是某个 A-子环 R的良好本质子环。因此，$\sim A$ 是 A中的良好本质左 A-子模，从而 $A \cap AL$ 也是 A的非零左A-$\sim$-子模 AL 中的良好本质子模。至此，我们关于第一个断言的证明完成。

作为直接推论，命题 4.2 表明，基环 R的任意非零左理想的直和$\oplus_{i\in I} L_i$都可提升为 A中非零左理想的直和 $\oplus_{i\in I}(A \cap AL_i)$。因此，鉴于要应用命题 2.4（充分发挥其全部效力），定理的最后一部分可由关于一致左理想和本质左理想的断言推出，我们现在来证明该断言。

给定一致左理想 $L \subset R$和本质左理想 $K \subset R$， $A \cap AL$ 作为 A中的左理想是一致的，而 $A \cap AK$ 作为 A中的左理想是本质的。此外， $\zeta(A) = A \cap \zeta(R)\mathbb{T}$。

我们将对序数 $\mathfrak{n}$进行超限归纳。若 $\mathfrak{n}$ 是零序数，则 $\mathbb{S}$ 退化为基环 R，且 A 是 R中的良好本质子环，因此由命题 2.6 可得所需结论。现在转向归纳步骤，假设序数 $\mathfrak{n}$ 非零，且对于每个小于 $\mathfrak{n}$的序数，所需结论均成立。

极限序数情形。如前面已经数次指出的，对于一致或本质理想的提升，我们将看到，这一极限序数情形本质上归结为应用归纳假设；但对于左奇异理想的刻画，则需要采用一种间接技巧。定义 4.7(c) 给出了某个子集 $\Lambda \subset \mathfrak{n}$，其中 $A = \cup_{\kappa\in\Lambda} A_\kappa$ 是由子环递增并得到的，并且对于每个 A_κ和 $\kappa \in \Lambda$， A_κ都是截断斜多项式环 $\mathbb{S}_\kappa$的本质特殊子扩张。因此，归纳假设表明，对于所有 $\kappa \in \Lambda$，$A_\kappa \cap A_\kappa L$和 $A_\kappa \cap A_\kappa K$分别是 A_κ中的一致左理想和本质左理想。给定任意非零多项式 f、 $g \in A \cap AL$和 $h \in A$，它们只涉及有限个变量，并且存在某个 $\kappa \in \Lambda$使得 f、 $g \in A_\kappa \cap A_\kappa L$，而 $h \in A_\kappa$；由此可得 $Af \cap Ag \supset A_\kappa f \cap A_\kappa g \neq 0$以及（$A \cap AK$）$\cap Ah \supset$（$A_\kappa \cap A_\kappa K$）$\cap A_\kappa h \neq 0$。特别地，对于每个 $a \in \zeta$（R）， $A \cap A\mathrm{a}_R$（a）是 A的一个包含于 a_A（a）中的本质左理想，这表明 ζ（R）$\subset \zeta$（AR）。此外，由于 R的每个非零左理想I都会提升为 A中的非零左理想 $A \cap AI$，命题 4.14 适用，从而表明 ζ（A）$= A \cap \zeta$（R）$\mathbb{T}$。因此，所需结果在极限序数情形下得证。

后继序数情形： $\mathfrak{n} = \kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\}$。正如我们现在将看到的，这个非常复杂的步骤实际上已由定理 4.12 处理。下面我们设：

$$x = x_\kappa, \alpha = \alpha_\kappa, \delta = \delta_\kappa \text{ and } S = \mathbb{S}_\kappa \text{ so that, } \mathbb{S} = S[x; \alpha, \delta].$$

为应用主要定理 4.12，环 $S = \mathbb{S}_\kappa$ 是系数环 R上的双射型多元斜多项式环，具有以下性质，其中 (i,ii) 是定理 4.12 的设定所预期的。

(i) S 作为左 R-模已经是自由的，其 R-基由标准项的截断子集 $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}(x_\eta : \eta \in \kappa)$给出；并且根据命题 4.6，每个$R$-良好多项式 $p \in S$在 S中都具有良好湮灭子：$a_S(p) = Sa_R(p)$。

(ii) R 中左理想的每个直和都提升为 S中左理想的一个直和（命题 4.2）。

(iii) 根据超限归纳假设，$\zeta(S) = \zeta(R)\mathbb{T}_\kappa$。根据该定理的主要假设，$\delta(\zeta(S)) = \delta(\zeta(R)\mathbb{T}_\kappa) = 0$。
现在，根据定义 4.7(c)，我们知道 A 是 $\mathbb{S} = S[x$中某个由$\sim$规定的特殊子扩张 A 的良好本质子环；$\alpha, \delta]$。由于诱导子环 $\sim A_{(\mathrm{d}_{\tilde{A}})} \subset S$至少是一个 R-子环，命题 4.14 保证 $\zeta(A_{(\mathrm{d}_{\tilde{A}})}) \subset \zeta(R)\mathbb{T}_\kappa$，$\sim$从而 $R \cap \zeta(A_{(\mathrm{d}_{\tilde{A}})}) \subset \zeta(R)$。这一事实连同上述性质 (iii) 表明引理 4.10(c) 适用，并得出如下关键事实：

$\sim A$ 已经满足定理 4.12 关于指定次数的 R-良性多$\sim$项式的主要条件：Aa 对所有非零标量 $a \in R$都包含一个次数为 $\mathrm{d}_{\tilde{A}}$ 的 R-良性多项式 x。

$\sim$此外，根据定义 4.7(c)，对于每个可取的 x次数 $m \in \mathrm{Deg}_x(A)\sim$，诱导子环 $A_{(m)}$ 仍然是截断斜多项式环 $S = \mathbb{S}_\kappa$的本质特殊子扩张。因此，归纳假设保证$\sim$ $\sim$ $\sim A_{(m)}L$ 是一致的，而 $A_{(m)}K$ 是 $A_{(m)}$中的本质左理想。由此我们证明了，对于一元斜多项式环 $\mathbb{S} = S[x$的本质特殊子扩张 A，α、$\delta]$满足定理 4.12 的所有假设，从而 $A \cap AL$ 和 $A \cap AK$ 分别是 A中的一致左理想和本质左理想。特别地，$\zeta(R) \subset \zeta(AR)$；而本证明的第一个论断已保证，对于 R的所有非零左理想 I，$A \cap AI \neq 0$。因此，命题 4.14 适用，得到 $\zeta(A) = A \cap \zeta(R)\mathbb{T}$。这就证明了，在 R 中的每个一致或本质左理想 L，都提升为 A 中的一致（或分别为本质）左理想 $A \cap AL$，并且 $\zeta(A) = A \cap \zeta(R)\mathbb{T}$。至此，定理得证。□

现在我们将研究 $\mathbb{S}$ 中本质特殊子扩张的（半）素性；与往常一样，“（半）素”是“素（或分别为半素）”的简写。考虑一个单射型的环境一元斜多项式环 $\mathcal{S} = S[x; \alpha, \delta]$对于一个 R 子环 $A \subset \mathcal{S}$，我们称：

A 是 $\mathcal{S}$ 中一个单射型特殊子扩张，前提是 A 具有定义 4.7(a) 中的特殊形式，其中对于 $0 \neq m \in \mathrm{Deg}_x(A)$，只要求关联的 R 子环 $A_{(m)}$ 上的诱导端同态 $\alpha_{(m)}$ 是单射的。

命题 4.16. 设 $\mathcal{S} = S[x; \sigma, \delta]$ 为一元斜多项式且为单射型，$A \subset \mathcal{S}$ 为任意单射型特殊子扩张。假设 $A \cap S$ 具有

左湮灭子升链条件。则 A 为（半）素，只要每个诱导子环 $A_{(m)}$ 对每个 $m \in \mathrm{Deg}_x(A)$均为（半）素。

证明。 由 [LM03，命题 3.6] 可知：若 S 是（半）素的，则 $\mathcal{S}$也是如此。这一结果的证明思路可加以改造并推广到当前情形。设 I 是 A 中的一个理想，且 $m \in \mathrm{Deg}_x(A)$；对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义：

$$I_{m,n} = \{p \in A_{(m)} : \exists w \in \mathcal{S},\, p\lambda_m^n + w \in I,\, \deg_x(w) < nm\}.$$

(ı). 若 I 含有一个次数为 m的非零多项式，则$I_{m,1} \neq 0$ 且$I_{m+d,1} \neq 0$ 对每个 $d \in \mathrm{Deg}_x(A)$。事实上，假设 I 含有一个非零多项式f，且 $\deg_x(f) = m$。则对于某个 $m \in \mathbb{N}$，有 $f = px^m + f'$，并且$f' \in A$，其中 $\deg_x(f') < m$。 A 的特殊形式保证了某个 $u \in A_{(m)}$ 作为 S 中的元素是正则的，且满足 $upx^m = p'\lambda_m \neq 0$，这表明$0 \neq p' \in I_{m,1}$。接下来，任取 A中一个可实现的 x次，这样我们便有特殊元素$\lambda_d = \upsilon_d x^d \in A \cap \mathcal{C}(\mathcal{S})$，满足 $\upsilon_d \in \mathcal{C}(S) \subset \mathcal{C}(\mathcal{S})$。于是得到

$$\lambda_d uf = \upsilon_d x^d p'\upsilon_m x^m + \lambda_d uf' = \upsilon_d \alpha^d(p'\upsilon_m)x^{m+d} + \Delta \in I,$$

其中，元素 $\upsilon_d \alpha^d(p'\upsilon_m) \in S$ 非零（因为 $\alpha^d(p'\upsilon_m)$ 也非零，而 υ_d是 S的正则元），且 Δ 是属于 A 并满足 $\deg_x(\Delta) < m + d$的某个多项式。这表明 I包含一个 x-次数为 $m + d$的多项式，因此，与前面一样，$I_{m+d,\,1} \neq 0$。

(ii). 固定 $m \in \mathbb{N}$。那么，$(I_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $A_{(m)}$中左理想的一个递增序列；对某个 N_m，有 $\mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,n}) = \mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,2n})$ 对所有 $n \geq N_m$成立；并且对所有 $k, n \in \mathbb{N}$，$\alpha^k(_m)(I_{m,n}) \subset I_{m,n+k}$。显然，每个 $I_{m,n}$都是 $A_{(m)}$中的左理想；将 I 中的元素右乘特殊元素 $\lambda_m \in A \cap \mathcal{C}(\mathcal{S})$ 可得，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$I_{m,n} \subset I_{m,n+1}$。因此，由于环 $A \cap S$ 满足左湮灭子升链条件，它满足右湮灭子降链条件，并且存在某个 $N_m \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N_m$，$\mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,n}) = \mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,2n})$。接下来， A 的特殊形式保证对所有 $v \in A_{(m)}$：

$$\deg_x(\lambda_m v - \alpha_{(m)}(v)\lambda_m) < m, \text{ which implies for all } n \in \mathbb{N} \text{ that}$$
$$\deg_x(\lambda_m^n v - \alpha_{(m)}^n(v)\lambda_m^n) < nm.$$

因此，对于所有 k， $n \in \mathbb{N}$都有 $\alpha^k{}_{(m)}(I_{m,\,n}) \subset I_{m,\,n+k}$。

(iii). 现在证明 A 是（半）素的，当且仅当每个诱导子环 $A_{(m)}$ 对于每个可实现的 x次 m都是如此。结合本证明的(i,ii)小节，以下剩余论证基本上重复了证明 [LM03 命题 3.6] 的普通一元类比的论证。设 I， J是 A 的任意理想，且满足 $IJ = 0$。

对于每个可取的 x次数 m 在 A中，我们首先检验自然数N_m （由小节 (ii) 得到）满足：$I_{m,n}J_{m,n} = 0$ 对所有 $n \geq N_m$均成立。事实上，令$n \geq N_m$，则有 $\mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,n}) = \mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,2n})$。关系 $IJ = 0$ 特别推出$I_{m,n}\alpha^n(_m)(J_{m,n}) = 0$，因此， $\alpha^n(_m)(J_{m,n}) \subset \mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,n}) = \mathrm{r.a}^{A\cap S}(I_{m,2n})$，并且$I_{m,2n}\alpha^n(_m)(J_{m,n}) = 0$ 也成立。然而， $\alpha^n(_m)(I_{m,n}) \subset I_{m,2n}$，于是我们得到：$\alpha^n(_m)(I_{m,n}J_{m,n}) = \alpha^n(_m)(I_{m,n})\alpha^n(_m)(J_{m,n}) = 0$，因此，$I_{m,n}J_{m,n} = 0$，正如预期。

现在假设每个子环 $A_{(m)}$ 对于 A中每个可取的x次数 m 都是素的，并进一步假设 $J \neq 0$，我们需要检验 $I = 0$。令 m 为任意固定的可取 x次数。由于 $J \neq 0$，证明的小节 (i) 表明，对于某个 $d \in \mathbb{N}$，有$J_{d,1} \neq 0$；又由于 m 已经是A中的一个可取 x次数，根据 (i) 我们同样有$J_{m+d,1} \neq 0$，从而对所有 $n \in \mathbb{N}$都有$J_{m+d,n} \neq 0$ （因为序列 $(J_{m+d,n})_n$ 是递增的）。但是，随后对所有$n \geq N_{m+d}$都有$I_{m+d,n}J_{m+d,n} = 0$，而 $A_{(m+d)}$的素性保证对所有 $n \geq N_{m+d}$都有$I_{m+d,n} = 0$。特别地，$I_{m+d,1} = 0$，并且根据 (i) 仍可推出$I_{m,1} = 0$。后一个结论对所有可取的 x次数 m 都成立，再次应用小节 (i) 可得 $I = 0$，正如预期，因此环 A 是素的。同样地，从每个 $A_{(m)}$ 都是半素的假设出发，结合 $J = I$的上述讨论，我们也得到 A 是半素的。□

定理 4.17. 设 R 是一个（半）素左 *Goldie* 环，且 A 是 $\mathbb{S}$ 的任意本质特殊子扩张。则 A 是左 *Goldie* 环，且 一致维数(A) = 一致维数(R)；如果 A 是 $\mathbb{S}$ 中的强本质特殊子扩张，那么它还是（半）素的。

在写出证明之前，注意到对于由 $\mathbb{T}$ 的某个子集作为左 R-模生成的 $\mathbb{S}$ 的任意 R-子环 B，若 B 是左 Goldie 环，则 R 也是左 Goldie 环，因为根据命题 4.2，$\mathrm{udim}(R) \leq \mathrm{udim}(B)$。

证明。根据假设，系数环 R 是（半）素左 Goldie 环，因此由 Goldie 定理可知，R 也是左非奇异的。由命题 4.14 可得，$\mathbb{S}$ 和 A 均为左非奇异的；对于任意 R 中的非零左理想 L，所有满足 $B \cap BL \neq 0$ 的子环 $B \subset \mathbb{S}$ 也都是左非奇异的。此外，由于 R 是具有有限一致维数的环，它具有足够多的一致左理想。由定理 4.15 可得，$\mathrm{udim}(\mathbb{S}) = \mathrm{udim}(R) = \mathrm{udim}(A)$。因此，特别要证明环境斜多项式环 $\mathbb{S}$ 是（半）素左 Goldie 环，根据 Goldie 定理，只需证明 $\mathbb{S}$是（半）素的。

基于上一段已经给出的事实，我们将继续利用指标序数 $\mathfrak{n}$ 上的超限归纳法证明该定理。当 $\mathfrak{n}$ 为零序数时，$\mathbb{S}$ 与（半）素左 Goldie 系数环 R 重合，而 A 是 R 中的良好本质子环；若考虑关于 A 的附加假设，则 A 是 R 中的强良好本质子环。因此，借助命题 2.7，该定理的所有结论在零序数的情形下均成立。

接下来我们进入归纳步骤，其中 $\mathfrak{n}$ 非零，并假设该定理对所有小于 $\mathfrak{n}$的序数都成立。先考虑极限序数的情形，环境斜多项式环 $\mathbb{S} = \cup_{\kappa\in\mathfrak{n}}\mathbb{S}_\kappa$ 显然是（半）素环，因为它是由一列环递增并得到的并集，而根据归纳假设，这些环各自都是（半）素环。因此，结合引言段落可知，$\mathbb{S}$是（半）素左 Goldie 环；此外，由于左湮灭子上的升链条件 可传递到子环，A是左 Goldie 环，并且对于满足以下条件的每个 A_κ，$\kappa \in \mathfrak{n}$，A_κ 都是 $\mathbb{S}_\kappa$中的本质特殊子扩张。接下来再假设 A 是 $\mathbb{S}$的强本质特殊子扩张。于是，由定义 4.7(c)可得某个子集 $\Lambda \subset \mathfrak{n}$，使得 $A = \cup_{\kappa\in\Lambda}A_\kappa$，并且对于每个 $\kappa \in \Lambda$，每个 A_κ 仍然是截断斜多项式环$\mathbb{S}_\kappa$的强本质特殊子扩张。因此，归纳假设表明，对于 $\kappa \in \Lambda$，A_κ是（半）素环，于是

环 $A = \cup_{\kappa\in\Lambda} A_\kappa$ 是（半）素环，因为它是（半）素环的并集。这就完成了定理在极限序数情形下的证明。

现在继续讨论后继序数的情形： $\mathfrak{n} = \kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\}$，其中某个序数为 κ。照例，令 $x = x_\kappa$、 $\alpha = \alpha_\kappa$ 和 $\delta = \delta_\kappa$，于是， $\mathbb{S} = \mathbb{S}_\kappa[x;\ \alpha、\ \delta]$ 是定义在 $\mathbb{S}_\kappa$ 上的双射型一元斜多项式环。对于所有序数 $\kappa' \le \kappa$，归纳假设保证每个 $\mathbb{S}_{\kappa'}$ 都是（半）素的，因此作为具有有限一致维数的（半）素左非奇异环，它也是（半）素左 Goldie 环。特别地， $\mathbb{S}_\kappa$ 已经满足左湮灭子升链条件，应用命题 4.16可知 $\mathbb{S}$ 是（半）素的。因此， $\mathbb{S}$ 是半素左 Goldie 环，而其子环 A （它已经具有有限一致维数）是左 Goldie 环。还需证明，在附加假设 A 是 $\mathbb{S}$ 中的强本质特殊子扩张时， A 是（半）素的。根据定义，环 $A = A_{\kappa+1}$ 是某个~特殊子扩张 A 中的强良好本质子环，该子扩张属于一元斜多项式 $\mathbb{S}_\kappa[x;\ \alpha、\ \delta]$，并且对于 A 中每个可取的 x 次数 m，都要求相应的子环 $A_{(m)}$ 也是截断斜多项式~环 $\mathbb{S}_\kappa$ 的强本质特殊子扩张。因此，归纳假设保证每个 $A_{(m)}$ 都是（半）素的，并且~再次应用命题 4.16可得 A 是（半）素的。然而，得益于命题 2.6(a)， $\mathrm{udim}(A) = \mathrm{udim}(A)$ 已经有限，而 A 已经是左非奇异的（如本证明开头段落所述）。~因此我们得出结论： A 是（半）素左 Goldie 环，进而由命题 2.7可知 A 是（半）素的，从而完成定理的证明。□

5. 二元斜多项式环中的一些本质特殊子扩张

我们考虑整数参数

$p,\ e,\ r \ge 2$ 和 $c,\ d \ge 1$，其中 p 是一个素数，而 d 是 $e - 1$.的因子

环境环是一个二元 Ore 扩张 $\mathbb{S} = R\langle x,\ y\rangle: yx = (x + px^e)$，它具有自然的左 R-基，其基由独立变量 $x,\ y$ 中的标准项集合 $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x,\ y) = \{x^n y^m:\ m,\ n \in \mathbb{N}\}$ 给出。用 $\mathrm{term}(f)$ 表示每个 $f \in \mathbb{S}$ 中出现的所有项的集合。粗略地说，我们的设定使我们能够针对每对正整数 $a,\ b$，研究由项 $x^a y^b$ 在 R 上生成的子扩张 A of$\mathbb{S}$ 的一致维数，并满足以下条件：对于 A 中的每个非零多项式 f，$\mathrm{term}(f) \subset A$。

回忆一下，对于所有 $m,\ n \in \mathbb{N}$，二项式系数 $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 在 $0 \le n < m$ 时为零。我们需要计算 $\binom{p^r}{n} p^n$ 的 p-进赋值，其中 $1 \le n \le p^r$，而 $v_p(n)$ 是满足 $p^k \mid n$ 的最大自然数 k。

引理 5.1。 每个 $n \in [\![1,\ p^r]\!]$，记 $s_p(n)$ 为 n 的基-p 数位之和。我们有 $v_p\left(\binom{p^r}{n} p^n\right) \ge r + n - v_p(n!) \ge r + \frac{(p-2)n + s_p(n)}{p-1} \ge r + 1$。

证明。 由于 p 是一个素数，对于所有 $0 \neq u, v \in \mathbb{N}$，都有 $v_p(uv) = v_p(u)v_p(v)$；显然，$v_p\left(\binom{p^r}{n}p^n\right) \geq r + n - v_p(n!)$。但是，令 ℓ 为 n 的基-p 数位个数，由勒让德公式可得 $v_p(n!) = \sum_{s=1}^{\ell} \lfloor n/p^s \rfloor = \frac{n - s_p(n)}{p-1} \leq \binom{n-1}{p-1}$，从而得到所需结果。□

命题 5.2. 设 R 的特征为 p^{r+1}。于是我们得到一个 R-环自同构 $\alpha\colon R[x] \to R[x]$，满足 $\alpha(x) = x + px^e$，其阶为有限阶 p^r。因此，项 x^{p^r} 和 y^{p^r} 是 *Ore* 扩张 $\mathbb{S} = R[x][y; \alpha]$中的中心元素。

证明。 对于 $0 \neq g \in R[x]$，赋值 $v_x(g)$ 表示满足 x^k整除 g的最大 $k \in \mathbb{N}$；而 $v_x(0) = \infty$。由 α的定义可立即得到，对于每个 $f \in R[x]$，都有 $\alpha(f) = f + pg$，其中某个 $g \in R[x]$ 满足 $v_x(g) > v_x(f - f(0))$。因此，可以归纳地构造元素 $u_1, u_2, \ldots$，它们属于 $R[x]$，且满足：

$$u_0 = x, u_1 = x^e,\ \alpha(u_m) = u_m + pu_{m+1},\ v_x(u_{m+1}) > v_x(u_m) \text{ and}$$
$$\alpha^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k u_k \text{ for all } m \in \mathbb{N}.$$

根据引理 5.1，对于每个 $k \geq 1$，自然数 $\binom{p^r}{k}p^k$ 都是 R的特征p^{r+1}的倍数。由上述关系可知，p^r是满足 $\alpha^m(x) = x$的最小正整数 m，这证明了 α是一个具有有限阶 p^r的 R-环自同构。直接可得，$\alpha(x^{p^r}) = (x + px^e)^{p^r} = x^{p^r} \sum_{k=0}^{p^r} \binom{p^r}{k} p^k x^{k(e-1)} = x^{p^r}$。因此，$x^{p^r}, y^{p^r}$属于 $\mathbb{S}$的中心。

□

接下来，对每个 $m \in \mathbb{N}$，我们定义以下界 $\mathrm{S}_m = \mathrm{S}_m(e)$ $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_{r,\,c}(e) \in \mathbb{N}$ 和 $\mathrm{S}_m = \mathrm{S}_{m,\,r,\,c}(e)$：

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}_m = \sum_{s=0}^{m-1} e^s = \frac{e^m - 1}{e - 1};\ \boldsymbol{m} \text{ satisfies the relation: } c\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}-1} \leq r < c\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}, \\ &\overline{\mathrm{S}}_m = c\mathrm{S}_m \text{ for } 0 \leq m \leq \boldsymbol{m};\ \overline{\mathrm{S}}_{\boldsymbol{m}+s} = c(s + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}) + sr(e-1) \text{ for } s \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

显然：$\mathrm{S}_0 = 0,\ \mathrm{S}_1 = 1 \leq r,\ \mathrm{S}_{m+1} = 1 + \mathrm{S}_m e$对所有 $m \in \mathbb{N}$均成立。

接着，我们考虑以下两个由参数决定的项集合（取决于上面设定的整数参数 $c,\ d \geq 1$，其中 wit $d \mid e-1$）：

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{T}} &= \{x^n y^m :\ m, n \in \mathbb{N} \text{ and } n - cm \in d\mathbb{Z}\}; \\ \mathrm{T} &= \{x^n y^m :\ m, n \in \mathbb{N},\ n - cm \in d\mathbb{N},\ n \leq \overline{\mathrm{S}}_m\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

命题 5.3。 设 R 的特征为 p^{r+1}。那么，*Ore* 扩张 $\mathbb{S} = R\langle x, y :\ yx = (x + px^e)y\rangle$的左 R-子模 $A = \widetilde{\mathrm{T}}R\mathrm{T}$和 $A = R\mathrm{T}$是子环，满足 A 是 A 中的强良好本质子环，而后者是 $\mathbb{S}$中的特殊子扩张。

在开始深入探讨该命题的复杂证明之前，先提醒读者注意以下几点，其中一些可从下文证明的细节中得出。

(i) 如果 $d = e - 1$，那么 A 是由以下条件刻画的 $\mathbb{S}$ 的子扩张：$x^c y \in A$，并且对于所有 $f \in A$，$\mathrm{term}(f) \subset A$。

(ii) 环 A 不是 R 上的斜幺半群环，也不能以任何有用的方式被视为 R 的斜 $\widetilde{}$ 多项式环扩张。除非 $\sim d$ 等于 1，否则 A 也同样如此；在后一种情况下， A 与 $\mathbb{S}$ 重合。

(iii) 假设情形为 $d \neq 1$。那么，本质特殊子扩张 A of$\mathbb{S}$ 并非特殊子扩张，因此不能依赖经典方法直接考察 A 的一致维数。特殊子扩张 A of$\mathbb{S}$ 并非 $\mathbb{S}$ 的本质子环。

$\widetilde{}$(iv) 因此，$\mathrm{udim}(A) = \mathrm{udim}(A)$。若 R 具有足够多的一致左理想，则可应用定理 4.12（或更好的定理 4.15），从而得到：对于 $\sim$ $\sim A$ 和 A，结论同样成立，且 $\mathrm{udim}(A) = \mathrm{udim}(A) = \mathrm{udim}(R) = \mathrm{udim}(\mathbb{S})$。若 R 是（半）素左 Goldie 环，则根据定理 4.17， A 和 A 也都同样成立。

证明。 给定 m， $n \in \mathbb{N}$ 我们首先需要明确计算 $\alpha^m(x^n)$。为此，我们对所有 m, n， $k \in \mathbb{N}$ 归纳定义以下自然数：

$$\mathrm{C}^k_{n,1} = \mathrm{C}^k_n = \binom{n}{k};\ \mathrm{C}^k_{n,m+1} = \sum_{l=0}^{N_{n,m}(k)} \mathrm{C}^l_{n,m}\mathrm{C}^{k-l}_{n+l(e-1)} = \sum_{l=l_{k,n}}^{N_{n,m}(k)} \mathrm{C}^l_{n,m}\mathrm{C}^{k-l}_{n+l(e-1)},$$

其中令 $N_{n,m}(k) = \min(k, n\mathrm{S}_m)$ 且 $l_{k,n} = \max(0, \lceil (k-n)/e \rceil)$.

在这些设定下，我们很容易推出下一个公式：

$$\alpha(x^n) = (x + px^e)^n = \sum_{k=0}^{\min(r,n)} \mathrm{C}^k_n p^k x^{n+k(e-1)};\ \alpha^m(x^n) = \sum_{k=0}^{N_{n,m}(r)} \mathrm{C}^k_{n,m} p^k x^{n+k(e-1)}. \quad (5.3)$$

当 $m = 0, 1$ 时，该公式显然成立。假设它对固定的 $m \in \mathbb{N}$ 成立。注意到 R 的特征为 p^{r+1}，并令对所有 $k_1 \in [\![1, N_{n,m}(r)]\!]$， $N_\prime(k_1) = \min(r - k_1, n + k_1(e-1))$，我们有：

$$\alpha^{m+1}(x^n) = \sum_{k_1=0}^{N_{n,m}(r)} \sum_{k_2=0}^{N'(k_1)} \mathrm{C}^{k_1}_{n,m}\mathrm{C}^{k_2}_{n+k_1(e-1)} p^{k_1+k_2} x^{n+(k_1+k_2)(e-1)}.$$

令 $k = k_1 + k_2$，则有 $k_1 + k_2 \leq r$ 且 $k_1 + k_2 \leq n\mathrm{S}_m + (n + n\mathrm{S}_m(e-1)) = n \cdot (1 + \mathrm{S}_m e) = n\mathrm{S}_{m+1}$，因此得到：

$$\alpha^{m+1}(x^n) = \sum_{k=0}^{N_{n,m+1}(r)} \mathrm{C}^k_{n,m+1} p^k x^{n+k(e-1)},\ \text{with}\ \mathrm{C}^k_{n,m+1} = \sum_{l=0}^{N_{n,m}(k)} \mathrm{C}^l_{n,m}\mathrm{C}^{k-l}_{n+l(e-1)}\ \text{as expected.}$$

现在，我们将命题的断言分成三个陈述来继续证明。(i). 二者 A 和 $\widetilde{A}$ 都是 $\mathbb{S}$ 中的子环。任取项 $\lambda = x^n y^m$, $\tau = x^{n'} y^{m'} \in \widetilde{\mathrm{T}}$，我们 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 将证明乘积 $\lambda\tau$ （在 $\mathbb{S}$ 中）属于 A。根据 T 的定义，有 $n - cm, n' - cm' \in d\mathbb{Z}$。若 $m = 0$，则无需证明；因此我们假设 $m \geq 1$。我们有：

$$\lambda\tau = x^n \alpha^m(x^{n'}) = \sum_{k=0}^{\min(r, n'\mathrm{S}_m)} \mathrm{C}^k_{n',m} p^k x^{n+n'+k(e-1)} y^{m+m'}.$$

考虑 $0 \leq k \leq \min(r, n'\mathrm{S}_m)$ 的指数 $n_k = n + n' + k(e-1)$。每个数 $n_k - c(m+m')$ $= (n - cm) + (n' - cm') + k(e-1)$ 都属于 $d\mathbb{Z}$，因为这是

$n - cm$和 $n' - cm'$的情形，而 d是 $e - 1$的因子。因此，在这~ ~步，我们得出 $\lambda\tau$属于 A，且 A是 $\mathbb{S}$的子环。

接下来，继续假设 $\lambda, \tau \in \mathsf{T}$，我们要证明乘积 $\lambda\tau$属于 A。为此，只需验证在上述 $\lambda\tau$的表达式中，对于 $0 \le k \le \min(r, n'\mathsf{S}_m)$，各指数 $n_k = n + n' + k(e-1)$ 均不超过 $\mathsf{S}_{m+m'}$。这里回顾一下，由 (5.1) 可知

$$\bar{\mathsf{S}}_m = c\mathsf{S}_m \text{ for } 0 \le m \le \boldsymbol{m}, \text{ and } \bar{\mathsf{S}}_{\boldsymbol{m}+s} = c(s + \mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}) + sr(e-1) \text{ for all } s \in \mathbb{N};$$

$\boldsymbol{m} \ge 2$是满足 $c\mathsf{S}_{\boldsymbol{m}-1} \le r < c\mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}$的自然数

根据 T 的定义，数 $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$满足以下约束：

$$mc \le n \le \bar{\mathsf{S}}_m,\ m'c \le n' \le \bar{\mathsf{S}}_{m'}.$$

因此，n_k的最大值为 $N = \mathsf{S}_m + \mathsf{S}_{m'} + \bar{\min}(r, \bar{\mathsf{S}}_m\mathsf{S}_{m'})\ (e-1)$，我们希望验证 $N \le \mathsf{S}_{m+m'}$。由对称性（N关于 m, m'），不妨进一步假设 $1 \le m \le m'$。

(i). 情形 $m + m' \le \boldsymbol{m}$。这里，$\bar{\mathsf{S}}_m = c\mathsf{S}_m$、$\bar{\mathsf{S}}_{m'} = c\mathsf{S}_{m'}$、$\bar{\mathsf{S}}_{m+m} = c\mathsf{S}_{m+m'}$，因此，

$$\begin{aligned} N &\le c[\mathsf{S}_m + \mathsf{S}_{m'} + \mathsf{S}_m\mathsf{S}_{m'}(e-1)] = c[\mathsf{S}_m + \mathsf{S}_{m'}(1 + \mathsf{S}_m e - \mathsf{S}_m)] \\ &= c[\mathsf{S}_m + \mathsf{S}_{m'}(\mathsf{S}_{m+1} - \mathsf{S}_m)] = c[\mathsf{S}_m + \mathsf{S}_{m'}e^m] = c\mathsf{S}_{m+m'} = \bar{\mathsf{S}}_{m+m'}. \end{aligned}$$

(ii). 情形 $m + m' > \boldsymbol{m}$。这里需要考虑三种子情形。

✧子情形：$m \ge \boldsymbol{m}$。于是，$m' \ge \boldsymbol{m}$同样成立，并且$\bar{\mathsf{S}}_m\bar{\mathsf{S}}_{m'} \ge \mathsf{S}_{\boldsymbol{m}} > r$。因此令 $m = \boldsymbol{m} + s$以及 $m' = \boldsymbol{m} + s'$，其中 $s,\ s' \in \mathbb{N}$，我们计算得：

$$\begin{aligned} N &= \bar{\mathsf{S}}_m + \bar{\mathsf{S}}_{m'} + r(e-1) \\ &= c(s + \mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}) + sr(e-1) + c(s' + \mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}) + s'r(e-1) + r(e-1) \\ &= c(s + s' + 2\mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}) + (s + s' + 1)r(e-1) \\ \bar{\mathsf{S}}_{m+m'} &= c(\boldsymbol{m} + s + s' + \mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}) + (\boldsymbol{m} + s + s')r(e-1); \end{aligned}$$

$$\bar{\mathsf{S}}_{m+m'} - N = c(\boldsymbol{m} - \mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}) + (\boldsymbol{m} - 1)r(e-1)$$

利用 $\mathsf{S}_{\boldsymbol{m}} = 1 + \mathsf{S}_{\boldsymbol{m}-1}e$这一事实，而 $c\mathsf{S}_{\boldsymbol{m}-1} \le r < c\mathsf{S}_{\boldsymbol{m}}$，我们有：

$$\begin{aligned} \bar{\mathsf{S}}_{m+m'} - N &= c(\boldsymbol{m} - 1) - c\mathsf{S}_{\boldsymbol{m}-1}e + (\boldsymbol{m} - 1)r(e-1) \\ &\ge c(\boldsymbol{m} - 1) + [(\boldsymbol{m} - 1)(e-1) - e]r. \end{aligned}$$

由于 $e,\ \boldsymbol{m} \ge 2$，上面的最后一个表达式显然在 $\boldsymbol{m} \ge 3$时为正。而如果$\boldsymbol{m} = 2$，那么根据定义，我们必有 $c = c\mathsf{S}_1 \le r < c\mathsf{S}_2 = c(1+e)$，且 $\mathsf{S}_{m+m'} - N = c(1-e) + r(e-1) = (r-c)(e-1) \ge 0$。因此可得 $N \le \mathsf{S}_{m+m'}$，如所要求。

✧子情形： $1 \le m < \boldsymbol{m} \le m'$。这里同样已经知道 $\mathrm{S}_m\mathrm{S}_{m'} \ge \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}} > r$，但这一次，$\mathrm{S}_m = c\mathrm{S}_m < c\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}$ 且

$$\begin{aligned} N &= \overline{\mathrm{S}}_m + \overline{\mathrm{S}}_{m'} + r(e-1) \\ &= c\mathrm{S}_m + c(m' - \boldsymbol{m} + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}) + (m' - \boldsymbol{m} + 1)r(e-1); \\ \overline{\mathrm{S}}_{m+m'} &= c(m + m' - \boldsymbol{m} + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}) + (m + m' - \boldsymbol{m})r(e-1); \\ \overline{\mathrm{S}}_{m+m'} - N &= cm - c\mathrm{S}_m + (m-1)r(e-1) \quad \text{(and using that } c\mathrm{S}_m \le r\text{)}, \\ &\ge c[m + ((m-1)(e-1) - 1)\mathrm{S}_m] \ge 0, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式显然成立，因为对于 $m = 1$，我们有 $\mathrm{S}_1 = 1$。

✧子情形： $1 \le m \le m' < \boldsymbol{m}$。此处，

$$N = c\mathrm{S}_m + c\mathrm{S}_{m'} + \min(r, \mathrm{S}_m\overline{\mathrm{S}}_{m'})(e-1) \le c\mathrm{S}_m + c\mathrm{S}_{m'} + r(e-1).$$

令 $m + m' = \boldsymbol{m} + s$，其中某个 $s \ge 1$；我们有：$\mathrm{S}_{m+\overline{m'}} = c(s + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}) + sr(e-1)$，且 $\mathrm{S}_{m+m'}\overline{} - N \ge c(s + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}} - \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{m'}) + (s-1)r(e-1)$。由于 $\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}} = 1 + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}-1}e$，而 $c\mathrm{S}_m$，$c\mathrm{S}_{m'} \le c\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}-1} \le r$，因此可得：

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}_{m+m'} - N &\ge c[1 + s + (\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}-1} - \mathrm{S}_m) + (\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}-1} - \mathrm{S}_{m'})] + c\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}-1}(e-2) + (s-1)r(e-1) \\ &\ge c(1+s) > 0. \end{aligned}$$

这就完成了证明：T 中任意两个项的乘积（在 $\mathbb{S}$中）都属于 A，从而证明 A 是 $\mathbb{S}$中的一个子环。特别要注意，由于项 $x^c y$属于 T，因此可知 A 已经包含 $\mathbb{S}$ 的子扩张 B，其特征是满足条件：对于所有 $f \in B$，$x^c y \in B$ 且项$(f) \subset B$。并且，当 d与 $e-1$重合时，从 $x^c y \in B$ 出发并应用“闭包”条件，即对于所有 $f \in B$，项$(f) \subset B$，很容易证明（通过对 y-次数进行归纳）$\mathrm{T} \subset B$。

(ii). 对每一个有限子集 $E \subset \widetilde{\mathrm{T}}$，都存在某个 $v \in \mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r})$ 使得 $vE \subset \mathrm{T}$；因此，A 是 A中的一个强良好本质子环。命题 5.2 保证子集 $\mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r}) = \{x^{ap^r} y^{bp^r}: a, b \in \mathbb{N}\}$ 包含于 $\mathbb{S} = R[x][y$ 的中心；$\alpha]$。因此，对所有 $v \in \mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r})$ 与 $\tau \in \mathbb{T}(x, y)$，乘积 $v\tau$（在 $\mathbb{S}$ 中）仍$\widetilde{}$是位于 $\mathbb{T}(x, y)$ 中的一项。给定每一个 $\tau \in \mathrm{T}$，我们将证明存在某个$v_\tau \in \mathrm{T} \cap \mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r})$ 使得 $v_\tau\tau \in \mathrm{T}$。由定义，$\tau = x^{cm+\varepsilon kd} y^m = x^{\varepsilon kd} \cdot x^{cm} y^m$，其中 m、$k \in \mathbb{N}$ 且 $\varepsilon \in \{1, -1\}$（使得 $cm + \varepsilon kd \ge 0$），而项 $x^{cm} y^m$ 已经位于 T 中。因此我们只需找到 v、$\lambda \in \mathrm{T} \cap \mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r})$，使得 vx^{kd}、$\lambda x^{-kd} \in \mathrm{T}$。选取一个正自然数 $a \ge \lceil \frac{1}{p^r} \cdot (\frac{k}{r} + \boldsymbol{m}) \rceil$ 并令 $v = x^{cap^r} y^{ap^r} \in \mathrm{T}$，我们将验证乘积项 $vx^{kd} = x^{cap^r + kd} y^{ap^r}$ 仍位于 T 中。事实上，由于$p \ge 2$与 $a \ge 1$，成立 $ap^r > r$，从而界 S_{ap^r}——即 T 中 y-次数为 ap^r 的那些项的最高 x-次数——按照定义方程 (5.1) 由下式给出：$\mathrm{S}_{ap^r} = c \cdot (ap^r - \boldsymbol{m} + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}) + (ap^r - \boldsymbol{m})r(e-1)$。因此，鉴于对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $\mathrm{S}_m \ge m$，而 d 是 $e-1$ 的正因子，我们得到：

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}_{ap^r} - (cap^r + kd) &= c \cdot (-\boldsymbol{m} + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}) + (ap^r - \boldsymbol{m})r(e-1) - kd \\ &\ge [(ap^r - \boldsymbol{m})r - k](e-1) \ge 0. \end{aligned}$$

因此，如所期望， $v x^{kd} \in \mathrm{T}$。接下来，我们证明可以找到 $b, s \in \mathbb{N}$，使得两项 $\lambda = x^{(cb+sd)p^r} y^{bp^r}$ 与 $\lambda x^{-kd} = x^{(cb+sd)p^r - kd} y^{bp^r}$ 都位于 T 中。由于 $(cb+sd)p^r - cbp^r \in d\mathbb{N}$ 与 $[(cb+sd)p^r - kd] - cbp^r = (sp^r - k)d$，我们只需确保可以选择 b 与 s，使得

$$k \leq sp^r \text{ and } (cb+sd)p^r \leq \overline{\mathrm{S}}_{bp^r} = c \cdot (bp^r - \boldsymbol{m} + \mathrm{S}_{\boldsymbol{m}}) + (bp^r - \boldsymbol{m})r(e-1).$$

由于 $\mathrm{S}_{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{m} \geq 0$ 和 $1 \leq d \leq e-1$，只需找到自然数 b， s使得

$$\frac{k}{p^r} \leq s \leq (b - \frac{\boldsymbol{m}}{p^r})r.$$

但由于 $p^r \geq 2$，我们可以取 $b = k + \boldsymbol{m}$ 和 $s = k$。这就完成了证明：对于所有 $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}$，都存在某个 $v_\tau \in \mathrm{T} \cap \mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r})$，且满足 $v_\tau \tau \in \mathrm{T}$。

现在，由于 $\mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r})$ 包含于 $\mathbb{S}$ 的中心，对于项的每个有限子集 $E \subset \widetilde{\mathrm{T}}$，项 $v = \prod_{\tau \in E} v_\tau$ 属于 $\mathrm{T} \cap \mathbb{T}(x^{p^r}, y^{p^r})$，且 $vE \subset \mathrm{T}$。此外，由于 $\mathbb{T}(x, y)$ 的每个元素本身都是 $\mathbb{S}$ 中的正则元，我们得出 $\widetilde{A}$ 是 A的强良好本质子环。

(iii). A是 $\mathbb{S}$中的一个特殊子扩张。将 $\mathbb{S} = R[x][y; \alpha]$视为多项式环 $R[x]$ 上的单变量 Ore 扩张。回顾定义，

$\widetilde{A} = R\widetilde{\mathrm{T}}$ with $\widetilde{\mathrm{T}} = \{x^{cm+dk} y^m : m \in \mathbb{N}, -cm/d \leq k \in \mathbb{Z}\}$; thus,

$$\widetilde{A} = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\widetilde{A} \cap R[x]y^m) \text{ and } \widetilde{A} \cap R[x]y^m = R \cdot \{x^{cm+dk} : -cm/d \leq k \in \mathbb{Z}\} y^m.$$

固定 $m \in \mathbb{N}$ 后，项 x^{cm} 和 $\lambda_m = x^{cm} y^m$ 是 $\mathbb{S}$的正则元，且 $\lambda_m \in \widetilde{A} \cap R[x]y^m$；令 $\widetilde{A}_{(m)} = R[x^d]$，显然，对于每个 $f \in \widetilde{A} \cap R[x]y^m$，都存在适当的 $k \in \mathbb{N}$，使得 $x^{dk} f$ 属于 $\widetilde{A}_{(m)} \lambda_m = R[x^d] x^{cm} y^m$。此外，由于 d 整除 $e-1$，公式 (5.3) 已经表明，共轭映射 R-环自同构 $\alpha : R[x] \to R[x]$（其中 $\alpha(x) = x + px^e$）及其 m次幂α^m将 $R[x^d]$映为自身的自同构，使得：

$$\text{for all } f \in R[x^d],\ \lambda_m f = x^{cm} y^m f = x^{cm} \alpha^m(f) y^m = \alpha^m(f) \lambda_m.$$

因此，我们已经证明， A 是 $\mathbb{S}$ 的一个特殊子扩张，其中 $\mathbb{S}$ 被视为以普通多项式环 $R[x]$为底环的双射型单变量 Ore 扩张（且导子映射为零）。□

对于 $n \geq 3$，留给读者自行推导如何轻松构造 n变量的特殊子扩张 A，使其嵌入于一个 n变量的斜多项式环 $\mathbb{S}$ 中，且满足： A 不是 $\mathbb{S}$中的本质子环。同样，也可以构造 n变量的强良好本质子扩张，使其嵌入于 A 中，且 A 不是 $\mathbb{S}$中的特殊子扩张，不过证明这一点会相当繁琐（命题 5.3 的证明便是例证）。

致谢。 作者谨向执行编辑和匿名审稿人表示感谢，感谢他们的审慎考虑和宝贵意见。

参考文献

[AHJLP92] A. H Al-Huzali、S.K. Jain 和 S.R. Lopez-Permout, 《循环模具有有限Goldie维数的环》, 《代数学杂志》153（1992）, 37–40。[Cam77] V. P. Camillo, 《商模具有有限 Goldie维数的模》, 《太平洋数学杂志》（1977）, 第 69 期, 337–338。[CC73] Victor P. Camillo 和 J. Cozzens, 《关于诺特遗传环的一个定理》, 《太平洋数学杂志》45（1973）, 第 1 期, 8。[CG86] Victor P. Camillo 和 Robert Guralnick, 《Goldie 环上的多项式环通常也是 Goldie 环》, 《美国数学会会刊》98（1986）, 第 4 期, 567–568。[DGALP06] Hai Q. Dinh、Pedro A. Guil Asensio 和 Sergio R. López-Permouth, 《论环与模的 Goldie维数》, 《代数学杂志》305（2006）, 937–948。[Fai96] Carl Faith, 《Goldie-Kerr 交换环上的多项式环 II》, 《美国数学会会刊》124（1996）, 第 2 期, 341–344。[GW04] Ken R. Goodearl 和 Robert Breckenridge Warfield, 《非交换诺特环导论》, 伦敦数学会学生教材, 第二版, 剑桥大学出版社, 2004。[Hun74] Thomas W. Hungerford, 《代数》, 数学研究生教材, 第 73 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1974。[Jat72] Arun Vinayak Jategaonkar, 《阿廷环中序上的斜多项式环》, 《代数学杂志》21（1972）, 51–59。[Ker90] Jeanne Wald Kerr, 《Goldie 环上的多项式环未必是 Goldie 环》, 《代数学杂志》134（1990）, 344–352。[LM03] André Leroy 和 Jerzy Matczuk, 《半素环上 Ore 扩张的 Goldie 条件》, 克吕维尔学术出版社（2003）。[LM04] , 《Ore 扩张上的诱导模》, 《代数通讯》32（2004）, 第 7 期, 2743–2766。[Mat95] Jerzy Matczuk, 《Ore 扩张的 Goldie秩》, 《代数通讯》23（1995）, 1455–1471。[MR87] J. C. McConnell 和 J. C. Robson, 《非交换诺特环》, 数学研究生进阶丛书, 第 ~~30 卷,~~ 美国数学会, 1987。[Rey14] Armando Reyes, 《斜 PBW 扩张上的一致维数》, 《哥伦比亚数学杂志》48（2014）, 第 1 期, 79–96。[Sho72] Robert C. Shock, 《有限维环上的多项式环》, 《太平洋数学杂志》42（1972）, 第 1 期, 251–257。[Sho74] , 《阿廷条件与诺特条件的对偶推广》, 《太平洋数学杂志》54（1974）, 第 2 期, 227–235。[VHJLP03] Dinh Van Huynh、S. K. Jain 和 Sergio R. López-Permouth, 《一致维数至少为二且所有单侧理想均为 CS 的素Goldie环是半遗传的》, 《代数通讯》31（2003）, 第 11 期, 5355–5360。[Wil73] Ralph W. Wilkerson, 《有限维群环》, 《美国数学会会刊》41（1973）, 第 1 期, 10–16。

雅温得第一大学, 邮政信箱812号, 喀麦隆雅温得电子邮箱地址:
Bertrand.Nguefack@facsciences-uy1.cm