关于一维可压缩纳维-斯托克斯方程的弱解：较弱范数下数据的 Lipschitz 连续依赖性及其均匀化误差

Alexander Zlotnik

国立高等经济大学，Pokrovskii 大道 11 号，109028 莫斯科，俄罗斯 电子邮箱：azlotnik@hse.ru

arXiv:2602.03481v1 [math.AP] 3 Feb 2026

摘要。我们研究一维可压缩纳维-斯托克斯方程组在大幅不连续初始数据和三种标准类型的非齐次边界条件下的全局弱解。我们证明，解（η，u，θ）关于初始数据（η^0，u^0，e^0）在 $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ 型范数下，以及关于所有方程中的自由项在某些对偶范数下，具有 Lipschitz 型连续依赖性；其中解所处的范数略强于 $L^{2,\infty}(Q)\times L^2(Q)\times L^2(Q)$。这里，$\eta$、$u$和 θ 分别表示比容、速度和绝对温度，η^0、u^0 和 e^0 分别表示初始比容、速度和比总能，且 $Q=\Omega\times(0,T)$。我们还将这一结果应用于初始数据和自由项不连续且以周期 ε 快速振荡的情形，并推导出估计 $O(\varepsilon)$，用于衡量纳维-斯托克斯方程的解与其采用平均数据的 Bakhvalov-Eglit 双尺度均匀化版本的解之间的差异。

关键词： 一维可压缩纳维–斯托克斯方程，大的不连续初始数据，全局弱解，数据的利普希茨连续依赖性，快速振荡数据，双尺度均匀化，均匀化误差界。

*2020*年数学主题分类。主要分类：76N06、35B30、76M50；次要分类：35M33、35D30。

1. 引言

约在1980年，A.V. Kazhikhov 建立了关于一维可压缩纳维–斯托克斯方程组初边值问题（IBVPs）的全局强解著名适定性理论，该理论适用于来自索об列夫空间 $H^1(\Omega)$ 的大初始数据，并在 [14,第 2] 章中作了详细阐述。对于来自勒贝格空间的大不连续初始数据，相应的全局弱解适定性理论见 $[3,4,9,44]$,，另请参阅相关论文 $[31,38]$ 以及较新的综述 $[43]$。值得注意的是，多维情形下全局弱解的深入研究已取得进展，特别是参见 $[26,27]$,；但其唯一性尚未得到充分探讨。

后一理论包含若干关于数据的Lipschitz型连续依赖性的定理，见 $[3,44,45]$。其中第一条 [3, 定理3(a)] 所论及的是解(η,u,θ)在略强于 $L^{2,\infty}(Q)\times L^2(Q)\times L^2(Q)$的范数中，对处于 $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$型范数下的初始数据$(\eta^0,u^0,e^0)$的Lipschitz型连续依赖性，以及对动量方程与内能方程中的自由项在某些对偶范数下的依赖性（以及对处于 $W^{1,1}(0,T)$或 $L^1(0,T)$范数下的边界数据的依赖性）。此处 η、u与 θ分别为比容、速度与绝对温度，η^0、u^0 与 e^0 分别为初始比容、速度与比总能，且 $Q=\Omega\times(0,T)$。这一精妙定理的复杂证明此前尚未发表。注意，该证明施加了更强的勒贝格

条件，即对初始数据的条件强于 [9,44]中的条件： $u^0 \in L^\infty(\Omega)$与 $\theta^0 \in L^2(\Omega)$，其中 θ^0 为初始绝对温度。

其他已证明的关于 Lipschitz 连续依赖性的定理，涉及解的更强范数，例如 $L^\infty(Q)\times V_2(Q)\times V_q(Q)$，但对初始数据（$\eta^0$， u^0， θ^0）也要求使用更强的范数，如 $L^\infty(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^q(\Omega)$、 $q=1$，2，以及自由项和边界数据相应的更强范数。关于柯西问题弱解的同一主题的其他一些定理已在 [32,33] 中得到证明。

本文给出了一个比 [3, 定理 3(a)]，更一般的定理，其中质量、动量和内能平衡方程中包含了附加扰动，动量和能量平衡方程中的更一般自由项还依赖于欧拉坐标（这在物理上是自然的），并给出了完整证明。注意，我们以统一的方式同时处理了若干个具有三种标准边界条件类型的 u 初边值问题（具体表述取决于边界条件的类型）。此外，我们还推导出了关于数据在更强范数下的 H¨older 连续性的推论；一般而言，这些推论需要对数据作出某些附加假设。

对于各种时变偏微分方程，均匀化理论已相当成熟，具体可参见 [13, 18, 22, 28, 40, 41]。在本文第二部分，我们研究初始数据和自由项不连续且快速振荡、周期为 ε 的一维可压缩纳维–斯托克斯方程。我们应用新的利普希茨连续性定理，推导出估计 $O(\varepsilon)$，用于衡量这些方程的解与其采用平均数据的 Bakhvalov-Eglit 双尺度均匀化版本的解之间的差异；值得注意的是，这里对 θ^0 进行了非平凡的平均化。上述额外扰动的存在至关重要。此外，我们还得到误差分量在更强范数$C(0,\ T;\ L^2(\Omega))$ 和 $L^\infty(Q)$（或 $C(\bar{Q})$）下的较低阶估计 $O(\varepsilon^{1/2})$ 和 $O(\varepsilon^{1/4})$。请注意，均匀化误差估计只是已证明的数据利普希茨连续依赖定理的可能应用之一。

关于 Bakhvalov-Eglit 方程的形式推导，参见 [16] 和 [23]。其严格论证（针对比本文更复杂的情形，即气体参数快速振荡的非均匀气体）很久之后才在 [10]中给出。此前，较简单的一维压 barotropic 情形已在 [6, 7, 39], 中得到研究；特别是，相应的估计 $O(\varepsilon)$ 在 [7]中推导出来。我们主要采用这些论文中的技术（一般性技术可追溯至 [17]）。另请参见 [12, 37] 和 [2] 中关于热黏弹性和黏弹塑性模型的相关数学研究，以及 [24] 中关于这类模型的方程形式的讨论。我们还提及近期关于可压缩二元混合物和含气泡流的研究 [19–21] 和 [29,30] ，这些研究涉及相关的均匀化思想。

本文安排如下。第2节给出一维线性抛物型初边值问题中弱解的主要记号和重要辅助界。第3节阐述一维可压缩纳维–斯托克斯方程及其扰动的初边值问题，并分五个步骤冗长地证明关于弱解对数据的利普希茨型连续性定理（本文的第一个主要结果）。此外，还给出两个推论，说明更强范数下（包括时间内点处）的霍尔德型界。第4节首先给出一些关于周期快速振荡函数的辅助结果。随后，考虑具有不连续快速振荡数据的纳维–斯托克斯方程，以及具有平均数据的相应巴赫瓦洛夫–埃格利特双尺度均匀化方程，并证明关于这两个方程的解之差的 $O(\varepsilon)$–界的定理（本文的第二个主要结果）；此外，还给出其推论，说明更强范数下（包括一致范数）的较低阶界。

2. 记号与辅助线性抛物型结果

我们使用标准的勒贝格空间和索伯列夫空间 $L^q(D)$、$W^{1,q}(D)$，其中 $q \in [1,\infty]$，以及 $H^1(D) = W^{1,2}(D)$，其定义域为 $D = \Omega := (0,X)$、$(0,T)$ 和 $Q = Q_T := \Omega \times (0,T)$；此外还使用各向异性勒贝格空间 $L^{q,r}(Q_T)$，其中 q、$r \in [1,\infty]$，并赋予范数 $\|w\|_{L^{q,r}(Q_T)} = \| \|w(x,t)\|_{L^q(\Omega)} \|_{L^r(0,T)}$。对于巴拿赫空间 B，记 $L^\infty(0,T;B)$ 为强可测函数 $w: (0,T) \to B$ 组成的空间，其范数 $\|w\|_{L^\infty(0,T;B)} = \| \|w(t)\|_B \|_{L^\infty(0,T)}$ 有限；记 $C(0,T;B)$ 为连续函数 $w: [0,T] \to B$ 组成的空间，并赋予范数 $\|w\|_{C(0,T;B)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|w(t)\|_B$。在最后一节中，还将使用以 Ω 替换 $(0,T)$ 的类似空间。向量值函数的范数定义为其各分量相应范数之和。

对于 $y \in L^1(\Omega)$，我们定义原函数及 Ω 上的平均值：

$$Iy(x) := \int_0^x y(\zeta)\,d\zeta, \quad I^*y(x) := \int_x^X y(\zeta)\,d\zeta, \quad \langle y\rangle_\Omega := \frac{1}{X}\int_\Omega y(x)\,dx = \frac{1}{X} Iy(X).$$

我们还引入积分算子

$$I^{\langle 1\rangle} y := Iy - \langle Iy\rangle_\Omega, \quad I^{\langle 2\rangle} := I, \quad I^{\langle 3\rangle} y := I(y - \langle y\rangle_\Omega).$$

显然 $(I^{\langle 2\rangle} y)|_{x=0} = 0$，$(I^{\langle 3\rangle} y)|_{x=0,\ X} = 0$ 以及

$$I^{\langle 1\rangle} Ds = s - \langle s\rangle_\Omega, \quad I^{\langle 2\rangle} Ds = s - s(0), \quad I^{\langle 3\rangle} Ds(x) = s(x) - (1 - \tfrac{x}{X})s(0) - \tfrac{x}{X} s(X) \tag{1}$$

对于 $s \in W^{1,\ 1}(\Omega)$。对于 $y,\ z \in L^1(\Omega)$，以下积分恒等式成立

$$\int_\Omega (Iy) z\,dx = \int_\Omega y I^* z\,dx, \tag{2}$$

$$\int_\Omega (I^{\langle 1\rangle} y) z\,dx = \int_\Omega (Iy)(z - \langle z\rangle_\Omega)\,dx = \int_\Omega y I^*(z - \langle z\rangle_\Omega)\,dx = -\int_\Omega y I^{\langle 3\rangle} z\,dx, \tag{3}$$

因此 $(I^{\langle 2\rangle})^* = I^*$ 和 $(I^{\langle 3\rangle})^* = -I^{\langle 1\rangle}$。

令 $H^{1;m}$ 为函数 $\varphi \in H^1(\Omega)$ 的子空间，其中 $\varphi|_{x=0,\ X} = 0$ 对于 $m = 1$，或 $\varphi|_{x=X} = 0$ 对于 $m = 2$，以及 $H^{1;3} = H^1(\Omega)$。对于 $y \in L^1(\Omega)$，我们引入与 $H^{1;m}$ 中对偶范数等价的范数

$$\|y\|_{H^{-1;m}} := \|I^{\langle m\rangle} y\|_{L^2(\Omega)} \quad (m = 1,2), \quad \|y\|_{H^{-1;m}} := \|Iy\|_{L^2(\Omega)} + X|\langle y\rangle_\Omega| \quad (m = 3).$$

我们还定义 t 函数 $I_t b(t)$ 的原函数：$= \int_0^t b(\tau)\ d\tau$，其中 $b \in L^1(0,\ T)$。

回顾众所周知的空间 $V_2(Q)$，它由满足 $D\varphi \in L^2(Q)$ 的函数 $\varphi \in L^{2,\ \infty}(Q)$ 组成，并配备范数 $\|\varphi\|_{V_2(Q)} = \|\varphi\|_{L^{2,\ \infty}(Q)} + \|D\varphi\|_{L^2(Q)}$。

令本节中的 $\varkappa > 0$ 属于 Q 和 $\varkappa,\ \frac{1}{\varkappa} \in L^\infty(Q)$；以下讨论的关键在于，不存在导数 $D\varkappa$，否则会使我们的定义和结果复杂化。令 $V_{2;\varkappa,\ m_*}(Q)$ 为满足以下条件的函数 $\varphi \in V_2(Q)$ 所构成的子空间

$$\langle \tfrac{\varphi}{\varkappa}(\cdot,t)\rangle_\Omega = 0 \ \text{ on } \ (0,T) \ \ (m = 1), \quad \varphi|_{x=0} = 0 \ \ (m = 2), \quad \varphi|_{x=0,X} = 0 \ \ (m = 3).$$

对于 $w \in L^1(Q)$，我们考虑与 $V_{2;\varkappa,m_*}(Q)$ 中的范数对偶的范数：

$$\|w\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*} := \sup_{\varphi\in V_{2;\varkappa,m_*}(Q),\, \|\varphi\|_{V_2(Q)}=1} \int_Q w\varphi\,dxdt \leqslant +\infty.$$

对于 $m=2,3$，不依赖于 $\varkappa$，因此可以在记号中省略它。由嵌入 $V_2(Q)\subset L^{q',r'}(Q)$ [35, 第2节.3]以及 H¨older 不等式，可得以下不等式

$$\|w\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*}\leqslant\|w\|_{[V_2(Q)]^*}:=\sup_{\|\varphi\|_{V_2(Q)}=1}\int_Q w\varphi\,dxdt\leqslant C\inf_{M_0}\|w\|_{L^{q,r}(Q)},\tag{4}$$

其中 M_0 是可积指数 $q,\ r\in[1,\infty]$ 的集合，使得 $(2q)^{-1}+r^{-1}\leqslant 5/4$，且 $\inf_{M_0}=\inf_{(q,r)\in M_0}$。下文中，例如，$1/q'+1/q=1$。下面我们主要需要取值 $(q,\ r)=(2,\ 1)$、$(1,\ 4/3)$ 和 $(6/5,\ 6/5)$。请注意，对于满足 $w_i\in L^{q_i,\ r_i}(Q)$ 的 $w=w_1+\ldots+w_k$，该对偶范数是有限的，其中 $(q_i,\ r_i)\in M_0$, $1\leqslant i\leqslant k$，但并非对任意 $w\in L^1(Q)$ 都成立。

对于 $y,\ z\in L^1(\Omega)$，我们还需要 Ω 上的 $\frac{1}{\varkappa}$-加权平均值以及辅助算子

$$\langle z\rangle_{\Omega,1/\varkappa}:=\frac{\langle z/\varkappa\rangle_\Omega}{\langle 1/\varkappa\rangle_\Omega},\quad P_{1/\varkappa}y:=y-\frac{1/\varkappa}{\langle 1/\varkappa\rangle_\Omega}\langle y\rangle_\Omega=\frac{1}{\varkappa}\big(\varkappa y-\langle\varkappa y\rangle_{\Omega,1/\varkappa}\big).\tag{5}$$

注意到 $\langle P_{1/\varkappa}(y)\rangle_\Omega=0$，并且以下恒等式成立

$$\int_\Omega(P_{1/\varkappa}y)z\,dx=\int_\Omega\frac{1}{\varkappa}\big(\varkappa y-\langle\varkappa y\rangle_{\Omega,1/\varkappa}\big)z\,dx=\int_\Omega y\big(z-\langle z\rangle_{\Omega,1/\varkappa}\big)\,dx.\tag{6}$$

对于满足 $w\in L^1(Q)$ 且 $\|w\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*}<\infty$ 的情况，以及 $IP_{1/\varkappa}w\in L^2(Q)$ $(m=1)$ 或 $(I^{\langle m\rangle})^*w\in L^2(Q)$ $(m=2,3)$ 和 $\varphi\in V_{2;\varkappa,m_*}(Q)$，积分恒等式成立

$$\int_Q w\varphi\,dxdt=-\int_Q(IP_{1/\varkappa}w)D\varphi\,dxdt\ (m=1),\int_Q w\varphi\,dxdt=\int_Q\big[(I^{\langle m\rangle})^*w\big]D\varphi\,dxdt\ (m=2,3);$$

它们由积分恒等式（2）、（3）和（6）以及公式（1）推出。最后这些恒等式显然允许我们用以下不等式补充不等式（4）

$$\|w\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*}\leqslant\|IP_{1/\varkappa}w\|_{L^2(Q)}\ \ (m=1),\quad\|w\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*}\leqslant\|(I^{\langle m\rangle})^*w\|_{L^2(Q)}\ \ (m=2,3).\tag{7}$$

下面的两个命题起着关键作用。考虑满足以下条件的一维线性抛物型初边值问题 $\mathcal{L}_m$, $m=1,2,3$:

$$D_tv=Ds+F,\quad s=\varkappa Dv+\psi\ \ \text{in}\ \ Q,\tag{8}$$

$$v|_{t=0}=v^0,\tag{9}$$

$$v|_{x=0,X}=\mathbf{v}_b\ (m=1),\quad s|_{x=0}=s_0,\ \ v|_{x=X}=v_X\ \ (m=2),\quad s|_{x=0,X}=\mathbf{s}_b\ \ (m=3).\tag{10}$$

这里，例如，$v|_{x=0,X}=\mathbf{v}_b$ 表示 $v|_{x=0}=v_0$ 和 $v|_{x=X}=v_X$，以及 $\mathbf{v}_b=(v_0,v_X)$ 和 $\mathbf{s}_b=(s_0,s_X)$ 是边界数据对；为方便起见，在（10）的第 m 个边界条件中缺失的函数 v_0,v_X,s_0和s_X 均设为 0。回忆一下，根据定义，弱解 v 来自 $V_2(Q)$ [35, 第3节1]，满足此问题的积分恒等式

$$\int_Q\big[-vD_t\varphi+(\varkappa Dv+\psi)D\varphi-F\varphi\big]\,dxdt=\int_\Omega v^0\varphi|_{t=0}\,dx+\int_0^T(s_X\varphi|_{x=X}-s_0\varphi|_{x=0})\,dt,\tag{11}$$

对于任意 $\varphi\in H^1(Q)$、$\varphi|_{t=T}=0$，满足 $\varphi|_{x=0,\ X}=0$ $(m=1)$ 或 $\varphi|_{x=0}=0$ $(m=2)$，且边界条件 $v|_{x=0,\ X}=\mathbf{v}_b$ $(m=1)$ 或 $v|_{x=X}=v_X$ $(m=2)$ 在 $v\in V_2(Q)$ 的迹意义下成立。

设 $N>1$ 为一个任意大的参数，且 $K(N,T)$（可能带有指标）为 T 中的非减函数（在证明中，自变量大多被省略）。设 δ_{mn} 为克罗内克δ函数，即当 $m\neq n$ 时 $\delta_{mn}=0$，以及 $\delta_{mm}=1$。

命题 1. 设条件 $N^{-1} \leqslant \varkappa$与$\|\varkappa\|_{L^\infty(Q)} + \|D_t\varkappa\|_{L^2(Q)} \leqslant N$连同

$$\psi, F \in L^1(Q), \quad \|\tfrac{1}{\varkappa}\psi\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*} < \infty, \quad v^0 \in L^1(\Omega), \quad \mathbf{v}_b \in L^{4/3}(0,T), \quad \mathbf{s}_b \in L^1(0,T)$$

成立。对于从 $V_2(Q)$ 到问题 $\mathcal{L}_m$, $m = 1,2,3$的弱解 v，在较弱范数下有以下界

$$\|v\|_{L^2(Q)\cap L^\infty(0,T;H^{-1;m})} \leqslant K(N,T)\Big(\|v^0\|_{H^{-1;m}} + \|\mathbf{v}_b\|_{L^{4/3}(0,T)} + \|\mathbf{s}_b\|_{L^1(0,T)} + \|\tfrac{1}{\varkappa}\psi\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*} + \|\tfrac{1}{\varkappa}I^{\langle m\rangle}F\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*} + \delta_{m3}\|\langle F\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}\Big). \tag{12}$$

此后，例如，对于巴拿赫空间 B, $\|\mathbf{v}_b\|_B = \|v_0\|_B + \|v_X\|_B$。

我们强调，此后在施加类似上述$\|\varkappa\|_{L^\infty(Q)} + \|D_t\varkappa\|_{L^2(Q)} \leqslant N$这样的数据范数条件时，我们会自动假设 $\varkappa \in L^\infty(Q)$，且存在 $D_t\varkappa \in L^2(Q)$。这使我们能够以自然的方式简化陈述中的假设。

该结果由 [5, 定理 2.2] 得出。我们指出，对于 $m = 1$，我们的 ψ 范数看起来不同，但由于 $y = \frac{\psi}{\varkappa}$ 的恒等式 (6)，它与 [5] 中的范数相同。F 的范数与 [5] 中的不同,–但由于项 ψ 的存在，一般 F 的情形可简单地归结为 $m = 1$ 的 $F = 0$，2，以及对于 $m = 3$ 的 $F = F(t)$，借助以下公式

$$F = DI^{\langle m\rangle}F \ \ (m = 1,2), \quad F = DI^{\langle 3\rangle}F + \langle F\rangle_\Omega \ \ (m = 3). \tag{13}$$

注意到，在界（12）的左侧出现空间 $L^\infty(0,\ T;\ H^{-1;m})$ 对下文至关重要。我们还需要处理 广义初边值问题 $\mathcal{L}_m$, $m = 1$，2、3，它涉及比（8）和（9）更一般的方程和初始条件，即:

$$D_tv = Ds + F + D_tG, \quad s = \varkappa Dv + \psi \ \text{ in } \ Q, \quad (v - G)|_{t=0} = v^0$$

以及相同的边界条件（10）。按照 [35], ，如果函数 $v \in L^2(Q)$ 满足积分恒等式，则称其为从 $L^2(Q)$ 出发的弱解

$$-\int_Q v\big[D_ty + D(\varkappa Dy)\big]\,dxdt = \int_Q \big(-\psi Dy + Fy - GD_ty\big)\,dxdt + \int_\Omega v^0y|_{t=0}\,dx + \int_0^T \big\{s_Xy|_{x=X} - s_0y|_{x=0} - \big[v_X(\varkappa Dy)|_{x=X} - v_0(\varkappa Dy)|_{x=0}\big]\big\}\,dt \tag{14}$$

对于任意 $y \in H^{2,\ 1;\varkappa,\ m}(Q)$；对于 $G \in L^2(Q)$，该定义是正确的。

这里， $H^{2,\ 1;\varkappa,\ m}(Q)$ 是由满足 $\varkappa Dy \in V_2(Q)$ 且满足下列条件的函数 $y \in H^1(Q)$ 构成的巴拿赫空间:

$$y|_{x=0,X} = 0 \ (m = 1), \quad (\varkappa Dy)|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=X} = 0 \ (m = 2), \quad (\varkappa Dy)|_{x=0,X} = 0 \ (m = 3)$$

以及 $y|_{t=T} = 0$。因此，对于 $m = 1$、2、3，我们在（19）中使用 $\varkappa Dy \in V_{2;\varkappa,\ m_*}(Q)$。我们在 $H^{2,\ 1;\varkappa,\ m}(Q)$ 中定义范数，并且对于 $F \in L^1(Q)$，定义对偶范数

$$\|y\|_{H^{2,1;\varkappa,m}(Q)} := \|D_ty\|_{L^2(Q)} + \|\varkappa Dy\|_{V_2(Q)}, \quad \|F\|_{[H^{2,1;\varkappa,m}(Q)]^*} := \sup_{\|y\|_{H^{2,1;\varkappa,m}(Q)}=1} \int_Q Fy\,dxdt.$$

令 $N^{-1} \leqslant \varkappa$属于 Q。简单的嵌入$\|y\|_{L^\infty\ (Q)} \leqslant CN\|y\|_{H^{2,\ 1;\varkappa,\ m}\ (Q)}$ 推出不等式

$$\|F\|_{[H^{2,1;\varkappa,m}(Q)]^*} \leqslant CN\|F\|_{L^1(Q)}. \tag{15}$$

此外，对于任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant X$， $y|_{x=\alpha} \in L^\infty(0,\ T)$，因此恒等式 (14) 对于 $\mathbf{s}_b \in L^1(0,\ T)$ 是正确的。

分析　　上面的积分时，我们使用公式（13），分别对 x和 t 分部积分，得到

$$\int_Q Fy\,dxdt = -\int_Q (I^{\langle m\rangle}F)Dy\,dxdt - \delta_{m3}\int_Q \big(I_t\langle F\rangle_\Omega\big)D_t y\,dxdt, \tag{16}$$

然后用以下不等式补充不等式（15）

$$\|F\|_{[H^{2,1;\varkappa,m}(Q)]^*} \leqslant \|\tfrac{1}{\varkappa}I^{\langle m\rangle}F\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*} + \delta_{m3}X^{1/2}\|I_t\langle F\rangle_\Omega\|_{L^2(0,T)}. \tag{17}$$

注意，范数$\|F\|_{[H^{2,1;\varkappa,m}(Q_t)]^*}$ 关于 $0 < t \leqslant T$ 单调不减（因为将$y \in H^{2,1;\varkappa,m}(Q_t)$在 $Q_T \setminus Q_t$ 上以零延拓后，属于 $H^{2,1;\varkappa,m}(Q_T)$）。

命题 2。 设命题 *1* 中关于数据的条件成立，且 $G \in L^2(Q)$。那么，问题 $\mathcal{L}_m$, $m = 1$, 2,3 的弱解 v（来自 $L^2(Q)$）存在、唯一，并满足以下界

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^2(Q)} \leqslant K(N,T)\big(&\|v^0\|_{H^{-1;m}} + \|\mathbf{v}_b\|_{L^{4/3}(0,T)} + \|\mathbf{s}_b\|_{L^1(0,T)}\\ &+\|\tfrac{1}{\varkappa}\psi\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*} + \|F\|_{[H^{2,1;\varkappa,m}(Q)]^*} + \|G\|_{L^2(Q)}\big).\end{aligned} \tag{18}$$

该命题是一个更一般结果 [44, 定理 2.6] 的推论。我们指出，项 ψ 出现在（18）中是由于以下不等式

$$\sup_{\|y\|_{H^{2,1;\varkappa,m}(Q)}=1}\int_Q \psi Dy\,dxdt \leqslant \sup_{\|z\|_{V_{2;\varkappa,m_*}(Q)}=1}\int_Q \tfrac{1}{\varkappa}\psi z\,dxdt = \|\tfrac{1}{\varkappa}\psi\|_{[V_{2;\varkappa,m_*}(Q)]^*}. \tag{19}$$

此外，根据不等式 (17)，界 (18) 中 F 的范数比 (12) 中的更弱。

请注意，在命题 1 和命题 2 中，我们也可以将某些数据视为分布，而非 L^1–函数；此外，也可以将命题 1 表述为：存在且唯一存在一个比 from $V_2(Q)$ 更弱的解。不过，下文并不需要进行这些推广，因此为使主要结果的陈述和证明更加清晰简洁，我们不予采用。

下文为求积分不等式解的界，常使用众所周知的格朗沃尔–贝尔曼引理，例如参见 [14, 第 II 节。2]以及下一条结果；后者是 [5,引理2.2]的一个特例。

引理 1. 设 $1 \leqslant r_1 < r \leqslant \infty$。若 $y \in L^r(0,T)$ 满足积分不等式

$$\|y\|_{L^r(0,t)} \leqslant N\|y\|_{L^{r_1}(0,t)} + C_0 \quad for\ any\ \ 0 < t \leqslant T,$$

其中常数为 $C_0 \geqslant 0$，则 $\|y\|_{L^r(0,T)} \leqslant K(N,T)C_0$。这里 $K(N,T)$ 仅依赖于 N、T、 r 和 r_1，且关于 T非递减。

3. 一维可压缩 Navier–Stokes 方程组的初边值问题

一维可压缩纳维–斯托克斯方程组描述黏性导热气体的一维流动，由质量、动量和内能平衡方程组成

$$D_t\eta = Du, \tag{20}$$

$$D_t u = D\sigma + g[x_e], \tag{21}$$

$$c_V D_t\theta = D\pi + \sigma Du + f[x_e], \tag{22}$$

以及该方程和相关公式

$$D_t x_e = u, \quad \sigma = \nu\rho Du - p, \quad \rho = \frac{1}{\eta}, \quad p = k\rho\theta, \quad \pi = \lambda\rho D\theta \tag{23}$$

在拉格朗日质量坐标 $(x,t) \in Q$中。所求函数 $\eta > 0$, u, $\theta > 0$ 和x_e 分别为比容、速度、绝对温度和欧拉坐标。函数 σ, ρ, p 和 $-\pi$ 分别为应力、密度、压力和热通量。此外, $g(\chi,x,t)$ 为体力密度，而 $f(\chi,x,t) \geqslant 0$为热源强度，且$h[x_e](x,t) = h(x_e(x,t)\ x,t)$，其中 $h = g, f$。此外， $\nu > 0$, $k > 0$和 $\lambda > 0$为物理常数。

该系统还配有初始条件和非齐次边界条件

$$(\eta, u, \theta, x_e)|_{t=0} = (\eta^0, u^0, \theta^0, x_e^0), \tag{24}$$

$$u|_{x=0,X} = \mathbf{u}_b \ (m=1), \quad \sigma|_{x=0} = -p_0, \ u|_{x=X} = u_X \ (m=2), \quad \sigma|_{x=0,X} = -\mathbf{p}_b \ (m=3), \tag{25}$$

$$\pi|_{x=0,X} = \boldsymbol{\pi}_b. \tag{26}$$

这里， $x_e^0 = I\eta^0$，以及$\mathbf{u}_b =(u_0, u_X)$、$\mathbf{p}_b =(p_0, p_X)$ 和 $\boldsymbol{\pi}_b =(\pi_0, \pi_X)$ 是边界数据对；在 (25) 的第 m 个边界条件中缺失的函数 u_0, u_X, p_0和 p_X均设为 0。回顾一下， u_0 和 u_X、 p_0 和 p_X ，以及 $-\pi_0$ 和 $-\pi_X$ 分别是左、右边界处给定的速度、外压和热通量，且都依赖于 t。我们将初边值问题 (20)–(26) 记为 $\mathcal{P}_m$。

下面我们分别对初始数据、项 g 和 f 以及边界数据提出以下条件。回顾一下， $N > 1$ 是一个参数。

（C_1）设 $N^{-1} \leqslant \eta^0$ 和 $0 < \theta^0$ 在 Ω 上，且

$$\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\theta^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\ln\theta^0\|_{L^1(\Omega)} \leqslant N.$$

若 $N^{-1} \leqslant \theta^0$ 在 Ω 上成立，则可以省略含 $\ln\ \theta^0$ 的项。

（C_2）设 $g(\chi,x,t)$和 $f(\chi,x,t)$在 $\mathbb{R} \times Q$ 上可测，且在该处满足以下界：

$|g(\chi,x,t)| \leqslant \bar{g}(x,t)$以及 $0 \leqslant f(\chi,x,t) \leqslant f(x,t)$，其中$\|\bar{g}\|_{L^2(Q)} \leqslant N$且 $\|f\|_{L^{2,1}(Q)} \leqslant N$。另设对某个 $2 \leqslant q_e \leqslant \infty$，含有$\chi$ 中 Sobolev 导数的 Lipschitz 型条件成立

$$\|D_\chi g\|_{L^{\infty,q_e',1}((-a,a)\times Q)} \leqslant C_0(a), \quad \|D_\chi f\|_{L^{\infty,q_e',1}((-a,a)\times Q)} \leqslant C_0(a) \ \text{ for any } \ a > 1. \tag{27}$$

(C_3) 设 $\|\mathbf{u}_b\|_{W^{1,1}(0,T)} + \|\mathbf{p}_b\|_{W^{1,1}(0,T)} + \|\boldsymbol{\pi}_b\|_{L^{4/3}(0,T)} \leqslant N$，其中 $p_\alpha \geqslant 0$与 $\pi_\alpha \geqslant 0$在 $(0,T)$ 上，对 $\alpha = 0, X$。另设

$$N^{-1} \leqslant \|\eta^0\|_{L^1(\Omega)} + I_t(u_X - u_0) \ \text{ on } \ (0,T) \ \ (m=1), \tag{28}$$

$$p_\alpha(t+\tau) - p_\alpha(t) \leqslant a_\tau(t) \int_t^{t+\tau} p_\alpha(q)\,dq \ \text{ for } \ 0 < t < T-\tau, \ \ \alpha = 0, X \ \ (m = 2,3), \tag{29}$$

具有某 e $a_\tau \geqslant 0$在 $(0, T-\tau)$ 上，对任意 $0 < \tau < T$，且 $\sup_{0<\tau<T} \|a_\tau\|_{L^1(0,T-\tau)} \leqslant K_0(N)$.

条件 (28) 是必要的，因为下述关于气体体积的著名公式成立（它由将方程 (20) 在 Q_t 上积分后得到）

$$V(t) := \|\eta(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = \|\eta^0\|_{L^1(\Omega)} + I_t(u_X - u_0) \ \text{ on } \ [0,T] \ \ (m=1). \tag{30}$$

此外，不难验证，若 $N^{-1} \leqslant p_\alpha$ 在 $(0,T)$ 上，或 $D_t p_\alpha \leqslant K_0(N) p_\alpha$ 在 $(0,T)$ 上，则条件 (29) 成立。

回顾一下，在条件 (C_1)–(C_3) 下，问题 $\mathcal{P}_m$ 存在一个弱解，使得 $\eta, 1/\eta \in L^\infty(Q)$，$D_t\eta \in L^2(Q)$，$u, u^2, \theta \in V_2(Q)$，$x_e \in H^1(Q)$，并且满足以下界

$$K_0^{-1}(N) \leqslant \eta \leqslant K_0(N), \ \ \|u\|_{V_2(Q)} + \|u^2\|_{V_2(Q)} + \|\theta\|_{V_2(Q)} + \|x_e\|_{H^1(Q)} \leqslant K(N).$$

此外，如果 $N^{-1} \leqslant \theta^0$ 在 Ω 上，则 $K(N)^{-1} \leqslant \theta$ 在 Q 上。参见 [9] 以了解更弱解的存在性，并参见 [11, 命题6。2] 以了解此处同样给出的 u 和 θ 的附加正则性；另请参见综述 [43]，其中可以找到关于弱解的更详细结果。如果第一条件（27）与 $q_e = 2$ [44, 定理1。2], 一同成立，则该解也是唯一的，但下一个定理表明，此处不要求限制 $q_e = 2$ 。下文主要定理1 中并未使用所列出的解的全部性质。

我们回顾一下，该解在 $L^2(Q)$ 中满足方程 $D_t\eta = Du$ 和 $D_t x_e = u$，并满足初始条件 $\eta|_{t=0} = \eta^0$ 和 $x_e|_{t=0} = x_e^0$ 于 $C(0,T;\, L^2(\Omega))$ 中。其次，它还满足动量守恒方程（21），其中 σ 由（23）给出，同时满足初始条件 $u|_{t=0} = u^0$ 以及部分边界条件（25），在弱意义下

$$\int_Q \big[-uD_t\varphi + (\nu\rho Du - p)D\varphi - g[x_e]\varphi \big]\, dxdt = \int_\Omega u^0\varphi|_{t=0}\, dx - \int_0^T (p_X\varphi|_{x=X} - p_0\varphi|_{x=0})\, dt,$$

与类似积分恒等式 (11) 中相同的 φ，并且边界条件 $u|_{x=0,X} = \mathbf{u}_b$ $(m = 1)$ 或 $u|_{x=X} = u_X$ $(m = 2)$ 以迹的意义成立。最后，解满足内能平衡方程 (22)，其中 π 由 (23) 给出；同时，初始条件 $\theta|_{t=0} = \theta^0$ 和边界条件 (26) 也以类似的弱意义成立

$$\begin{aligned} &\int_Q \big[-c_V\theta D_t\varphi + \lambda\rho(D\theta)D\varphi - (\sigma Du + f[x_e])\varphi \big]\, dxdt \\ &= \ell(\theta^0, \boldsymbol{\pi}_b; \varphi) := \int_\Omega \theta^0\varphi|_{t=0}\, dx + \int_0^T (\pi_X\varphi|_{x=X} - \pi_0\varphi|_{x=0})\, dt, \end{aligned} \tag{31}$$

对于任意 $\varphi \in H^1(Q) \cap L^\infty(Q)$，$\varphi|_{t=T} = 0$；由于仅有 $\sigma Du \in L^1(Q)$，因此需要假设 $\varphi \in L^\infty(Q)$。事实上，这意味着 u 和 θ 被视为相应抛物型初边值问题（如 $\mathcal{L}_m$ 和 $\mathcal{L}_3$）中来自 $V_2(Q)$ 的弱解。

但是下文中我们不采用恒等式 (31)，而是处理较弱的 $L^2(Q)$–解，使得

$$\int_Q \big[-\theta(c_V D_t\varphi + D(\lambda\rho D\varphi)] - (\sigma Du + f[x_e])\varphi \big]\, dxdt = \ell(\theta^0, \boldsymbol{\pi}_b; \varphi) \tag{32}$$

对于任意 $\varphi \in H^{2,\ 1;\varkappa,\ 3}(Q)$，关于初边值问题 $\mathcal{L}_m$ 在情形 $m = 3$ 下，参见恒等式 (14)。

此外，鉴于从 $V_2(Q)$ 到线性抛物型初边值问题 $\mathcal{L}_m$ 的解所满足的众所周知的（粗略） $L^\infty(Q)$ 界，我们可以保证

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leqslant K(N)\big(\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathbf{u}_b\|_{L^\infty(0,T)} + \|\mathbf{p}_b\|_{L^\infty(0,T)} + \|p\|_{L^4(Q)} + \|\bar{g}\|_{L^2(Q)}\big) \leqslant K_1(N), \tag{33}$$

参见 [35, 第三节。7] 更具体地说，[8, 定理 3。2]。

为了在一般框架下分析对数据的连续依赖性，并结合所述初边值问题 $\mathcal{P}_m$，我们考虑类似的受扰方程组

$$D_t\hat{\eta} = D\hat{u} + \beta, \tag{34}$$

$$D_t\hat{u} = D\hat{\sigma} + \hat{g}[\hat{x}_e], \tag{35}$$

$$c_V D_t\hat{\theta} = D\hat{\pi} + \hat{\sigma}D\hat{u} + \hat{f}[\hat{x}_e], \tag{36}$$

$$D_t\hat{x}_e = \hat{u}, \ \ \hat{\sigma} = \nu\hat{\rho}(D\hat{u} + \beta) - \hat{p}, \ \ \hat{\rho} = \tfrac{1}{\hat{\eta}}, \ \ \hat{p} = k\hat{\rho}\hat{\theta}, \ \ \hat{\pi} = \lambda\hat{\rho}(D\hat{\theta} + \gamma) \tag{37}$$

在 Q 中，并附加受扰的初始条件和边界条件

$$(\hat{\eta},\hat{u},\hat{\theta},\hat{x}_e)|_{t=0}=(\hat{\eta}^0,\hat{u}^0,\hat{\theta}^0,\hat{x}_e^0), \tag{38}$$

$$\hat{u}|_{x=0,X}=\hat{\mathbf{u}}_b\ (m=1),\ \hat{\sigma}|_{x=0}=-\hat{p}_0,\ \hat{u}|_{x=X}=\hat{u}_X\ (m=2),\ \ \hat{\sigma}|_{x=0,X}=-\hat{\mathbf{p}}_b\ (m=3), \tag{39}$$

$$\hat{\pi}|_{x=0,X}=\hat{\boldsymbol{\pi}}_b. \tag{40}$$

这里 $\hat{x}_e^0:=I\hat{\eta}^0+\beta_e$，对某个 β_e，以及 $\hat{\mathbf{u}}_b=(\hat{u}_0,\hat{u}_X)$、$\hat{\mathbf{p}}_b=(\hat{p}_0,\hat{p}_X)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\pi}}_b=(\hat{\pi}_0,\hat{\pi}_X)$ 是边界数据对；同样，在 (39) 的第m个边界条件中缺失的函数 $\hat{u}_0,\hat{u}_X,\hat{p}_0$ 和 $\hat{p}_X$ 被设为 0。我们将受扰初边值问题 (34)–(40)$\widehat{\ }$记为 $\widehat{\mathcal{P}}_m$。在 $\beta=\gamma=0$ 和 $\beta_e=0$ 的情形下，初边值问题 $\widehat{\mathcal{P}}_m$ 不过是 $\mathcal{P}_m$ 的另一种形式。

我们对问题的数据施加如下条件

($\hat{C}_1$) 设 $N^{-1}\leqslant\hat{\eta}^0\leqslant N$在 Ω 上，$\hat{\eta}^0,\hat{u}^0,\beta_e\in L^\infty(\Omega)$ 且 $\hat{\theta}^0\in L^1(\Omega)$。

($\hat{C}_2$) 设 $\hat{g}$ 和 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}\times\hat{Q}$ 上可测，并满足界 $|\hat{g}(\chi,x,t)|\leqslant\bar{g}(x,t)$ 和 $|\hat{f}(\chi,x,t)|\leqslant\bar{f}(x,t)$，其中 $\|\bar{g}\|_{L^1(Q)}\leqslant N$ 且 $\bar{f}\in L^1(Q)$，并且 $\hat{g}$ 和 $\hat{f}$ 对几乎所有 $(x,t)\in Q$ 在 $\chi\in\mathbb{R}$ 上连续。

还设 $\beta\in L^2(Q)$、$\gamma\in L^1(Q)$ 和 $\|\gamma\|_{[V_{2;3,*}(Q)]^*}<\infty$。

($\hat{C}_3$) 令 $\|\hat{\mathbf{u}}_b\|_{H^1(0,T)}+\|\hat{\mathbf{p}}_b\|_{W^{1,1}(0,T)}\leqslant N$，$\hat{\boldsymbol{\pi}}_b\in L^1(0,T)$。

注意，除了对$\hat{\mathbf{u}}_b$的条件之外，这些条件比上述关于类似数据的条件(C_1)–(C_3)限制更少。

此外，我们假设问题 $\widehat{\mathcal{P}}_m$ 的解 $\hat{\eta}\in L^\infty(Q)$、$\hat{\theta},D_t\hat{\eta},D_t\hat{x}_e\in L^2(Q)$、$\hat{u}\in V_2(Q)\cap L^\infty(Q)$，并满足界

$$K_0^{-1}(N)\leqslant\hat{\eta}\leqslant K_0(N),\ \ \|\hat{u}\|_{L^\infty(Q)}+\|D\hat{u}\|_{L^2(Q)}+\|\hat{\theta}\|_{L^{\infty,1}(Q)}+\|\hat{x}_e\|_{L^\infty(Q)}\leqslant K_1(N).$$

这些假设同样比问题 $\mathcal{P}_m$的弱解的上述所列性质限制更少。

此外，初边值问题 $\widehat{\mathcal{P}}_m$ 中的方程、初始条件和边界条件在与上述基本初边值问题 $\mathcal{P}_m$类似的意义下成立；特别地，关于内能平衡方程(36)，其中$\hat{\pi}$ 由(37)给出，初始条件$\hat{\theta}|_{t=0}=\hat{\theta}^0$ 以及边界条件(40)，我们假设与(32)类似的积分恒等式成立，其中$\hat{\theta}$ 作为相应 $\mathcal{L}_3$型问题的 $L^2(Q)$-解。

我们定义总能量、总初始能量和修正能量

$$\hat{e}=\tfrac{1}{2}\hat{u}^2+c_V\hat{\theta},\ \ \hat{e}^0=\tfrac{1}{2}(\hat{u}^0)^2+c_V\hat{\theta}^0,\ \ \hat{E}^0:=\tfrac{1}{2}(\hat{w}^0)^2+c_V\hat{\theta}^0$$

其中 $\hat{w}^0:=\hat{u}^0-\hat{u}_\Gamma^0$ 以及

$$\hat{u}_\Gamma^0=\tfrac{1}{\hat{V}^0}\big[(I^*\hat{\eta}^0)\hat{u}_0(0)+(I\hat{\eta}^0)\hat{u}_X(0)\big]\ \ (m=1),\ \ \hat{u}_\Gamma^0=\hat{u}_X(0)\ \ (m=2),\ \ \hat{u}_\Gamma^0=0\ \ (m=3), \tag{41}$$

其中 $\hat{V}^0=\int_\Omega\hat{\eta}^0\,dx$。问题 $\mathcal{P}_m$ 的函数 e、e^0、E^0、w^0 和 u_Γ^0 的定义类似（省略所有帽号）。

关于弱解对数据的利普希茨连续性的下一个定理是本文的第一个主要结果。回想一下，$q_e\in[2,\infty]$ 在条件（C_2）中定义。令 $M_1\subset M_0$为满足 q,r 的集合，$r\in[2,\infty]$ 且 $(2q)^{-1}+r^{-1}\leqslant 1/2$。

定理1。设分解 $\beta=\beta_1+\beta_2$ 和$\hat{g}[\hat{x}_e]-g[\hat{x}_e]=g_1+g_2$ 在某些 β_1、β_2、g_1、$g_2\in L^1(Q)$ 下成立，使得 β_1、β_2 和 g_2 的范数在下述界中均为有限值。

^则问题 $\mathcal{P}_m$ 和 $\mathcal{P}_m$ 的弱解之差满足以下界

$$\|\hat{\eta}-\eta\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}+\|\hat{u}-u\|_{L^2(Q)\cap L^\infty(0,T;H^{-1;m})}+\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^2(Q)}+\|\hat{x}_e-x_e\|_{L^{q_e,\infty}(Q)}$$
$$+\|I_t(\hat{\sigma}-\sigma)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant K(N)\Big(\|\hat{\eta}^0-\eta^0\|_{L^2(\Omega)}+\|\hat{u}^0-u^0\|_{H^{-1;m}}+\|\hat{E}^0-E^0\|_{H^{-1;3}}$$
$$+\|\beta_e\|_{L^{q_e}(\Omega)}+\|\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b\|_{W^{1,1}(0,T)}+\|\hat{\mathbf{p}}_b-\mathbf{p}_b\|_{L^1(0,T)}+\|\hat{\boldsymbol{\pi}}_b-\boldsymbol{\pi}_b\|_{L^1(0,T)}$$
$$+\inf_{M_0}\|\beta_1\|_{L^{q,r}(Q)}+\inf_{M_1}\|I^{\langle 3\rangle}\beta_2\|_{L^{q,r}(Q)}+\|I_tI^{\langle 1\rangle}\beta_2\|_{L^{q_e,\infty}(Q)}+\|\langle\beta_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}+\|\gamma\|_{[V_{2;3*}(Q)]^*}$$
$$+\|g_1\|_{L^1(Q)}+\|I^{\langle m\rangle}g_2\|_{L^2(Q)}+\delta_{m3}\|\langle g_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}+\|\hat{f}[\hat{x}_e]-f[\hat{x}_e]\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},m}(Q)]^*}\Big). \tag{42}$$

注 1. *1.* 在情形 $m=3$ 中，我们有 $\hat{}E^0-E^0=\hat{}e^0-e^0$。项 $\hat{}E^0-E^0$ 在情形 $m=1$、2 中同样可以简化为 $\hat{}e^0-e^0$，只要范数 $\|\hat{}u^0-u^0\|_{H^{-1;m}}$ 被粗化为 $\|\hat{}u^0-u^0\|_{H^{-1;3}}$。

2. 对于 $q_e=2$，或在 M_1 的定义中限制取值 $q\in[q_e,\infty]$ 时，项 $\|I_tI^{\langle 1\rangle}\beta_2\|_{L^{q_e,\infty}(Q)}$ 可以省略。

3. 若附加界 $\|D\hat{}u\|_{L^{2,\infty}(Q)}\leqslant\hat{}K(N)$ 成立，则 $I^{\langle 3\rangle}\beta_2$ 与 $I^{\langle m\rangle}g_2$ 的范数可减弱为 $\|I^{\langle 3\rangle}\beta_2\|_{L^2(Q)}$ 和 $\|I^{\langle m\rangle}g_2\|_{L^{2,1}(Q)}$。

证明。 证明分为五个步骤。在每一步中，我们依次采用不同的特殊方法，推导（42）左端各项的界。

1. 我们首先对 $\hat{}\eta-\eta$ 求界。为此，我们推导出关于 $\hat{}\eta$ 和 η 的更合适的方程。将方程 $D_t\hat{}\eta=D\hat{}u+\beta$ 乘以 $\nu\hat{}\rho$，并将其改写为 $\nu D_t\ln\hat{}\eta=\hat{}\sigma+\hat{}p$。对 t 积分，得到公式

$$\nu\ln\hat{\eta}=\nu\ln\hat{\eta}^0+I_t\hat{\sigma}+I_t\hat{p}. \tag{43}$$

我们考虑由方程（35）、初始条件 $\hat{}u|_{t=0}=\hat{}u^0$ 和边界条件（39）构成的关于 $\hat{}u$ 的 $\mathcal{L}_m$ 型初边值问题。根据 [5, 引理 2.1], , 存在 $DI_t\hat{}\sigma\in L^{1,\infty}(Q)$，并且以下等式对 $I_t\hat{}\sigma$ 成立

$$\hat{u}=\hat{u}^0+DI_t\hat{\sigma}+I_t\hat{g}[\hat{x}_e], \tag{44}$$
$$I_t\hat{\sigma}|_{x=0}=-I_t\hat{p}_0\ \ (m=2,3),\ \ I_t\hat{\sigma}|_{x=X}=-I_t\hat{p}_X\ \ (m=3). \tag{45}$$

我们对等式（44）应用算子 $I^{\langle m\rangle}$，并利用公式（1）和（45），得到如下表示

$$I_t\hat{\sigma}=I^{\langle 1\rangle}(\hat{u}-\hat{u}^0-I_t\hat{g}[\hat{x}_e])+I_t\langle\hat{\sigma}\rangle_\Omega\ \ (m=1), \tag{46}$$
$$I_t\hat{\sigma}=I^{\langle m\rangle}(\hat{u}-\hat{u}^0-I_t\hat{g}[\hat{x}_e])+I_t\hat{\sigma}_\Gamma\ \ (m=2,3) \tag{47}$$

（另见 [44, 引理 3.1]），其中

$$\hat{\sigma}_\Gamma=0\ \ (m=1),\ \ \hat{\sigma}_\Gamma=-\hat{p}_0\ \ (m=2),\ \ \hat{\sigma}_\Gamma=-(1-\tfrac{x}{X})\hat{p}_0-\tfrac{x}{X}\hat{p}_X\ \ (m=3). \tag{48}$$

问题 $\mathcal{P}_m$ 的函数 σ_Γ 定义类似。将公式 (47) 代入 (43)，得到方程

$$\nu\ln\hat{\eta}=I^{\langle m\rangle}\hat{u}+I_t\hat{p}+\nu\ln\hat{\eta}^0-I^{\langle m\rangle}\hat{u}^0+I_t\hat{\sigma}_\Gamma-I^{\langle m\rangle}I_t\hat{g}[\hat{x}_e]\ \ (m=2,3). \tag{49}$$

但是，在 $m=1$ 的情况下，相应的方程无法得出所需结果，因此我们不得不采用更复杂的方法。我们从等式 (43) 中减去在 $m=1\Omega$ 处取值的同一等式，并将差值除以 。

在 $x=\zeta\in\Omega$ 处取相同的等式，并将差值除以 ν。对结果应用函数 exp，我们得到

$$\hat{\eta}\hat{\eta}^0(\zeta)=\hat{\eta}|_{x=\zeta}\hat{\eta}^0\exp\big[\tfrac{1}{\nu}\big(I_t\hat{\sigma}-I_t\hat{\sigma}|_{x=\zeta}+I_t\hat{p}-I_t\hat{p}|_{x=\zeta}\big)\big].$$

利用公式（46）表示 $I_t\hat{}\sigma$ 的值之差，我们得到

$$\hat{\eta}\hat{\eta}^0(\zeta)e^{\hat{A}|_{x=\zeta}}=\hat{\eta}|_{x=\zeta}\hat{\eta}^0e^{\hat{A}},\quad\text{with}\quad\hat{A}:=\tfrac{1}{\nu}\big[I_t\hat{p}+I^{\langle1\rangle}(\hat{u}-\hat{u}^0-I_t\hat{g}[\hat{x}_e])\big].$$

最后，取 两部分在 ζ 中的平均值，我们推导出更合适的方程 n

$$\hat{\eta}\langle\hat{\eta}^0e^{\hat{A}}\rangle_\Omega=\langle\hat{\eta}\rangle_\Omega\hat{\eta}^0e^{\hat{A}}\tag{50}$$

（另见 [45, 引理 1]）。此外，将算子 $I_t\langle\cdot\rangle_\Omega$ 作用于方程 $D_t\hat{}\eta=D\hat{}u+\beta$，并对 $m=1$ 使用边界条件（39），我们得到平均气体体积的公式

$$\langle\hat{\eta}\rangle_\Omega=\langle\hat{\eta}^0\rangle_\Omega+X^{-1}I_t(\hat{u}_X-\hat{u}_0)+I_t\langle\beta\rangle_\Omega\quad(m=1)\tag{51}$$

类似于问题 $\mathcal{P}_1$ 的公式（30）。

对于 $m=1$，2，3，我们准备证明以下界

$$\begin{aligned}\|\hat{\eta}-\eta\|_{C(0,t;L^2(\Omega))}\leqslant K^{(0)}(N,T)\big(&\|\hat{u}-u\|_{L^\infty(0,t;H^{-1;m})}+\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^{2,1}(Q_t)}\\+\|\hat{\eta}^0-\eta^0\|_{L^2(\Omega)}+\|\hat{u}^0-u^0\|_{H^{-1;m}}&+\delta_{m1}\|I_t(\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b)\|_{L^\infty(0,T)}+\|I_t(\hat{\mathbf{p}}_b-\mathbf{p}_b)\|_{L^\infty(0,T)}\\+\delta_{m1}\|I_t\langle\beta\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)}&+\|I^{\langle m\rangle}I_t(\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e])\|_{L^{2,\infty}(Q_t)}\big),\quad0<t\leqslant T.\end{aligned}\tag{52}$$

在情形 $m=2$、3 中，我们从方程 (49) 中减去问题 $\mathcal{P}_m$ 的相应方程，并利用双侧一致估计 $K_0^{-1}\leqslant\eta\leqslant K_0$ 和 $K_0^{-1}\leqslant\hat{}\eta\leqslant K_0$，得到

$$\begin{aligned}\nu K_0^{-1}|\hat{\eta}-\eta|\leqslant|I^{\langle m\rangle}(\hat{u}-u)|+I_t|\hat{p}-p|+\nu K_0|\hat{\eta}^0-\eta^0|+|I^{\langle m\rangle}(\hat{u}^0-u^0)|\\+|I_t(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)|+|I^{\langle m\rangle}I_t(\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e])|.\end{aligned}\tag{53}$$

显然

$$\hat{p}-p=k(\hat{\rho}-\rho)\theta+k\hat{\rho}(\hat{\theta}-\theta)=-k\hat{\rho}\rho(\hat{\eta}-\eta)\theta+k\hat{\rho}(\hat{\theta}-\theta).\tag{54}$$

因此，对不等式 (53) 两边取 L^2(Ω) 范数，可得

$$\begin{aligned}\nu K_0^{-1}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^2(\Omega)}\leqslant kK_0^2I_t\big(\|\theta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^2(\Omega)}\big)+\|\hat{u}-u\|_{H^{-1;m}}+kK_0I_t\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^2(\Omega)}\\+\nu K_0\|\hat{\eta}^0-\eta^0\|_{L^2(\Omega)}+\|\hat{u}^0-u^0\|_{H^{-1;m}}+\|I_t(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)\|_{L^2(\Omega)}+\|I^{\langle m\rangle}I_t(\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e])\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}\tag{55}$$

在 (0，T) 上。应用格朗沃尔–贝尔曼引理及界 $\|\theta\|_{L^{\infty,\,1}(Q)}\leqslant K$，即可证明界 (52)。

在情形 $m=1$ 下，我们从方程 (50) 中减去问题 $\mathcal{P}_m$ 的相应方程，得到

$$(\hat{\eta}-\eta)\langle\eta^0e^A\rangle_\Omega=-\hat{\eta}\langle\hat{\eta}^0e^{\hat{A}}-\eta^0e^A\rangle_\Omega+\langle\hat{\eta}\rangle_\Omega\big(\hat{\eta}^0e^{\hat{A}}-\eta^0e^A\big)+\big(\langle\hat{\eta}\rangle_\Omega-\langle\eta\rangle_\Omega\big)\eta^0e^A.$$

显然，$\hat{}\eta^0e^{\hat{A}}-\eta^0e^A=\hat{}\eta^0\big(e^{\hat{A}}-e^A\big)+(\hat{}\eta^0-\eta^0)e^A$。我们应用双侧一致估计 $K_0^{-1}\leqslant\eta\leqslant K_0$ 和 $K_0^{-1}\leqslant\hat{}\eta\leqslant K_0$，以及界

$$|A|\leqslant\tfrac{1}{\nu}\big(kK_0\|\theta\|_{L^{\infty,1}(Q)}+\|u\|_{L^{1,\infty}(Q)}+\|u^0\|_{L^1(\Omega)}+\|\bar{g}\|_{L^1(Q)}\big)\leqslant K$$

ˆ 和类似的界 $|A| \leqslant K$。于是得到

$$|\hat{\eta} - \eta| \leqslant K\big(\|\hat{A} - A\|_{L^1(\Omega)} + \|\hat{\eta}^0 - \eta^0\|_{L^1(\Omega)} + |\hat{A} - A| + |\hat{\eta}^0 - \eta^0| + |\langle\hat{\eta}\rangle_\Omega - \langle\eta\rangle_\Omega|\big).$$

取等式两边的 $L^2(\Omega)$–范数，我们得到

$$\|\hat{\eta} - \eta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant K(\|\hat{A} - A\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{\eta}^0 - \eta^0\|_{L^2(\Omega)} + |\langle\hat{\eta}\rangle_\Omega - \langle\eta\rangle_\Omega|).$$

显然，进一步有

$$|\hat{A} - A| \leqslant \tfrac{1}{\nu}\big(I_t|\hat{p} - p| + |I^{\langle 1\rangle}(\hat{u} - u)| + |I^{\langle 1\rangle}(\hat{u}^0 - u^0)| + |I^{\langle 1\rangle} I_t(\hat{g}[\hat{x}_e] - g[x_e])|\big),$$
$$|\langle\hat{\eta}\rangle_\Omega - \langle\eta\rangle_\Omega| \leqslant X^{-1}\|\hat{\eta}^0 - \eta^0\|_{L^1(\Omega)} + X^{-1}|I_t[\hat{u}_0 - u_0 - (\hat{u}_X - u_X)]| + |I_t\langle\beta\rangle_\Omega|,$$

参见公式 (30) 和 (51)。因此，类似于 (55)，我们得到

$$\|\hat{\eta} - \eta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant K\big[I_t\big(\|\theta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\hat{\eta} - \eta\|_{L^2(\Omega)}\big) + \|\hat{u} - u\|_{H^{-1;1}} + I_t\|\hat{\theta} - \theta\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{\eta}^0 - \eta^0\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+\|\hat{u}^0 - u^0\|_{H^{-1;m}} + |I_t[\hat{u}_0 - u_0 - (\hat{u}_X - u_X)]| + |I_t\langle\beta\rangle_\Omega| + \|I^{\langle 1\rangle} I_t(\hat{g}[\hat{x}_e] - g[x_e])\|_{L^2(\Omega)}\big]$$

在 $(0, T)$ 上。显然，这个不等式也意味着 $m = 1$ 满足界 (52)。

2. 接下来我们给出 $v = \hat{u} - u$ 的界。该函数是从 $V_2(Q)$ 到具有 $\varkappa = \nu\hat{\rho}$ 的 $\mathcal{L}_m$–型初边值问题的解，其方程为

$$D_t v = Ds + \hat{g}[\hat{x}_e] - g[x_e], \quad s := \hat{\sigma} - \sigma = \nu\hat{\rho}Dv + \psi$$

在 Q 中，初始条件为 $v|_{t=0} = \hat{u}^0 - u^0$，边界条件为

$$v|_{x=0,X} = \hat{\mathbf{u}}_b - \mathbf{u}_b \ (m = 1),\ s|_{x=0} = -(\hat{p}_0 - p_0),\ v|_{x=X} = \hat{u}_X - u_X \ (m = 2),$$
$$s|_{x=0,X} = -(\hat{\mathbf{p}}_b - \mathbf{p}_b) \ (m = 3).$$

我们推导出如下简单公式： ψ

$$\hat{\eta}\psi = \hat{\eta}[\hat{\sigma} - \nu\hat{\rho}D(\hat{u} - u)] = \hat{\eta}\hat{\sigma} - \eta\sigma - (\hat{\eta} - \eta)\sigma - \nu D(\hat{u} - u) = \nu\beta - k(\hat{\theta} - \theta) - (\hat{\eta} - \eta)\sigma$$

将命题 1 应用于 Q_t 中的这个问题，我们得到如下界

$$\|\hat{u} - u\|_{L^2(Q_t)\cap L^\infty(0,t;H^{-1;m})} \leqslant K(N, T)\big(\|\hat{u}^0 - u^0\|_{H^{-1;m}}$$
$$+\|\hat{\mathbf{u}}_b - \mathbf{u}_b\|_{L^{4/3}(0,T)} + \|\hat{\mathbf{p}}_b - \mathbf{p}_b\|_{L^1(0,T)} + \|\hat{\eta}\psi\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q_t)]^*}$$
$$+\|\hat{\eta}I^{\langle m\rangle}(\hat{g}[\hat{x}_e] - g[x_e])\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q_t)]^*} + \delta_{m3}I_t|\langle\hat{g}[\hat{x}_e] - g[x_e]\rangle_\Omega|\big), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{56}$$

由不等式（4）可得

$$\|\hat{\eta}\psi\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q_t)]^*} \leqslant C\big(\|(\hat{\eta} - \eta)\sigma\|_{L^{1,4/3}(Q_t)} + k\|\hat{\theta} - \theta\|_{L^{2,1}(Q_t)} + \nu\|\beta\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q_t)]^*}\big)$$
$$\leqslant K_1(\|\hat{\eta} - \eta\|_{L^{2,4}(Q_t)} + \|\hat{\theta} - \theta\|_{L^{2,1}(Q_t)} + \|\beta\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q_t)]^*}\big) \tag{57}$$

因为 $\|(\hat{\eta} - \eta)\sigma\|_{L^{1,\,4/3}(Q_t)} \leqslant \|\sigma\|_{L^2(Q)}\|\hat{\eta} - \eta\|_{L^{2,\,4}(Q_t)}$ 以及 $\|\sigma\|_{L^2(Q)} \leqslant K_\circ$ 此外，对于 $z \in L^1(Q)$，再次利用不等式（4），可得

$$\|I^{\langle m\rangle} I_t z\|_{L^{2,\infty}(Q_t)} + \|\hat{\eta}I^{\langle m\rangle} z\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q_t)]^*} \leqslant (1 + CK_0)\|I^{\langle m\rangle} z\|_{L^{2,1}(Q_t)}. \tag{58}$$

将界（57）应用于（56）。然后将结果乘以 $2K^{(0)}$，加到界（52）上，并对 $z=\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e]$ 应用界（58），同时对一些数据范数进行粗略估计，可得

$$\|\hat{\eta}-\eta\|_{C(0,t;L^2(\Omega))}+\|\hat{u}-u\|_{L^2(Q_t)\cap L^\infty(0,t;H^{-1;m})}\leqslant K^{(1)}(N,T)\big(\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{2,4}(Q_t)}+\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^{2,1}(Q_t)}$$
$$+\|\hat{\eta}^0-\eta^0\|_{L^2(\Omega)}+\|\hat{u}^0-u^0\|_{H^{-1;m}}+\|\hat{\mathrm{u}}_b-\mathrm{u}^b\|_{L^{4/3}(0,T)}+\|\hat{\mathrm{p}}_b-\mathrm{p}^b\|_{L^1(0,T)}+\|\beta\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q)]^*}$$

$$+\delta_{m1}\|I_t\langle\beta\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,\ T)}+\|I^{\langle m\rangle}(\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e])\|_{L^{2,\ 1}(Q_t)}+\delta_{m3}I_t|\langle\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e]\rangle_\Omega|\big),\quad 0<t\leqslant T. \tag{59}$$

此处，界 (56) 左端出现空间 $L^\infty(0,\ t;H^{-1;m})$ 至关重要，因为它消去了 (52) 右端的项 $\hat{u}-u$。

由引理 1（将 $(0,\ t)$ 视为 $(0,\ T)$ 应用）可知，这个界蕴含一个改进后的界，其右端不含项 $\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{2,\ 4}(Q_t)}$；为简洁起见，这里不予写出。

3. 由于项 σDu 和 $\hat{\sigma}D\hat{u}$ 的存在，似乎无法利用内能平衡方程 (22) 和 (36) 对 $\|\theta-\theta\|_{L^{2\ }(Q_t)}$ 适当地估界。因此，我们先转而估计 $\hat{e}-e$。但是，在情形 $m=1,\ 2$ 中，由于非齐次边界条件 (25) 和 (39)，无法为此函数设定边界条件。因此，我们需要消除这些非齐次项。这一步是证明中最繁琐的部分（与斜压情形 [5] 相比，这也是全新的）。

我们定义函数 $\hat{w}:=\hat{u}-\hat{u}_\Gamma$，使其满足

$$\hat{u}_\Gamma=:\tfrac{1}{\hat{V}}[(I^*\hat{\eta})\hat{u}_0+(I\hat{\eta})\hat{u}_X]=\hat{u}_0+\tfrac{1}{\hat{V}}(I\hat{\eta})(\hat{u}_X-\hat{u}_0)\ (m=1),\ \hat{u}_\Gamma=\hat{u}_X\ (m=2),\ \hat{u}_\Gamma=0\ (m=3).$$

问题 $\mathcal{P}_m$ 的函数 u_Γ 和 $w:=u-u_\Gamma$ 的定义类似。在 $m=1$的情形下，下面我们需要一个关于 $D_t\hat{u}_\Gamma$的简短公式。利用方程 $D_t\hat{\eta}=D\hat{u}+\beta$，我们推导得

$$D_t\hat{u}_\Gamma=(D_t\hat{u})_\Gamma+\tfrac{1}{\hat{V}}(\hat{u}-\hat{u}_0+I\beta)\hat{u}_{X0}-\tfrac{1}{\hat{V}^2}\Big(\hat{u}_{X0}+\int_\Omega\beta\,dx\Big)(I\hat{\eta})\hat{u}_{X0}$$
$$=(D_t\hat{u})_\Gamma+\tfrac{1}{\hat{V}}\big(\hat{u}-\hat{u}_\Gamma+I\beta-\tfrac{X}{\hat{V}}(I\hat{\eta})\langle\beta\rangle_\Omega\big)\hat{u}_{X0}=(D_t\hat{u})_\Gamma+\tfrac{1}{\hat{V}}(\hat{w}+IP_{\hat{\eta}}\beta)\hat{u}_{X0}\ \ (m=1),\tag{60}$$

其中 $(D_t\hat{u})_\Gamma:=D_t\hat{u}_0+\frac{1}{\hat{V}}(I\hat{\eta})D_t(\hat{u}_X-\hat{u}_0)$，且 $\hat{u}_{X0}:=\hat{u}_X-\hat{u}_0$；另请回顾 $P_{\hat{\eta}}$的定义 (5)。我们还令 $(D_t\hat{u})_\Gamma:=D_t\hat{u}_X(m=2)$，以及 $(D_t\hat{u})_\Gamma:=0(m=3)$。问题 $\mathcal{P}_m$ 的函数 $(D_tu)_\Gamma$和 u_{X0}的定义类似。

我们首先将方程 $D_t\hat{u}=D\hat{\sigma}+\hat{g}[\hat{x}_e]$ 关于 $\hat{w}$ 改写为如下形式

$$D_t\hat{w}=DS_{\hat{w}}+F_{\hat{w}}\ \ \text{in}\ \ Q,\tag{61}$$

带有通量和自由项

$$S_{\hat{w}}:=\hat{\sigma}-\nu\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma-\hat{\sigma}_\Gamma=\nu\hat{\rho}D\hat{w}-\hat{p}+\nu\hat{\rho}\beta-\hat{\sigma}_\Gamma,\ \ F_{\hat{w}}:=\hat{g}[\hat{x}_e]-D_t\hat{u}_\Gamma+D\hat{\sigma}_\Gamma,\tag{62}$$

其中$\hat{\sigma}_\Gamma$ 定义于（48）中，而$\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma$ 关于 x 的独立性至关重要：

$$\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma=\tfrac{1}{\hat{V}}(\hat{u}_X-\hat{u}_0)\ \ (m=1),\ \ D\hat{u}_\Gamma=0\ \ (m=2,3).\tag{63}$$

现在，边界条件（39）可以转化为以下齐次形式

$$\hat{w}|_{x=0,X}=0\ \ (m=1);\ \ S_{\hat{w}}|_{x=0}=0,\,\hat{w}|_{x=X}=0\ \ (m=2);\ \ S_{\hat{w}}|_{x=0,X}=0\ \ (m=3).\tag{64}$$

更确切地说，我们指的是，$\hat{w}$ 是从 $V_2(Q)$ 到由方程 (61)、初始条件 $\hat{w}|_{t=0}=\hat{w}^0:=\hat{u}^0-\hat{u}^0_\Gamma$（回忆一下关于 $\hat{u}^0_\Gamma$ 的公式 (41)）以及边界条件 (64) 所构成的 $\mathcal{L}_m$ 型“线性”抛物型初边值问题的弱解。注意，$\|\hat{w}\|_{L^\infty(Q)}\leqslant K$也成立。

对于 $\hat{}w$，还成立一个额外的积分恒等式（这对我们至关重要）。

$$\int_Q \big[-\tfrac{1}{2}\hat{w}^2 D_t y + S_{\hat{w}}\big((D\hat{w})y + \hat{w}Dy\big)\big]\,dxdt = \int_\Omega \tfrac{1}{2}(\hat{w}^0)^2 y|_{t=0}\,dx + \int_Q F_{\hat{w}}\hat{w}y\,dxdt$$

对于任意 $y \in H^1(Q) \cap L^\infty(Q)$ 且满足 $y|_{t=T} = 0$ 的情形，例如，参见 [8, 命题 2.3] 或 [9, 引理 5.4]。形式上，将方程 (61) 乘以 wy，并对 x 和 t 分部积分，再利用边界条件 (64)，即可得到该结果。因此，$\hat{}w$ 是初边值问题的弱解

$$D_t(\tfrac{1}{2}\hat{w}^2) = D(S_{\hat{w}}\hat{w}) - S_{\hat{w}}D\hat{w} + F_{\hat{w}}\hat{w} \ \text{ in } \ Q, \ \ \tfrac{1}{2}\hat{w}^2|_{t=0} = \tfrac{1}{2}(\hat{w}^0)^2, \ \ (S_{\hat{w}}\hat{w})|_{x=0,X} = 0. \tag{65}$$

由关于 $S_{\hat{w}}$ 的两个公式 (62)，我们推导出辅助公式

$$\begin{aligned} S_{\hat{w}}D\hat{w} &= (\hat{\sigma} - \nu\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma - \hat{\sigma}_\Gamma)D\hat{u} - \hat{\eta}S_{\hat{w}}\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma = (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_\Gamma)D\hat{u} - (\nu D\hat{u} + \hat{\eta}S_{\hat{w}})\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma \\ &= \hat{\sigma}D\hat{u} - \big(2\nu D\hat{w} - k\hat{\theta} + \nu\beta + \nu D\hat{u}_\Gamma\big)\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma - \hat{\sigma}_\Gamma D\hat{u}, \end{aligned} \tag{66}$$

其中我们利用了对所有 $m = 1, 2, 3$，均有 $\hat{}\sigma_\Gamma D\hat{}u_\Gamma = 0$。

Add　　根据关于 $\hat{}w$ 的初边值问题 (65) 的关系，得到关于 θ的相应关系：

$$c_V D_t\hat{\theta} = D\hat{\pi} + \hat{\sigma}D\hat{u} + \hat{f}[\hat{x}_e] \ \text{ in } \ Q, \ \ c_V\hat{\theta}|_{t=0} = c_V\hat{\theta}^0, \ \ \hat{\pi}|_{x=0,X} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_b$$

（实际上，我们将相应的积分恒等式相加），由此推得修正总能量 $\hat{}E := \frac{1}{2}\hat{}w^2 + c_V\hat{}\theta$ 是来自 $L^2(Q)$ 的解，满足 $\mathcal{L}_3$ 型“线性”抛物型初边值问题

$$D_t\hat{E} = D\hat{S} + \hat{F} + \hat{\sigma}_\Gamma D\hat{u} \ \text{ in } \ Q, \ \ \hat{E}|_{t=0} = \hat{E}^0, \ \ \hat{S}|_{x=0,X} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_b,$$

其中 $\varkappa = \frac{\lambda}{c_V}\hat{}\rho$、$\hat{}E^0$ 如上文在定理1之前所定义，以及下列通量和自由项

$$\hat{S} := S_{\hat{w}}\hat{w} + \hat{\pi} = \tfrac{\lambda}{c_V}\hat{\rho}D\hat{E} + \hat{\Psi}, \ \ \hat{\Psi} := (\nu - \tfrac{\lambda}{c_V})\hat{\rho}\,\tfrac{1}{2}D(\hat{w}^2) - (\hat{p} - \nu\hat{\rho}\beta + \hat{\sigma}_\Gamma)\hat{w} + \lambda\hat{\rho}\gamma,$$

$$\hat{F} := -S_{\hat{w}}D\hat{w} + F_{\hat{w}}\hat{w} + \hat{\sigma}D\hat{u} + \hat{f}[\hat{x}_e] - \hat{\sigma}_\Gamma D\hat{u}$$

$$= (\hat{g}[\hat{x}_e] - D_t\hat{u}_\Gamma + \delta_{m3}D\hat{\sigma}_\Gamma)\hat{w} + \delta_{m1}(2\nu D\hat{w} - k\hat{\theta} + \nu\beta + \nu D\hat{u}_\Gamma)\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma + \hat{f}[\hat{x}_e].$$

此处已应用关于 $S\hat{}w$ 与 $F\hat{}w$ 的公式 (62) 以及 (66)，并应用了性质 $D\hat{}\sigma_\Gamma = 0\,(m = 1, 2)$ 与 $D\hat{}u_\Gamma = 0$ $(m = 2, 3)$。

类似地，函数 $E := \frac{1}{2}w^2 + c_V\theta$ 是 $L^2(Q)$ 中初边值问题的解

$$D_t E = DS + F + \sigma_\Gamma Du \ \text{ in } \ Q, \ \ E|_{t=0} = E^0, \ \ S|_{x=0,X} = \boldsymbol{\pi}_b,$$

其中再次取 $\varkappa = \frac{\lambda}{c_V}\hat{}\rho$，以及针对 $\beta = \gamma = 0$ 的不带帽的类似项，即

$$S := (\nu\rho Dw - p - \sigma_\Gamma)w + \pi = \tfrac{\lambda}{c_V}\hat{\rho}DE - \tfrac{\lambda}{c_V}(\hat{\rho} - \rho)DE + \Psi,$$

$$\Psi := (\nu - \tfrac{\lambda}{c_V})\rho\,\tfrac{1}{2}D(w^2) - (p + \sigma_\Gamma)w,$$

$$F := (g[x_e] - D_t u_\Gamma + \delta_{m3}D\sigma_\Gamma)w + \delta_{m1}(2\nu Dw - k\theta + \nu Du_\Gamma)\rho Du_\Gamma + f[x_e].$$

$\hat{}$ 我们将 E 和 E 对应的初边值问题关系式相减，并转到相应的 $E - E$ 初边值问题（更具体地说，我们将它们的 $L^2(Q)$–解对应的积分恒等式相减）。我们需要将 E 和 E 方程右端最后一项之差改写如下

$$\hat{\sigma}_\Gamma D\hat{u} - \sigma_\Gamma Du = (\hat{\sigma}_\Gamma - \sigma_\Gamma)Du + \hat{\sigma}_\Gamma(D\hat{u} - Du) = (\hat{\sigma}_\Gamma - \sigma_\Gamma)Du - \hat{\sigma}_\Gamma\beta - (D_t\hat{\sigma}_\Gamma)(\hat{\eta} - \eta) + D_t G$$

其中 $G:=\hat{}\sigma_\Gamma(\hat{}\eta-\eta)\ -\hat{}\sigma_\Gamma|_{t=0}(\hat{}\eta^0-\eta^0)$，这里用到了方程 $D_t\hat{}\eta=D\hat{}u+\beta$和 $D_t\eta=Du$。现在，将命题 2 应用于 $m=3$情形下 Q_t中的 $v=E-E$ 初边值问题，可得界

$$\begin{aligned}\|\hat{E}-E\|_{L^2(Q_t)}\leqslant K(N,T)\big(&\|\hat{E}^0-E^0\|_{H^{-1;3}}+\|\hat{\boldsymbol{\pi}}_b-\boldsymbol{\pi}_b\|_{L^1(0,T)}\\&+\|\hat{\eta}\big[\tfrac{\lambda}{c_V}(\hat{\rho}-\rho)DE+\hat{\Psi}-\Psi\big]\|_{[V_{2;3*}(Q_t)]^*}+\|\hat{F}-F-\hat{\sigma}_\Gamma\beta\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}\\&+\|(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)Du-(D_t\hat{\sigma}_\Gamma)(\hat{\eta}-\eta)\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}+\|G\|_{L^2(Q_t)}\big),\quad 0<t\leqslant T.\end{aligned}\tag{67}$$

我们逐项估计该不等式的右端，并从第三项开始。我们进行如下变换

$$\begin{aligned}&\hat{\eta}\big[\tfrac{\lambda}{c_V}(\hat{\rho}-\rho)DE+\hat{\Psi}-\Psi\big]\\&=\hat{\eta}\big\{(\hat{\rho}-\rho)[\tfrac{\lambda}{c_V}(Dw)w+\lambda D\theta]+(\nu-\tfrac{\lambda}{c_V})\big[(\hat{\rho}-\rho)(Dw)w+\hat{\rho}\tfrac{1}{2}D(\hat{w}^2-w^2)\big]\\&\quad-(\hat{p}-p+\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)w-(\hat{p}+\hat{\sigma}_\Gamma)(\hat{w}-w)+\nu\hat{\rho}\beta\hat{w}+\lambda\hat{\rho}\gamma\big\}\\&=(\nu-\tfrac{\lambda}{c_V})\tfrac{1}{2}D(\hat{w}^2-w^2)-(\hat{\eta}-\eta)\big[(\nu\rho Dw-p)w+\pi\big]-k(\hat{\theta}-\theta)w\\&\quad-\hat{\eta}(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)w-(k\hat{\theta}+\hat{\eta}\hat{\sigma}_\Gamma)(\hat{w}-w)+\nu\beta\hat{w}+\lambda\gamma,\end{aligned}$$

其中再次使用了关于 $\hat{}p-p$ 的公式（54）。应用范数$\|\cdot\|_{[V_{2;3*}\ (Q_t)\ ]^*}$的定义以及不等式（4），可得界

$$\begin{aligned}&\|\hat{\eta}[\tfrac{\lambda}{c_V}(\hat{\rho}-\rho)DE+\hat{\Psi}-\Psi]\|_{[V_{2;3*}(Q_t)]^*}\leqslant\tfrac{1}{2}|\nu-\tfrac{\lambda}{c_V}|\|\hat{w}^2-w^2\|_{L^2(Q_t)}\\&+C\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{2,\infty}(Q_t)}\big(\|\sigma\|_{L^{3/2}(Q)}\|w\|_{L^\infty(Q)}+\|\pi\|_{L^{3/2}(Q)}\big)+k\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^{2,1}(Q_t)}\|w\|_{L^\infty(Q)}\\&+\|\hat{\eta}\|_{L^\infty(Q)}\|\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma\|_{L^{\infty,1}(Q)}\|w\|_{L^{2,\infty}(Q)}\\&+\big(Ck\|\hat{\theta}\|_{L^3(Q)}+\|\hat{\eta}\|_{L^\infty(Q)}\|\hat{\sigma}_\Gamma\|_{L^{\infty,2}(Q)}\big)\|\hat{w}-w\|_{L^2(Q_t)}+\nu\|\beta\hat{w}\|_{[V_{2;3*}(Q)]^*}+\lambda\|\gamma\|_{[V_{2;3*}(Q)]^*}.\end{aligned}$$

我们来估计其右端的差的范数。首先有

$$\begin{aligned}&\|\hat{w}^2-w^2\|_{L^2(Q_t)}\leqslant\big(\|\hat{w}\|_{L^\infty(Q)}+\|w\|_{L^\infty(Q)}\big)\|\hat{w}-w\|_{L^2(Q_t)}\\&\leqslant\big(\|\hat{u}\|_{L^\infty(Q)}+\|\hat{\mathbf{u}}_b\|_{L^\infty(0,T)}+\|u\|_{L^\infty(Q)}+\|\mathbf{u}_b\|_{L^\infty(0,T)}\big)\big(\|\hat{u}-u\|_{L^2(Q_t)}+\|\hat{u}_\Gamma-u_\Gamma\|_{L^2(Q_t)}\big).\end{aligned}$$

这里，界$\|u\|_{L^\infty\ (Q)}\ \leqslant K_1$（见（33））以及假设 $\|\hat{}u\|_{L^\infty\ (Q)}\ \leqslant K$ 至关重要。在 $m=1$ 的情况下，进一步写出公式并得到界

$$\begin{aligned}&\hat{u}_\Gamma-u_\Gamma=\tfrac{1}{\hat{V}}(I^*\hat{\eta})(\hat{u}_0-u_0)+\tfrac{1}{\hat{V}}(I\hat{\eta})\big(\hat{u}_X-u_X\big)+(\tfrac{1}{\hat{V}}I\hat{\eta}-\tfrac{1}{V}I\eta)(u_X-u_0),\\&|\tfrac{1}{\hat{V}}I\hat{\eta}-\tfrac{1}{V}I\eta|=\tfrac{1}{\hat{V}V}\big|[I(\hat{\eta}-\eta)]I^*\hat{\eta}-[I^*(\hat{\eta}-\eta)]I\hat{\eta}\big|\leqslant\tfrac{1}{\hat{V}}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^1(\Omega)}\end{aligned}\tag{68}$$

$\hat{}$ 因为 $I\hat{}\eta+I^*\hat{}\eta=V$和 $I\eta+I^*\eta=V$。它们推出界

$$\|\hat{u}_\Gamma-u_\Gamma\|_{L^2(Q_t)}\leqslant\sqrt{X}\big(\|\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b\|_{L^2(0,T)}+N\|\mathbf{u}_b\|_{L^2(0,T)}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{1,\infty}(Q_t)}\big),\tag{69}$$

见条件（28）。在 $m=2$，3 的情况下，显然不含右端第二项的较简单界同样成立。

此外，显然下列界成立

$$\|\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma\|_{L^{\infty,1}(Q)}+\|D(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)\|_{L^{\infty,1}(Q)}\leqslant C\|\hat{\mathbf{p}}_b-\mathbf{p}_b\|_{L^1(0,T)}.\tag{70}$$

对于 $\beta=\beta_1+\beta_2$，由于恒等式

$$\int_Q \beta\hat{w}\varphi\,dxdt=\int_Q\big(\beta_1+\langle\beta_2\rangle_\Omega\big)\hat{w}\varphi\,dxdt-\int_Q(I^{\langle3\rangle}\beta_2)\big[(D\hat{w})\varphi+\hat{w}D\varphi\big]\,dxdt, \tag{71}$$

for 任意的 $\varphi\in V_2(Q)$，以及不等式（4），类似地可得以下界 s

$$\|\beta\hat{w}\|_{[V_{2;3*}(Q)]^*}\leqslant C\Big[\big(\inf_{M_0}\|\beta_1\|_{L^{q,r}(Q)}+\|\langle\beta_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}\big)\|\hat{w}\|_{L^\infty(Q)}$$
$$+\inf_{M_1}\|I^{\langle3\rangle}\beta_2\|_{L^{q,r}(Q)}\big(\|D\hat{w}\|_{L^2(Q)}+\|\hat{w}\|_{L^\infty(Q)}\big)\Big].$$

在 $\|D\hat{w}\|_{L^{2,\infty}(Q)}\leqslant K$ 的情况下， $I^{\langle3\rangle}\beta_2$ 的范数可放宽至 $\|I^{\langle3\rangle}\beta_2\|_{L^2(Q)}$。

接下来，我们对（67）右端的第四项进行估计，这一过程相当冗长。为此，利用 $D_t\hat{u}_\Gamma$ 的公式（60）以及 D_tu_Γ （带有$\beta=0$）的类似公式，我们首先进行以下变换

$$\hat{F}-F-\hat{\sigma}_\Gamma\beta=(g[x_e]-(D_t\hat{u})_\Gamma+\delta_{m3}D\hat{\sigma}_\Gamma)(\hat{w}-w)+(\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e])\hat{w}+\hat{f}[\hat{x}_e]-f[x_e]$$
$$-[(D_t\hat{u})_\Gamma-(D_tu)_\Gamma-\delta_{m3}D(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)]w-\delta_{m1}\big[\tfrac{1}{\hat{V}}\hat{u}_{X0}(\hat{w}+IP_{\hat{\eta}}\beta)\hat{w}-\tfrac{1}{V}u_{X0}w^2\big]$$
$$+\delta_{m1}\big\{[2\nu D(\hat{w}-w)-k(\hat{\theta}-\theta)]\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma$$
$$+(2\nu Dw-k\theta)(\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma-\rho Du_\Gamma)+\nu\big[\hat{\eta}(\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma)^2-\eta(\rho Du_\Gamma)^2\big]+\beta\nu\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma\big\}-\beta\hat{\sigma}_\Gamma$$

此外，对于 $m=1$,

$$\int_{Q_t}[D(\hat{w}-w)](\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma)y\,dxd\tau=-\int_{Q_t}(\hat{w}-w)(\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma)Dy\,dxd\tau,$$

fo任意的 $y\in L^2(Q)$ 满足 $Dy\in L^2(Q)$ 时，利用 $\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma$ 对 x 的独立性，以及

$$\hat{\eta}(\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma)^2-\eta(\rho Du_\Gamma)^2=(D\hat{u}_\Gamma+Du_\Gamma)(\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma-\rho Du_\Gamma)+(\hat{\eta}-\eta)(\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma)\rho Du_\Gamma.$$

由不等式（15），可得界

$$\|\hat{F}-F-\hat{\sigma}_\Gamma\beta\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}\leqslant CK_0\big(\|g[x_e]\|_{L^2(Q)}+\|D_t\hat{u}_\Gamma\|_{L^2(Q)}+\delta_{m3}\|D\hat{\sigma}_\Gamma\|_{L^2(Q)}\big)\|\hat{w}-w\|_{L^2(Q_t)}$$
$$+\|(\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e])\hat{w}\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}+\|\hat{f}[\hat{x}_e]-f[x_e]\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}$$
$$+CK_0\big(\|(D_t\hat{u})_\Gamma-(D_tu)_\Gamma\|_{L^1(Q_t)}+\delta_{m3}\|D(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)\|_{L^1(Q)}\big)\|w\|_{L^\infty(Q)}$$
$$+\delta_{m1}\big(\|\tfrac{1}{\hat{V}}\hat{u}_{X0}\hat{w}^2-\tfrac{1}{V}u_{X0}w^2\|_{L^1(Q_t)}+\|\tfrac{1}{\hat{V}}(\hat{u}_X-\hat{u}_0)\|_{L^\infty(0,T)}\|IP_{\hat{\eta}}\beta\|_{L^1(Q)}\|\hat{w}\|_{L^\infty(Q)}\big)$$
$$+CK_0\delta_{m1}\big\{\big(2\nu\|\hat{w}-w\|_{L^{2,1}(Q_t)}+k\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^1(Q_t)}\big)\|\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}$$
$$+CK_0\big[2\nu\|Dw\|_{L^2(Q)}+k\|\theta\|_{L^2(Q)}+\nu C\big(\|D\hat{u}_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}+\|Du_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}\big)\big]\|\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma-\rho Du_\Gamma\|_{L^2(Q_t)}$$
$$+CK_0\nu\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^1(Q_t)}\|\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}\|\rho Du_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}\big\}+\|\beta(\delta_{m1}\nu\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma-\hat{\sigma}_\Gamma)\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q)]^*}.$$

接下来，我们逐项估计这个不等式的右端，首先使用以下界

$$\|g[x_e]\|_{L^2(Q)}+\|(D_t\hat{u})_\Gamma\|_{L^2(Q)}+\delta_{m3}\|D\hat{\sigma}_\Gamma\|_{L^2(Q)}$$
$$\leqslant\|\bar{g}\|_{L^2(Q)}+C(\|D_t\hat{\mathbf{u}}_b\|_{L^2(0,T)}+\delta_{m3}\|\hat{\mathbf{p}}_b\|_{L^2(0,T)})\leqslant C_1N,$$

我们应用以下公式

$$\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e]=g[\hat{x}_e]-g[x_e]+\hat{g}[\hat{x}_e]-g[\hat{x}_e]=g[\hat{x}_e]-g[x_e]+g_1+g_2, \tag{72}$$

$$\int_{Q_t} g_2\hat{w}y\,dxdt=-\int_{Q_t}(I^{\langle m\rangle}g_2)[(D\hat{w})y+\hat{w}Dy]\,dxdt+\delta_{m3}\int_{Q_t}\langle g_2\rangle_\Omega\hat{w}y\,dxdt,$$

对于任意 $y\in L^\infty(Q)$，其中 $Dy\in L^{2,\infty}(Q)$（后者由公式（13）得出），且 g et

$$\|(\hat{g}[\hat{x}_e]-g[x_e])\hat{w}\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}\leqslant CK_0\big(\|g[\hat{x}_e]-g[x_e]\|_{L^1(Q_t)}+\|g_1\|_{L^1(Q)}\big)\|\hat{w}\|_{L^\infty(Q)}$$
$$+CK_0\big(\|I^{\langle m\rangle}g_2\|_{L^2(Q)}\|\hat{w}\|_{V_2(Q)}+\delta_{m3}\|\langle g_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}\|\hat{w}\|_{L^{1,\infty}(Q)}\big).$$

当 $\|D\hat{w}\|_{L^{2,\infty}(Q)}\leqslant K$ 时， $I^{\langle m\rangle}g_2$ 的范数可以进一步弱化为 $\|I^{\langle m\rangle}g_2\|_{L^{2,1}(Q)}$。将公式（72）中的 g 替换为 f，并结合不等式（15），可得

$$\|\hat{f}[\hat{x}_e]-f[x_e]\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}\leqslant CK_0\|f[\hat{x}_e]-f[x_e]\|_{L^1(Q_t)}+\|\hat{f}[\hat{x}_e]-f[\hat{x}_e]\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q)]^*}.$$

显然，根据定义，当 $m=1$ 时，我们有

$$(D_t\hat{u})_\Gamma-(D_tu)_\Gamma=D_t\hat{u}_0-D_tu_0+\tfrac{1}{\hat{V}}(I\hat{\eta})D_t(\hat{u}_{X0}-u_{X0})+\big(\tfrac{1}{\hat{V}}I\hat{\eta}-\tfrac{1}{V}I\eta\big)D_tu_{X0}.$$

此外，应用界（68），可得

$$\|(D_t\hat{u})_\Gamma-(D_tu)_\Gamma\|_{L^1(Q_t)}\leqslant C\big(\|D_t(\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b)\|_{L^1(0,T)}+N\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{1,\infty}(Q_t)}\|D_t\mathbf{u}_b\|_{L^1(0,T)}\big).$$

在 $m=2,3$ 的情况下，我们只需有 $\|(D_t\hat{u})_\Gamma-(D_tu)_\Gamma\|_{L^1(Q_t)}\leqslant\|D_t(\hat{u}_X-u_X)\|_{L^1(0,T)}$。我们还可以写成

$$\tfrac{1}{\hat{V}}\hat{u}_{X0}\hat{w}^2-\tfrac{1}{V}u_{X0}w^2=\big(\tfrac{1}{\hat{V}}\hat{u}_{X0}-\tfrac{1}{V}u_{X0}\big)w^2+\tfrac{1}{\hat{V}}\hat{u}_{X0}(\hat{w}+w)(\hat{w}-w),$$
$$\tfrac{1}{\hat{V}}\hat{u}_{X0}-\tfrac{1}{V}u_{X0}=\tfrac{1}{V}(\hat{u}_{X0}-u_{X0})-\hat{u}_{X0}\tfrac{1}{\hat{V}V}(\hat{V}-V\big).$$

因此，我们得到

$$\|\tfrac{1}{\hat{V}}\hat{u}_{X0}\hat{w}^2-\tfrac{1}{V}u_{X0}w^2\|_{L^1(Q_t)}$$
$$\leqslant\big(NX\|\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b\|_{L^2(0,T)}+NK_0\|\mathbf{u}_b\|_{L^2(0,T)}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{1,\infty}(Q_t)}\big)\|w\|^2_{L^\infty(Q)}$$
$$+N\|\mathbf{u}_b\|_{L^\infty(0,T)}\big(\|\hat{w}\|_{L^\infty(Q)}+\|w\|_{L^\infty(Q)}\big)\|\hat{w}-w\|_{L^1(Q_t)}.$$

同样，由于关于 $D\hat{u}_\Gamma$ 的公式（63），我们有

$$\|\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma-\rho Du_\Gamma\|_{L^2(Q_t)}\leqslant N\sqrt{X}\|\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b\|_{L^2(0,T)}+N\tfrac{K_0}{\sqrt{X}}\|\mathbf{u}_b\|_{L^2(0,T)}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{1,\infty}(Q_t)}.$$

此外，我们得到

$$\|IP_{\hat{\eta}}\beta\|_{L^1(Q)}\leqslant\|I^{\langle3\rangle}\beta\|_{L^1(Q)}+C\|\langle\beta\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}.$$

与 $m=3$的公式（16）类似，我们有

$$\int_Q\beta(z-\hat{\sigma}_\Gamma)y\,dxdt=\int_Q\langle\beta\rangle_\Omega(z-\hat{\sigma}_\Gamma)y\,dxdt-\int_Q(I^{\langle3\rangle}\beta)\big[-(D\hat{\sigma}_\Gamma)y+(z-\hat{\sigma}_\Gamma)Dy\big]\,dxdt$$

对于 $z:=\delta_{m1}\nu\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma$ 以及任意 $y\in H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q)$。因此，与不等式（4）类似，我们有

$$\begin{aligned}&\|\beta(\delta_{m1}\nu\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma-\hat{\sigma}_\Gamma)\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q)]^*}\\&\leqslant C\big(\|\langle\beta\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}+\inf_{M_0}\|I^{\langle3\rangle}\beta\|_{L^{q,r}(Q)}\big)\big(\delta_{m1}\|\hat{\rho}D\hat{u}_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}+\|D\hat{\sigma}_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}+\|\hat{\sigma}_\Gamma\|_{L^\infty(Q)}\big).\end{aligned}$$

现在我们来处理（67）式右端的第五项。由恒等式

$$\int_Q z(Du)y\,dxdt=\int_0^T[zuy]\big|_{x=0}^{x=X}\,dt-\int_Q\big\{(Dz)y+zDy\big\}u\,dxdt,$$

对于 $z:=\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma$ 以及任意满足 $Dy\in L^2,\infty(Q)$ 的 $y\in L^\infty(Q)$，结合不等式（15），我们 get

$$\begin{aligned}&\|(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)Du-(D_t\hat{\sigma}_\Gamma)(\hat{\eta}-\eta)\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q_t)]^*}\\&\leqslant CK_0\big[\|\hat{\mathbf{p}}_b-\mathbf{p}_b\|_{L^1(0,T)}\big(\|u|_{x=0}\|_{L^\infty(0,T)}+\|u|_{x=X}\|_{L^\infty(0,T)}\big)\\&+\big(\|D(\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma)\|_{L^1(Q)}+\|\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma\|_{L^{2,1}(Q)}\big)\|u\|_{L^\infty(Q)}+\|D_t\hat{\sigma}_\Gamma\|_{L^{\infty,1}(Q)}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{1,\infty}(Q_t)}\big].\end{aligned}$$

回顾一下，由于 $\|u\|_{L^\infty(Q)}\leqslant K_1$ 和 $Du\in L^1(Q)$，有 $\|u|_{x=0}\|_{L^\infty(0,\,T)}+\|u|_{x=X}\|_{L^\infty(0,\,T)}\leqslant 2K_1$。涉及的差 $\hat{\sigma}_\Gamma-\sigma_\Gamma$ 已在（70）式中给出了上界。

对于（67）式右端的最后第六项，有如下界

$$\|G\|_{L^2(Q_t)}=\|\hat{\sigma}_\Gamma(\hat{\eta}-\eta)-\hat{\sigma}_\Gamma|_{t=0}(\hat{\eta}^0-\eta^0)\|_{L^2(Q_t)}\leqslant\|\hat{\sigma}_\Gamma\|_{C(\bar{Q})}2T^{1/2}\|\hat{\eta}-\eta\|_{C(0,t;L^2(\Omega))}.$$

最终，界（67）导出以下结果

$$\begin{aligned}\|\hat{E}-E\|_{L^2(Q_t)}\leqslant K^{(2)}(N,T)\Big(&\|\hat{\eta}-\eta\|_{C(0,t;L^2(\Omega))}+\|\hat{u}-u\|_{L^2(Q_t)}+\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^{2,1}(Q_t)}\\&+\|\hat{E}^0-E^0\|_{H^{-1;3}}+\|\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b\|_{W^{1,1}(0,T)}+\|\hat{\mathbf{p}}_b-\mathbf{p}_b\|_{L^1(0,T)}+\|\hat{\boldsymbol{\pi}}_b-\boldsymbol{\pi}_b\|_{L^1(0,T)}\\&+\inf_{M_0}\|\beta_1\|_{L^{q,r}(Q)}+\inf_{M_1}\|I^{\langle3\rangle}\beta_2\|_{L^{q,r}(Q)}+\|\langle\beta_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}+\|\gamma\|_{[V_{2;3_*}(Q)]^*}\\&+\|\hat{g}[\hat{x}_e]-g[\hat{x}_e]\|_{L^1(Q_t)}+\|g_1\|_{L^1(Q)}+\|I^{\langle m\rangle}g_2\|_{L^2(Q)}+\delta_{m3}\|\langle g_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}\\&+\|f[\hat{x}_e]-f[x_e]\|_{L^1(Q_t)}+\|\hat{f}[\hat{x}_e]-f[\hat{x}_e]\|_{[H^{2,1;\hat{\rho},3}(Q)]^*}\Big),\quad 0<t\leqslant T.\end{aligned}\tag{73}$$

公式 $c_V(\hat{\theta}-\theta)=\hat{E}-E-\frac{1}{2}(\hat{w}^2-w^2)$ 以及上述关于 $\|\hat{w}^2-w^2\|_{L^2(Q_t)}$ 的界，使我们能够在（73）左侧用 $\hat{\theta}-\theta$ 替换 $\hat{E}-E$。我们将该界除以 $2K^{(2)}(N,T)$，并将结果加到改进后的界（59）上；该界是在证明的上一步得到的，右侧不含项 $\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{2,4}(Q_t)}$。对于含有 $\beta=\beta_1+\beta_2$ 的项，我们对 $\beta=\beta_1$ 应用不等式（4），以及

$$\begin{aligned}\|I_t\langle\beta\rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)}&\leqslant|\langle\beta\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}\leqslant\tfrac{1}{X}\|\beta\|_{L^1(Q)},\\\|\beta_2\|_{[V_{2;\hat{\rho},m_*}(Q)]^*}&\leqslant\sqrt{X}|\langle\beta_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}+\|I^{\langle3\rangle}\beta_2\|_{L^2(Q)},\end{aligned}$$

对于 $\beta=\beta_1,\beta_2$，其中最后一个不等式可由恒等式（71）推出，只需将其中的 $\hat{w}$ 替换为 1。适当放宽一些范数，并进一步应用以下界

$$\|g[\hat{x}_e]-g[x_e]\|_{L^1(Q_t)}+\|f[\hat{x}_e]-f[x_e]\|_{L^1(Q_t)}\leqslant 2\|b|\hat{x}_e-x_e|\|_{L^1(Q_t)}\leqslant 2I_t\big(\|b\|_{L^{q'_e}(\Omega)}\|\hat{x}_e-x_e\|_{L^{q_e}(\Omega)}\big),$$

其中 $b := \|D_\chi g\|_{L^\infty(-K',K')} + \|D_\chi f\|_{L^\infty(-K',K')}$，满足 K' 的条件是 $|x_e| \leqslant K'$ 且 $|\hat{} x_e| \leqslant K'$，并且 $\|b\|_{L^{q_e',1}(Q)} \leqslant K_2$，见假设 (27)，我们推导得

$$\|\hat\eta-\eta\|_{C(0,t;L^2(\Omega))}+\|\hat u-u\|_{L^2(Q_t)\cap L^\infty(0,t;H^{-1;m})}+\|\hat\theta-\theta\|_{L^2(Q_t)}\leqslant K^{(3)}(N,T)\big(\|\hat\theta-\theta\|_{L^{2,1}(Q_t)}$$
$$+I_t\big(\|b\|_{L^{q_e'}(\Omega)}\|\hat x_e-x_e\|_{L^{q_e}(\Omega)}\big)+\|\hat\eta^0-\eta^0\|_{L^2(\Omega)}+\|\hat u^0-u^0\|_{H^{-1;m}}+\|\hat E^0-E^0\|_{H^{-1;3}}$$
$$+\|\hat{\mathbf{u}}_b-\mathbf{u}_b\|_{W^{1,1}(0,T)}+\|\hat{\mathbf{p}}_b-\mathbf{p}_b\|_{L^1(0,T)}+\|\hat{\boldsymbol\pi}_b-\boldsymbol\pi_b\|_{L^1(0,T)}$$
$$+\inf_{M_0}\|\beta_1\|_{L^{q,r}(Q)}+\inf_{M_1}\|I^{\langle 3\rangle}\beta_2\|_{L^{q,r}(Q)}+\|\langle\beta_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}+\|\gamma\|_{[V_{2;3_*}(Q)]^*}$$
$$+\|g_1\|_{L^1(Q)}+\|I^{\langle m\rangle}g_2\|_{L^2(Q)}+\delta_{m3}\|\langle g_2\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)}+\|\hat{} f[\hat{} x_e]-f[\hat{} x_e]\|_{[H^{2,1;\hat\rho,3}(Q)]^*}\big),\ 0<t\leqslant T \quad (74)$$

$\hat{}$ 由于引理 1，该界意味着改进后的界，右侧不再包含项 $\|\theta-\theta\|_{L^{2,1}(Q_t)}$。

公式

$$\hat E^0-E^0=\hat e^0-e^0-(\hat u^0-u^0)\hat u_\Gamma(0)-u^0[\hat u_\Gamma(0)-u_\Gamma(0)]+\tfrac12[\hat u_\Gamma(0)+u_\Gamma(0)][\hat u_\Gamma(0)-u_\Gamma(0)]$$

这意味着关于改进后的界（74）的注 1、第 1 项，进而（提前来看）也意味着由此得到的界（42）。

4. 现在我们对 $\hat{} x_e - x_e$ 进行界定。对方程 $D_t\hat{} x_e = \hat{} u$ 和 $D_t\hat{} \eta = D\hat{} u + \beta$ 应用算子 I_t，我们得到

$$\hat x_e=\hat x_e^0+I_t\hat u,\quad DI_t\hat u=\hat\eta-\hat\eta^0-I_t\beta.$$

由于 $\hat{} x_e^0 = I\hat{} \eta^0 + \beta_e$ 与 $I_t\hat{} u = I_t\langle\hat{} u\rangle_\Omega + I^{\langle 1\rangle}DI_t\hat{} u$（见 (1)），下列公式成立

$$\hat x_e=\langle I\hat\eta^0\rangle_\Omega+\beta_e+I_t\langle\hat u\rangle_\Omega+I^{\langle1\rangle}\hat\eta-I^{\langle1\rangle}I_t\beta.$$

该公式以及问题 $\mathcal{P}_m$（其中 $\beta_e=\beta=0$）的类似公式蕴含该界

$$\|\hat x_e-x_e\|_{L^{q_e,\infty}(Q_t)}\leqslant C(\|\hat\eta-\eta\|_{L^{1,\infty}(Q_t)}+\|\hat u-u\|_{L^1(Q_t)}+\|\hat\eta^0-\eta^0\|_{L^1(\Omega)})$$
$$+\|\beta_e\|_{L^{q_e}(\Omega)}+\|I_tI^{\langle1\rangle}\beta\|_{L^{q_e,\infty}(Q)}.$$

显然，我们还有

$$\|I_tI^{\langle1\rangle}\beta\|_{L^{q_e,\infty}(Q)}\leqslant\|I^{\langle1\rangle}\beta\|_{L^{q_e,1}(Q)}\leqslant C\|\beta\|_{L^1(Q)}. \quad (75)$$

由于这些界，前一项中所证明的改进界 (74)，在右端不含 $\hat{}$ 项 $\|\theta-\theta\|_{L^{2,1}(Q_t)}$ 的情况下，在分别向其左端与右端添加项 $\|\hat{} x_e - x_e\|_{L^{q_e,\infty}(Q_t)}$ 与 $C\big(\|\beta_e\|_{L^{q_e}(\Omega)} + \|I_tI^{\langle1\rangle}\beta_2\|_{L^{q_e,\infty}(Q)}\big)$ 之后仍然成立。最后，将格朗沃尔–贝尔曼引理应用于该结果，便完成了界 (42) 的证明，但左端不含最后一项。

请注意，除了不等式（75）之外，我们还有

$$\|I^{\langle1\rangle}\beta\|_{L^{q_e,1}(Q)}\leqslant C\|I\beta\|_{L^{q_e,1}(Q)}\leqslant C\|I^{\langle3\rangle}\beta\|_{L^{q_e,1}(Q)}+C_1\|\langle\beta\rangle_\Omega\|_{L^1(0,T)},$$

对于 $q_e=2$，或在定义集合 M_1 时仅考虑 $q\in[q_e,\infty]$ 的取值，界（42）中的项 $\|I_tI^{\langle1\rangle}\beta_2\|_{L^{q_e,\infty}(Q)}$ 可以省略。

5. 根据 $\nu\ln\hat{} \eta$ 的公式（43）以及问题 $\mathcal{P}_m$ 的类似公式，我们有

$$|I_t(\hat\sigma-\sigma)|\leqslant\nu K_0\big(|\hat\eta-\eta|+|\hat\eta^0-\eta^0|\big)+|I_t(\hat p-p)|,$$

因此（再次使用 $\hat{} p - p$ 的公式（54））

$$\|I_t(\hat\sigma-\sigma)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant K\big(\|\hat\eta-\eta\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}+\|\hat\theta-\theta\|_{L^{2,1}(Q)}\big)$$

由此完成证明。在 $m=2,3$ 的情况下，也可以应用公式 (47)。 □

现在，我们推导出一些有用的推论：在一般情况下，若对数据作出一些附加假设，则解关于数据在更强范数下具有 H¨older 连续性；下面将应用这些推论。将界 (42) 右侧方括号中的范数之和简记为 Δ。

推论 1. 设定理*1*的假设成立，且$\|\bar{g}\|_{L^{2,\ 1}(Q)} \leqslant N$ 满足条件$\hat{}(C_2)$。则这些界成立

$$\|\hat{u}-u\|_{L^{\infty,2}(Q)} \leqslant K(N)\Delta^{1/2}, \quad \|I_t(\hat{\sigma}-\sigma)\|_{C(\bar{Q})} \leqslant K(N)\Delta^{1/2}. \tag{76}$$

$\hat{}$若$\|\bar{g}\|_{L^{\infty,\ 1}(Q)} \leqslant N$ 满足条件(C_2) 和(C_2)，则较强的部分界成立

$$\|I_t(\hat{\sigma}-\sigma)\|_{C(\bar{Q})} \leqslant K(N)\Delta^{2/3}. \tag{77}$$

若 $D\hat{}\theta \in L^2(Q)$ 且 $\|D\hat{}\theta\|_{L^2(Q)} \leqslant\hat{} K(N)$，则附加界成立

$$\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^{\infty,2}(Q)} \leqslant K(N)\Delta^{1/2}, \tag{78}$$

$$\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{\infty}(Q)} \leqslant K(N)\big(\|\hat{\eta}^0-\eta^0\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\Delta^{1/2}\big). \tag{79}$$

证明。 以下乘性不等式是众所周知的

$$\|\alpha\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant C\|\alpha\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\alpha\|^{1/2}_{W^{1,2}(\Omega)}, \quad \|\alpha\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant C\|\alpha\|^{2/3}_{L^2(\Omega)}\|\alpha\|^{1/3}_{W^{1,\infty}(\Omega)}. \tag{80}$$

此外，$\hat{}u$ 的公式 (44) 推出如下界

$$\|DI_t\hat{\sigma}\|_{L^{q,\infty}(Q)} \leqslant X^{1/q}(\|\hat{u}\|_{L^{\infty}(Q)}+\|\hat{u}^0\|_{L^{\infty}(\Omega)})+\|\bar{g}\|_{L^{q,1}(Q)}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{81}$$

而 $DI_t\sigma$ 对应的类似界也成立。

界 (76) 和 (78) 由定理1推出，这是因为对于 $q=2$，不等式 (80) 的第一个不等式及界 (81) 成立。对于 $q=\infty$，不等式 (80) 的第二个不等式及界 (81) 成立，因此界 (77) 有效。

等式 (43) 对 $\ln\hat{}\eta$ 成立，对于问题 $\mathcal{P}_m$ 的类似公式以及 $\hat{}p-p$ 的公式 (54) 可推出

$$\nu K_0^{-1}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{\infty}(Q_t)} \leqslant \nu K_0\|\hat{\eta}^0-\eta^0\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\|I_t(\hat{\sigma}-\sigma)\|_{L^{\infty}(Q)}+kK_0\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^{\infty,1}(Q)}+$$
$$+kK_0^2 I_t(\|\theta\|_{L^{\infty}(\Omega)}\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{\infty}(\Omega)}), \quad 0<t\leqslant T.$$

接着，格朗沃尔–贝尔曼引理给出界

$$\|\hat{\eta}-\eta\|_{L^{\infty}(Q)} \leqslant K\big(\|\hat{\eta}^0-\eta^0\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\|I_t(\hat{\sigma}-\sigma)\|_{L^{\infty}(Q)}+\|\hat{\theta}-\theta\|_{L^{\infty,1}(Q)}\big),$$

因此，最后一个界 (79) 可由前面的界推出。对于 $\hat{}u-u$ 和 $\theta-\theta$ 的界，并未使用对 $\bar{g}\hat{}$ 所施加的条件。 □

定义巴拿赫空间 $W(Q)$，其元素为函数 $w\in H^1(Q)$，且具有有限范数 $\|w\|_{W(Q)}:=\|w\|_{L^2(Q)}+\|D_tw\|_{L^2(Q)}+\|Dw\|_{L^{2,\infty}(Q)}$。令 $\zeta\in H^1(0,T)$ 为一个截断函数，使得$\|D_t\zeta\|_{L^2(0,T)} \leqslant N$，且 $\zeta(0)=0$。

推论2. 定理*1*的假设成立。

1. 此外，数据还满足以下条件

$$\|\zeta^2\bar{f}\|_{L^2(Q)} \leqslant N, \quad \|D_t(\zeta\mathbf{u}_b)\|_{L^{4/3}(0,T)}+\|\zeta^2\boldsymbol{\pi}_b\|_{W^{1,1}(0,T)} \leqslant N$$

以及 $\|\zeta \hat{} u\|_{W(Q)} + \|\zeta^2 \hat{} \theta\|_{W(Q)} \leqslant \hat{} K(N)$ 成立。那么以下内部界在 t 中成立。

$$\|\zeta(\hat{u} - u)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} + \|\zeta^2(\hat{\theta} - \theta)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant K(N)\Delta^{1/2}, \tag{82}$$

$$\|\zeta(\hat{u} - u)\|_{C(\bar{Q})} + \|\zeta^2(\hat{\theta} - \theta)\|_{C(\bar{Q})} \leqslant K(N)\Delta^{1/4}. \tag{83}$$

2. 此外，设数据上的更强条件

$$\|Du^0\|_{L^2(\Omega)} + \|D\theta^0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant N, \ \ \|\bar{f}\|_{L^2(Q)} \leqslant N, \ \ \|D_t \mathbf{u}_b\|_{L^{4/3}(0,T)} + \|\boldsymbol{\pi}_b\|_{W^{1,1}(0,T)} \leqslant N,$$

合取条件 $u_0(0) = u^0(0)$ *(*$m = 1$*)*与 $u_X(0) = u^0(X)$ *(*$m = 1, 2$*)*以及 $\hat{} \hat{}$ 界 $\|\hat{} u\|_{W(Q)} + \|\theta\|_{W(Q)} \leqslant K(N)$ 成立。则下列界成立

$$\|\hat{u} - u\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} + \|\hat{\theta} - \theta\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant K(N)\Delta^{1/2}, \tag{84}$$

$$\|\hat{u} - u\|_{C(\bar{Q})} + \|\hat{\theta} - \theta\|_{C(\bar{Q})} \leqslant K(N)\Delta^{1/4}. \tag{85}$$

证明。 根据 [11, 定理5.1和5.2] （或参见 [43]），在第1项和第2项的假设下（考虑到$\|\bar{g}\|_{L^2(Q)} \leqslant N$），问题$\mathcal{P}_m$的解的附加正则性分别成立，即 $\|\zeta u\|_{W(Q)} + \|\zeta^2\theta\|_{W(Q)} \leqslant K(N)$与 $\|u\|_{W(Q)} + \|\theta\|_{W(Q)} \leqslant K(N)$。

接下来，以下乘性不等式成立

$$\|w\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C\|w\|^{1/2}_{L^2(Q)}(\|w\|_{L^2(Q)} + \|D_t w\|_{L^2(Q)})^{1/2},$$

$$\|w\|_{C(\bar{Q})} \leqslant C\|w\|^{1/4}_{L^2(Q)}\|w\|^{3/4}_{W(Q)};$$

参见其中的第二个不等式 [6]。这些结果可以利用定理1推出界 (82)–(85)。 □

推论2中的界展示了抛物光滑化对差 $\hat{} u - u$ 和 $\hat{} \theta - \theta$ 的影响，相较于初始差 $\hat{} u^0 - u^0$ 和 $\hat{} \theta^0 - \theta^0$ 而言，尽管 x 中 $\hat{} \eta$ 和 η并不光滑。此外，在第 1 项中，$\zeta \equiv 1$ 的界 (82) 和 (83)（即界 (84) 和 (85)）不可能成立（因为对于初始差，范数 $\|\cdot\|_{H^{-1;m}}$ 比 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ 弱，而且 $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}$）。但是，在第 2 项中，对于更正则的 u^0 和 θ^0 以及（隐含地）$\hat{} u^0$ 和 $\hat{} \theta^0$，这些界成立。这与乘性不等式成立有关

$$\|y\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\alpha\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}\|y\|^{1/2}_{H^{-1;m}}, \ \ \|y\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant C\|y\|^{3/4}_{H^1(\Omega)}\|y\|^{1/4}_{H^{-1;m}} \ \text{ for } \ y \in H^{1;m}. \tag{86}$$

其中第一个由以下等式得出

$$\int_\Omega y^2\,dx = \int_\Omega yDI^{\langle m\rangle}y\,dx + \delta_{m3}\langle y\rangle_\Omega \int_\Omega y\,dx = -\int_\Omega (Dy)I^{\langle m\rangle}y\,dx + \delta_{m3}X\langle y\rangle^2_\Omega \tag{87}$$

对于 $y \in H^{1;m}$，第二个则是第一个不等式 (80) 和 (86) 的推论。不等式 (86) 还表明，界 (84) 和 (85) 在阶数上具有一定的锐性。

4. 双尺度均匀化误差的界

4.. 1. 关于周期快速振荡函数的辅助结果。我们首先给出一些定义，并回顾论文 [7, 10] 中的辅助结果。对于 $0 < \delta < X$，定义差以及差商 in x

$$\Delta_\delta y(x) = y(x+\delta) - y(x), \ \ \Delta^{(1)}_\delta y(x) = \tfrac{1}{\delta}\Delta_\delta y(x), \ \ 0 < x < X - \delta.$$

我们需要空间 $L^q(\Omega;\, L^\infty(J))$，其中 $1 \leqslant q \leqslant \infty$，且 $J := (0,\, 1)$。它们是各向异性勒贝格空间 $L^{q,\,\infty}(J \times \Omega)$ 的闭子空间（更准确地说，它们与闭子空间等距同构），因此，

$$\|w\|_{L^q(\Omega;L^\infty(J))} = \|w\|_{L^{q,\infty}(J\times\Omega)} := \big\|\|w\|_{L^\infty(J)}\big\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{for} \quad w \in L^q(\Omega;\, L^\infty(J)).$$

此外（见 [10, 引理 1]），$w \in L^{q,\infty}(J \times \Omega)$ 也属于 $L^q(\Omega;\, L^\infty(J))$，当且仅当 $\lim_{\delta\to+0} \|\Delta_\delta w\|_{L^{\infty,\,1}(J\times(0,X-\delta))} = 0$。

我们需要函数 y 在 J 和 $\xi_0 \in J$ 上可测时的近似极限 $\operatorname{ap}\lim_{\xi\to\xi_0} y(\xi)$ 这一概念，例如参见 [42, 第5.9]节。设 $x^{(\varepsilon)} := \{x/\varepsilon - a_\varepsilon\}$ 对于 $x \in \Omega$，其中花括号 $\{\cdot\}$ 表示取一个数的小数部分，且 a_ε 是一个固定函数、参数 $\varepsilon \in (0, 1]$（特别地，$a_\varepsilon = 0$）。设 $\langle b\rangle = \int_J b(\xi)\, d\xi$ 为 J 上的平均值。

命题 3. *1.* 对于强可测函数 $w\colon \Omega \to L^\infty(J)$，复合

$$w^{(\varepsilon)}(x) := \operatorname{ap}\lim_{\xi\to x^{(\varepsilon)}} w(\xi, x) \tag{88}$$

几乎处处在Ω上有定义，在Ω 上可测，并满足界 $|w^{(\varepsilon)}(x)| \leqslant \|w(\cdot, x)\|_{L^\infty(J)}$ 对几乎所有 $x \in \Omega$成立。

2. 设 $w \in L^q(\Omega;\, L^\infty(J))$ 对于某个 $1 \leqslant q \leqslant \infty$成立。则 $w^{(\varepsilon)} \in L^q(\Omega)$ 成立，且以下性质成立

$$\|w^{(\varepsilon)}\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \|w\|_{L^q(\Omega;L^\infty(J))}, \tag{89}$$

$w^{(\varepsilon)} \to \langle w\rangle$ 在 $L^q(\Omega)$ 中弱收敛，对 $1 \leqslant q < \infty$成立；或者在 $L^\infty(\Omega)$ 中弱-*收敛，对 $q = \infty$成立

参见 [1] 和 [10, 中的这些结果，定理 1]。回顾这一微妙之处：所考虑的 w可能不满足众所周知的 Carath´eodory 条件。

下一个空间及相应引理（更一般的形式）见 [10]（另见 [6]）。令线性空间 $L^2L^\infty C(\mathbb{R} \times J \times \Omega)$ 由满足以下条件的函数 F 构成：

(1) F在 $\mathbb{R} \times J \times \Omega$ 上可测，且对于所有 $\chi \in \mathbb{R}$，$F(\chi, \cdot) \in L^2(\Omega;\, L^\infty(J))$；(2) $F(\chi, \xi, x)$ 对几乎所有 $(\xi, x) \in J \times \Omega$，在 χ 上连续；此外，对于任意 $a > 1$

$$\sup_{\xi\in J} \max_{\chi,\chi'\in[-a,a],\,|\chi-\chi'|\leqslant\alpha} |F(\chi, \xi, x) - F(\chi', \xi, x)| \to 0 \quad \text{as} \quad \alpha \to +0;$$

(3) 对任意 $a > 1$，以下两个性质成立

$$\|F\|_{L^2L^\infty C([-a,a]\times J\times\Omega)} := \big\|\|F\|_{C[-a,a]}\big\|_{L^{\infty,2}(J\times\Omega)} < \infty, \quad \lim_{\delta\to+0} \|\Delta_\delta F\|_{L^2L^\infty C([-a,a]\times J\times(0,X-\delta))} \to 0.$$

引理 2. 设 $F \in L^2L^\infty C(\mathbb{R} \times J \times \Omega)$、$w \in L^\infty(\Omega;\, L^\infty(J))$，且对于某个 $a > 1$，$|w| \leqslant a$ 成立。则 F 与 w 的复合具有以下性质

$$F[w](\xi,\ x) := F(w(\xi, x), \xi, x) \in L^2(\Omega; L^\infty(J)), \quad \|F[w]\|_{L^2(\Omega;L^\infty(J))} \leqslant \|F\|_{L^2L^\infty C([-a,a]\times J\times\Omega)}.$$

最后，设 $WH^{0,1;1}(J \times \Omega)$ 和 $WH^{0,1,0;1,1,r}(J \times Q)$、$1 \leqslant r \leqslant \infty$ 是范数有限的函数空间 $y \in L^{1,\infty}(J \times \Omega)$ 和 $w \in L^{1,\infty,r}(J \times Q)$

$$\|y\|_{WH^{0,1;1}(J\times\Omega)} = \|y\|_{L^{1,\infty}(J\times\Omega)} + \sup_{0<\delta<X} \|\Delta_\delta^{(1)} y\|_{L^1(J\times(0,X-\delta))},$$

$$\|w\|_{WH^{0,\,1,\,0;1,\,1,\,r}(J\times Q)} = \|w\|_{L^{1,\,\infty,\,r}(J\times Q)} + \text{上确界}_{0<\delta<X} \|\Delta_\delta^{(1)} w\|_{L^{1,\,1,\,r}(J\times Q^\delta)} \quad Q^\delta := (0,\ X-\delta) \times (0,\ T);$$

这里我们再次使用各向异性勒贝格空间。这些空间与 x 中本质有界变差函数的空间密切相关（例如，参见 [25, 34]），并且包含具有非常一般类型间断的函数；特别地，参见 [15, 第 10], 章。因此，它们远比其较简单的子空间宽泛；这些子空间由满足 y, $Dy \in L^1(J \times \Omega)$ 和 w, $Dw \in L^{1,\,1,\,r}(J \times Q)$ 的函数构成，而这些函数在 x 中不能有间断。空间的记号遵循函数论中的惯例 [36]。

下一个结果以相同的证明略微推广了 [7, 命题 2 和 3], 。它对下文至关重要，并阐明了在定理 1 中使用对偶空间 $H^{-1;m}$ 的作用。令$R_\varepsilon y := y^{(\varepsilon)} - \langle y \rangle$ 为平均误差。

命题 4. *1.* 对于 $y \in L^1(\Omega;\, L^\infty(J)) \cap WH^{0,1;1}(J \times \Omega)$，下列界成立

$$\|R_\varepsilon y\|_{H^{-1;3}} \leqslant C\|IR_\varepsilon y\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant 2C\varepsilon\|y\|_{WH^{0,1;1}(J\times\Omega)}.$$

2. 设 $1 \leqslant r \leqslant \infty$。对于 $w \in WH^{0,1,0;1,1,r}(J \times Q)$ 满足 $w(\cdot, t) \in L^1(\Omega;\, L^\infty(J))$ 对几乎所有 $0 < t < T$成立的情形，下列界成立

$$\|R_\varepsilon w\|_{L^r(0,T;\,H^{-1;3})} \leqslant C\|IR_\varepsilon w\|_{L^r(0,T;\,C(\bar{\Omega}))} \leqslant 2C\varepsilon\|w\|_{WH^{0,1,0;1,1,r}(J\times Q)}.$$

条目 1 和 2 中的第一个不等式都很简单，列出它们只是为了方便。

4.. 2. 具有不连续快速振荡数据的纳维-斯托克斯方程与巴赫瓦洛夫–埃格利特双尺度均匀化方程。 与上一节不同，现在我们从初始函数 $\eta^0, u^0 \in L^\infty(\Omega;\, L^\infty(J))$ 和 $\theta^0 \in L^2(\Omega;\, L^\infty(J))$ 开始，它们也依赖于 $\xi \in J$。我们假设 $N^{-1} \leqslant \eta^0$和 $0 < \theta^0$在 $J \times \Omega$ 上成立，并且 ln $\theta^0 \in L^1(\Omega;\, L^\infty(J))$，以及以下界

$$\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega;L^\infty(J))} + \|u^0\|_{L^\infty(\Omega;L^\infty(J))} + \|\theta^0\|_{L^2(\Omega;L^\infty(J))} + \|\ln\theta^0\|_{L^1(\Omega;L^\infty(J))} \leqslant N, \tag{90}$$

$$N^{-1} \leqslant \|\eta^0(\xi,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} + I_t(u_X - u_0) \ \text{ on } \ J \times (0,T) \ \ (m = 1)$$

为 val id。关于 ln θ^0 的假设可以省略，前提是 $N^{-1} \leqslant \theta^0$ 在 $J \times \Omega$上 .

我们还取具有以下性质的项 g：

(1) g在 $\mathbb{R} \times J \times Q$ 上可测，并且 $|g(\chi,\ \xi,\ x,\ t)| \leqslant \bar{g}(x,\ t)$，其中$\|\bar{g}\|_{L^{2\ (Q)}\cap L^{\infty,\ 1\ (Q)}} \leqslant N$；

(2) $g(\cdot,\ t) \in L^2L^\infty C(\mathbb{R} \times J \times \Omega)$对几乎所有 $0 < t < T$成立；(3) g 在 χ中是Lipschitz型连续的:

$$|g(\chi,\xi,x,t) - g(\chi',\xi,x,t)| \leqslant C_1(a)\bar{g}_1(x,t)|\chi - \chi'| \ \text{ for } \ \chi,\chi' \in [-a,a], (\xi,x,t) \in J \times Q, \tag{91}$$

¯对于任意 $a > 1$，其中$\|\bar{g}_1\|_{L^{1\ (Q)}} \leqslant N$。设 $f \geqslant 0$ 为具有与 g 相同性质的项，并在 $\bar{g}$中取 f的角色。

还要回顾边界数据的条件（C_3），这些条件不依赖于 ξ，但排除了（30）。

现在我们转向问题 $\mathcal{P}_m$，不过将快速振荡初始数据 $(\eta^{0,\varepsilon}, u^{0,\varepsilon}, \theta^{0,\varepsilon}, x^{0,}{}_e{}^{\varepsilon})$ 用作 $(\eta^0, u^0, \theta^0, x_e^0)$，并将函数 $g^{(\varepsilon)}$和 $f^{(\varepsilon)}$用作 g和 f；这里$x^{0,}{}_e{}^{\varepsilon} := I\eta^{0,\varepsilon}$ 且 $y^{0,\varepsilon} = (y^0)^{(\varepsilon)}$，其中 $y^0 = \eta^0, u^0, \theta^0, x_e^0$，见定义 (88)。我们将此问题记作 $\mathcal{P}_m^{(\varepsilon)}$，其解记作 $(\eta_\varepsilon, u_\varepsilon, \theta_\varepsilon, x_{e,\varepsilon})$。根据上述关于 η^0, u^0 和 θ^0 的假设以及命题 3，我们有 $\eta^{0,\varepsilon}, u^{0,\varepsilon} \in L^\infty(\Omega)$、 $\theta^{0,\varepsilon} \in L^2(\Omega)$、$\ln\theta^{0,\varepsilon} \in L^1(\Omega)$，并且这些界成立

$$N^{-1} \leqslant \eta^{0,\varepsilon} \text{ on } \Omega, \ \ \|\eta^{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u^{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\theta^{0,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|\ln\theta^{0,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant N, \tag{92}$$

$$N^{-1} \leqslant \|\eta^{0,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} + I_t(u_X - u_0) \ \text{ on } \ (0,T) \ \ (m = 1). \tag{93}$$

根据上述关于 g 的假设、命题 3 和引理 2，我们得到 $g^{(\varepsilon)}(\chi,\ x,\ t)$ 在 $\mathbb{R}\times Q$ 上可测，因此存在 $|g^{(\varepsilon)}(\chi,\ x,\ t)|\leqslant \bar{g}(x,\ t)$，并满足 χ 中的 Lipschitz型条件：

$$|g^{(\varepsilon)}(\chi,x,t)-g^{(\varepsilon)}(\chi',x,t)|\leqslant C_1(a)\bar{g}_1(x,t)|\chi-\chi'|\ \text{ for }\ \chi,\chi'\in[-a,a],(x,t)\in Q,$$

对任意 $a>1$。这里 $\bar{g}$ 和 $\bar{g}_1$ 与上文的 g相同。根据 Rademacher型定理，例如参见 [25, 定理 4.5], ，最后一个条件等价于关于 Sobolev导数的条件

$$|D_\chi g^{(\varepsilon)}(\chi,x,t)|\leqslant C_1(a)\bar{g}_1(x,t)\ \text{ for }\ \chi\in[-a,a],(x,t)\in Q,$$

对任意 $a>1$。 $f^{(\varepsilon)}$也具有相同的性质。

We 还引入*Bakhvalov-Eglit*双尺度均匀化方程组

$$D_t\eta=\tfrac{1}{\nu}\hat{\sigma}\eta+\tfrac{k}{\nu}\hat{\theta}\ \text{ in }\ J\times Q, \tag{94}$$

$$D_t\hat{u}=D\hat{\sigma}+\langle g\rangle[\hat{x}_e], \tag{95}$$

$$c_V D_t\hat{\theta}=D\hat{\pi}+\hat{\sigma}D\hat{u}+\langle f\rangle[\hat{x}_e], \tag{96}$$

$$D_t\hat{x}_e=\hat{u},\ \ \hat{\sigma}=\nu\hat{\rho}D\hat{u}-\hat{p},\ \ \hat{\rho}=\langle\eta\rangle^{-1},\ \ \hat{p}=k\hat{\rho}\hat{\theta},\ \ \hat{\pi}=\lambda\hat{\rho}D\hat{\theta}, \tag{97}$$

ˆ，其解为 $\eta(\xi,x,t)>0$、ˆ$u(x,t)$、 $\theta(x,t)>0$和 ˆ$x_e(x,t)$；方程（95）–（97）定义在 Q 中。我们为这些方程补充初始条件

$$\eta|_{t=0}=\eta^0\ \text{ in }\ J\times\Omega,\ \ (\hat{u},\hat{\theta},\hat{x}_e)|_{t=0}=(\hat{u}^0,\hat{\theta}^0,\hat{x}_e^0) \tag{98}$$

以及前述边界条件（39）–（40），并采用与问题 $\mathcal{P}_m^{(\varepsilon)}$ 中相同的边界数据 ˆ$\mathbf{u}_b=\mathbf{u}_b$、 ˆ$\mathbf{p}_b=\mathbf{p}_b$和 ˆ$\boldsymbol{\pi}_b=\boldsymbol{\pi}_b$。这里，初始数据按照以下公式进行均匀化

$$\hat{u}^0=\langle u^0\rangle,\ \ \hat{e}^0:=\langle e^0\rangle=\tfrac{1}{2}\langle(\hat{u}^0)^2\rangle+c_V\hat{\theta}^0,\qquad \hat{x}_e^0:=I\langle\eta^0\rangle,$$

其中 $e^0:=\frac{1}{2}(u^0)^2+c_V\theta^0$。因此，采用对 e^0 而非 θ^0 的平均化，进而可明确得到

$$\hat{\theta}^0=\tfrac{1}{c_V}\big(\hat{e}^0-\tfrac{1}{2}\langle(\hat{u}^0)^2\rangle\big)=\tfrac{1}{2c_V}\langle(u^0-\langle u^0\rangle)^2\rangle+\langle\theta^0\rangle\geqslant\langle\theta^0\rangle>0. \tag{99}$$

若 $N^{-1}\leqslant\theta^0$，则 $N^{-1}\leqslant$ˆθ^0 也成立。请注意，这个问题称为双尺度（或准平均化）问题，因为变量 ξ 并未被完全消去。

但在本文研究的均匀气体情形下（ ν、 k、c_V 和 λ 均为常数），最后这一点并不重要。事实上，由公式 (97) 显然可得

$$\langle\tfrac{1}{\nu}\hat{\sigma}\eta+\tfrac{k}{\nu}\hat{\theta}\rangle=\tfrac{1}{\nu}\hat{\sigma}\langle\eta\rangle+\tfrac{k}{\nu}\hat{\theta}=D\hat{u}. \tag{100}$$

因此，对 ξ 中的方程 (94) 进行平均化可得

$$D_t\langle\eta\rangle=D\hat{u}. \tag{101}$$

ˆ 因此，函数 ($\langle\eta\rangle$，ˆu，θ，ˆx_e) 满足初边值问题 $\langle\mathcal{P}\rangle_m$，其封闭方程组为 (101) 和 (95)–(97)，且具有如下初始条件

$$(\langle\eta\rangle,\hat{u},\hat{\theta},\hat{x}_e)|_{t=0}=(\langle\eta^0\rangle,\hat{u}^0,\hat{\theta}^0,\hat{x}_e^0)$$

以及边界条件（39）–（40）。这个初边值问题正是下文所关注的 $\mathcal{P}_m$ 类型。

此外，如果初边值问题 $\langle\mathcal{P}\rangle_m$ 的解已求得，那么显然，函数 $\eta=\eta(\xi,\ x,\ t)$ 可以用显式公式表示为

$$\eta=\hat{B}\big[\eta^0+\tfrac{k}{\nu}I_t(\hat{B}^{-1}\hat{\theta})\big]\ \text{ in }\ J\times Q,\ \text{ with }\ \hat{B}:=e^{\frac{1}{\nu}I_t\hat{\sigma}},\tag{102}$$

这是将方程 (94) 视为关于 t 的常微分方程后得到的。该公式蕴含以下性质

$$(K_0(N))^{-1}\leqslant\eta\leqslant K_0(N)\ \text{ in }\ J\times Q,\ \ \eta\in C(0,T;L^\infty(\Omega;L^\infty(J)))\tag{103}$$

若 $\|I_t\hat{\sigma}\|_{L^{\infty},\,1(Q)}+\|\theta\|_{L^{\infty},\,1(Q)}\leqslant K(N)$，关于后一性质，参见 [10]。对 $I_t\hat{\sigma}$ 和 θ 的界将在下文给出保证。

根据上述关于 η^0，u^0 和 θ^0 的假设，以及公式 (99) 对于 $\hat{\theta}^0$，我们有

$$N^{-1}\leqslant\langle\eta^0\rangle\text{ 在 }\ Q,\quad \|\langle\eta^0\rangle\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\langle u^0\rangle\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\langle\theta^0\rangle\|_{L^2(\Omega)}\leqslant N,\quad \|\hat{\theta}^0\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\tfrac{N^2}{2c_V}\sqrt{X}+N,$$

$$N^{-1}\leqslant\|\langle\eta^0\rangle\|_{L^1(\Omega)}+I_t(u_X-u_0)\ \text{ on }\ (0,T)\ \ (m=1)$$

因为显然在 Ω 上有 $\hat{\theta}^0\leqslant\frac{1}{2c_V}\|u^0\|^2_{L^\infty(J)}+\langle\theta^0\rangle$。同时利用詹森不等式，我们得到

$$-\|\ln\theta^0\|_{L^\infty(J)}\leqslant\ln\hat{\theta}^0\leqslant\tfrac{1}{2c_V}\|u^0\|^2_{L^\infty(J)}+\langle\theta^0\rangle\ \text{ on }\ \Omega$$

因此

$$\|\ln\hat{\theta}^0\|_{L^1(\Omega)}\leqslant K(N).$$

此外，$\langle g\rangle$ 和 $\underline{\langle f\rangle}$ g f C_2 $q_e=\infty$ $\|f\|_{L^2\,Q}\leqslant N$ 分别作为 和，满足条件 ( )，其中 和 $()$（而不是 $\|f\|_{L^{2,1}(Q)}\leqslant N$）。

对于问题 m $\langle\mathcal{P}\rangle_m$，我们对其初始数据和边界数据施加附加条件

$$\|\langle u^0\rangle\|_{H^1(\Omega)}+\|\hat{\theta}^0\|_{H^1(\Omega)}\leqslant N,\tag{104}$$

$$\|\mathbf{u}_b\|_{H^1(0,T)}+\|\mathbf{p}_b\|_{W^{1,1}(0,T)}+\|\boldsymbol{\pi}_b\|_{W^{1,1}(0,T)}\leqslant N,\tag{105}$$

$$u_0(0)=\langle u^0\rangle(0)\ (m=1),\ \ u_X(0)=\langle u^0\rangle(X)\ (m=1,2),\tag{106}$$

其中最后一项是 u 的边界数据与初始数据之间的合取条件。

在所列性质以及对数据的附加条件下，问题 $\langle\mathcal{P}\rangle_m$ 的唯一弱解是近似强解，即 u，$\theta\in W(Q)$ 与 σ，$\pi\in V_2(Q)$ 以及方程(95)–(97)在 $L^2(Q)$ 中成立。此外，这些界成立

$$\|\hat{u}\|_{C(\bar{Q})}+\|\hat{\theta}\|_{C(\bar{Q})}\leqslant C(\|\hat{u}\|_{W(Q)}+\|\hat{\theta}\|_{W(Q)})\leqslant CK(N),\tag{107}$$

$$\|\hat{\sigma}\|_{V_2(Q)}+\|\hat{\pi}\|_{V_2(Q)}\leqslant K(N).\tag{108}$$

弱解的这些正则性由 [11, 定理4.2]得出；那里还可以找到一些附加性质。请仔细注意，该解是近似强解，因为既未对 $D\langle\eta^0\rangle$ 施加条件，也未断言 $D\langle\eta\rangle$ 的存在性。

另一方面，由 η 的公式 (102) 及其性质 (103)，我们得到 $\eta^{(\varepsilon)}\in C(0,\ T;\ L^\infty(\Omega))$，$(K_0(N))^{-1}\leqslant\eta^{(\varepsilon)}\leqslant K_0(N)$ 在 Q 中且 $\eta^{(\varepsilon)}$ 可由相应的公式表示

$$\eta^{(\varepsilon)}=\hat{B}\big[\eta^{0,\varepsilon}+\tfrac{k}{\nu}I_t(\hat{B}^{-1}\hat{\theta})\big]\ \text{ in }\ Q.$$

因此， $D_t\eta^{(\varepsilon)} \in L^2(Q)$，且 $\eta^{(\varepsilon)}$ 满足该方程和初始条件

$$D_t\eta^{(\varepsilon)} = \tfrac{1}{\nu}\hat{\sigma}\eta^{(\varepsilon)} + \tfrac{k}{\nu}\hat{\theta} \ \text{ in } \ Q, \ \ \eta^{(\varepsilon)}|_{t=0} = \eta^{0,\varepsilon}. \tag{109}$$

我们定义函数

$$\beta^{(\varepsilon)} := \tfrac{1}{\nu}\hat{\sigma}\eta^{(\varepsilon)} - \tfrac{1}{\nu}(D\hat{u} - k\hat{\theta}) = \tfrac{1}{\nu}\hat{\sigma}(\eta^{(\varepsilon)} - \langle\eta\rangle) = \tfrac{1}{\nu}\hat{\sigma}R\eta^{(\varepsilon)}, \ \ \gamma^{(\varepsilon)} := \tfrac{1}{\lambda}\hat{\pi}(\eta^{(\varepsilon)} - \langle\eta\rangle) = \tfrac{1}{\lambda}\hat{\pi}R\eta^{(\varepsilon)}.$$

显然 $\beta^{(\varepsilon)}$, $\gamma^{(\varepsilon)} \in L^{2,\infty}(Q)$，见界（108）。然后，对于函数 $(\eta^{(\varepsilon)}, \hat{u}, \hat{\theta}, \hat{x}_e)$，由方程（109）和（95）–（97）可推导出以下 $\widehat{\mathcal{P}}_m^{(\varepsilon)}$型初边值问题 $\widehat{\mathcal{P}}_m$，它由方程组构成

$$\begin{gathered}
D_t\eta^{(\varepsilon)} = D\hat{u} + \beta^{(\varepsilon)}, \\
D_t\hat{u} = D(\sigma^{(\varepsilon)} + \nu\rho^{(\varepsilon)}\beta^{(\varepsilon)}) + \langle g\rangle[\hat{x}_e], \\
c_V D_t\hat{\theta} = D(\pi^{(\varepsilon)} + \lambda\rho^{(\varepsilon)}\gamma^{(\varepsilon)}) + (\sigma^{(\varepsilon)} + \nu\rho^{(\varepsilon)}\beta^{(\varepsilon)})D\hat{u} + \langle f\rangle[\hat{x}_e], \\
D_t\hat{x}_e = \hat{u}, \ \ \sigma^{(\varepsilon)} = \nu\rho^{(\varepsilon)}D\hat{u} - p^{(\varepsilon)}, \ \ \rho^{(\varepsilon)} = \tfrac{1}{\eta^{(\varepsilon)}}, \ \ p^{(\varepsilon)} = k\rho^{(\varepsilon)}\hat{\theta}, \ \ \pi^{(\varepsilon)} = \lambda\rho^{(\varepsilon)}D\hat{\theta}
\end{gathered}$$

其中 Q 补充以初始条件

$$(\eta^{(\varepsilon)}, \hat{u}, \hat{\theta}, \hat{x}_e)|_{t=0} = (\eta^{0,\varepsilon}, \hat{u}^0, \hat{\theta}^0, \hat{x}_e^0)$$

以及边界条件（39），其中 $\hat{\mathbf{u}}_b = \mathbf{u}_b$, $\hat{\mathbf{p}}_b = \mathbf{p}_b$ 和 $\hat{\boldsymbol{\pi}}_b = \boldsymbol{\pi}_b$。这里我们使用了公式 $\hat{\sigma} = \sigma^{(\varepsilon)} + \nu\rho^{(\varepsilon)}\beta^{(\varepsilon)}$ 和 $\hat{\pi} = \pi^{(\varepsilon)} + \lambda\rho^{(\varepsilon)}\gamma^{(\varepsilon)}$，或者等价地，

$$\tfrac{1}{\nu}\eta^{(\varepsilon)}(\hat{\sigma} - \sigma^{(\varepsilon)}) = \beta^{(\varepsilon)}, \ \ \tfrac{1}{\lambda}\eta^{(\varepsilon)}(\hat{\pi} - \pi^{(\varepsilon)}) = \gamma^{(\varepsilon)}$$

这可由 等式 $\eta^{(\varepsilon)}\sigma^{(\varepsilon)} = \nu D\hat{u} - k\hat{\theta} = \langle\eta\rangle\hat{\sigma}$和 $\eta^{(\varepsilon)}\pi^{(\varepsilon)} = \lambda D\hat{\theta} = \langle\eta\rangle\hat{\pi}$ 得出 .

此外，$\hat{x}_e^0 = I\eta^{0,\varepsilon} + \beta_{e\varepsilon}$ 其中 $\beta_{e\varepsilon} := I(\langle\eta^0\rangle - \eta^{0,\varepsilon}) = -IR_\varepsilon\eta^0$。

注意到，该问题的数据满足条件 （94）

注意，且其解满足类似于问题 $\mathcal{P}_m$ 的解所施加的假设（93）。

下一个关于双尺度均匀化误差界的定理是本文的第二个主要结果。

定理 2. 设上述条件以及初始函数 η^0、u^0、e^0 和 x 中的项 g 与 f 的如下附加弱正则性成立

$$\|(\eta^0, u^0, e^0)\|_{WH^{0,1;1}(J\times\Omega)} \leqslant N, \tag{110}$$

$$\sup_{0<\delta<X} \|(\Delta_\delta^{(1)}g, \Delta_\delta^{(1)}f)\|_{L^1(J\times Q^\delta; C[-a,a])} \leqslant C_1(a) \ \ \textit{for any} \ \ a > 1. \tag{111}$$

那么，双尺度均匀化误差满足以下界

$$\begin{aligned}
&\|\eta^{(\varepsilon)} - \eta_\varepsilon\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} + \|\hat{u} - u_\varepsilon\|_{L^2(Q)\cap L^\infty(0,T;H^{-1;m})} + \|\hat{\theta} - \theta_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \\
&\quad + \|\hat{x}_e - x_{e,\varepsilon}\|_{L^\infty(Q)} + \|I_t(\hat{\sigma} - \sigma_\varepsilon)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant K(N)\varepsilon.
\end{aligned} \tag{112}$$

证明。 **1.** 我们首先证明 η 在 x中的以下弱正则性:

$$\sup_{0<\delta<X} \|\Delta_\delta^{(1)}\eta\|_{L^{1,1,\infty}(J\times Q^\delta)} \leqslant K. \tag{113}$$

对于 $0<\delta<X$，我们对 η 的显式公式（102）应用算子 Δ_δ，得到

$$\Delta_\delta\eta=(\Delta_\delta\hat{B})\big[\eta^0+\tfrac{k}{\nu}I_t(\hat{B}^{-1}\hat{\theta})\big]+\hat{B}_{(\delta)}\big\{\Delta_\delta\eta^0+\tfrac{k}{\nu}I_t\big[(\Delta_\delta(\hat{B}^{-1}))\hat{\theta}+\hat{B}_{(\delta)}^{-1}\Delta_\delta\hat{\theta}\big]\big\}$$

在 $J\times Q^\delta$ 中，$\hat{}\,B_{(\delta)}(x,\ t):=\hat{}B(x+\delta,\ t)$。由于界 (108)，$\|I_t\hat{}\sigma\|_{L^\infty(Q)}\leqslant K_1$，因此我们有$K_2^{-1}\leqslant\hat{}B\leqslant K_2$，从而

$$|\Delta_\delta\eta|\leqslant K|\Delta_\delta I_t\hat{\sigma}|\big(|\eta^0|+\|\hat{\theta}\|_{L^{\infty,1}(Q)}\big)+K\big(|\Delta_\delta\eta^0|+\|\Delta_\delta I_t\hat{\sigma}\|_{L^2(0,T)}\|\hat{\theta}\|_{L^2(0,T)}+\|\Delta_\delta\hat{\theta}\|_{L^1(0,T)}\big)$$

在 $J\times Q^\delta$ 中。因此，我们得到

$$\|\Delta_\delta^{(1)}\eta\|_{L^{1,1,\infty}(J\times Q^\delta)}\leqslant K\big(\|DI_t\hat{\sigma}\|_{L^{2,\infty}(Q)}\|\hat{\theta}\|_{L^{\infty,1}(Q)\cap L^2(Q)}+\|\Delta_\delta^{(1)}\eta^0\|_{L^1(J\times Q^\delta)}+\|D\hat{\theta}\|_{L^1(Q)}\big)\leqslant K_3$$

根据关于 η^0 的条件 (110) 和界 (107)，即证明了界 (113)。

接下来，我们证明 $g[\hat{}\,x_e]$ 在 x 中的弱正则性:

$$\|g[\hat{x}_e]\|_{WH^{0,1,0;1}(J\times Q)}:=\|g[\hat{x}_e]\|_{WH^{0,1,0;1,1,1}(J\times\Omega\times(0,T))}\leqslant K.\tag{114}$$

应用显然的公式

$$(\Delta_\delta g[\hat{x}_e])(\xi,x,t)=g(\hat{x}_e(x+\delta,t),\xi,x+\delta,t)-g(\hat{x}_e(x,t),\xi,x+\delta,t)+((\Delta_\delta g)[\hat{x}_e])(\xi,x,t)$$

在 Q^δ 中，并利用关于 g 的 Lipschitz型条件 (91)，我们得到

$$\|\Delta_\delta^{(1)}g[\hat{x}_e]\|_{L^1(J\times Q^\delta)}\leqslant K\|\Delta_\delta^{(1)}\hat{x}_e\|_{L^\infty(Q^\delta)}+\|\Delta_\delta^{(1)}g\|_{L^1(J\times Q^\delta;C[-a,a])},\quad 0<\delta<X,$$

其中 $a=K'$ 使得 $|\hat{}\,x_e|\leqslant K'$。由于 $\hat{}\,x_e=\hat{}\,x_e^0+I_t\hat{}\,u$，从而 $D\hat{}\,x_e=\langle\eta^0\rangle+I_tD\hat{}\,u$，我们有 ve

$$\sup_{0<\delta<X}\|\Delta_\delta^{(1)}\hat{x}_e\|_{L^\infty(Q^\delta)}\leqslant\|D\hat{x}_e\|_{L^\infty(Q)}\leqslant\|\langle\eta^0\rangle\|_{L^\infty(\Omega)}+\|D\hat{u}\|_{L^{\infty,1}(Q)}\leqslant K$$

这是由于公式 $D\hat{}\,u=\frac{\langle\eta\rangle}{\nu}$ $(\hat{}\,\sigma+\hat{}\,p)$，见 (97)，以及对 $\hat{}\,\sigma$ 的界 (108)。根据关于 g 的正则性条件 (111) 以及界 $|g[\hat{}\,x_e]|\leqslant\bar{g}$ （其中$\|\bar{g}\|_{L^{\infty,1}(Q)}\leqslant N$），我们得到界 (114)。显然，对 $f[\hat{}\,x_e]$ 成立同样的界。

2. 我们将定理1应用于原问题 $\mathcal{P}_m^{(\varepsilon)}$（其解为 $(\eta_\varepsilon,u_\varepsilon,\theta_\varepsilon,x_{e,\varepsilon})$）以及问题 $\widehat{\mathcal{P}}_m^{(\varepsilon)}$（其解为 $(\eta^{(\varepsilon)},\hat{}\,u,\hat{}\,\theta,\hat{}\,x_e)$，该解如上所述由问题 $\langle\mathcal{P}\rangle_m$ 的解构造而得）。在定理1中，我们选取情形 $\beta_1=g_1=0$、$q_e=\infty$ 以及 $(q,r)=(\infty,2)\in M_1$，并考虑到注 1 的第1项和第3项（对 $\hat{}\,u$ 使用界 (107)），同时对 $w=\gamma^{(\varepsilon)}$ 应用不等式 (7)，以及对 $F=R_\varepsilon f[\hat{}\,x_e]$ 应用 (17) 和 (4)，从而推出

$$\begin{aligned}\|\eta^{(\varepsilon)}-\eta_\varepsilon\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}+\|\hat{u}-u_\varepsilon\|_{L^2(Q)\cap L^\infty(0,T;H^{-1;m})}+\|\hat{\theta}-\theta_\varepsilon\|_{L^2(Q)}+\|\hat{x}_e-x_{e,\varepsilon}\|_{L^\infty(Q)}\\+\|I_t(\hat{\sigma}-\sigma_\varepsilon)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant K\big(\|R_\varepsilon u^0\|_{H^{-1;3}}+\|R_\varepsilon e^0\|_{H^{-1;3}}+\|\beta_{e\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}\\+\|I\beta^{(\varepsilon)}\|_{L^{\infty,2}(Q)}+\|I\gamma^{(\varepsilon)}\|_{L^2(Q)}+\|IR_\varepsilon g[\hat{x}_e]\|_{L^{\infty,1}(Q)}+\|IR_\varepsilon f[\hat{x}_e]\|_{L^{\infty,1}(Q)}\big),\end{aligned}\tag{115}$$

例如，$R_\varepsilon g[\hat{}\,x_e]=g^{(\varepsilon)}[\hat{}\,x_e]-\langle g\rangle[\hat{}\,x_e]=g^{(\varepsilon)}[\hat{}\,x_e]-\langle g[\hat{}\,x_e]\rangle$。

我们进一步估计不等式（115）右侧的各项。由于 $\beta_{e\varepsilon}=-IR_\varepsilon\eta^0$，对（$\eta^0,\ u^0,\ e^0$）应用命题 4、第 1 项以及条件（90）和（110），可得

$$\|R_\varepsilon u^0\|_{H^{-1;3}}+\|R_\varepsilon e^0\|_{H^{-1;3}}+\|\beta_{e\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\varepsilon\|(u^0,e^0,\eta^0)\|_{WH^{0,1;1}(J\times\Omega)}\leqslant CN\varepsilon.\tag{116}$$

注意，不等式成立

$$\|I(yz)\|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant C\|y\|_{W^{1,1}(\Omega)}\|Iz\|_{C(\bar{\Omega})} \quad \text{for any} \quad y \in W^{1,1}(\Omega), z \in L^1(\Omega)$$

（与 [7] 中类似），其证明方法是分部积分，参见（87）。依次使用该不等式、关于 $\hat{}\sigma$ 和 $\hat{}\pi$ 的界（108）、关于 $r=\infty$的命题 4、第 2 项，以及关于 η 的正则性估计（113）（及其性质（103）），可得

$$\begin{aligned}\|I\beta^{(\varepsilon)}\|_{L^{\infty,2}(Q)} + \|I\gamma^{(\varepsilon)}\|_{L^2(Q)} &= \tfrac{1}{\nu}\|I(\hat{\sigma}R_\varepsilon\eta)\|_{L^{\infty,2}(Q)} + \tfrac{1}{\lambda}\|I(\hat{\pi}R_\varepsilon\eta)\|_{L^2(Q)} \\ &\leqslant C(\|\hat{\sigma}\|_{L^2(Q)} + \|D\hat{\sigma}\|_{L^{1,2}(Q)} + \|\hat{\pi}\|_{L^2(Q)} + \|D\hat{\pi}\|_{L^{1,2}(Q)})\|IR_\varepsilon\eta\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leqslant K\varepsilon\|\eta\|_{WH^{0,1,0;1,1,\infty}(J\times Q)} \leqslant K_1\varepsilon. \end{aligned} \tag{117}$$

注意，也就是说，这里我们依据的是问题 $\langle\mathcal{P}\rangle_m$ 的解是近似强解这一事实。根据命题 4 的第 2 项，对于 $r=1$，以及 $g[x_e]$ 的正则性估计 (114)，我们有

$$\|IR_\varepsilon g[\hat{x}_e]\|_{L^{\infty,1}(Q)} \leqslant 2\varepsilon\|g[\hat{x}_e\|_{WH^{0,1,0;1}(J\times Q)} \leqslant K\varepsilon. \tag{118}$$

将界 (116)、(117) 和 (118) 与最后一个界结合起来，其中以 f 代替 g 来估计界 (115) 的右端，我们便完成了证明。 □

推论3。定理 *2* 的假设成立。

1. 以下更强范数下的误差估计成立

$$\begin{aligned}\|\eta^{(\varepsilon)} - \eta_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} + \|\hat{u} - u_\varepsilon\|_{L^{\infty,2}(Q)} + \|\hat{\theta} - \theta_\varepsilon\|_{L^{\infty,2}(Q)} &\leqslant K(N)\varepsilon^{1/2}, \\ \|I_t(\hat{\sigma} - \sigma_\varepsilon)\|_{C(\bar{Q})} &\leqslant K(N)\varepsilon^{2/3}. \end{aligned} \tag{119}$$

2. 此外，以下内部误差估计成立

$$\begin{aligned}\|\zeta(\hat{u} - u_\varepsilon)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} + \|\zeta^2(\hat{\theta} - \theta_\varepsilon)\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} &\leqslant K(N)\varepsilon^{1/2}, \\ \|\zeta(\hat{u} - u_\varepsilon)\|_{C(\bar{Q})} + \|\zeta^2(\hat{\theta} - \theta_\varepsilon)\|_{C(\bar{Q})} &\leqslant K(N)\varepsilon^{1/4}; \end{aligned} \tag{120}$$

请注意，此处 $\zeta \in H^1(0,\ T)$，$\|D_t\zeta\|_{L^2(0,\ T)} \leqslant N$和 $\zeta(0) = 0$。

3. 若 $u^0 = u^0(x)$ 和 $\theta^0 = \theta^0(x)$ 与 ξ 无关，则以下误差估计成立

$$\begin{aligned}\|\hat{u} - u_\varepsilon\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} + \|\hat{\theta} - \theta_\varepsilon\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} &\leqslant K(N)\varepsilon^{1/2}, \\ \|\hat{u} - u_\varepsilon\|_{C(\bar{Q})} + \|\hat{\theta} - \theta_\varepsilon\|_{C(\bar{Q})} &\leqslant K(N)\varepsilon^{1/4}. \end{aligned}$$

证明。 这些误差估计由主要误差估计 (112) 以及推论 1 和 2 中相应的界推出。在第 1 项和第 2 项中，我们考虑等式 $(\eta^{(\varepsilon)} - \eta_\varepsilon)|_{t=0} = 0$、条件 $\|(\bar{g},\ \bar{f})\|_{L^2(Q)\cap L^{\infty,\ 1}(Q)} \leqslant N$以及 (105) 对 $\mathbf{u}_b$和 $\boldsymbol{\pi}_b$的约束，同时考虑 $\hat{}u$ 和 $\hat{}\theta$满足的界 (107)。在第 3 项中，u^0 和 θ^0 分别与 $\langle u^0\rangle$ 和 $\hat{}\theta^0$一致，因此它们具有相同的性质 (104) 和 (106)。 □

我们强调，式 (119) 中关于 $\eta^{(\varepsilon)} - \eta_\varepsilon$ 的 $L^\infty(Q)$–范数界，以及 $C(\bar{Q})$–范数下的内部误差界 (120)，对于不连续的 初始数据同样成立。在条目 3 中，η^0 仍依赖于 ξ，并且可以是不连续的。

致谢。 本研究得到HSE大学基础研究计划（自然科学数学方法实验室）的支持。

参考文献

[1] A. A. Amosov, 《一类快速振荡函数的弱收敛》, 《数学札记》, 62（1）（1997）, 122–126。[2] A. A. Amosov、I. A. Goshev, 《支配Ishlinskii黏弹塑性材料纵向振动的方程的双尺度均匀化的论证》, 《计算数学与数学物理》, 47（6）（2007）, 943–961。[3] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《黏性导热气体一维运动方程的整体广义解》, 《苏联数学文献通报》, 38（1）（1989）, 1–5。[4] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《非均匀黏性导热气体一维运动方程组的“大范围”可解性》, 《数学札记》, 52（2）（1992）, 753–763。[5] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《一类复合型方程拟线性方程组的广义解的唯一性与稳定性》, 《数学札记》, 55（6）（1994）, 555–567。[6] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《具有快速振荡数据的黏性正压介质一维运动的准平均方程》, 《计算数学与数学物理》, 36（2）（1996）, 203–220。[7] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《具有快速振荡数据的黏性正压介质运动方程准平均化的一个估计》, 《计算数学与数学物理》, 36（10）（1996）, 1415–1428。[8] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《关于来自 $V_2(Q)$ 的一维线性抛物型问题的广义解性质的注记》, 《莫斯科电力工程学院学报》, 3（6）（1996）, 15–29（俄文）。[9] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《具有非光滑数据的黏性导热气体一维运动方程的半离散求解方法》, 《俄罗斯数学》, 41（4）（1997）, 3–19。[10] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《具有快速振荡数据的黏性导热气体一维运动方程组的准平均化》, 《计算数学与数学物理》, 38（7）（1998）, 1152–1167。[11] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《具有非光滑数据的黏性导热气体一维运动方程的半离散求解方法：解的正则性》, 《俄罗斯数学》, 43（5）（1999）, 10–23。[12] A. A. Amosov、A. A. Zlotnik, 《具有快速振荡非光滑数据的一维非线性热黏弹性双尺度均匀化方程》, 《巴黎科学院院报，II辑b：力学》, 329（2001）, 169–174。 I. V. Andrianov、J. Awrejcewicz、V. Danishevsky, 《微结构固体中的线性与非线性波：均匀化与渐近方法》, CRC出版社，博卡拉顿，2021。[13] S. N. Antontsev、A. V. Kazhikhov、V. N. Monakhov, 《非均匀流体力学中的边值问题》, North-Holland出版社，阿姆斯特丹，1990。[14] H. Attouch、G. Buttazzo、G. Michaille, 《Sobolev空间和BV空间中的变分分析：偏微分方程与优化中的应用》, SIAM，费城，2006。[15] N. S. Bakhvalov、M. E. Eglit, 《无法由平均特征描述的周期介质中的过程》, 《苏联物理学文献通报》, 28（1983）, 125–127。[16] N. S. Bakhvalov、A. A. Zlotnik, 《微分方程的系数稳定性与随机系数方程的平均化》, 《苏联数学文献通报》, 19（5）（1978）, 1171–1175。[17] X. Blanc、C. Le Bris, 《多尺度问题的均匀化理论》, Springer出版社，Cham，2023。[18] D. Bresch、C. Burtea、F. Lagoutière, 《具有不同压力定律的可压缩双流体方程组的数学论证：半离散方法与数值示例》, 《计算物理学杂志》, 490（2023）, 文章112259。

[20] D. Bresch、G. Narbona-Reina、A. Burgisser 和 M. Collombet，从单相系统到两相平均系统：可压缩流动中的数学主题，《应用数学研究》，153（3）（2024），论文 e12739。[21] D. Bresch、C. Burtea、P. Gonin–Joubert 和 F. Lagouti`ère，无导热理想气体两相平均系统的论证，arXiv:2407.16720v3（2025），1–45。[22] D. Cioranescu 和 P. Donato，《均匀化导论》，牛津数学与应用系列讲座第17卷，牛津大学出版社，牛津，1999。[23] W. E，一维可压缩流体方程解中的振荡传播，《部分微分方程通讯》，17（3&4）（1992），347–370。[24] M. E. Eglit，通过均匀化得到的微观非均质介质的全新模型，《国际工程科学杂志》，83（2014），107–116。[25] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy，《测度论与函数的精细性质》，CRC出版社，博卡拉顿，2015。[26] E. Feireisl，《黏性可压缩流体的动力学》，牛津大学出版社，牛津，2004。[27] E. Feireisl 和 A. Novotn´y，《黏性流体热力学中的奇异极限》，Birkh¨auser，巴塞尔，2009。[28] R. P. Gilbert、A. Vasilic、S. Klinge、A. Panchenko 和 K. Hackl，《均匀化理论在矿化组织研究中的应用》，Chapman and Hall/CRC，纽约，2020。[29] M. Hillairet、H. Mathis 和 N. Seguin，可压缩含气泡流分析。第一部分：微观模型的构造，《ESAIM：数学建模与数值分析》，57（5）（2023），2835–2863。[30] M. Hillairet、H. Mathis 和 N. Seguin，可压缩含气泡流分析。第二部分：宏观模型的推导，《ESAIM：数学建模与数值分析》，57（5）（2023）（2023），2865–2906。[31] D. Hoff，非等熵气体动力学不连续数据柯西问题的整体适定性，《微分方程杂志》，95（1992），33–74。[32] D. Hoff，一维可压缩流动纳维–斯托克斯方程不连续解对初始数据的连续依赖性，《SIAM数学分析杂志》，27（1996），1193–1211。[33] S. Jiang 和 A. Zlotnik，具有勒贝格初值的一维黏性导热气体方程柯西问题的整体适定性，《爱丁堡皇家学会学报》，134（5）（2004），939–960。[34] N. N. Kuznetsov，一阶拟线性方程弱解若干近似计算方法的精度，《计算数学与数学物理》，16（6）（1976），105–119。[35] O. A. Ladyzhenskaya、V. A. Solonnikov 和 N. N. Uralt'seva，《抛物型线性与拟线性方程》，美国数学学会，普罗维登斯，1968。[36]S. M. Nikolskii，《多变量函数逼近与嵌入定理》，施普林格，柏林，1975。[37] S. A. Sazhenkov，超越周期框架的热黏弹性材料拟均匀化 Bakhvalov–Eglit 模型，《数学分析与应用杂志》，418（1）（2014），444–468。[38] D. Serre，关于黏性、可压缩、导热流体的一维方程，C.R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math.，30（1986），703–706。[39] D. Serre，黏性可压缩流体密度的大幅变化，《物理学D》，48（1991），113–128。[40] L. Tartar，《均匀化一般理论》，施普林格，海德堡，2010。[41] V. Zhikov、S. Kozlov 和 O. Oleinik，《微分算子与积分泛函的均匀化》，施普林格，柏林，1994。[42] W. P. Ziemer，《弱可微函数：索伯列夫空间与有界变差函数》，施普林格，纽约，1989。[43] A. Zlotnik，一维黏性气体方程初边值问题的适定性，载于《黏性流体力学中的数学分析手册》，Y. Giga 和 A. Novotny（编），施普林格，查姆，2017，1–73。[44] A. A. Zlotnik 和 A. A. Amosov，关于一维黏性导热气体运动方程广义解的稳定性，《西伯利亚数学杂志》，38（4）（1997），663–684。[45] A. A. Zlotnik 和 A. A. Amosov，一维黏性导热气体运动方程广义解的稳定性，《数学札记》，63（6）（1998），736–746。